

第62回

トポロジーシンポジウム

講演集

2015年(平成27年)8月6日~8月9日

於 名古屋工業大学

平成27年度科学研究費補助金

基盤研究(S)	課題番号	15H05739
基盤研究(A)	課題番号	26247006
基盤研究(B)	課題番号	24340012

第六二回 トポロジースンポジウム 講演集

二〇一五年八月

於 名古屋工業大学

はしがき

この講演集は 2015 年 (平成 27 年) 8 月 6 日から 8 月 9 日までの間、名古屋工業大学において開催される第 6 2 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

平成 27 年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究 (S)
研究代表者 藤原 耕二
研究課題名 幾何学的群論の深化と展開
課題番号 15H05739

研究種目 基盤研究 (A)
研究代表者 小野 薫
研究課題名 Floer 理論の深化と symplectic 構造の研究
課題番号 26247006

研究種目 基盤研究 (B)
研究代表者 大槻 知忠
研究課題名 結び目と 3 次元多様体のトポロジー
課題番号 24340012

世話人： 大槻 知忠 (京都大学)
平澤 美可三 (名古屋工業大学)
三松 佳彦 (中央大学)

共催： 日本数学会トポロジー分科会
国立大学法人名古屋工業大学

第62回 トポロジーシンポジウム プログラム

日時 2015年 8月6日(木) 午後 ~ 8月9日(日) 午前

場所 〒466-8555 愛知県 名古屋市 昭和区 御器所町
名古屋工業大学 51号館 1階 5111

8月6日(木)

14:00–15:00

小島 定吉 (東京工業大学大学院情報理工学研究科)

Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs 1

15:30–16:30

久我 健一 (千葉大学大学院理学研究科)

証明支援系を用いたトポロジーの形式化について 11

8月7日(金)

9:30–10:30

安部 哲哉 (大阪市立大学数学研究所)

The slice-ribbon conjecture and related topics 19

11:00–12:00

河村 建吾 (大阪市立大学大学院理学研究科、D3)

4次元空間内の自己交差を持つ曲面結び目について 29

13:30–14:30

David Martínez Torres (Pontificia Universidade Católica, Rio de Janeiro)

Symplectic topology and b-symplectic structures 39

15:00–16:00

入江 慶 (京都大学数理解析研究所)

Chain level operations in string topology via de Rham chains 51

16:30–17:30

深谷 賢治 (Simons Center for Geometry and Physics, State University of New York, Stony Brook)

境界つき3次元多様体のフレアーホモロジー 61

8月8日(土)

9:30–10:30

中川 征樹 (岡山大学大学院教育学研究科)

普遍 Schur 関数と旗束上の Gysin の諸公式について 65

11:00–12:00

蓮井 翔 (京都大学大学院理学研究科、D3)

On the topological classification of quasitoric manifolds 81

13:30–14:30

大場 貴裕 (東京工業大学大学院理工学研究科、D1 / 日本学術振興会特別研究員 DC1)

コンパクト Stein 曲面と写像類群 89

15:00–16:00

戸田 幸伸 (東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構)

Donaldson–Thomas 不変量 99

16:30–17:30 企画講演

森田 茂之 (東京大学 名誉教授)

微分同相群とトポロジー ~ 特性類と不変量を中心として ~ 111

8月9日(日)

9:30–10:30

山内 貴光 (愛媛大学大学院理工学研究科)

漸近次元とその無限次元性 127

11:00–12:00

佐治 健太郎 (神戸大学大学院理学研究科)

可微分写像の特異点の判定法とその応用 137

Normalized Entropy versus Volume for Pseudo-Anosovs

小島 定吉

東京工業大学大学院情報理工学研究科

1 プロローグ

種数が g , パンクチャの個数が m の曲面を $\Sigma_{g,m} = \Sigma$ で表す. $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - m < 0$ のとき, Σ は双曲構造を許容する. このとき, Nielsen-Thurston により Σ の写像類 φ は周期的, 擬 Anosov, およびそれらの和に分解される可約の3種類に分類される ([27], あるいはたとえば [10] を参照されたい).

写像類 φ の複雑度を測る一つの指標としてエントロピー $\text{ent } \varphi$ がある, ただし $\text{ent } \varphi$ は, φ という類に属する写像の位相的エントロピーの下限として定義する. その値は, 周期的な場合はゼロ, 擬 Anosov の場合は拡大指数 λ (dilatation) の対数 $\log \lambda$, 可約の場合は擬 Anosov 成分の拡大指数の最大値であり, φ の Teichmüller 移動距離

$$(\text{ent } \varphi) \|\varphi\|_{\mathcal{T}} = \inf_{X \in \mathcal{T}} d_{\mathcal{T}}(X, \varphi X)$$

と一致することが分かっている [4, 15], ここで \mathcal{T} は Σ の Teichmüller 空間, $d_{\mathcal{T}}$ は \mathcal{T} 上の Teichmüller 距離である.

一方, 写像類 φ が擬 Anosov であるとき, 代表元 $h \in \varphi$ を選び写像トーラスの同相類を

$$N_{\varphi} = \Sigma \times [0, 1] / (h(x), 0) \sim (x, 1)$$

で表すと, N_{φ} は双曲構造を持つことが知られている [28]. Mostow 剛体性により双曲構造は位相不変なので, たとえばその体積 $\text{vol } N_{\varphi}$ は写像類の複雑さを測るもう一つの指標となる. 本講演のテーマは両不変量の値の比較である.

曲面のトポロジーを指定したとき, エントロピーの分布は離散的で ∞ に発散することが知られている (たとえば [13] を参照). また写像トーラスの体積は, 閉包をとれば ω^{ω} の順序型で分布することが知られている [26]. 高沢は学位論文 [25] で種数 2 の場合に横軸に体積, 縦軸にエントロピーをとり, 写像類群の Lickolish 生成元で長さが 10(?) 以下で表される写像類についてその位置をプロットした (図 1).

高沢の観察を元に, 金, 高沢と講演者は [14] において, N_{φ} の双曲体積 $\text{vol } N_{\varphi}$ と φ のエントロピー $\text{ent } \varphi$ を比較し, とくに,

$$\text{ent } \varphi \geq C(g, m) \text{vol } N_{\varphi} \tag{1.1}$$

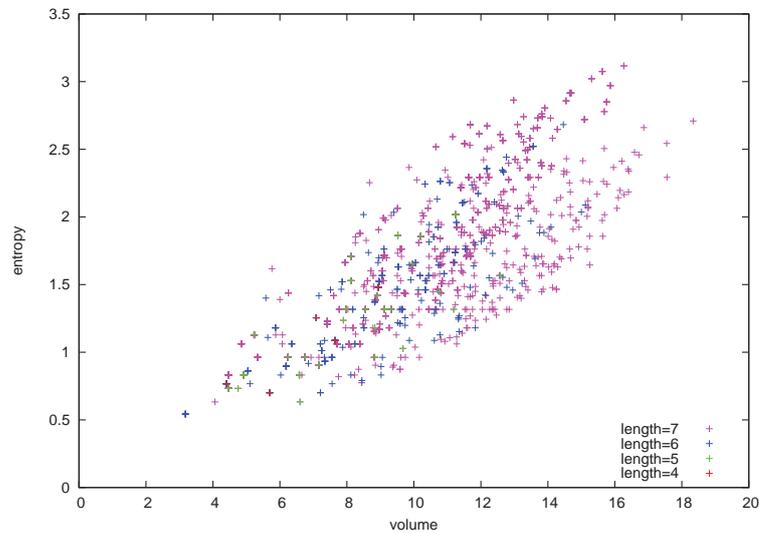


図 1: エントロピー vs 体積

をみたく Σ のトポロジーのみによる定数 $C(g, m) > 0$ が存在することを証明した .

この結果は, 計算が困難な定数に関わる Brock [6] の結果によっているため, 主張は定数 $C(g, m)$ の存在のみに留まる . 一方, Penner は [23] で Σ のトポロジーが複雑になると擬 Anosov のエントロピーは限りなくゼロの近づく例を構成しており, 3 次元双曲多様体の体積が下から正の定数で抑えられていることを考慮すると,

$$g + m \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad C(g, m) \rightarrow \infty$$

となる .

その後, 高沢の実験はブレイドに適用することにより計算の効率が向上し, Σ のトポロジーの違いが如何に評価に反映するかもしたいに見通しがついてきた . これらの計算機実験によると, エントロピーにたとえば曲面の面積 ($= 2\pi|\chi(\Sigma)|$) をかけて正規化すると, 正規化されたエントロピーと写像トーラスの体積の比は, 曲面のトポロジーによらない定数で下から抑えられることが予想された . 図 2 は, ブレイド指数が 6 以下の擬 Anosov ブレイドの正規化されたエントロピーと写像トーラスの体積を同じスケールでプロットした図だが, 予想をサポートするのに十分な証拠となる .

2 評価の改良と系

本講演では, $C(g, m)$ の一つの明示的な値を求め予想を確認した McShane 氏との共同研究 [16] を紹介する . まず

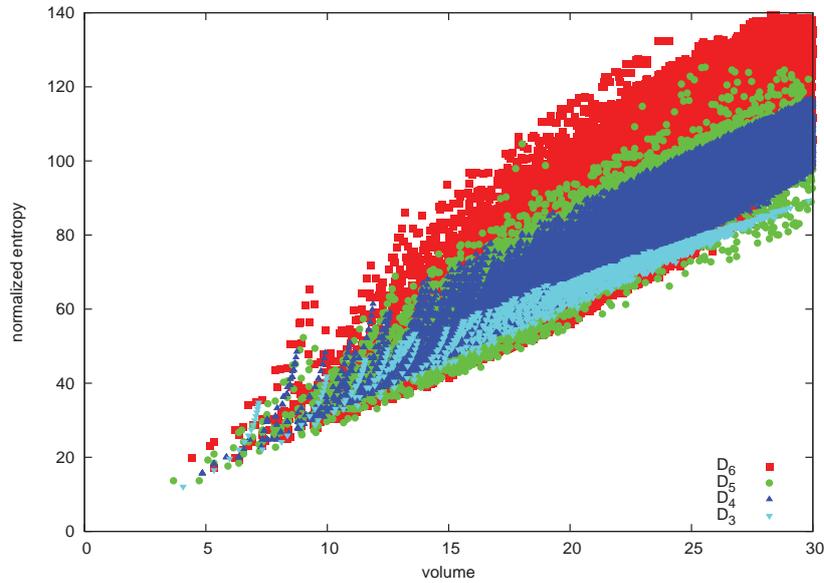


図 2: 正規化されたエントロピー vs 体積

定理 1. 任意の擬 Anosov φ に対し,

$$\text{ent } \varphi \geq \frac{1}{3\pi|\chi(\Sigma)|} \text{vol } N_\varphi, \quad (2.1)$$

あるいは同値であるが,

$$2\pi|\chi(\Sigma)| \text{ent } \varphi \geq \frac{2}{3} \text{vol } N_\varphi \quad (2.2)$$

が成り立つ.

(2.2) の左辺に現れる量は正規化されたエントロピーであり, 両辺を $\text{vol } N_\varphi$ で割れば, 正規化されたエントロピーと写像トーラスの体積の比は曲面のトポロジーによらない正定数で下から抑えられることを主張する.

注意 2. 定理 1 における $C(g, m)$ の明示的値は, 精密な値に対し著しく異なるわけではない. たとえば, 1 点穴あきトーラスに対して不等式 (2.1) は

$$\frac{\text{ent } \varphi}{\text{vol } N_\varphi} \geq \frac{1}{3\pi} = 0.10610\dots$$

となるが, この場合 [14] の Conjecture 6.10 に記した予想では

$$\frac{\text{ent } \varphi}{\text{vol } N_\varphi} \geq \frac{\log \frac{3+\sqrt{5}}{2}}{2v_3} = 0.47412\dots,$$

ただし $v_3 = 1.01494\dots$ は双曲理想正 4 面体の体積であり, 予想値は 8 の字結び目の補空間で実現される.

最初の系として，少なくともパンクチャーが一つある場合に，Penner [23] による評価

$$\text{ent } \varphi \geq \frac{\log 2}{4(3g - 3 + m)}$$

が改良できる．

系 3. φ を $\Sigma_{g,m}$ の擬 Anosov とし， $m \geq 1$ とする．このとき

$$\text{ent } \varphi \geq \frac{2v_3}{3\pi|\chi(\Sigma)|} = \frac{2v_3}{3\pi(2g - 2 + m)}$$

が成り立つ．

証明. Cao と Meryerhoff [9] により，向き付け可能な非コンパクト 3 次元双曲多様体の最小体積は 8 の字結び目の補空間で実現され，その値は $2v_3$ であることが分かっている．したがって (2.1) の $\text{vol } N_\varphi$ を $2v_3$ に置き換えればよい． \square

注意 4. 多様体が円周上の曲面束の構造を持てば 1 次元 Betti 数は正である．さらに 1 次元 Betti 数が正の 3 次元双曲多様体の体積の最小値は $2v_3$ と予想されている．この予想が正しければ，系 3 の “ $m \geq 1$ ” という仮定は落とせる．

二つ目の系として，小さい正規化されたエントロピーをもつ擬 Anosov に対する Farb, Leininger と Margalit の有限性定理をやや弱めた命題に，別証明を与えることができる．

系 5 (Farb-Leininger-Margalit [11], Agol [1]). 任意の正定数 $C > 0$ に対し，有限個のカスプ付き 3 次元双曲多様体 M_k が存在して以下をみたす：任意の $2\pi|\chi(\Sigma)| \text{ent } \varphi < C$ をみたす Σ 上の擬 Anosov φ は，ある M_k の Dehn 手術によるえられる多様体の曲面束のモノドゥロミーとしてえられる．

注意 6. Farb, Leininger と Margalit は，さらに M_k は曲面束構造をもち，Dehn 手術はファイバーのパンクチャーに沿っていることも主張している．

証明. $2\pi|\chi(\Sigma)| \text{ent } \varphi < C$ とすると，定理 1 により $\text{vol } N_\varphi$ は上から抑えられる．このとき N_φ の細い部分は Margulis の補題によりカスプか短い測地線のチューブの互いに交わらない和になる．したがって太い部分の境界は有限個のトーラスの和になり， N_φ はこれらを Dehn 手術することによりえられる． N_φ の体積は太い部分の体積を上から抑えている．Jorgensen と Thurston [26] は，太い部分は半径が一定以上のボールで被覆できることを使って位相型が有限であることを示したが，後はこれを使えばよい． \square

定理 1 の証明中のエントロピー，あるいは Teichmüller 移動距離を Weil-Petersson 移動距離

$$\|\varphi\|_{\text{WP}} = \inf_{X \in \mathcal{T}} d_{\text{WP}}(X, \varphi X)$$

に置き換えることにより，Brock [6] の Theorem 1.1 の定数を明示的にすることもできる．ここで d_{WP} は Teichmüller 空間 \mathcal{T} 上の Weil-Petersson 距離である．

系 7. Σ がコンパクトのとき, 任意の擬 Anosov φ に対し,

$$\|\varphi\|_{\text{WP}} \geq \frac{2}{3\sqrt{2\pi|\chi(\Sigma)|}} \text{vol } N_\varphi,$$

あるいは同値であるが,

$$\sqrt{2\pi|\chi(\Sigma)|} \|\varphi\|_{\text{WP}} \geq \frac{2}{3} \text{vol } N_\varphi$$

が成り立つ, ただし $\|\cdot\|_{\text{WP}}$ は φ の Weil-Petersson 移動距離である.

注意 8. 擬 Anosov の族 φ_k で $\|\varphi_k\|_{\text{WP}}$ は有界だが $\text{ent } \varphi_k = \|\varphi_k\|_{\text{T}}$ は発散し, その写像トーラスはカスプをもつ双曲多様体に収束する例がある. したがって $\text{vol } N_\varphi$ の評価という視点からは Weil-Petersson 移動距離の方が優れている. あとで記すが, Dumas の計算によれば, 実は一様移動距離 $\|\varphi\|_\infty$ がさらに優れている.

定理 1 の証明は二つのイングredientからなる. ひとつは McMullen [18] および Brock-Bromberg [7] による Klein 群の擬等角変形の幾何学的非柔軟性に基ずく, N_φ の無限巡回被覆に収束する擬 Fuchs 群の列の凸芯の体積の漸近評価である. もう一つは, Krasnov と Schlenker による擬 Fuchs 多様体の繰り込み体積と凸芯の双曲体積の比較に関する最近の結果 [17, 21] である. この二つを前提に話を大体まとめて約 2 年前にいろいろな所で結果を話し始めたのだが, 我々が既知と信じていた命題について世間での理解とギャップがあったようで, 細部を埋める作業が今年初頭まで続いた. 以下の二つの節で, 我々の見落としていたことを説明したい.

3 凸芯の体積

ここでの役者は Fuchs 群の擬等角変形として定義される擬 Fuchs 群である. 擬 Fuchs 群, あるいは擬 Fuchs 多様体は, Bers [3] により無限遠にある二つの Riemann 面の等角構造で径数付けされることが知られている. φ を擬 Anosov, $X \in \mathcal{T}$ を (じつは何でも良いのだが) φ が不変にする \mathcal{T} 上の Teichmüller 測地線上の Riemann 面, $C(\varphi^{-n}X, \varphi^n X)$ を Bers の径数付けで $(\varphi^{-n}X, \varphi^n X)$ に住む擬 Fuchs 多様体 $Q(\varphi^{-n}X, \varphi^n X)$ の凸芯とする. このとき Brock は [6] で,

... geometric inflexibility should yield a proof that the limit as $n \rightarrow \infty$

$$\text{vol } C(\varphi^{-n}X, \varphi^n X) = 2n \text{vol } N_\varphi + O(1) \tag{3.1}$$

と記している. さらに Brock と Bromberg は非コンパクトな Riemann 面まで含めて非柔軟性を [7] で証明している. 私には専門家の間ではこの漸近評価は既知のことと思っていたのだが, McShane 氏との話し合いで証明を付けるべきということになった. さらに非コンパクトの場合は Brock-Bromberg の非柔軟性が技術的にたいへん複雑であり, 我々

はやや退き Riemann 面がコンパクトであると仮定し, Minsky による凸芯の双リプシッツモデル [19] と Rafi による Teichmüller 測地線上に分布する曲面上の短い測地線に関する結果 [24] を使って証明を与えた. 詳細は [16] の appendix を参照されたい. また Σ が非コンパクトな場合の定理 1 の証明は, コンパクトな場合に帰着する巧妙なトリックを使ったことに言及しておく.

なお, ほぼ同時期に本家である Brock と Bromberg も同じ漸近評価の証明を得て [8] に発表している. さらに, じつは定理 1 の証明には漸近評価 (3.1) の左辺の $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ が右辺を上から評価することで十分で, 我々の証明も最初はその片側だけだったのだが, この一方向の評価については McMullen が我々の議論よりもさらにシンプルな議論を与えていることを付記しておく.

4 繰り込み体積

もう一つのイングredientは Krasonov-Schlenker による擬 Fuchs 多様体の繰り込み体積 Rvol である. 定義は [17, 21, 16] に譲るとして,

命題 9 (Schlenker [21]). Σ がコンパクトのとき, Σ のトポロジーのみによる定数 $D = D(\Sigma)$ が存在して, 任意の擬 Fuchs 群 $Q(X, Y)$ に対して

$$\text{vol } C(X, Y) \leq \text{Rvol } Q(X, Y) + D$$

が成り立つ.

という命題を念頭に, 繰り込み体積を上から評価する過程で我々が混乱した状況を説明したい.

Schlenker は [21] で, $X, Y \in \mathcal{T}$ に対応する擬 Fuchs 多様体 $Q(X, Y)$ の繰り込み体積を, X, Y 間の Weil-Petersson 距離で上から評価した. その方法を, しばらく \mathcal{T} 上の距離を指定せずに辿ることにする. 主役は正則 2 次微分である. X と Y を結ぶ \mathcal{T} 上の単位速度のパスを Y_t とし, 擬 Fuchs 群の 1 径数族 $\{Q(X, Y_t)\}_{0 \leq t \leq d}$ を考える. このとき $q_t \in Q(X)$ を $Q(X, Y_t)$ により決まる Y_t 上の複素射影構造を定める正則 2 次微分, および μ_t を dY_t/dt が表す Beltrami 微分とすると, Schlenker により繰り込み体積の時間微分は, ある定数 C_0 を用いて

$$\frac{d}{dt} \text{Rvol } Q(X, Y_t) \leq C_0 \left| \int_{Y_t} q_t \mu_t \right| \quad (4.1)$$

と評価された. 実は Schlenker は [21] で明示的に $C_0 = 1/4$ と主張しているが, それは誤りで, 後日談の説明のためここではあえて C_0 と記しておく.

彼は評価 (4.1) から Nehari [20] によるノルムの評価 $\|q\|_\infty \leq 6$ を使って繰り込み体積の Weil-Petersson 距離による上からの評価を得たが, この ≤ 6 という評価は Riemann 面

の計量が定曲率 -4 という前提で計算されていることを見落としていたようである。我々は McMullen からこれを定曲率 -1 に置き換えて計算すれば評価が 4 倍改良できるというコメントをもらい、とすると注意 2 での値の差が

$$0.47412\dots \text{ 対 } 0.4244\dots (= 0.10610\dots \times 4)$$

と大きく縮まるので、喜び勇んで準備中だった論文中の評価を書き直し、昨年 11 月に [16] の version 1 を arXiv にアップロードした。

ところがその後、McMullen からより詳しい解析の結果が届き唖然とすることになる。詳細を説明するため、Teichmüller 空間のノルムについて復習する。Riemann 面 X を一つ固定し、 X 上の正則 2 次微分全体の空間を $Q(X)$ で表す。 $q \in Q(X)$ の L^p ノルムは

$$\begin{aligned} \|q\|_\infty &= \sup_{x \in X} \rho^{-2} |q(x)| \quad \text{および,} \\ \|q\|_p &= \left(\int_X \rho^{2-2p} |q|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

で定義される、ただし ρ^2 は定曲率 -1 の双曲面積要素である。このとき

$$\|q\|_p \leq \|q\|_\infty (2\pi|\chi(\Sigma)|)^{1/p}$$

がなりたつ。 $p=1$ のときは Teichmüller 距離、 $p=2$ のときは Weil-Petersson 距離に対応する。そこで、擬 Anosov φ を使って構成する擬 Fuchs 多様体 $Q(\varphi^{-n}X, \varphi^n X)$ に対し、その繰り込み体積を (4.1) をパスに沿って積分し $|q|$ の貢献を L^p ノルムで評価し、命題 9 をつかって繰り込み体積を凸芯の体積に置き換え、さらに $2n$ で割って $n \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\text{vol } N_\varphi \leq \frac{3}{2} C_0 (2\pi|\chi(\Sigma)|)^{1/p} \|\varphi\|_p$$

が得られる。ここで $\|\varphi\|_p$ は φ の L^p ノルムに関する移動距離である。

一方、8 の次結び目の補空間のモノドゥロミー φ について、Dumas は計算機実験で

$$\|\varphi\|_1 \approx 0.96242, \quad \|\varphi\|_2 \leq 1.86068, \quad \|\varphi\|_\infty \leq 2.80859$$

であることを確かめた。そこでもし Schlenker が主張する $C_0 = 1/4$ が正しいとすると、

$$2.092988 \approx \text{vol } N_\varphi \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \|\varphi\|_\infty \leq 1.05322$$

となり、困った事情が露わになる。つまり、どこかに間違いがあるということである。

この間違い探しに 2 ヶ月かかったが、正しい C_0 の値は 1 である。誤差は、繰り込み体積の変分を正則 2 次微分と Beltrami 微分のカップリングに置き換える過程で、計量（第一基本形式）の微分と第二基本形式のトレース自由部分が定める対称 2 テンソルのカップリングとのずれで生じる 2 倍の差、および第一基本形式の微分を Beltrami 微分に対応さ

せる際に Riemann 面の計量が定曲率 -1 に合わせる時点で生じる 2 倍の差に起因する。要するに, Schlenker の [21] における凸芯の体積と Weil-Petersson 距離との間の不等式は, この 2 を 2 回かけたことが Nehari の評価の使い方のまずさを埋めていた。我々は [16] の version 1 の評価の誤りを訂正し, version 2 を今年の 2 月末に arXiv にアップロードした。興味ある方は version 1 ではなく version 2 を参照していただければ幸いである。

5 エピローグ

いろいろ紆余曲折があったが, ここで, 我々が研究成果を公表し始めた約 2 年前以降に他の研究者によりさらなる進展がいくつかあったことを付記しておきたい。Agol-Leininger-Margalit [2] は, 定理 1 を使ってエントロピーの下からの評価をえているが, 使われた評価式は昨年 11 月の騒動前の我々の準備中の論文に論拠しており, [2] に記された結果は幸いなことにそのままで正しい。凸芯の体積に関して Brock-Bromberg [8] が発表されたことはすでに言及したが, 彼らはさらなる応用として, 曲面のモジュライ空間上の Weil-Petersson 測地線の長さの最小値の下からの評価など, これまで数値化できなかった量の明示的な評価を見出している。縋り込み体積の擬 Fuchs 多様体からの凸コンパクト多様体への一般化は Bridgman-Canary [5] で扱われ, その凸芯の体積の上下からの仔細な評価がえられている。また, ランクが 1 のカスプを持つ幾何学的有限な無限体積双曲多様体への縋り込み体積の拡張については, Guillarmou-Moroianu-Rochon [12] と Pallete [22] が発表されており, コンパクトな場合と大きな違いはないことが確認されている。

最後に, N_φ の体積の評価という観点からは一様ノルム $\|\varphi\|_\infty$ が一番優れていることが明らかになったが, このノルムが定める Teichmüller 空間の Finsler 幾何の研究は皆無であり, 今後のその方面の発展を期待し本稿を終える。

参考文献

- [1] I. Agol, Ideal triangulations of pseudo-Anosov mapping tori, Contemporary Math., 560 (2011), 1-17.
- [2] I. Agol, C. Leininger and D. Margalit, Pseudo-Anosov stretch factors and homology of mapping tori, arXiv:1409.6983.
- [3] L. Bers, Simultaneous uniformization, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 94-97.
- [4] L. Bers, An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston, Acta. Math., 141 (1978), 73-98.
- [5] M. Bridgeman and R. Canary, Renormalized volume and the volume of the convex core, arXiv:1502:05018

- [6] J. Brock, Weil-Petersson translation distance and volumes of mapping tori, *Communications in Analysis and Geometry*, 11 (2003), 987–999.
- [7] J. Brock and K. Bromberg, Geometric inflexibility and 3-manifolds that fiber over the circle, *J. Topol.*, 4 (2011), 1-38.
- [8] J. Brock and K. Bromberg, Inflexibility, Weil-Petersson distance, and volume of fibered 3-manifolds, arXiv:1412.4635.
- [9] C. Cao and R. Meyerhoff, The orientable cusped hyperbolic 3-manifolds of minimal volume, *Invent. Math.*, 146 (2001), 451–478.
- [10] A. Casson and A. Bleiler, *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, Cambridge University Press, 1988.
- [11] B. Farb, C. Leininger and D. Margalit, Small dilatation pseudo-Anosovs and 3-manifolds, *Adv. Math.*, 228 (2011), 1466-1502.
- [12] C. Guillarmou, S. Moroiianu and F. Rochon, Renormalized volume on the Teichmüller space of punctured surfaces, arXiv: 1504.04721.
- [13] N. V. Ivanov, Coefficients of expansion of pseudo-Anosov homeomorphisms, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 167 (1988), Issied. Topol. 6, 111-116, 191, translation in *Journal of Soviet Mathematics*, 52 (1990), 2819-2822.
- [14] E. Kin, S. Kojima and M. Takasawa, Entropy versus volume for pseudo-Anosovs, *Experimental Math.*, 18 (2009), 397-407.
- [15] S. Kojima, Entropy, Weil-Petersson translation distance and Gromov norm for surface automorphism, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140 (2012), 3993-4002.
- [16] S. Kojima and G. McShane, Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs, arXiv:1411.6350
- [17] K. Krasnov and J-M. Schlenker, On the renormalized volume of hyperbolic 3-manifolds, *Comm. Math. Phys.* 279 (2008), 637-668.
- [18] C. McMullen, Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle, *Ann. Math. Study* 142 (1996).
- [19] Y. Minsky, Bounded geometry for Kleinian groups, *Invent. Math.*, 146 (2001), 143-192,

- [20] Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 545-551.
- [21] J-M, Schlenker, The renormalized volume and the volume of the convex core of quasifuchsian manifolds, Math. Res. Lett., 20 (2013), 773-786.
- [22] F. Pallete, Local convexity of renormalized volume for rank-1 cusped manifolds, arXiv:1505.00479.
- [23] R. Penner, Bounds on least dilatations, Proc. Amer. Math. Soc., 113 (1991), 443-450.
- [24] K. Rafi, A characterization of short curves of a Teichmeuller geodesic, Geometry & Topology Volume 9 (2005) 179-202
- [25] M. Takasawa, Computing invariants of mapping class of surfaces, Ph.D thesis, Tokyo Institute of Technology (2000).
- [26] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Notes, Princeton University (1979).
- [27] W. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, Bulletin of Amer. Math. Society., 19 (1988), 417-431.
- [28] W. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, preprint.

証明支援系を用いたトポロジーの形式化について

久我 健一 (千葉大学)*

近年、証明支援系を用いた「形式化」による定理の検証が相次いで報告されている。形式化によって、数学の定理は完全に検証されると同時に、その論理的内容が電子データになると考えられる。現時点では形式化に要する労力はかなり大きく、形式化の完了した定理は多くない。されにシステム間の互換性の問題など、普及への障害は大きい。しかしこの状況は徐々に改善され、トポロジーも含めて、数学の様々な分野で形式化による電子データ化が進み、いずれ、これを基盤とするコンピュータの積極的活用が行われることは間違いないであろう。この発表では、主に幾何的トポロジーの例を用いて、始まったばかりの形式化の一端を見ていきたい。

1. 形式化と証明支援系

1.1. 形式化

「形式化」とは、定理の証明の各ステップで、どの推論規則や公理が使われたかを例外なく全て記録することである。これはコンピューターの登場以前からある考え方で、ヒルベルトが提唱したことで著名な公理論・形式主義が理想とする証明を行うことに他ならない。初期の形式化の試みとして、ラッセル・ホワイトヘッドの「数学の原理」(1910~1913)が著名である。ここでは集合論、基数、順序数、実数が扱われている¹。このような、紙とペンによる「形式化」は多大の労力を必要とし、かつ正しく形式化されたかをチェックすることも難しい。従って、「形式化」が現実的に実行可能になるためには、一般的にはコンピューターの出現を待たなければならなかったと言ってよいと思われる。

コンピュータが形式化を行うようになれば、それは公理論、形式主義に則った証明の実行であるという意義の他に、証明をコンピュータで検証するという実際的な意味が出てくる。実際、定理の証明が非常に複雑であったり、非常に高度な難解なものである場合、査読にかけられる時間も限られ、また査読できる専門家も限られると、どうしてもルーチンのように見える部分は細部までチェックしないこともありうる。そこで、そのような定理を使おうとしたときは、自分で納得するまで証明を読むしかない。しかしそれはとても時間がかかるし、さらに自分自身が本当に信用できるか不安は残る。その点、コンピュータによる検証は(ソフトウェアにバグがあるとか、仮定のおき方にミスがあるというようなことを除いて)完璧と考えていいだろう。その証明がコンピュータによって検証されていたら、定理の内容を理解し、証明のポイントに納得したら、安心してそれを使って先に進むことができるのではないだろうか。ホモトピー理論の提唱者の一人であるボエボドスキーの動機の1つも、そのような点にあ

本研究は科研費(課題番号:15K13433)の助成を受けたものである。

キーワード: 幾何的トポロジー, 証明支援系, 形式化

* 〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町1-33 千葉大学 大学院理学研究科

e-mail: kuga@math.s.chiba-u.ac.jp

¹ もっともこの大作は誰も読んだことがない大著という話もある。…ゲーデルを除いて…というお話もある。ついでながら、ゲーデルの不完全性定理によってヒルベルトプログラムは破綻した筈ではないか、と疑問を感じ始められた方のために。その意味では、この話はゲンツェンの無矛盾性定理から後述のカリー・ハワード対応に発する流れであって、不完全性定理と直接的な関係はない。たとえば [1] 参照

るらしい。

さらに進んで、コンピュータが数学証明の検証をすることができるなら、コンピュータ自身で数学定理の証明をすることもできるようになるのではないかと考えることも、自然であろう。自動検証から自動証明は現時点ではかなりの飛躍があるかもしれないが、簡単な自動証明機能であれば、現在の証明支援系で使えるものもあり、将来的には機械学習などを利用して、コンピュータの自動証明機能が向上していくことは間違いないと思われる。そうすると、形式化された数学は、コンピュータが直接操作対象とできるデータという意味で、ますます重要になって行くと考えられる。実際、インターネット上に電子化された数学の書籍や論文は多数あるが、それはほとんどpdfファイルであり、コンピュータがそこから数学の論理的内容を読み取れるわけではない。しかし、それらがコンピュータが直接理解でき、操作することのできる形式言語で書かれていたら全く話が違って来る。

1.2. 証明支援系

コンピュータを用いて「形式化」を行い、その検証を行うためのソフトウェアが証明支援系 (proof assistant) である。証明支援系は通常

- 数学の定義や定理、証明を記述するための形式的言語
- ユーザーと対話的に証明を作成するための環境

を提供する。従って、「数学証明の自動検証」のためのシステムであり、「数学の定理の自動証明」システムではない。しかし、数学の定理の自動証明がこのようなシステムを前提とすることは間違いない。たとえば、後述のCOQ等には、若干の自動証明機能がある。

このようなシステムの初期のものとして AutoMath (Nicolaas Govert de Bruijn starting in 1967) がある。この段階ですでにカーリー・ハワード対応として知られる考え方や、依存型系 (dependent type system) が取り入れられていた。

Mizar(<http://www.mizar.org/>) というシステムは現在も開発が続けられている。現在良く知られている証明支援系としてはHOL, Isabelle, COQ, Agda 等がある。このうちCOQとその拡張であるSSReflectについて後で若干詳しく述べる。

近年このような証明支援システムによって多くの定理の形式化が達成されている。幾つか例を挙げると

- 4-color theorem (Coq/Gonthier/2004)
- Jordan curve theorem (Mizar/Kornilovicz/2005, HOL light /Hales/2007)
- prime number theorem (Isabelle/Avigad et al/2007)
- Feit-Thompson theorem (Coq/Gonthier/2012)
- Kepler conjecture (HOL, /Hales/2014)

定理の証明が複雑になると、このような証明支援系を用いても、労力は大変なものとなる。2014年8月に完了した Kepler conjecture の形式化は280[年×人]を要したと

いう計算もある。しかし、このような労力も証明支援系の自動証明機能の向上で緩和されていくと思われる。実際後で少し触れる COQ の SSReflect 拡張は自動証明機能が強化されていて、SSReflect を用いた形式化のコード量はかなり少なくなる傾向がある。

また、現時点でグラフ理論、有限群論、線形代数、組合せ論に属する問題は形式化が進んでいる。これはたとえば SSReflect のライブラリがそのような分野をカバーしているということでもある。しかしトポロジーでいうと、特異ホモロジー論からすぐ従うジョルダンの閉曲線定理の形式化が2005年であることから分かるように、基本的な代数トポロジーも整備されていない。もちろん、位相空間の公理を形式化すること自体は簡単で、位相空間のライブラリはいくつかあり、我々は、それを用いて幾何的トポロジーの基本的な定理を形式化できることを後で示す。しかし、そもそも形式化で点集合としての空間を基本的な対象として扱うのは適切なやり方ではないかもしれない。これについては、後で少し触れる Homotopy Type Theory とも関係している。

2. 型理論とカリー・ハワード同形対応

型理論はもともと B. ラッセルが提唱したもので、素朴集合論のパラドックスを回避するのが目的であった。公理的集合論も、このパラドックスを回避するもう一つの方法であり、現代数学は、いわゆる ZFC 理論を基礎にしていると考えられる。しかし、Coq のような証明支援系では型理論を使用する。(さらに、型理論によって数学を基礎づけるという立場もありうる)。多くの数学者にとって、型理論は馴染みがないと思う。特に「命題は型である (propositions as types)」とか「証明はプログラムである」というカリー・ハワード同形対応は、集合論に基づいた通常の数学で命題と集合が全く別のものであるのと対照的で、全く新鮮な考え方ではないかと思う。そこで、少し例で説明をする。例えば COQ で定理は次のように書く：

```
Variable p : Prop.
Theorem p_implies_p : p → p.
```

一行目は p は Prop 型の項という意味である。つまり p は Prop という集合のようなものの元であるという意味である。

二行目は $p \rightarrow p$ という主張に `p_implies_p` という名前を付けている。

しかし、二行目は一行目と同じで `p_implies_p` は $p \rightarrow p$ という命題型の元であるという意味でもある。これはまた、`p_implies_p` は $p \rightarrow p$ の証明であるとか、証拠であるという意味である。

このように、命題を、その証明全体のなす型と考えることで、命題と数学の対象とを同じものとして扱うことが可能になっている。

さらに、このことは、数学の対象を帰納法などで構成するのと同じように、`p_implies_p` を構成すれば、それが定理の証明をすることになる。こうして数学の対象を構成するように証明を行うことができる。このような構成的型理論は Martin-Löf 型理論と呼ばれる。

3. COQ/SSReflect

今例に使用した COQ はフランス国立情報学自動制御研究所が中心となって開発をしている証明支援系である。

たとえば自然数は次のように定義される：

```
Inductive nat : Set :=
```

```
| 0 : nat
| S : nat → nat.
```

このような帰納的構成が基本的である。

自然数を書いたので、ついでにCOQでの実数の定義も解析学の教科書に書いてあるように公理的に行い、通常のプログラミング言語の実数が浮動小数点であるのとは全く違っていることにも注意する。実数の公理的な定義の仕方はいろいろあると思うが、たとえばCOQの標準ライブラリの実数の公理の一部は完備性の仮定は次のようになっている：Raxioms.v

Axiom

```
completeness :
  ∀ E:R → Prop,
    bound E → (∃ x : R, E x) → { m:R | is_lub E m }.
```

先に書いたように、COQを用いてG.Gonthierのチームが4色定理の形式化や、ファイト・トンプソンの定理の形式化を達成している。またSSReflectという拡張がGonthierのチームによって開発されており、保守性や、自動証明機能が高められている。Mathcompという(有限集合や代数の)ライブラリが開発され、これらのライブラリを使用することによって、短いコードで形式化を行うことが可能になっている。

我々はこのCOQ/SSReflectを用いて、次に述べるように、幾何的トポロジーでいくつかの形式化を行った。

4. 幾何的トポロジーの形式化

前述のSSReflectの数学ライブラリMathcomp等は、まだトポロジーや解析学をほとんどカバーしていない。もちろん、公理を書くことは簡単であって、たとえばCOQを用いて位相空間の公理は次のように書ける²：

```
Record TopologicalSpace : Type := {
  point_set : Type;
  open : Ensemble point_set → Prop;
  open_family_union : ∀ F : Family point_set,
    (∀ S : Ensemble point_set, In F S → open S) →
    open (FamilyUnion F);
  open_intersection2: ∀ U V:Ensemble point_set,
    open U → open V → open (Intersection U V);
  open_full : open (@Full_set _)
}.
```

位相空間のライブラリもいくつか作られているが、標準的なものといえるものは出来ていない。実際、上記のように位相空間を形式化しても、部分位相空間や誘導位相などを考え始めると、様々な面で困難が発生する。たとえば、部分集合は通常命題で指定されるが、ある点はその部分集合に入っていることは、その命題の証明があって、初めて確定する。トポロジーでよく使われるフィルトレーションのようなものを見ると、この証明の扱いが非常に面倒になってくる。また、距離空間からくる部分空間の位相と、相対位相が同じものであることが、決して自明には使えない。従って、位相空間の使いやすい標準的なライブラリの開発が望ましいが、それはまだ出来ていない。

²通常、空集合が開集合であることは公理に含めるが、定理として得られるので省いてある。

我々が形式化したのはビング収縮定理とよばれるビングトポロジーの基本定理で若干テクニカルになるが次のようなコードになる。

```
Hypothesis X_compact: compact Xt.
Hypothesis Y_compact: compact Yt.
Definition Bing_shrinkable (f:X→Y): Prop :=
  ∀ eps:R, eps>0 →
    ∃ h : point_set Xt → point_set Xt,
      homeomorphsm h
      (∀ x:X, d' (f x) (f (h x)) < eps)
      (∀ x1 x2:X, (f x1) = (f x2) → d (h x1) (h x2) < eps).
```

```
Definition approximable_by_homeos (f:X→Y): Prop :=
  ∀ eps:R, eps>0 →
    ∃ h:point_set Xt → point_set Yt,
      homeomorphsm h
      (∀ x:X, d' (f x) (h x) < eps).
```

```
Theorem Bing-Shrinking_Theorem:
  ∀ f: point_set Xt → point_set Yt,
  continuous f → surjective f →
  (Bing_shrinkable f → approximable_by_homeos f).
```

この証明の形式化は github [9] にある。そこには、このために必要なベールカテゴリー一定理の形式化も行われている³

```
Variable T: Topological_space.
Definition baire_space : Prop :=
  ∀ V : IndexedFamily nat (point_set T),
  (∀ n: nat, (open (V n)) ∧ (dense (V n))) →
  dense (IndexedIntersection V).
```

```
Theorem BaireCategoryTheorem :
  complete d d_metric → baire_space.
```

この定理は基本的には選出公理であり、選出公理を仮定していることは断っておく必要があるとおもう：

```
Axiom FDC : FunctionalDependentChoice_on
  (point_set X * { r:R | r > 0 } * nat).
```

ビング収縮定理は、もともとは、R.H.Bing が 3次元球面の位相的 involution で固定点集合が標準的でないものを構成する際に用いた [1]。この定理は幾何的トポロジーで同相写像を構成するときの基本的な方法を与える定理であり、考え方としてはモートンブラウンの一般シェンフリース定理 [2] と同様である。

我々はシェンフリース定理をさらに一般化する M. Freedman による次の定理の形式化を目指している。

Theorem (Disk to Disk Theorem for $k = \infty$) Suppose $f : S^n \rightarrow S^n$ is a surjective map such that there are only countably many points p_i , ($i \in \mathbb{N}$) with

³但し、ベールカテゴリー一定理については形式化はすでに成されており、最初の形式化ではないことが後からわかった

the property $\text{Card}(f^{-1}(p_i)) > 1$. We assume $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam}(f^{-1}(p_i)) = 0$ and the subset $\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \subset S^n$ is nowhere dense. Then f is Bing shrinkable.

この定理が重要なのは、Casson Handle が位相的には2-ハンドルであるという Freedman による4次元多様体の分類の基礎にある定理の主要な補助定理であることである。

さて、たとえば Freedman の一般シェンブリース定理を証明しようとするとき、円板 D^n や球面 S^{n-1} はどのように形式化すべきか考えると、すぐに思いつく

$$\begin{aligned} D^n &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \\ S^{n-1} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \end{aligned}$$

は具体的なため、逆に汎用性がなくなり、形式化も煩雑になる欠点がある。たとえば、円板内部の任意の2点が境界を固定する円板の同相写像で移り合うことを示そうとすれば、円板よりも立方体のほうが使いやすい。そこで円板と立方体の同相写像を作る必要も出てくる。従って円板を初めから具体的な集合として定義するよりも、境界を固定した同相写像の性質などの抽象的な性質をもった空間を一つの型としておくほうが、よほど形式化しやすく、かつ汎用性も高まる。これはすべての点で言えることで、いっそのこと、空間が点からできているという解析幾何的な方法はやめて、統一的幾何にしようという考えは、このような形式化をやってみると自然な発想として出てくる。これはちょうど、抽象的なホモトピー論の考え方と同じで、次に少し述べるホモトピー型理論のような数学の基礎づけが現れるのも必然かもしれない気がしてくる。

5. ホモトピー型理論

最初に断っておく必要があるが、発表者はホモトピー型理論をまだよく理解していないので、ここに書くことは、思い違いなどがあるかもしれない。しかしここ2~3年でプリンストンで精力的に行われている抽象的ホモトピー論を手本にした、数学の新しい基礎づけについて少しだけでも触れておきたいと思う。本もネットでダウンロードできるので、正確にはそれを読んで頂ければと思う。

<http://homotopytypetheory.org/book/>

またボエボドスキーの講演も

<https://video.ias.edu/univalent/voevodsky> など、幾つかネットで視聴することができる。

ボエボドスキーの動機は、専門的な難しい論文になればなるほど、証明に欠陥があっても、発見することが難しくなっており、そのような論文の結果の信頼の上になされなければならない研究にとって、深刻な問題であり、自動的な証明の検証システムが必要であるということである。そこで証明検証系を利用して見たが、数学者にとっては、本格的に使うにはいろいろ問題がある。

ひとつは、数学者が当たり前のように行う同一視がコンピュータ上では簡単でないという点である。簡単な例では、公式 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ は、 k や n が自然数であろうと整数数であろうと、どちらにせよ、証明も含めて、まったく同じく扱える。しかし、自然数か整数かによって二つの公式(命題)はまったく別の型になり、そのような同一視は自動的ではない。

また、上に書いた球面の例でも、数学者が球面を考える時、それは必ずしもユークリッド空間の部分集合を考えているわけではなく、時と場合に応じて、ある抽象的な

性質をもつ型としての空間を想定しているという点である。このようなことは、数学者が頭の中で無意識に処理している内は深刻な問題にはならなかったが、全く融通の利かないコンピュータによる形式言語では、その無意識の処理を明示的に定式化する必要が出てくる。

そこで、ホモトピー理論が提唱する数学の”univalent foundation”では、抽象的なホモトピー論にその手本を見つけようとうしている。たとえば型の属（ある型でパラメータづけられた型）はファイブレーションであるなど。

HoTTのライブラリでは球面がユークリッド空間の部分集合とか多様体ではなく、基本的な型として帰納的に定義されている部分を載せておくと `hit.Spheres.v`

```
Fixpoint Spheres (n : trunc_index)
  := match n return Type with
    | -2 => Empty
    | -1 => Empty
    | n'+1 => Susp (Sphere n')
  end.
```

ちょうど自然数の定義のようにになっていることがわかると思う。このように帰納的構成もうまく噛み合っている。

参考文献

- [1] Bing, R.H.: A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, *Ann. Math.* 56, 354–362 (1952)
- [2] Brown, M.: A proof of the generalized Schoenflies theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 66, 74–76 (1960)
- [3] Casson, A.: Lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds, *À la recherche de la topologie perdue*, *Progr. Math.*, vol. 62, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1986, pp. 201–244. With an appendix by L. Siebenmann.
- [4] Freedman, M.H.: The topology of four-dimensional manifolds, *J. Differential Geom.* 17, no. 3, 357–453 (1982)
- [5] Freedman, M.H.: Bing topology and Casson handles, notes by S. Behrens, 2013 Santa Barbara Lectures
- [6] Freedman, M.H., Quinn, F.: *Topology of 4-manifolds*, Princeton Mathematical Series, vol. 39, Princeton University Press, Princeton NJ (1990)
- [7] Hales, T.: The Jordan curve theorem, formally and informally, *The American Mathematical Monthly* 114(10), 882–894 (2007)
- [8] Hales, T. et. al :A formal proof of the Kepler conjecture, <http://arxiv.org/pdf/1501.02155.pdf>
- [9] Kuga, K.: `Bing-Shrinking-Criterion`, <https://github.com/kenkuga/Bing-Shrinking-Criterion>
- [10] Schepler, D.: `Topology/v8.4` <http://www.lix.polytechnique.fr/coq/pylons/contribs/view/Topology/v8.4>
- [11] 照井一成 「コンピュータは数学者になれるのか？ 数学基礎論から証明とプログラムの理論へ」 青土社 (2015)

SLICE-RIBBON CONJECTURE AND RELATED TOPICS

安部哲哉 (大阪市立大学数学研究所)

1. イントロダクション

(滑らかな) スライス円板の理論は、

2次元円板から(標準的な微分構造を持つ)4次元球体への滑らかな埋め込み

を調べる理論です。この理論は、古典的な結び目理論、2次元結び目理論、4次元多様体論と密接な関係があり面白いです。一方、よくわかっていない事が多く、今後の研究が期待される分野でもあります。この予稿集では、スライス円板の理論における懸案の問題の一つである、スライス・リボン予想と周辺の話題について概説します。

予稿集における記号や約束

S^3 : 3次元球面

B^4 : 4次元球体^a ($\partial B^4 = S^3$ と思う.)

約束: S^3 内の結び目のみを扱う。

^a4次元円板 D^4 と言っても同じだが、ここでは B^4 と書きます。

2. SPC4 とスライス円板の理論

このセクションでは(滑らかなカテゴリーにおける)4次元ポアンカレ予想とスライス円板の理論の関係を説明します。まずは4次元ポアンカレ予想の話から始めます。

● 4次元ポアンカレ予想.

4次元ポアンカレ予想は2つのバージョンがあります。一つは、位相的カテゴリーにおけるもの、もう一つは滑らかなカテゴリーにおけるものです。前者は1981年に Michael Freedman によって解決されました。後者は未解決です。

予想 2.1 (滑らかなカテゴリーにおける4次元ポアンカレ予想). X を滑らかな4次元多様体、 S^4 を(標準的な微分構造を持つ)4次元球面とする¹。このとき

$$X \underset{\text{同相}}{\approx} S^4 \implies X \underset{\text{微分同相}}{\approx} S^4.$$

簡単のため、この予想を SPC4²と呼びます。SPC4を解くことは、エキゾチック³な4次元球体(略してエキゾチック4球体)を探すことと同値です。

Cerf の定理 ($\Gamma_4 = 0$) の帰結

エキゾチック4球面が存在する \Leftrightarrow エキゾチック4球体が存在する

¹ $\mathbb{R}^4 \approx S^4 \setminus \{1 \text{ 点} \}$ には非可算無限個の微分構造が存在します。

²the Smooth Poincaré Conjecture in dimension 4 の略。

³同相だけど微分同相でない、の意味。

• SPC4 反証のアイデア.

結び目理論 (スライス円板の理論) を用いて, エキゾチック 4 球体の存在を証明する試みを紹介します. キーとなるのは次の補題です.

補題 2.2. W を境界が S^3 のホモトピー 4 球体とする. もし, ある結び目 K が

- (1) W 内で滑らかな 2 次元円板を張る, かつ
- (2) B^4 内では滑らかな 2 次元円板を張らない

ならば, W はエキゾチック 4 球体である.

念のために証明を書いておきます.

証明. まず Freedman の結果から W は B^4 と同相です. もし W が B^4 と微分同相だとすると, (1) より K は $W \approx B^4$ 内で滑らかな 2 次元円板を張ります. これは (2) に矛盾します. 従って, W はエキゾチック 4 球体です. \square

• ラスムッセン不変量.

2004 年, Rasmussen は Khovanov homology を用いて, 結び目の (整数に値をとる) 不変量 $s(K)$ を定義しました⁴. $s(K)$ は, 今ではラスムッセン不変量と呼ばれており, 次の性質を持ちます.

補題 2.3. 結び目 K が B^4 内で滑らかな 2 次元円板を張るならば

$$s(K) = 0$$

となる.

2010 年, Freedman, Gompf, Morrison and Walker [10] は, 以下の性質を満たす結び目 K_{CS} を構成して, そのラスムッセン不変量を (スーパーコンピューターを用いて) 計算しました.

* K_{CS} はあるホモトピー 4 球体 W_{CS} 内で滑らかな 2 次元円板を張る⁵.

—— 彼らのモチベーション ——

もし $s(K_{CS}) \neq 0$ ならば,

- (1) K_{CS} が W_{CS} 内で滑らかな 2 次元円板を張る (構成から従う)
- (2) K_{CS} は B^4 内で滑らかな 2 次元円板を張らない (補題 2.3 の対偶から従う)

となり, 補題 2.2 より W_{CS} がエキゾチック 4 球体となる (SPC4 の反証計画成功).

• 顛末.

計算結果は $s(K_{CS}) = 0$ でした. その直後に次が示されました.

定理 2.4 (Akbulut [7]). ホモトピー 4 球体 W_{CS} は B^4 と微分同相.

⁴私は, 修士課程ではラスムッセン不変量の計算方法の研究, 博士課程ではラスムッセン不変量の (組み合わせ的な) 結び目理論への応用を研究していました.

⁵ W_{CS} , 結び目 K_{CS} , 対応する 2 次元円板は, 長年エキゾチック 4 球面の候補であった (とある) Cappell-Shaneson homotopy 4-sphere Σ_{CS} から構成されました. 以下で, 構成の概略を説明します. まず, (巧みな Kirby calculus により) Σ_{CS} に 0-handle, 1-handles, 2-handles, 4-handle からなるハンドル分解を与えます. W_{CS} は Σ_{CS} から 4-handle を引っこ抜いたものとして定義されます. W_{CS} の 2-handle を (適当に) 一つ選んで, そのベルト球面と co-core 円板を考えます. それが結び目 K_{CS} と対応する 2 次元円板の定義です.

その後、(さらに悪いことに)仮にエキゾチック4球体が存在したとしても、Freedman, Gompf, Morrison and Walkerの方法では、エキゾチック性は検出できないことがわかりました。

定理 2.5 (Kronheimer and Mrowka [14]). 結び目 K があるホモトピー4球体 W で滑らかな2次元円板を張るならば

$$s(K) = 0$$

となる⁶。

このようにして、Freedman, Gompf, Morrison and WalkerのSPC4反証計画は完全に頓挫しました。一方で、結び目理論の観点からは次の疑問が湧きます。

結び目 K_{CS} は何か特別な性質を持つのか？

結論から言うと、この結び目は(次のセクションで説明する)スライス・リボン予想の反例候補になります。

3. スライス・リボン予想

このセクションでは、スライス・リボン予想の説明をします。

大前提

よく知られているように、

S^3 内の結び目 K が自明 $\iff K$ が S^3 内で2次元円板を張る
 です。特に、非自明な結び目は、 S^3 内において円板を張りません。

S^3 内の結び目 K がスライスとは、 K が B^4 内でプロパーで滑らかな2次元円板 D を張るときに言います⁷。 K に対するスライス円板とは、上述の2次元円板 D のことを言います⁸ (図1参照)。 S^3 内の結び目 K がリボンとは、 K が S^3 内でリボン特異点⁹のみを持つはめ込

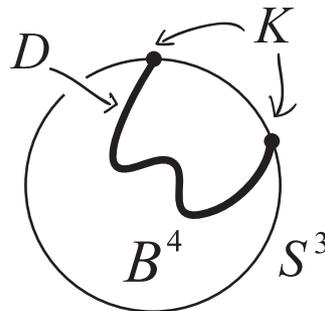


図 1. S^3 内のスライス結び目 K とスライス円板 D の模式図

まれた2次元円板を張るときに言います(図2参照)。

⁶ラスムッセン不変量 $s(K)$ を(結び目に対する)インスタントフレアホモロジーの亜種の観点から再定義することにより証明されました。

⁷「(B^4 以外の)一般的な4次元多様体で2次元円板を張ることは、考えないのですか?」という問いに対しては、次の解答が知られています。「任意の結び目 K に対して、 $\partial X = S^3$ となる4次元多様体 X が存在して、 K は X 内でプロパーで滑らかな2次元円板を張る」

⁸(埋め込みに条件が付いているわけではないが)歴史的な理由でスライス円板と呼ばれています。

⁹リボン2重点と呼ぶ方が適切と思われるが、慣習に従いこのように呼ぶ。

補題 3.1. リボン結び目はスライス結び目である .

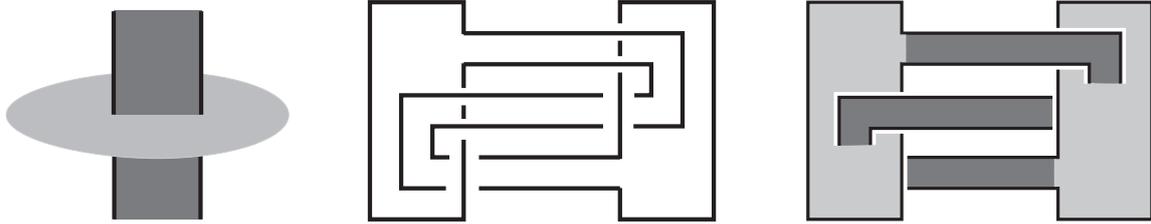


図 2. リボン特異点 (左), リボン結び目 (中央), はめ込まれた円板 (右)

証明. K をリボン結び目とします . 定義より, K は S^3 内でリボン特異点のみを持つはめ込まれた 2 次元円板 D を張ります . D のリボン特異点の周りを 4 次元方向に押し上げることで, K のスライス円板が得られます .

以下で「押し上げ」の詳細を述べます . まず N を B^4 のカラー近傍とします . N は $S^3 \times [0, 1]$ と微分同相で $S^3 \times \{0\} \approx S^3 = \partial B^4$ となります . D を図 3 のように変形すると, K のスライス円板が得られます . \square

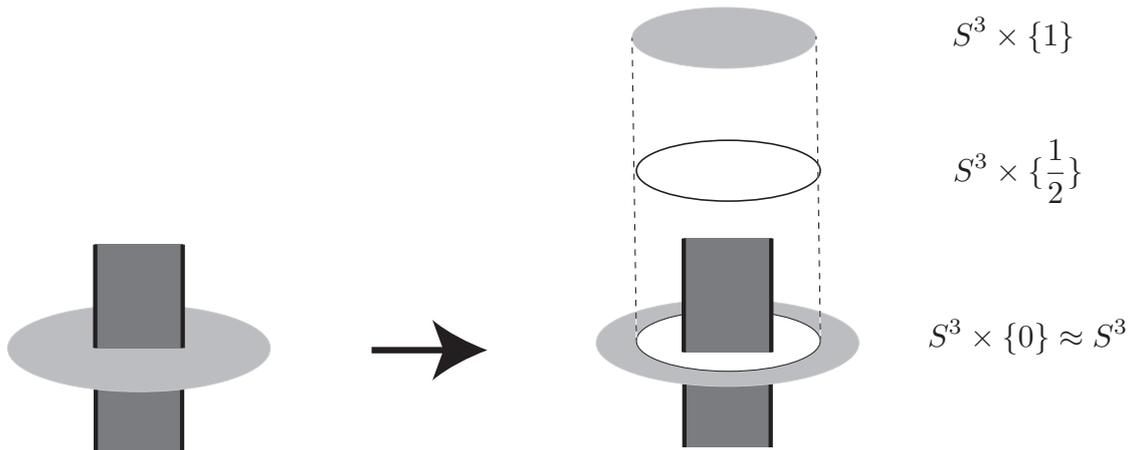


図 3. リボン特異点の周りの様子

1962 年, Fox [9] は今ではスライス・リボン予想と呼ばれる問題を提起しました .

—— スライス・リボン予想 ——

任意のスライス結び目はリボン結び目である .

例えば, SPC4 の反証計画で現れた結び目 K_{CS} は (構成から) スライスですが, リボン結び目である確証はありません . スライス・リボン予想の反例候補については Gompf, Scharlemann and Thompson の論文 [11] をご覧下さい . また, 同様のアイデア (+ アニュラスツイスト) で Abe-Tange [5] はスライス・リボン予想の反例候補を構成しています¹⁰ .

¹⁰構成の技術的な核心は (ある条件を満たすスライス円板から誘導される) B^4 のハンドル分解から, より複雑な B^4 のハンドル分解を与えるアルゴリズムを与えたことです .

4. スライス結び目の性質

ここでは、スライス結び目の性質をいくつか紹介します。またスライス・リボン予想が、特定の結び目のクラスに対して正しいこと(定理4.3)を紹介します。

次の定理は古典的な Fox-Milnor の結果です。

定理 4.1. K をスライス結び目とする。このとき次が成り立つ。

$$\Delta_K(t) \doteq f(t)f(t^{-1}),$$

ここで $\Delta_K(t)$ は K のアレクサンダー多項式, $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, \doteq は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の単元倍を除いて等しい, という意味です。

この定理により, 3_1 (三葉結び目) や 4_1 (八の字結び目) を初めとして, 多くの結び目は非スライスであることがわかります。次の結果はよく知られています。

事実 4.2. スライス結び目 K の2重分岐被覆は有理4次元球体をバウンドする。

自明結び目の2重分岐被覆は S^3 であり4次元球体 B^4 (特に有理4次元球体) をバウンドします。事実4.2は, その結果の拡張です。以下の定理が示すように, 時として, 事実4.2はスライス結び目(リボン結び目)を特徴付けます。

定理 4.3 (Lisca [17]). K を2橋結び目¹¹とする。次は同値。

- (1) K がリボン結び目である。
- (2) K がスライス結び目である。
- (3) K の2重分岐被覆は有理4次元球体をバウンドする。

証明の概要. (1) \implies (2) \implies (3) は明らか。(3) \implies (1) の証明は次のようになります。 K の2重分岐被覆が有理4次元球体をバウンドした時, 起こりうる可能性は以下の二つです。

- (a) K がリボン結び目と判明していて, かつ, K の2重分岐被覆は有理4次元球体をバウンドする。
- (b) K がリボン結び目か不明だが, K の2重分岐被覆は有理4次元球体をバウンドする。

以下の流れで, (b) が起こりえないことを証明します。つまり, K がリボン結び目か不明なものに関して, K の2重分岐被覆は有理4次元球体をバウンドしないことを証明します。

ステップ1: K が2橋結び目である事を使って, 2重分岐被覆が「いい(=定値)」4次元多様体 X_1 をバウンドすることを証明する。

ステップ2: その2重分岐被覆が有理4次元球体 X_2 もバウンドすると仮定する。

ステップ3: 二つの4次元多様体 X_1 と X_2 を張り合わせて閉4次元多様体 X を作る。

ステップ4: Donaldson の対角化定理を用いて, そのような閉4次元多様体 X は存在しないことを証明する。(結果として, K の2重分岐被覆は有理4次元球体をバウンドしないことがわかる。)

¹¹ K の2重分岐被覆がレンズ空間となる結び目のこと。

このようにして (a) のみが起こり得ることが分かり， K はリボン結び目であることがわかります．

□

その後の進展は [12], [15], [16] を参照して下さい．

一般には事実 4.2 の逆は成立しません．

定理 4.4 (Tange [20]). ある非スライス結び目 K が存在して， K の 2 重分岐被覆は有理 4 次元球体をバウンドする．

5. スライス・リボン予想の帰結

§3 では，スライス・リボン予想に反例があるかもしれないことを紹介しました．一方 §4 では，特定の結び目のクラスに関しては，スライス・リボン予想が正しいことを紹介しました．このセクションでは，スライス・リボン予想が正しければ，どのような主張が得られるのかを紹介します．まず，少し用語の準備をします．

• 結び目コンコダンス群.

向きづけられた結び目 K_1 が向きづけられた結び目 K_0 とコンコダント ($K_1 \sim K_0$ と書く) とは，あるプロパーに埋め込まれたアニュラス $A \subset S^3 \times [0, 1]$ が存在して

$$\partial(S^3 \times [0, 1], A) = (S^3, K_1) \cup (-S^3, -K_0)$$

となるときに言います．ここで $-S^3$ と $-K_0$ はそれぞれ S^3 と K_0 の向きを逆にしたものです．結び目コンコダンス群とは，コンコダンス類全体のなす集合に連結和によって誘導された演算を入れた (アーベル) 群のことで， $\text{Conc}(S^3)$ と書きます．結び目コンコダンス群の単位元は，自明な結び目を含むコンコダンス類です．

スライス・リボン予想に関する補足

(向き付けられた) 結び目は，自明結び目とコンコダントになるときに限りスライスになります．別の言い方をすると，結び目コンコダンス群の単位元は，スライス結び目の集合からなります．スライス・リボン予想は，

結び目コンコダンス群の単位元は，リボン結び目の集合からなる

と言い換えることができます．つまり，スライス・リボン予想は，結び目コンコダンス群の自明元に関する予想とも思えます．

• Baker の仕事.

S^3 内のファイバー結び目 K がタイトとは， K が S^3 のあるオープンブック分解の binding で，かつ，それが S^3 のタイトコンタクト構造をサポートするときに言います．Baker は次を予想しました．

予想 5.1 (Baker [8]). K_0 と K_1 をタイトファイバー結び目とする．このとき次が成り立つ．

$$K_0 \underset{\text{コンコダント}}{\sim} K_0 \implies K_0 \underset{\text{イソトピー}}{=} K_1.$$

予想 5.1 は (適切な設定をすれば) h-cobordism theorem の類似が成立することを期待させますが，この方向の進展は未だありません．Abe-Tagami は，上の予想が次と同値であることを指摘しました．

予想 5.2 (Abe-Tagami [3], [4]). 素なタイトファイバー結び目のなす集合は, 結び目コンコールドス群の中で線形独立¹²である.

Baker は次を示しました.

定理 5.3 (Baker [8]). スライス・リボン予想が正しいならば, 予想 5.1 (従って予想 5.2) は正しい.

結び目コンコールドス群の単位元に関する予想 (スライス・リボン予想) が, 単位元以外に関する主張 (予想 5.2) を導いている, と見ると興味深いです.

● Abe-Tagami の仕事.

1978 年, Akbulut-Kirby は次を予想しました.

予想 5.4 (Akbulut-Kirby の予想). もし二つの結び目の 0-手術が同じ 3 次元多様体となるとき, 二つの結び目はコンコールドトになる.

ここでは, この予想を次のように理解します¹³.

予想 5.5 ((修正された)Akbulut-Kirby の予想). もし二つの結び目の 0-手術が同じ 3 次元多様体となるとき (適切な向きに関して) 二つの結び目はコンコールドトになる.

Abe-Tagami は次を示しました.

定理 5.6 (Abe-Tagami [3]). スライス・リボン予想が正しいならば, 予想 5.5 の反例が存在する.

証明の概要. まずアニュラスツイストの議論より, 図 4 で定義された K_0 と K_1 の 0-手術は同相な 3 次元多様体となることがわかります. 一方, 論文 [18] の Miyazaki の定理より, $K_0 \# \overline{K_1}$

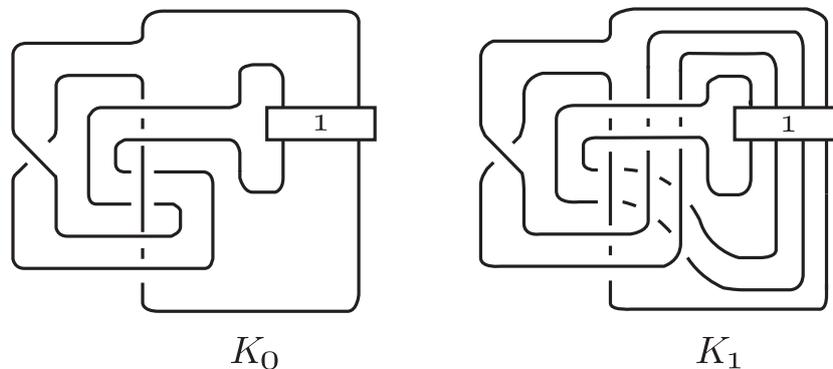


図 4. 結び目 K_0 と K_1 の定義. 箱はフルツイストを表す.

がリボン結び目でないことがわかります. ここで $K_0 \# \overline{K_1}$ は K_0 と K_1 の鏡像の連結和を表します. もしスライス・リボン予想が正しいならば, $K_0 \# \overline{K_1}$ はスライス結び目ではありません. 別の言い方をすると, K_0 と K_1 はコンコールドトではありません. まとめると, もしスライス・リボン予想が正しいならば, K_0 と K_1 の 0-手術は同相な 3 次元多様体となりますが, K_0 と K_1 はコンコールドトではありません. つまり K_0 と K_1 が予想 5.5 の反例となります. □

¹²結び目コンコールドス群を \mathbb{Z} -加群と見たときの線形独立の意味.

¹³0-手術が同じ 3 次元多様体となる向き付けられた結び目で, コンコールドトでないものが存在することは既に知られているから.

証明の概要から次がわかります．

- (1) もし K_0 と K_1 はコンコードントならば, $K_0 \# \overline{K_1}$ はスライス・リボン予想の反例になる．
- (2) もし K_0 と K_1 はコンコードントでないならば, K_0 と K_1 は予想 5.5 の反例となる．

詳細は論文 [3], [4] を参照して下さい．後に, Yasui [19] によって, 予想 5.5 は否定的に解決されました．反例を与える結び目のペアは (4次元多様体論における基本的な操作である) コルクツイストを応用して構成されました．

6. リボン円板の性質

このセクションでは, リボン円板の定義を与えて, その性質について説明します．

$r : B^4 \rightarrow \mathbb{R}$ を B^4 の半径関数¹⁴とします (あるスライス結び目に対する) スライス円板 D がリボン円板であるとは, D が (半径関数 r に関して B^4 の内部において) 極大値を持たないときに言います (図5参照)．リボン円板という名前から連想されるように, 次が成り

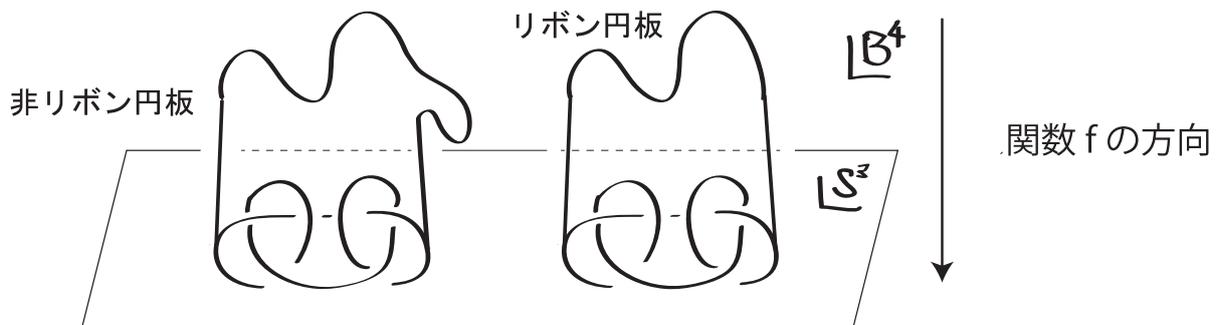


図 5. 非リボン円板 (左) とリボン円板 (右)

立ちます．

補題 6.1. スライス結び目 K に対して次は同値となる．

- (1) K がリボン結び目である．
- (2) K がリボン円板を張る．

証明の方針. (1) \implies (2) リボン結び目 K に対して, 補題 3.1 の証明で得られたスライス円板が実は, リボン円板になることを示します．(2) \implies (1) 半径関数 r が D 上のモース関数になっていることを使います． \square

以上からスライス・リボン予想は次のように言い直すことができます．

————— スライス・リボン予想 —————

結び目 K がスライス円板を張るとき, K はリボン円板も張る．

¹⁴ (B^4 を \mathbb{R}^4 内の半径 1 の球体とみなして) $x \in B^4$ に対して $r(x)$ を x と原点の距離で定義した関数のこと．

• スライス円板とリボン円板との違い.

ここでは, リボン円板に固有の性質を紹介します.

補題 6.2. スライス結び目 K がリボン円板 D を張るとき

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \pi_1(B^4 \setminus D)$$

は全射となる.

証明の概略. 半径関数 r に由来する $B^4 \setminus N(D)$ のハンドル分解を考察すればよい. ここで $N(D)$ は D の管状近傍. □

与えられたリボン円板に「複雑な」2次元結び目を連結和して得られたスライス円板を D とします. もし

$$\pi_1(S^3 \setminus \partial D) \rightarrow \pi_1(B^4 \setminus D)$$

が全射でなければ, 補題 6.2 より D はリボン円板ではありません. 実際, このようにしてリボン円板でないスライス円板は構成できます.

• リボン円板の外部.

これ以降は, スライス・リボン予想と直接は関係がない話題を2つ紹介します.

よく知られているように, 結び目の外部は非常に強い不変量です¹⁵. 一方, スライス円板 (さらにはリボン円板) に関しては, そうではないことを紹介します.

定理 6.3 (Abe-Tange [6]). D_n を図 6 のリボン結び目 R_n に対応するリボン円板とする. このとき, D_n の外部 (つまり $B^4 \setminus N(D_n)$) は n に依存せず, 全て互いに微分同相になる¹⁶. ここで $N(D_n)$ は D_n の管状近傍を表す.

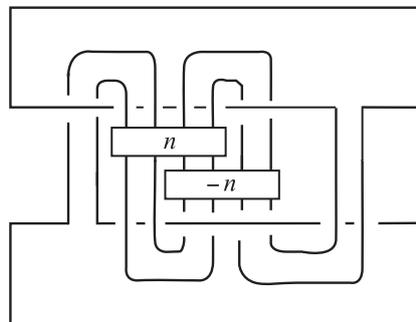


図 6. リボン結び目 R_n

補足

- (1) R_n は $4_1 \# 4_1$ からアニュラスツイストという結び目の局所変形を用いて構成されています. (cf. [1, 2])
- (2) 最近, 滝岡英雄氏 (OCAMI) によって, Γ 多項式を用いて $D_n (n \geq 0)$ は全て異なることが示されました (D_n の系列が無限に異なるものを含むことは知られていました.)

¹⁵Gordon-Luecke の定理より, 結び目の外部は結び目を (鏡像と向きを除いて) 一意に指定します.

¹⁶ $i \neq j$ に対して, $B^4 \setminus N(D_i)$ から $B^4 \setminus N(D_j)$ への微分同相は, $S^3 \setminus N(\partial D_i)$ を $S^3 \setminus N(\partial D_j)$ に写すとは限らないことに注意.

• Whitehead 予想からの帰結.

最後にリボン円板に関する未解決問題を紹介します. 1941 年, J. H. C. Whitehead は次の予想を提起しました.

予想 6.4 (Whitehead 予想). *Aspherical* な 2 次元 *CW-complex* の連結 *subcomplex* は再び *aspherical* である.

もし Whitehead 予想が正しければ, 次が正しいこと¹⁷がわかります (cf. [13]).

未解決問題: リボン円板の補空間 (又は外部) は *aspherical* である.

謝辞 第 62 回トポロジーシンポジウムにお招き下さいました大槻 知忠氏 (京都大学数理解析研究所) 平澤 美可三氏 (名古屋工業大学) 三松 佳彦氏 (中央大学) に心から御礼申し上げます.

参考文献

- [1] T. Abe, I. Jong, Y. Omae and M. Takeuchi, *Annulus twist and diffeomorphic 4-manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **155** (2013), No. 2, 219–235.
- [2] T. Abe, I. Jong, J. Luecke and J. Osoinach, *Infinitely many knots admitting the same integer surgery and a 4-dimensional extension*, Int. Math. Res. Not. IMRN. doi: 10.1093/imrn/rnv008 (2015).
- [3] T. Abe and K. Tagami, *Fibered knots with the same 0-surgery and the slice-ribbon conjecture*, arXiv:1502.01102 (2015).
- [4] T. Abe and K. Tagami, *Addendum to “Fibered knots with the same 0-surgery and the slice-ribbon conjecture”*, the proceedings of intelligence of Low-dimensional Topology (2015), submitted.
- [5] T. Abe and M. Tange, *A construction of slice knots via annulus twists*, arXiv:1305.7492 (2013).
- [6] T. Abe and M. Tange, *Ribbon disks with the same exterior*, in preparation.
- [7] S. Akbulut, *Cappell-Shaneson homotopy spheres are standard*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 2171–2175.
- [8] K. L. Baker, *A note on the concordance of fibered knots*, to appear in J. Topol.
- [9] R. H. Fox, *Some problems in knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute), (1962), 168–176.
- [10] M. Freedman, R. Gompf, S. Morrison and K. Walker, *Man and machine thinking about the smooth 4-dimensional Poincaré conjecture*, Quantum Topol. **1** (2010), no. 2, 171–208.
- [11] R. Gompf, M. Scharlemann and A. Thompson, *Fibered knots and potential counterexamples to the property 2R and slice-ribbon conjectures*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 4, 2305–2347.
- [12] J. Greene and S. Jubuka, *The slice-ribbon conjecture for 3-strand pretzel knots*, Amer. J. Math. **133** (2011), no. 3, 555–580.
- [13] J. Howie, *On the asphericity of ribbon disc complements*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 281–302.
- [14] P. Kronheimer, T. Mrowka, *Gauge theory and Rasmussen’s invariant*, J. Topol. **6** (2013), no. 3, 659–674.
- [15] A. Lecuona, *On the Slice-Ribbon Conjecture for Montesinos knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 1, 233–285.
- [16] A. Lecuona, *On the slice-ribbon conjecture for pretzel knots*, arXiv:1309.0550v1 (2013).
- [17] P. Lisca, *Lens spaces, rational balls and the ribbon conjecture*, Geom. Topol. **11** (2007), 429–472.
- [18] K. Miyazaki, *Nonsimple, ribbon fibered knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), no. 1, 1–44.
- [19] K. Yasui, *Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance*, arXiv:1505.02551 (2015).
- [20] M. Tange, *Heegaard Floer homology of Matsumoto’s manifolds*, arXiv:1504.08202 (2015).

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号大阪市立大学数学研究所
E-mail address: tabe@sci.osaka-cu.ac.jp

¹⁷リボン円板は B^4 と $B^4 \setminus N(D)$ の (0-handle, 1-handle, 2-handle からなる) ハンドル分解を誘導することに注意.

4次元空間内の自己交差を持つ曲面結び目について

河村 建吾 (大阪市立大学大学院 理学研究科 D3)*

0. はじめに

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の結び目が、リボン交差のみを自己交差とする円盤（リボン特異円盤）の境界となる時、その結び目はリボン結び目であるという。リボン結び目は4次元球体 B^4 の境界にそれを置くとき、ある性質を満たす埋め込まれた円盤を B^4 において張ることができ、4次元空間内の曲面の研究においても重要な役割を果たす。特に、2次元結び目のKSS標準形の赤道面での切り口として現れることが、結び目がリボン結び目である必要十分条件となっている¹。リボン交差は高次元でも定義され、4次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 内のリボン曲面結び目のようにリボン結び目を高次元化した概念が知られており、これまでもよく研究されていた。

一方、3次元空間内の曲面の自己交差にはリボン交差の他にクラスプ交差と呼ばれるものがある。クラスプ交差は結び目解消操作と深い関係があり、どのような結び目もクラスプ交差のみを自己交差とする円盤（クラスプ特異円盤）の境界となることが容易に分かる。講演者はクラスプ交差の概念の高次元化を行い、リボン交差も含めることで、 \mathbb{R}^4 内のリボン・クラスプ曲面結び目という概念を導入した。リボン・クラスプ曲面結び目はリボン曲面結び目の拡張である。

本講演では、 \mathbb{R}^3 内の結び目が張るリボン特異円盤とクラスプ特異円盤について紹介し、そのあと \mathbb{R}^4 内のリボン曲面結び目について、仮想結び目を用いた表示法などを紹介する。後半ではリボン・クラスプ曲面結び目の概念を導入し、半仮想ダイアグラムを用いた表示法について説明する。議論はPLカテゴリーで行い、埋め込みやはめ込みは局所平坦であることを仮定する。この研究は大阪市立大学の鎌田聖一氏との共同研究である。

1. 曲面結び目について

本稿で**曲面結び目**といえば**自己交差を持つ曲面結び目**、すなわち、 \mathbb{R}^4 内にはめ込まれた連結な閉曲面で、その多重点集合が横断的な2重点のみであるものを意味する²。はめ込む前の閉曲面のトポロジーを具体的に明示する場合は S^2 -結び目や T^2 -結び目のように記述する。ここで、 S^2 は2次元球面、 T^2 は2次元トーラス $S^1 \times S^1$ を表す。また、2次元結び目とは2重点を持たない S^2 -結び目のことである。2つの曲面結び目が \mathbb{R}^4 の全同位で互いに移り合うとき、それらは**同値**であるという。

図1のモーション・ピクチャーで表される曲面結び目 S_0, S_+, S_-, T_0, P_+ または P_- のことを**標準的な曲面結び目**という。ここで、 S_0 は埋め込まれた2次元球面、 S_+ および S_- は横断的な2重点を1個持つ2次元球面、 T_0 は埋め込まれた2次元トーラス、 P_+ および P_- は埋め込まれた実射影平面である。**自明な曲面結び目**とは、標準的な曲面結

* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科

e-mail: k.kawamura0403@gmail.com

¹ 2次元結び目の（KSS標準形とは限らない）赤道面での切り口として現れることが、結び目がスライス結び目である必要十分条件である。² 曲面結び目は \mathbb{R}^4 内に埋め込まれた連結な閉曲面（つまり横断的な2重点を持たないもの）を意味することもあり、その場合本稿の意味での曲面結び目は自己交差を持つ曲面結び目や特異曲面結び目と呼ばれる。

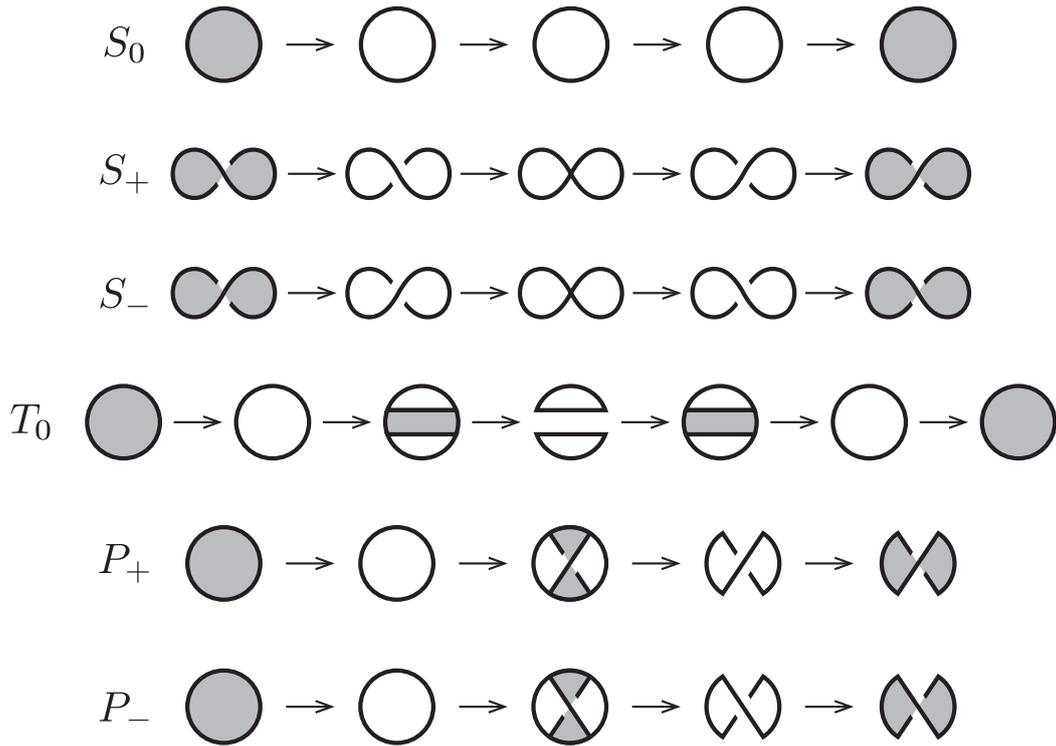


図 1: 標準的な曲面結び目 $S_0, S_+, S_-, T_0, P_+, P_-$ のモーション・ピクチャー

び目の連結和に同値な曲面結び目のことである³。以下、曲面結び目は有向であると仮定する。

曲面結び目から新しい曲面結び目を構成する方法について説明する。 \mathbb{R}^4 内の単純弧 γ が曲面結び目 F に接着する**コード**とは、 $\gamma \cap F = \partial\gamma$ であり、 $\partial\gamma$ の各点は F の2重点ではないときをいう。曲面結び目 F に接着する2つのコードは F を (集合として) 固定した \mathbb{R}^4 の全同位で移り合うときに**同値**であるという。曲面結び目に接着するコードが与えられるとそれに沿った1-ハンドル手術 (cf. [1, 5]) およびフィンガー移動 (cf. [2, 12]) が定まる⁴。曲面結び目に接着する2つのコード γ, γ' が同値であるとき、 γ に沿った1-ハンドル手術 (resp. フィンガー移動) によって得られる曲面結び目と γ' に沿った1-ハンドル手術 (resp. フィンガー移動) によって得られる曲面結び目は同値となる。そして、1-ハンドル手術およびフィンガー移動は (ある意味で) 曲面結び目の結び目解消操作であることが知られている [7, 8]。

2. 3次元空間内のリボン交差とクラスプ交差

境界付きコンパクト曲面 M の \mathbb{R}^3 へのはめ込みを $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ とする。像 $f(M)$ の2重点集合の連結成分を d とし、その逆像 $f^{-1}(d)$ を構成する2つの成分を d_1 と d_2 とする。 d が**リボン交差**であるとは、 d_1 が M にプロパーに埋め込まれた弧であり、 d_2 が M の内部に埋め込まれた弧であるときをいう (図2)。 d が**クラスプ交差**であるとは、各 d_i が M の内点 a_i と M の境界点 b_i を繋ぐ M 内の弧であり、 $f(a_1) = f(b_2)$ かつ $f(a_2) = f(b_1)$

³ 向き付け不可能で自明な曲面結び目の標準的な曲面結び目への分解の仕方は一意でない (cf. [9])。

また、非自明な2次元結び目 K で、 $K \# P_+$ が P_+ に同値となるものが存在する [14]。

⁴ コードに沿った1-ハンドル手術が一意に定まるのは、今、有向な曲面結び目のみを考えているからである。

を満たすときをいう (図3). M が2次元円盤の場合, $f(M)$ の多重点集合がリボン交差のみであるとき $f(M)$ を**リボン特異円盤**といい, $f(M)$ の多重点集合がクラスプ交差のみであるとき $f(M)$ を**クラスプ特異円盤**という. \mathbb{R}^3 内の結び目 K がリボン特異円盤を張るとき, K を**リボン結び目**という. 一方, \mathbb{R}^3 内の任意の結び目はクラスプ特異円盤を張ることが知られている.

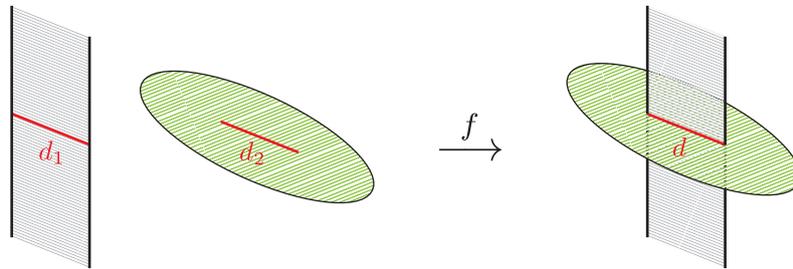


図 2: 3次元空間内のリボン交差 d の近傍

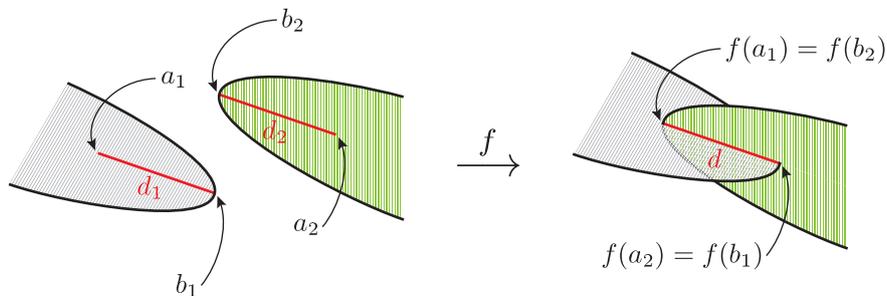


図 3: 3次元空間内のクラスプ交差 d の近傍

リボン結び目に関して以下のことが知られている.

命題 2.1. 結び目 K がリボン結び目であるための必要十分条件は, ある自明な絡み目 L とそれに接着するバンドの集合で, L をバンド手術して得られる結び目が K に同値となるものが存在することである.

\mathbb{R}^3 の部分集合 A と \mathbb{R} の部分集合 J に対して, \mathbb{R}^4 の部分集合 $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid \mathbf{x} \in A, t \in J\}$ を $A \times J$ で表すことにする. $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ 内にプロパーに埋め込まれた円盤 D が**リボン円盤**であるとは, D が第4座標に関して極小点を持たないときをいう. 次の定理はよく知られたリボン結び目の特徴付けである.

定理 2.2. 結び目 K がリボン結び目であるための必要十分条件は $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ 内のリボン円盤 D で, $\partial D = K \times \{0\}$ を満たすものが存在することである.

結び目が $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ 内にプロパーに埋め込まれた円盤の境界となるとき, スライス結び目という. リボン結び目はスライス結び目であるが, その逆は「スライス・リボン予想」と呼ばれる未解決問題である.

予想 2.3. ([3]) スライス結び目はリボン結び目である.

3. リボン曲面結び目

この節ではリボン曲面結び目 (cf. [16, 17]) とそれに関する結果をいくつか紹介する.

3.1. 4次元空間内のリボン交差

第2節で紹介した3次元空間内のリボン交差の概念は4次元空間内のリボン交差として拡張できる. 境界付きコンパクト3次元多様体 M の \mathbb{R}^4 へのはめ込みを $f: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ とする. 像 $f(M)$ の2重点集合の連結成分を Δ とし, その逆像 $f^{-1}(\Delta)$ を構成する2つの成分を Δ_1 と Δ_2 とする. Δ がリボン交差であるとは, Δ_1 が M 内にプロパーに埋め込まれた円盤であり, Δ_2 が M の内部に埋め込まれた円盤であるときをいう. 図4と図5はリボン交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャーである.

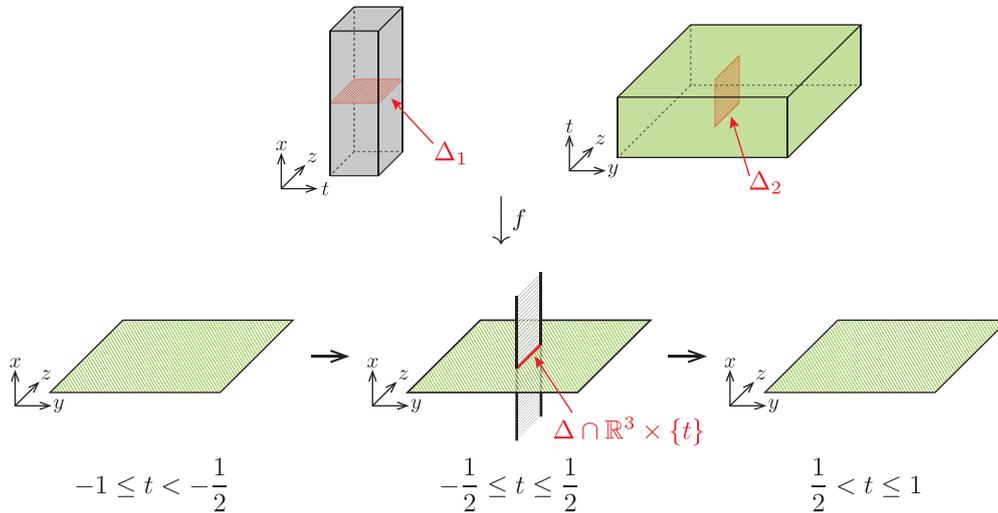


図 4: 4次元空間内のリボン交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (1)

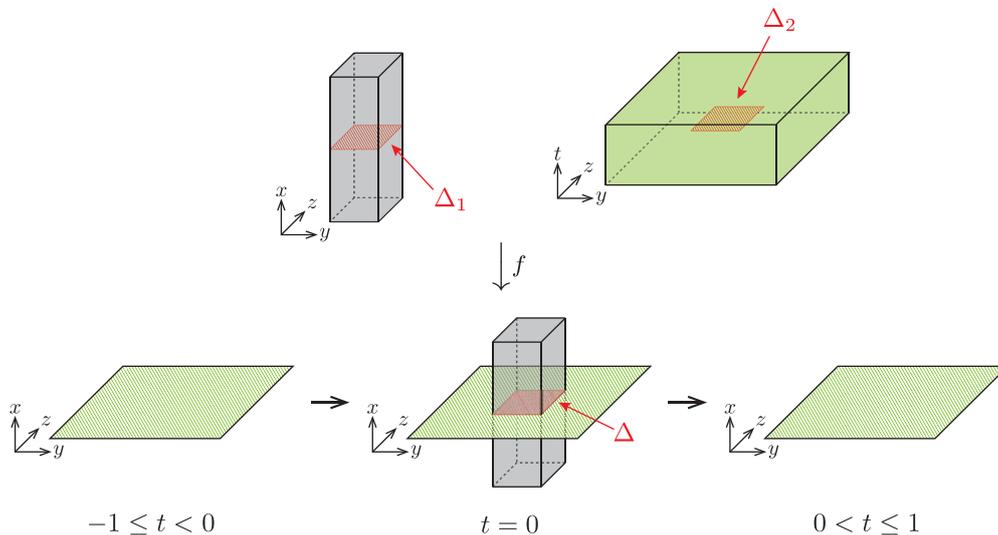


図 5: 4次元空間内のリボン交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (2)

3.2. リボン曲面結び目

曲面結び目 F がリボン曲面結び目であるとは, 多重点集合がリボン交差のみとなるようなハンドル体 V の \mathbb{R}^4 へのはめ込み $f: V \rightarrow \mathbb{R}^4$ で, F が V の境界 ∂V の f による像 $f(\partial V)$ に同値となるものが存在するときをいう. リボン曲面結び目は自己交差を持たない曲面結び目である.

\mathbb{R}^4 内に互いに交わらないように埋め込まれた $\mu(\geq 1)$ 個の3次元球体の境界は μ 個の S_0 となっている. これを自明な2次元絡み目といい, \mathcal{O} で表す. このとき, リボン曲面結び目は次のように表すことができる.

定理 3.1. 曲面結び目 F がリボン曲面結び目であるための必要十分条件は, ある自明な2次元絡み目 \mathcal{O} とそれに接着するコードの集合 Γ で, Γ に沿った1-ハンドル手術によって \mathcal{O} から得られる曲面結び目が F に同値となるものが存在することである.

さらに, リボン曲面結び目はKSS標準形[11]を用いて次のように特徴付けられることが知られている.

定理 3.2. 曲面結び目 F がリボン曲面結び目であるための必要十分条件は, F はKSS標準形かつ $r(F) = F$ であるように F を全同位で変形できることである. ここで, $r: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ は $r(x, y, z, t) = (x, y, z, -t)$ で定義される写像である.

つまり, リボン曲面結び目は同値な変形によってKSS標準形かつ \mathbb{R}^4 内の超平面 $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ に関して対称な位置に置くことができる.

3.3. リボン曲面結び目の仮想結び目を用いた表示

仮想結び目 [10] は, 一般ライデマイスター移動による仮想ダイアグラムの同値類である. ここで, 仮想ダイアグラムとは \mathbb{R}^2 内に横断的にはめ込まれた有向円周で, 各2重点に実交点または仮想交点の情報が指定されているものである (図6). 仮想結び目は



図6: 実交点と仮想交点および仮想ダイアグラム

結び目のガウスコード図式による研究 [10] や閉曲面上の結び目図式の安定同値類の研究 [6] に用いられるが, 神戸大学の佐藤進氏によってリボン曲面結び目 (リボン T^2 -結び目) の研究にも有効であることが示された [13]. 仮想結び目を用いたりボン曲面結び目の研究方法について説明する.

仮想ダイアグラム D からリボン T^2 -結び目のダイアグラム $\text{tube}(D) \subset \mathbb{R}^3$ を図7のように構成する. ただし, 実交点と仮想交点における対応は図8のように定める. この

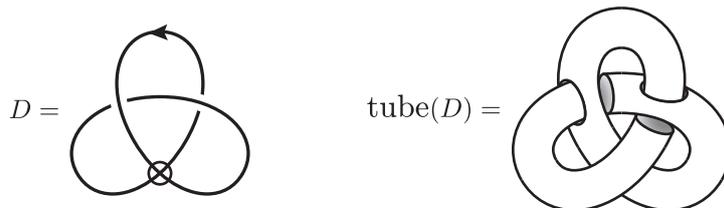


図7: 仮想ダイアグラム D から得られるリボン T^2 -結び目のダイアグラム $\text{tube}(D)$

対応において, $\text{tube}(D)$ は仮想交点に対応する部分で曖昧さが存在するが, $\text{tube}(D)$ に

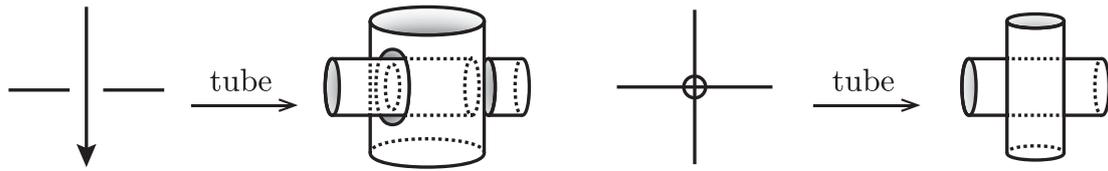


図 8: 実交点と仮想交点における対応

よって表されるリボン T^2 -結び目の同値類は D から一意的に定まる. 従って, 仮想ダイアグラム D に $\text{tube}(D)$ が表すリボン T^2 -結び目の同値類を対応させる写像

$$T_0 : \{ \text{仮想ダイアグラム} \} \rightarrow \{ \text{リボン } T^2\text{-結び目の同値類} \}$$

が定義される. このとき, 次が成り立つ.

定理 3.3. ([13]) 写像 T_0 は全射である. すなわち, 任意のリボン T^2 -結び目 F に対して, F と $\text{tube}(D)$ が表すリボン T^2 -結び目が同値となるような仮想ダイアグラム D が存在する.

定理 3.3 の状況で F を D に付随するリボン T^2 -結び目という. 写像 T_0 は仮想結び目の集合からリボン T^2 -結び目の同値類の集合への全射を誘導する [13] ⁵. よって, リボン T^2 -結び目は仮想結び目を用いて表すことができる. この表示法の利点の一つはリボン T^2 -結び目の結び目群 ⁶ を仮想ダイアグラムから直接計算できることにある.

仮想ダイアグラム D から得られる有限表示群 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$ を $G(D)$ で表す. ここで, $G(D)$ の各生成元 x_j は D の各弧のメリディアンに相当し, 各関係式 r_i は実交点に対して図 9 のように対応させる. リボン T^2 -結び目の結び目群は次のよう

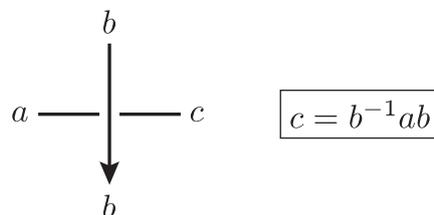


図 9: 実交点における $G(D)$ の関係式

に仮想ダイアグラムから直接計算できる.

定理 3.4. ([13], cf. [15]) F を仮想ダイアグラム D に付随するリボン T^2 -結び目とする. このとき, F の結び目群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ は群 $G(D)$ に同型である.

次節では上記で紹介したリボン曲面結び目に関するの結果をリボン・クラスプ曲面結び目の場合に拡張する.

4. リボン・クラスプ曲面結び目

この節では, 曲面結び目の新しいクラスであるリボン・クラスプ曲面結び目を導入し, リボン・クラスプ T^2 -結び目の半仮想ダイアグラムを用いた表示について述べる.

⁵ さらに写像 T_0 は溶接結び目の集合からリボン T^2 -結び目の同値類の集合への全射を誘導する. ここで溶接結び目とは, 「禁止移動」を法とする仮想結び目のことである.

⁶ 曲面結び目 F の補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ のことを F の結び目群という. 結び目群は曲面結び目の不変量である.

4.1. 4次元空間内のクラスプ交差

第2節で紹介した3次元空間内のクラスプ交差の概念を次のように4次元空間内のクラスプ交差として拡張する. 境界付きコンパクト3次元多様体 M の \mathbb{R}^4 へのはめ込みを $f: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ とする. 像 $f(M)$ の2重点集合の連結成分を Δ とし, その逆像 $f^{-1}(\Delta)$ を構成する2つの成分を Δ_1 と Δ_2 とする. Δ が**クラスプ交差**であるとは, 各 Δ_i は M 内に埋め込まれた円盤で, $\partial\Delta_i$ が2本の弧 α_i と β_i の和となるときをいう. ここで, α_i は M 内にプロパーに埋め込まれた弧であり, β_i は $\partial\alpha_i$ を繋ぐ ∂M 内の単純弧である. さらに, これらは $f(\alpha_1) = f(\beta_2)$ かつ $f(\alpha_2) = f(\beta_1)$ を満たす. 図10と図11と図12はクラスプ交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャーである.

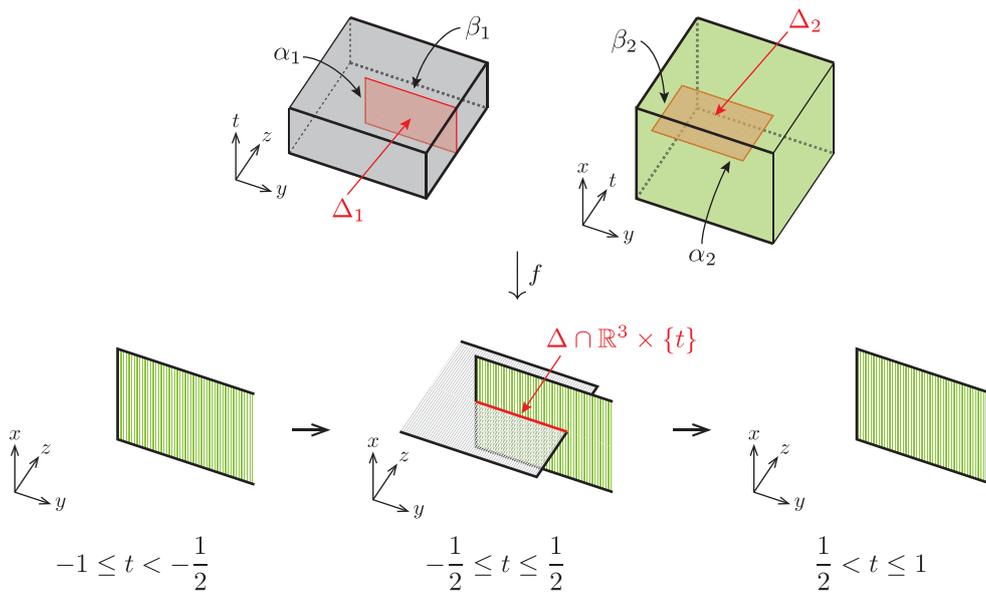


図 10: 4次元空間内のクラスプ交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (1)

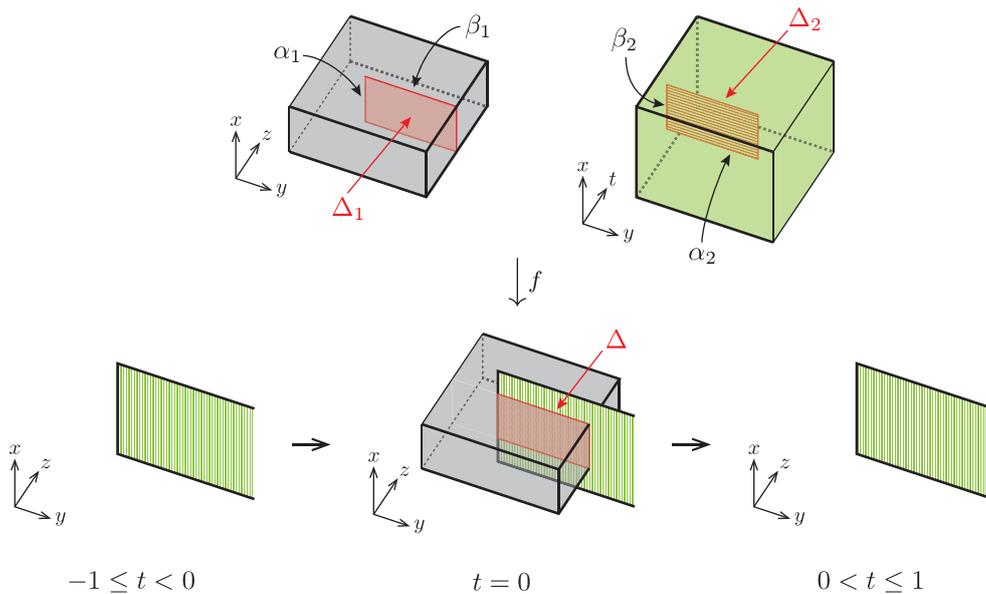


図 11: 4次元空間内のクラスプ交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (2)

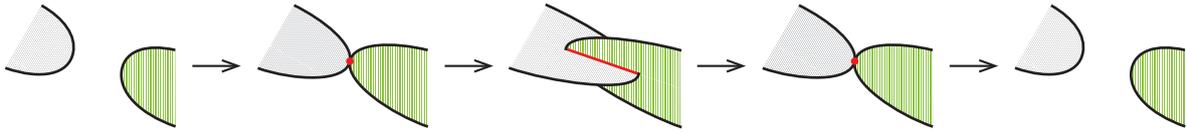


図 12: 4次元空間内のクラスプ交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (3)

4.2. リボン・クラスプ曲面結び目

定義 4.1. 曲面結び目 F がリボン・クラスプ曲面結び目であるとは、多重点集合がリボン交差かクラスプ交差のみであるハンドル体 V の \mathbb{R}^4 へのはめ込み $f: V \rightarrow \mathbb{R}^4$ で、 V の境界 ∂V の f による像 $f(\partial V)$ が F に同値となるものが存在するときをいう。

リボン・クラスプ曲面結び目はリボン曲面結び目の概念の拡張となっている。クラスプ交差の近傍では正の2重点と負の2重点が1つずつ現れるので、リボン・クラスプ曲面結び目は2重点を偶数個持つ。 \mathbb{R}^3 内の任意の結び目はクラスプ特異円盤を張ることが知られているが、曲面結び目に関しては次のことがわかる。

定理 4.2. 多重点集合がクラスプ交差のみであるようなハンドル体のはめ込みの境界となるリボン・クラスプ曲面結び目は自明である。

リボン・クラスプ曲面結び目はリボン曲面結び目と同じく自明な2次元絡み目 \mathcal{O} を用いて次のように表すことができる。

定理 4.3. 曲面結び目 F がリボン・クラスプ曲面結び目であるための必要十分条件は、ある自明な2次元絡み目 \mathcal{O} とそれに接着するコードの集合 Γ で、 Γ に沿った1-ハンドル手術とフィンガー移動によって \mathcal{O} から得られる曲面結び目が F に同値となるものが存在することである。

4.3. リボン・クラスプ曲面結び目の半仮想ダイアグラム表示

リボン・クラスプ T^2 -結び目の半仮想ダイアグラムを用いた表示を与える。

半仮想ダイアグラム [4] とは半仮想交点を許容する仮想ダイアグラムのことである(図13)。 $[4]$ では、仮想結び目の有限型不変量の研究において、半仮想交点を実交点と

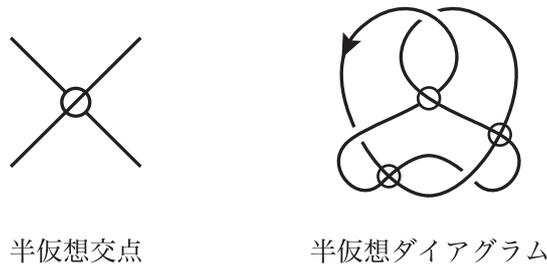


図 13: 半仮想交点と半仮想ダイアグラム

仮想交点の間の形式的な差によって導入した。ここでは半仮想ダイアグラムは仮想ダイアグラムの集合によって生成される自由 \mathbb{Z} -加群のある特別な元を表している。一方、半仮想交点は実交点を仮想交点に置き換える変形において、実交点が仮想交点に変わる瞬間に現れるとみなすことができる(図14)。後者の解釈は我々の目的であるリボン・クラスプ曲面結び目の研究に非常に良く適合している。

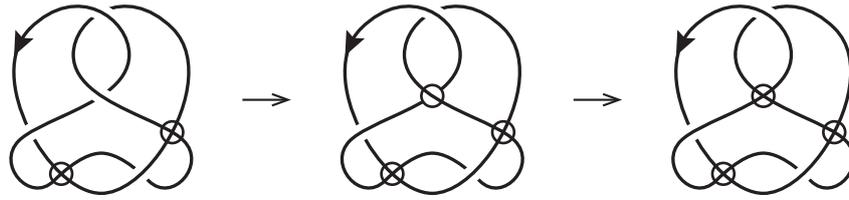


図 14: 半仮想ダイアグラムが現れる瞬間

リボン・クラスプ曲面結び目はリボン曲面結び目の拡張であり，半仮想ダイアグラムは仮想ダイアグラムの拡張である．我々は前節で紹介したリボン T^2 -結び目の仮想結び目による表示の拡張として，半仮想ダイアグラムとリボン・クラスプ曲面結び目（リボン・クラスプ T^2 -結び目）との関係性を新しく導入する．

半仮想ダイアグラムからリボン・クラスプ T^2 -結び目のダイアグラムを次のように構成する．第3.3項で紹介した $\text{tube}(D)$ の構成法を，実交点と仮想交点では以前と同じく図8のように，半仮想交点では図15のように対応させることで半仮想ダイアグラムからリボン・クラスプ T^2 -結び目のダイアグラムが構成できる．このダイアグラムも $\text{tube}(D)$ と表す．このとき，半仮想ダイアグラム D に $\text{tube}(D)$ が表すリボン・クラス

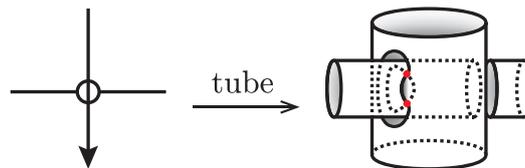


図 15: 半仮想交点における対応

プ T^2 -結び目の同値類を対応させる写像

$$T : \{ \text{半仮想ダイアグラム} \} \rightarrow \{ \text{リボン・クラスプ } T^2\text{-結び目の同値類} \}$$

が定義できる．写像 T に関して次が成り立つ．

定理 4.4. 写像 T は全射である．すなわち，任意のリボン・クラスプ T^2 -結び目 F に対して， F と $\text{tube}(D)$ が表すリボン・クラスプ T^2 -結び目が同値となるような半仮想ダイアグラム D が存在する．

この定理は定理3.3の自然な拡張となっている．定理4.4の状況で F を D に付随するリボン・クラスプ T^2 -結び目という．

半仮想ダイアグラム D に対して群 $G(D)$ を次のように定義する．

定義 4.5. 半仮想ダイアグラム D から得られる有限表示群 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$ を $G(D)$ で表す．ここで，各生成元 x_j は D の各弧のメリディアンに相当し，各関係式 r_i は実交点および半仮想交点に対して図16のように対応させる．

このとき，次が成り立つ．

定理 4.6. F を半仮想ダイアグラム D に付随するリボン・クラスプ T^2 -結び目とする．このとき， F の結び目群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ は群 $G(D)$ に同型である．

この定理は定理3.4の自然な拡張となっている．この定理を使うとリボン・クラスプ T^2 -結び目の結び目群を半仮想ダイアグラムから直接計算できる．

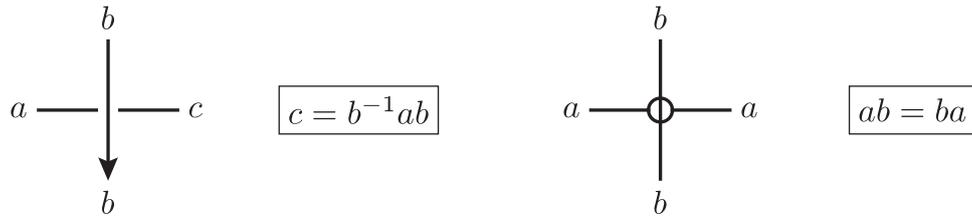


図 16: 実交点および半仮想交点における $G(D)$ の関係式

参考文献

- [1] J. Boyle, *Classifying 1-handles attached to knotted surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **306** (1988) 475–487.
- [2] A. J. Casson, *Three lectures on new-infinite constructions in 4-dimensional manifolds*, In: L. Guillou and A. Marin (Eds.), *À la Recherche de la Topologie Perdue*, Progr. Math., **62**, Birkhäuser (1986) 201–214.
- [3] R. H. Fox, *Some problems in knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), pp. 168–176, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [4] M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, *Finite type invariants of classical and virtual knots*, Topology **39** (2000), no.5, 1045–1068.
- [5] F. Hosokawa and A. Kawauchi, *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, Osaka J. Math., **16** (1979) 233–248.
- [6] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000) 93–106.
- [7] S. Kamada, *Unknotting immersed surface-links and singular 2-dimensional braids by 1-handle surgeries*, Osaka J. Math. **36** (1999) 33–49.
- [8] S. Kamada, *Vanishing of a certain kind of Vassiliev invariants of 2-knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999) 3421–3426.
- [9] S. Kamada, *On 1-handle surgery and finite type invariants of surface knots*, Topology Appl. **121** (2002), no. 1–2, 219–230.
- [10] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, Europ. J. Combinatorics **20** (1999) 663–690.
- [11] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki, *Descriptions on surfaces in four-space, I, Normal forms*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **10** (1982), 75–125.
- [12] R. Kirby, *The topology of 4-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **1374** Springer-Verlag (1989).
- [13] S. Satoh, *Virtual knot presentation of ribbon torus-knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000) 531–542.
- [14] O. Ya. Viro, *Local knotting of submanifolds*, Math. USSR-Sb. **19** (1973) 166–176.
- [15] T. Yajima, *On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in 4-space*, J. Math., Osaka City Univ., **13** (1962) 63–71.
- [16] T. Yajima, *On simply knotted spheres in R^4* , Osaka J. Math., **1** (1964) 133–152.
- [17] T. Yanagawa, *On ribbon 2-knots: The 3-manifold bounded by the 2-knots*, Osaka J. Math. **6** (1969) 447–464.

Symplectic topology and b-symplectic structures

David MARTINEZ TORRES (Pontificia Catolica University, Rio de Janeiro)*

1. Introduction and statement of main results

A symplectic structure on a manifold M is given by ω a closed 2-form maximally non-degenerate. The first fundamental result for symplectic structures is the existence around any point of Darboux coordinates $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ for ω :

$$\omega = \sum_{i_1}^n dx_i \wedge dy_i$$

Therefore symplectic structures on a fixed (even) dimension have no local invariants; this is also reflected in having an infinite dimensional group of symmetries: infinitesimal symmetries are vector fields $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfying: $\mathcal{L}_X \omega = 0$. In particular, any function $f \in C^\infty(M)$ produces any such infinitesimal symmetry via its Hamiltonian vector field X_f characterized by: $df = i_{X_f} \omega$.

Not unexpectedly, topology plays a major role in the study of symplectic structures, as illustrated by the following fundamental results:

- Surgery is central to the construction of closed symplectic manifolds, the key fact being the existence of normal forms in plenty of situations, a consequence of the so-called Moser's method [11, 7].
- Closed symplectic manifolds have symplectic submanifolds, which are very carefully chosen Poincaré duals of multiples of the (rational) class of the symplectic form [3].
- The existence of symplectic structures on open manifolds boils down to a homotopical obstruction [8].

Symplectic structures are a particular instance of **Poisson structures**: these are given by a bracket operation on smooth functions such that $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ is a Lie algebra over \mathbb{R} , and the Lie bracket is linked to the geometry of M by requiring $\{f, \cdot\}$ to be a derivation, the so-called Hamiltonian vector field of f .

Poisson structures abound: any Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ has an associated Poisson structure on its dual \mathfrak{g}^* ; any symplectic manifold (M, ω) is a Poisson manifold with bracket $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$; more generally, any foliated manifold with a leafwise symplectic form $(M, \mathcal{F}, \omega_{\mathcal{F}})$ is a Poisson manifold. In fact, a Poisson structure formalizes the notion of a possibly singular foliation by symplectic leaves; this foliation is the one integrating the distribution spanned by the Hamiltonian vector fields. For example, for the dual of a Lie algebra the symplectic foliation has as leaves the coadjoint orbits. Symplectic manifolds are exactly those Poisson manifolds whose (symplectic) foliation has just one leaf (the whole manifold).

The speaker would like to acknowledge the financial support from Chuo University and the organizers of the Topology Symposium.

2010 Mathematics Subject Classification: 53D15.

Keywords: Symplectic, b-symplectic, cobordism, submanifold, h-principle.

* e-mail: dfmtorres@gmail.com

It is natural to investigate which techniques from symplectic geometry go through to Poisson geometry. Unfortunately, the answer is almost none. The reason is that Poisson structures are far too general (for example, having singular foliation forces the appearance of local invariants). Still, one would like to describe families of Poisson structures which behave as much as possible as symplectic structures. The purpose of this presentation is to discuss joint work with P. Frejlich and E. Miranda [6] in which we describe one such family.

Another way to recast the definition of a Poisson structure on M is as a bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ which obeys the P.D.E. $[\pi, \pi] = 0$, where $[\cdot, \cdot]$ is the Schouten bracket of multivector fields. If ω is a symplectic form, its associated Poisson structure is the one with bundle map $\pi^\sharp := \omega^\sharp^{-1}$ (the Poisson structure in the ‘inverse’ of the symplectic form). Conversely, Poisson structure π on M^{2n} is symplectic exactly when the section $\wedge^n \pi$ of the line bundle $\wedge^{2n} TM$ does not meet the zero section. Hence, it is natural to relax the symplectic condition as follows:

Definition 1 [10] *A Poisson manifold (M^{2n}, π) is of b -symplectic type if $\wedge^n \pi$ is transverse to the zero section $M \subset \wedge^{2n} TM$.*

Such structures were first defined, in the case of dimension two, by Radko [18], who called them *topologically stable* Poisson structures. Poisson structures of b -symplectic type have also appeared under the names *log symplectic* [9], [2], [13].

Poisson structures of b -symplectic type –also referred to as **b -symplectic structures**– do not stay too far from being symplectic. One can think of them as symplectic structures which blow up to infinity along hypersurfaces in a controlled way. Indeed, The transversality condition $\wedge^n \pi \pitchfork M$ ensures that the **singular locus** $Z = Z(\pi) = \wedge^n \pi^{-1}0$ is a codimension-one submanifold of M , which by the Poisson condition is itself foliated in codimension one by symplectic leaves of π .

1.1. Statement of the main results

We shall start by describing a link between b -symplectic manifolds and cobordisms in the symplectic category with appropriate boundary behavior.

Definition 2 *A cosymplectic structure on a manifold Z^{2n-1} consists of a pair of closed forms $(\theta, \eta) \in \Omega^1(Z) \times \Omega^2(Z)$, such that $\theta \wedge \eta^{n-1}$ is a volume form.*

The prototype of a cosymplectic structure is a **symplectic mapping torus**, i.e. the suspension of a symplectomorphism of a symplectic manifold. It turns out that the singular locus a b -symplectic manifold is not a just Poisson submanifold. An additional choice of data makes a cosymplectic structure appear [10]. Also, cosymplectic structures appear naturally on boundaries (or hypersurfaces) of symplectic manifolds endowed with a symplectic vector field transverse to the boundary (what one may call a ‘flat end’ in symplectic geometry).

Definition 3 *A cosymplectic cobordism (M, ω, θ) is a compact symplectic manifold (M, ω) together with $\theta \in \Omega^1(\partial M)$ making $(\partial M, \theta, \omega|_{\partial M})$ a cosymplectic manifold.*

Our first result makes a direct link between b -symplectic manifolds and cosymplectic cobordisms:

Proposition 1 [6] *A b -symplectic manifold (M, π) can be canonically factored into a composition of (connected) cosymplectic cobordisms. The cobordisms are obtained as the result of cutting M open along its singular locus.*

A main concern for us is the construction of ‘enough interesting examples’ of closed b -symplectic manifolds. More precisely, it is natural to ask if a cosymplectic structure (Z, θ, η) may appear of singular locus of a closed b -symplectic manifold. Proposition 1 implies that this problem is equivalent to finding a cosymplectic cobordism from (Z, θ, η) to the empty set, i.e, to finding a **symplectic filling** for it:

Proposition 2 [6] *A compact cosymplectic manifold (Z, η, θ) is the singular locus of a compact, orientable b -symplectic manifold (M, π) without boundary, if and only if (Z, η, θ) is symplectically fillable.*

Symplectic fillings of contact manifolds –and more generally symplectic cobordisms with concave/convex boundaries– are central to Symplectic Topology, whereas the case of cosymplectic (or flat) boundaries has received comparatively little attention. In this respect Eliashberg has shown that when Z is a 3-dimensional symplectic mapping torus then it is symplectically fillable [4].

Our second result follows from observing that symplectic fillability of all cosymplectic 3-manifolds would be a consequence of symplectic fillability of all symplectic mapping tori, hence solving the cosymplectic existence problem in dimension 3:

Theorem 1 [6] *Any compact cosymplectic manifold of dimension 3 is the singular locus of a compact b -symplectic 4-manifold without boundary.*

Our third result describes a class of symplectomorphisms φ which yield symplectically fillable symplectic mapping tori in arbitrary dimensions; namely, Dehn twists τ_l around parametrized Lagrangian spheres $l \subset (F, \sigma)$ and their inverses τ_l^{-1} :

Theorem 2 [6] *Let Z be a compact symplectic mapping torus. Assume that φ is Hamiltonian isotopic to*

$$\tau_{l_1} \cdots \tau_{l_m} \tau_{l_{m+1}}^{-1} \cdots \tau_{l_{m'}}^{-1},$$

where $l_i : S^{n-1} \hookrightarrow (F, \sigma)$, $i = 1, \dots, m'$ are parametrized Lagrangian spheres.

Then there exists a compact b -symplectic manifold without boundary, whose cosymplectic singular locus is Z .

Another important question we address in the construction b -symplectic submanifolds. These are, roughly speaking, submanifolds of M transverse to the singular locus $Z(\pi)$ and such that π induces on them a b -symplectic structure. Any such submanifold, upon factoring (M, π) into cosymplectic cobordisms, would give rise to a symplectic submanifold on each connected cobordism with appropriate boundary behavior. Hence, it is natural to try to construct b -symplectic submanifolds by reversing the previous procedure. Our fourth result shows that this is possible under a mild cohomological assumption.

Theorem 3 [6] *Every (M, π) rational compact b -symplectic manifold without boundary has closed b -symplectic submanifolds $W \hookrightarrow (M, \pi)$ of any dimension intersecting every connected component of $Z(\pi)$. If M has dimension four, then the rationality assumption can be dropped.*

The final issue we address is the existence of symplectic structures on open manifolds:

Theorem 4 [6] *Let M be an orientable, open manifold. Then M is b -symplectic if and only if $M \times \mathbb{C}$ is almost-complex.*

In fact, the story here is completely analogous to the symplectic case: supporting a b -symplectic structure imposes restrictions on the de Rham cohomology of a compact manifold without boundary [2, 12], but these do not apply to open manifolds. There, the existence of b -symplectic structures becomes a purely homotopical question, and we show that they abide by a version of the h -principle of Gromov [8].

2. The b -tangent bundle and Moser's method

In this section we briefly describe how the reformulation of the b -symplectic condition as a closed non-degenerate section of a suitable bundle, allows for an analog of Moser's method for b -symplectic manifolds. In particular, it produces (semilocal) normal forms around the singular locus.

The category of **b -manifolds** has as objects pairs (M, Z) , where $Z \subset M$ is a closed submanifold of codimension one with empty boundary, and as morphisms $f : (M, Z) \rightarrow (M', Z')$ those maps $f : M \rightarrow M'$ transverse to Z' , and pulling back Z' to Z .

The Lie subalgebra $\mathfrak{X}(M, Z) \subset \mathfrak{X}(M)$ consisting of those vector fields v which are tangent to Z can be identified with the space of smooth sections of the **b -tangent bundle** $T(M, Z)^b \rightarrow M$. There is a bundle map $T(M, Z)^b \rightarrow TM$ which is the identity outside Z . Its restriction to Z defines an epimorphism $T(M, Z)^b|_Z \rightarrow TZ$, whose kernel $N(M, Z)^b$ has a canonical trivialization ν : if one expresses Z locally as $x_1 = 0$ in a coordinate chart (x_1, \dots, x_n) , then $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ is independent of choices along Z .

One defines b -forms as sections of $\bigwedge^p (T^*(M, Z)^b)$, and denotes them by $\Omega^*(M, Z)^b$. They form a complex with a differential d^b given by a Koszul type formula, and which matches the de Rham differential outside Z . In fact, there is a short exact sequence of chain complexes:

$$0 \rightarrow (\Omega^\bullet(M), d) \rightarrow (\Omega^\bullet(M, Z)^b, d^b) \xrightarrow{\flat} (\Omega^{\bullet-1}(Z), d) \rightarrow 0, \quad (1)$$

where \flat maps a b -form ω to its contraction with the canonical ν .

A b -map $f : (M, Z) \rightarrow (M', Z')$ induces a maps of b -complexes by pulling back sections in the usual fashion.

A b -form $\omega \in \Omega^2(M, Z)^b$ will be called non-degenerate if ω^n is nowhere vanishing, and **symplectic** if it is non-degenerate and closed, $d^b\omega = 0$.

Example 1 Let $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ be coordinates in \mathbb{R}^{2n} , and consider the b -manifold $(\mathbb{R}^{2n}, x_1 = 0)$. Then

$$\omega = \frac{dx_1}{x_1} \wedge y_1 + \sum_{j=2}^n dx_j \wedge dy_j$$

is a b -symplectic form on $(\mathbb{R}^{2n}, x_1 = 0)$

Example 2 In the unit sphere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, consider h the height function and θ the polar coordinates associated to rotations around the z -axis. Then

$$\omega = \frac{dh}{h} \wedge d\theta$$

is a b -symplectic form on $(S^2, h = 0)$.

This b -symplectic form is invariant under the antipodal map, hence descending to a b -symplectic form on $(\mathbb{RP}^2, \mathbb{RP}^1)$.

The first important result is:

Proposition 3 [10] *There is a bijective correspondence between symplectic forms on (M, Z) , and Poisson structures of b -symplectic type with singular locus Z .*

The Poisson structures of b -symplectic type corresponding to examples 1 and 2 are:

$$x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial}{x_1} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \wedge \frac{\partial}{x_j}, \quad h \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial h}$$

It is not surprising then that Moser's method carries through to b -symplectic manifolds. At the local level, there is a Darboux theorem [17] that says that around a point in the singular locus Z there exists coordinates so that a b -symplectic form ω writes as in example 1. At a global level, on a compact b -manifold a path of deformations of b -symplectic forms which are cohomologous (for the cohomology of the b -complex) corresponds to an isotopy [13].

Let us discuss the seminormal form around Z and the appearance of a cosymplectic structure on Z . Firstly, the contraction with the canonical section $\theta := i_\nu \omega|_Z = \flat \omega|_Z$ is a closed 1-form, and it is nowhere vanishing since both ω and ν are nowhere vanishing. Of course, the foliation defined by θ is the symplectic foliation induced on Z by the Poisson structure that corresponds to ω . Assuming for simplicity that M is orientable, we can always find $t \in C^\infty(M)$ a function vanishing linearly exactly at $Z(\omega)$. Then its Hamiltonian vector field X_t is tangent to the singular locus, so it is a section of $T(M, Z)^b$ which again does not vanish near Z . Mimicking the construction in the symplectic category, is not difficult to see that w becomes independent of the local coordinate t . In fact, the difference

$$\eta := \omega - \frac{dt}{t} \wedge \theta$$

becomes an honest 2-form independent of the local 'time' coordinate $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, so one can write around Z [10]:

$$\omega = \frac{dt}{t} \wedge \theta + \eta, \quad \eta \in \Omega_{\text{cl}}^2(Z)$$

The closed 2-form η is symplectic on the codimension 1-leaves of the foliation defined for θ , so (Z, θ, η) becomes a cosymplectic manifold.

3. Cobordisms and b -symplectic manifolds

Let (M, ω) be an oriented closed b -symplectic manifold. Upon the choice of a local time coordinate t around the singular locus Z , we have the normal form in $Z \times [-\epsilon, \epsilon]$:

$$\omega = \frac{dt}{t} \wedge \theta + \eta, \quad \eta \in \Omega_{\text{cl}}^2(Z)$$

If we denote $M^c = M \setminus [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$, then we obtain:

- An oriented compact symplectic manifold with boundary.
- A cosymplectic structure in the boundary $(\partial M^c, \theta, \eta)$.
- A cosymplectic involution $\iota: (\partial M^c, \theta, \eta) \rightarrow (\partial M^c, \theta, \eta)$ exchanging boundary components.

(M, ω) can be recovered from $(M^c, \theta, \eta, \iota)$ by gluing the product neighborhood of Z using ι . Conversely, if (X, θ, η, ι) is an oriented compact cosymplectic cobordism with an involution in the boundary exchanging components, one may ask whether there is a structure naturally obtained in M , the result of gluing ∂X using ι . Each boundary component of ∂X can be labeled as an inward or an outward one: The component is outward if the orientation in the component inherited by the orientation of M^{2n} (outward normal first) is the one corresponding to the volume form $\theta \wedge \omega|_{\partial X}^{n-1}$; otherwise it is inward. It follows from standard results in symplectic geometry, that if ι identifies an inward and an outward boundary component, then the symplectic form is compatible with the gluing. If both components $\partial X_j, \iota \partial X_j$, are inward or outward, then the symplectic form will never extend to the gluing, but rather, we can insert a tube:

$$(\partial X_j \times [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}], \pm \frac{dt}{t} \wedge \theta_j + \omega|_{\partial X_j}),$$

the sign corresponding to the inward or outward case. The previous discussion summarizes as follows:

Proposition 4 [6]

1. Any closed oriented b -symplectic manifold (M, ω) can be factored as a composition of b -symplectic cobordisms.
2. If (X, θ, η, ι) is an oriented compact cosymplectic cobordism with an involution in the boundary exchanging components, then the result of gluing the boundaries using ι is a closed manifold with a canonical b -symplectic structure; the singular locus corresponds to pairs of identified boundary components which are both inward or outward.

The previous proposition offers an interesting justification for b -symplectic structures: they appear naturally when composing cosymplectic cobordisms.

Corollary 1 Let (X, ω, θ) be a cosymplectic cobordism. Then its double has a canonical b -symplectic structure.

Example 2 is the double of a disk with any symplectic form.

4. Realizing cosymplectic structures

It is natural to ask which cosymplectic structures appear as the singular locus of a closed b -symplectic manifold. The relation with cobordisms readily implies that (Z, θ, η) can be realized as one such symplectic locus if it is cosymplectically cobordant to the empty set (by taking its double!), i.e., if it is what we call symplectically fillable (the flat boundary of a closed symplectic manifold).

Among cosymplectic structures the simplest ones are those for which θ has rational periods, for these are exactly the symplectic mapping tori. It is not difficult to see that using cosymplectic cobordisms which are topologically trivial (products) one can:

1. Reduce the symplectic fillability question for general cosymplectic structures to symplectic mapping tori.
2. Check that the symplectic fillability question for symplectic mapping tori only depends on the Hamiltonian isotopy class of the monodromy.

For the first point simply observe that for (Z, θ, η) a cosymplectic structure on Z closed,

$$(Z \times [0, 1], dt \wedge \theta + \eta + dt \wedge \theta')$$

is a cosymplectic cobordism from (Z, θ, η) (inward side) to $(Z, \theta + \theta', \eta)$ (outward side), as long as θ' has small enough C^0 -norm. But we can always use such deformations to ensure that $\theta + \theta'$ has rational periods.

In dimension three one can use cosymplectic cobordisms which are topologically non-trivial to modify the monodromy of any surface mapping torus. This is based on the following well-known facts:

1. The mapping class group is generated by (positive) Dehn twists around (oriented) curves.
2. Attaching a 2-handle to one such curve with framing -1 produces a cobordism whose new end has the monodromy of the latter surface bundle composed with the corresponding positive Dehn twist.
3. The construction is symplectic, in the sense that the elementary cobordism admit a symplectic form and a cosymplectic structure in the boundary corresponding to the prescribed surface bundles.

This reduces the filling question to filling surface bundles with monodromy isotopic to the identity. Here arises a subtle point. Dehn twists are defined up to symplectic isotopy and not to Hamiltonian isotopy. So our problem is not quite reduced to the trivial one of filling the cosymplectic manifold $(\Sigma \times S^1, \theta, \eta)$ (filled by $\Sigma \times D^2$ with the obvious product symplectic structure), but filling the ‘twisted’ $(\Sigma \times S^1, \theta, \eta + \alpha \wedge \theta)$, $\alpha \in \Omega_{cl}^1(\Sigma)$. Fortunately, there is a rather non-trivial result by Eliashberg [4] that grants the existence of such a symplectic filling, this completing the proof of Theorem 1

In higher dimensions, the problem of filling arbitrary symplectic tori is much harder, because little is known of the structure of the group of Hamiltonian isotopy classes of symplectomorphisms beyond the case of surfaces.

Still, one has:

1. A notion of generalized Dehn twist around a Lagrangian sphere (defined up to Hamiltonian isotopy).
2. A result saying that attaching a middle handle to such a sphere with an appropriate framing produces a cobordism whose new end has the monodromy of the latter surface bundle composed with the corresponding generalized Dehn twist [15], and so that the construction is symplectic, in the sense that the elementary cobordism admits a symplectic form and a cosymplectic structure in the boundary with the corresponding to the prescribed symplectic mapping tori.

This allows to fill symplectic mapping tori whose monodromy are certain words in such generalized Dehn twists, as asserted in Theorem 2.

5. b -symplectic submanifolds

A fundamental result in symplectic topology says that any compact symplectic manifold has symplectic submanifolds [3]. It is natural to ask the same question in the b -symplectic setting. For a b -symplectic (M, ω) , a b -symplectic submanifold W is a submanifold intersecting the singular locus Z transversely, and so that ω pull backs to a b -symplectic form on $(W, Z \cap W)$.

If W is such a submanifold, upon factoring M we will see W^c as a submanifold of $(M^c, \omega, \theta, \iota)$ with the following properties:

- W^c is a symplectic submanifold.
- W^c intersects ∂M^c transversely and θ pullbacks to a no-where vanishing 1-form in the boundary of W^c .
- ∂W^c is stable under the involution ι .

Donaldson's results has been refined for cosymplectic cobordisms with involution [14]: if $(X, \omega, \theta, \iota)$ is one such cobordism so that $[\omega]$ is a rational class, then there exists $Y \subset X$ submanifolds with the aforementioned properties.

To try to construct a b -symplectic submanifold, one starts with Y a submanifold of $(M^c, \omega, \theta, \iota)$ as above, and the difficulty is that upon gluing back $(M^c, \omega, \theta, \iota)$ into (M, ω) , we will generically get a non-smooth submanifold. This is because if we start with $W \subset (M, \omega)$ a b -symplectic submanifold, additionally, we may choose the local transverse coordinate t so that W also inherits a product structure (i.e. the Hamiltonian vector field X_t is tangent to W).

So one either needs to build submanifolds Y of $(M^c, \omega, \theta, \iota)$ compatible with a given product structure in the boundary, or to analyze when for such a given Y one can find a product structure near the boundary compatible with Y . If there is such a structure, then one easily checks that at points $x \in \partial Y$, the symplectic orthogonal $T_x Y^\omega$ must be tangent to ∂X at x . In fact, it is not difficult to prove that that infinitesimal tangency condition suffices to construct a product structure compatible with Y .

In any case, one can analyze if for a given Y as above, one can isotope it near the boundary (and fixing the boundary) through symplectic submanifolds so that the tangency condition is achieved. Note that this is by no means straightforward, because this is a 'large deformation', and one cannot use the openness of the symplectic condition.

At the linear level –and in the lowest possible dimension $2n = 4$ – we have two points in $\text{SympGr}^+(2, 4)$ the Grassmannian of oriented two planes in \mathbb{R}^4 , corresponding to the tangent plane $T_x Y$ and the tangency we have to achieve. Any non-linear solution should be based upon choosing 'geodesics' in this linear setting. Fortunately, the submanifolds Y coming from Donaldson theory have the additional property of being 'almost' J -complex w.r.t. any fixed compatible almost complex structure. At the linear level, this fixes a core of the Grassmannian associated to the fixed Cartan decomposition of $\text{Sp}(4) = \text{SU}(2)P$, and $T_x Y$ belongs to this core. The Cartan decomposition itself provides a 'geodesic' joining our two points.

Based on the above ideas, it is possible to perturb Y into Y^t a symplectic submanifold with the appropriate tangency condition.

To summarize the proof of Theorem 3, we start with (M, ω) a closed rational b -symplectic manifold. The rationality assumption means that $(M^c, \omega, \theta, \iota)$ is a rational symplectic manifold. Then we construct Y the first symplectic submanifold, and finally

we perturb it into Y^t another symplectic submanifold which upon gluing $(M^c, \omega, \theta, \iota)$ into (M, ω) becomes a (smooth) b -symplectic submanifold.

The rationality assumption does not appear in the symplectic setting. This is due to the fact that any symplectic class can be approximated by rational ones, and the symplectic submanifolds constructed by Donaldson's methods are well-behaved w.r.t. this approximation. Unfortunately, our deformation/smoothing process is not well-behaved in this respect. The exception is dimension 4, the reason being that symplectic classes can be approximated by rational ones so that no perturbation occurs near the boundary (this because degree 2 cohomology in dimension 4 is isomorphic to compactly supported degree 2 cohomology).

6. An h-principle for b -symplectic structures

A necessary condition for a manifold M^{2n} to be symplectic is that it carry a non-degenerate two-form, or, equivalently, an almost-complex structure. If M is compact, we have a further necessary condition, namely, that there be a degree-two cohomology class $\tau \in H^2(M)$ with $\tau^n \neq 0$.

For *open* manifolds M – that is, those manifolds, none of whose connected components is compact without boundary – a classical theorem of Gromov [8] states that the sole obstruction to the existence of a symplectic structure is that M be almost-complex. More precisely, given any non-degenerate two-form $\omega_0 \in \Omega^2(M)$ and any degree-two cohomology class $\tau \in H^2(M)$, there is a path $\omega : [0, 1] \rightarrow \Omega^2(M)$ of non-degenerate two-forms connecting ω_0 to ω_1 , $d\omega_1 = 0$, $[\omega_1] = \tau$.

We consider now the case of b -symplectic structures. Recall that b -symplectic manifolds need *not* be oriented as usual manifolds, so in particular they may fail to be almost-complex. However:

Lemma 1 *If an orientable M admits a b -symplectic structure ω , then $M \times \mathbb{C}$ is almost-complex.*

The proof follows an essentially an argument in linear algebra that can be traced back to [1]: the difficulty is around the singular locus. Using the Darboux normal form

$$\omega = \frac{dx_1}{x_1} \wedge y_1 + \sum_{j=2}^n dx_j \wedge dy_j,$$

there is an obvious choice of almost complex structure for $t \neq 0$, the difference being that for $t < 0$ it is i in the x_1, y_1 plane, and for $t > 0$ it is $-i$ on that plane. By adding an extra complex dimension, it is easy to write down a path of almost complex structures J_s in \mathbb{R}^4 such that $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ is complex for J_0, J_1 , the first one being i and the second one $-i$.

In order to prove that if M open is orientable and $M \times \mathbb{C}$ is almost complex, there exists a b -symplectic structure, we need to introduce the analogs of non-degenerate two-forms:

Definition 4 *A bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(M^{2n})$ is almost b -symplectic if its top exterior power $\bigwedge^n \pi$ is transverse to the zero section, and along the zero locus $Z = Z(\pi)$ we have $\pi^\sharp(T^*M|_Z) \subset TZ$*

Theorem 5 *On an open manifold M , an almost b -symplectic bivector π_0 is homotopic through almost b -symplectic bivectors to a Poisson bivector π_1 . Moreover, one can arrange that $Z(\pi_1)$ be non-empty if $Z(\pi_0)$ is non-empty.*

This statement is a result of checking that 1-jets of Poisson bivectors of b -symplectic type forms a microflexible differential relation, invariant under the pseudogroup of local diffeomorphisms of M , cf. [8]. Alternatively, one may follow the more visual scheme of proof of [5].

Let π_0 be an almost b -symplectic bivector, so it can be interpreted as a non-degenerate b -form ω_0 in $(M, Z(\pi_0))$.

- The b -differential $d^b : \Omega^p(M, Z(\pi_0))^b \rightarrow \Omega^{p+1}(M, Z(\pi_0))^b$ can be factored as a composition $\tilde{d}^b \circ j_1$, where j_1 denotes the 1-jet map

$$j_1 : \Gamma(M, \bigwedge^p T^*(M, Z(\pi_0))^b) \rightarrow \Gamma(M, J_1 \bigwedge^p T^*(M, Z(\pi_0))^b)$$

and

$$\tilde{d}^b : \Gamma(M, J_1 \bigwedge^p T^*(M, Z(\pi_0))^b) \rightarrow \Gamma(M, \bigwedge^{p+1} T^*(M, Z(\pi_0))^b)$$

is induced by a bundle map

$$\tilde{d}^b : J_1 \bigwedge^p T^*(M, Z(\pi_0))^b \rightarrow \bigwedge^{p+1} T^*(M, Z(\pi_0))^b$$

- One checks that \tilde{d}^b is an epimorphism with contractible fibres; in particular, we can lift ω_0 to $\tilde{\omega}_0 \in \Gamma(M, J_1 \bigwedge^p T^*(M, Z(\pi_0))^b)$.
- Since M is an open manifold, there exists a subcomplex K of a smooth triangulation of M , of positive codimension, with the property that, for an arbitrarily small open $U \subset M$ around K , there exists an isotopy of open embeddings $g_t : M \hookrightarrow M$, $h_0 = \text{id}_M$, with $g_1(M) \subset U$ and $g_t|_K = \text{id}_K$. We will refer to K as a core of M , and say that g_t compresses M into U . Note in passing that one can always find a core K of M meeting $Z(\pi_0)$.
- Fix then a core K of M , and a compression of M into an open U around K . The Holonomic Approximation theorem of [5] then says that we can find

- an isotopy h_t of M mapping K into U ;
- an open $V \subset U$ around $h_1(K)$;
- a section $\alpha \in \Gamma(V, T^*(M, Z(\pi_0))^b)$

such that $j_1 \alpha$ is so C^0 -close to $\tilde{\omega}_0$ that we can find a homotopy

$$\tilde{\omega}(t) \in \Gamma(V, J_1 T^*(M, Z(\pi_0))^b),$$

connecting $\tilde{\omega}_0|_V$ to $j_1 \alpha$, and with $\tilde{d}^b \tilde{\omega}_t$ non-degenerate b -forms on V .

- Now regard the compression g_t as a smooth family of b -maps

$$g_t : (M, Z_t) \rightarrow (M, Z(\pi_0)), \quad Z_t := g_t^{-1} Z(\pi_0),$$

and set $\omega_1 := d^b(g_1^* \alpha) \in \Omega^2(M, Z_1)^b$.

- Observe that $\widehat{\omega}_t^1 := g_t^* \widetilde{\omega}_0$ connects $\widetilde{\omega}_0$ to $g_1^*(\widetilde{\omega}_0|_V)$, and $\widehat{\omega}_t^2 := g_1^* \widetilde{\omega}(t)$ connects $g_1^*(\widetilde{\omega}_0|_V)$ to a lift of ω_1 . Let $\widehat{\omega}_t$ denote the concatenation of $\widehat{\omega}_t^1$ and $\widehat{\omega}_t^2$:

$$\widehat{\omega}_t := \begin{cases} \widehat{\omega}_{2t}^1 & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \widehat{\omega}_{2t-1}^2 & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Then $t \mapsto \pi_t := \widehat{\omega}_t^{-1} \in \mathfrak{X}^2(M, Z_t)^b$ defines a homotopy of almost b -symplectic bivectors between π_0 and a Poisson π_1 .

The proof of theorem 4 results from observing the the presence of an almost complex structure on $M \times \mathbb{C}$, grants the existence of almost b -symplectic bivectors on M orientable (constructed out of the almost symplectic structure on $M \times \mathbb{C}$).

References

- [1] A. Cannas da Silva, V. Guillemin, C. Woodward *On the unfolding of folded symplectic structures*, Math. Res. Lett **7** (2000), 35–53.
- [2] G. Cavalcanti, *Examples and counter-examples of log-symplectic manifolds*, arXiv:1303.6420
- [3] S. K Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry*, J. Differential Geom. **44** (1996), 666–705.
- [4] Y. Eliashberg, *A few remarks about symplectic filling*, Geometry and Topology 8 (2004) 277–293.
- [5] Y. Eliashberg, N. Mishachev, *Holonomic approximation and Gromov’s h -principle*, in: Essays on Geometry and Related Topics: Mémoires dédiés à André Hæfliger, Monogr. Enseign. Math. **38** 2 Vols. (2001), 271–285.
- [6] P. Frejlich, D. Martinez Torres, E. Miranda, *Symplectic topology of b -symplectic manifolds*. Preprint arXiv:1312.7329.
- [7] R. Gompf, A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society (1999)
- [8] M. Gromov, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **9**, Springer-Verlag (1986)
- [9] M. Gualtieri, S. Li, *Symplectic groupoids of log symplectic manifolds*, Int. Math. Res. Notices, First published online March 1, 2013 doi:10.1093/imrn/rnt024.
- [10] V. Guillemin, E. Miranda, A. R. Pires, *Symplectic and Poisson geometry on b -manifolds*, Adv. Math., 264, (2014), 864–896.
- [11] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford UP (1998).
- [12] I. Marcut, B. Osorno Torres, *On cohomological obstructions to the existence of log symplectic structures*, arXiv:1303.6246
- [13] I. Marcut, B. Osorno Torres, *Deformations of log symplectic structures*, J. London Math. Soc. (2014) 90 (1): 197-212.
- [14] D. Martínez Torres, *The geometry of 2-calibrated structures*, Portugal. Math. (N.S.) Vol 66, Fasc. 4, (2009), 427–512.
- [15] D. Martínez Torres, *Codimension-one foliations calibrated by nondegenerate closed 2-forms*, Pacific J. Math. **261** (2013), no. 1, 165–217.
- [16] R. Melrose, *Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem*, Research Notices in Mathematics, A.K. Peters, Wellesley (1993).
- [17] R. Nest, B. Tsygan, *Formal deformations of symplectic manifolds with boundary*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **481** (1996), 27–54.

- [18] O. Radko, *A classification of topologically stable Poisson structures on a compact oriented surface*, J. Symp. Geo. **1** No. 3 (2002), 523–542.

Chain level operations in string topology via de Rham chains

入江 慶 (京都大学数理解析研究所)*

1. スtringトポロジー

Stringトポロジーは, Chas-Sullivan [2] が多様体¹の自由ループ空間のホモロジー群の上に Batalin-Vilkovisky 代数の構造を見出したことから始まった研究領域である. 本節ではまずこれについて述べ, 本稿の主題である鎖複体レベルの代数構造へと話を進めたい.

1.1. Chas-Sullivan ループ積

初めに, 最も基本的な演算である (Chas-Sullivan) ループ積の定義を説明する. M を d 次元有向閉多様体, $\mathcal{L}M := C^\infty(S^1, M)$ をその自由ループ空間とする (ただし $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). 以降しばしば $\mathcal{L}M$ を \mathcal{L} と略記し, また $\mathbb{H}_*(\cdot) := H_{*+d}(\cdot)$ とおく. 評価写像 $e: \mathcal{L} \rightarrow M; \gamma \mapsto \gamma(0)$ に関するファイバー積

$$\mathcal{L}_e \times_e \mathcal{L} := \{(\gamma, \gamma') \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mid \gamma(0) = \gamma'(0)\}$$

を考え, $j: \mathcal{L}_e \times_e \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ を包含写像, $c: \mathcal{L}_e \times_e \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ をループの結合 (concatenation) により定まる写像とする. ループ積 \circ は以下の写像の合成として定義される. ここで一つ目の写像はクロス積, 二つ目の写像は j に関する Gysin 写像である:

$$\circ: \mathbb{H}_*(\mathcal{L})^{\otimes 2} \xrightarrow{\times} H_{*+2d}(\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \xrightarrow{j!} H_{*+d}(\mathcal{L}_e \times_e \mathcal{L}) \xrightarrow{H_*(c)} \mathbb{H}_*(\mathcal{L}).$$

任意の点 $p \in M$ を p 上の定値ループに移す写像 $i: M \rightarrow \mathcal{L}M$ により単射 $\mathbb{H}_*(i): \mathbb{H}_*(M) \rightarrow \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ が定まるが, $\mathbb{H}_*(M)$ 上の交叉積を \cap と書けば

$$\mathbb{H}_*(i)(x) \cap \mathbb{H}_*(i)(y) = \mathbb{H}_*(i)(x \cap y) \quad (x, y \in \mathbb{H}_*(M))$$

が成り立つ. この意味でループ積は交叉積の拡張になっている. ループ積は結合的かつ次数付可換な積であり, また M の基本類 (の $\mathbb{H}_*(i)$ による像) が単位元になる.

1.2. Batalin-Vilkovisky 構造

\mathcal{L} への S^1 作用 $r: S^1 \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ を $r(t, \gamma)(\theta) := \gamma(\theta - t)$ で定め, $\Delta: \mathbb{H}_*(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{H}_{*+1}(\mathcal{L})$ を $\Delta x := H_*(r)([S^1] \times x)$ で定義する. 容易にわかるように $\Delta^2 = 0$ が成り立つ. また, ループ括弧積 $\{, \}: \mathbb{H}_*(\mathcal{L})^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{H}_{*+1}(\mathcal{L})$ を

$$\{a, b\} := (-1)^{|a|} \Delta(a \circ b) - (-1)^{|a|} \Delta a \circ b - a \circ \Delta b$$

で定義すれば, $\{, \}$ は次数付 Lie 積になり, さらに \circ との関係式

$$\{a, b \circ c\} = \{a, b\} \circ c + (-1)^{|b|(|a|+1)} b \circ \{a, c\}$$

本研究は科研費 (課題番号 25800041) の助成を受けている.

* e-mail: iriek@kurims.kyoto-u.ac.jp

¹ その後の研究で多様体とは限らない空間に対しても理論が拡張されているが (昨年度講演 [12] を参照されたい), 本稿では専ら C^∞ 多様体上のループ空間を考察の対象とする.

が成立する. 一般に, 次数付ベクトル空間² V 上で定義された演算 $\circ, \Delta, \{, \}$ が以上の性質を満たすとき, (V, \circ, Δ) を Batalin-Vilkovisky(BV)代数, $(V, \circ, \{, \})$ を Gerstenhaber代数という. 特に, BV代数は Gerstenhaber代数の構造を持つ.

BVおよび Gerstenhaber代数の定義は, オペラッドの言葉を用いて記述することもできる. 自然数 $n \geq 1$ に対して, 単位円盤 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ 上の互いに disjoint な n 個の小円盤の配置空間を $\mathcal{D}(n)$ とおき, また $f\mathcal{D}(n) := \mathcal{D}(n) \times (S^1)^{\times n}$ とおく. $\mathcal{D}(0)$ および $f\mathcal{D}(0)$ を一点からなる空間とすれば, $\mathcal{D} = (\mathcal{D}(n))_{n \geq 0}$ および $f\mathcal{D} = (f\mathcal{D}(n))_{n \geq 0}$ は自然な位相的オペラッドの構造を持つ. \mathcal{D} を小円盤オペラッド, $f\mathcal{D}$ を枠付小円盤オペラッドという. これらのホモロジーをとることで, 次数付ベクトル空間のオペラッド $H_*(\mathcal{D})$ および $H_*(f\mathcal{D})$ を得る.

任意の次数付ベクトル空間 V について, V 上の Gerstenhaber代数の構造と $H_*(\mathcal{D})$ の V への作用($H_*(\mathcal{D})$ から V の準同形オペラッド $(\text{Hom}(V^{\otimes n}, V))_n$ への射)は一対一に対応する(Cohen [3]). 同様に, V 上のBV代数構造と $H_*(f\mathcal{D})$ の V への作用は一対一に対応する(Getzler [6]). $H_0(\mathcal{D}(2)), H_1(\mathcal{D}(2)), H_1(f\mathcal{D}(1))$ は全て1次元のベクトル空間であり, 演算 $\circ, \{, \}, \Delta$ は各々の生成元に対応している.

1.3. 鎖複体レベルのストリングトポロジー

これまで自由ループ空間のホモロジー上の代数構造について述べた³. 本稿の主題である“Chain level string topology”とは, これらの構造を鎖複体のレベルまで戻って定義しなおすことで, より精密な情報を得ようとする試みである. このテーマに関わる重要な文献として[14]が挙げられる.

代数トポロジーにおいて, 鎖複体レベルの情報から得られる不変量として基本的なものに, Massey積がある. これについて A_∞ 代数の観点から復習してみたい. 一般に位相空間 X に対して, その特異余鎖複体 $C^*(X)$ はcup積によりdga(differential graded algebra)の構造を持つ. ただし本稿では, dgaとは複体とその上の結合的な積の組であってLeibniz則を満たすものを指し, 積の可換性は仮定しない. 一方, 次数付ベクトル空間 V 上の A_∞ 代数構造とは, 各自然数 $k \geq 1$ に対して次数 $2-k$ の線形写像 $\mu_k : V^{\otimes k} \rightarrow V$ が定義され, 任意の自然数 $m \geq 1$ について

$$\sum_{\substack{k+l=m+1 \\ 1 \leq i \leq k}} \pm \mu_k(v_1 \otimes \cdots \otimes \mu_l(v_i \otimes \cdots \otimes v_{i+l-1}) \otimes \cdots \otimes v_m) = 0$$

を満たすものであった. 特に $\mu_k = 0 (\forall k \geq 3)$ なる A_∞ 代数とはdgaに他ならない. A_∞ 代数の一般論によれば, $C^*(X)$ と(A_∞ 代数として)ホモトピー同値な $H^*(X)$ 上の A_∞ 代数構造 $(\mu_k)_{k \geq 1}$ であって, $\mu_1 = 0$ かつ μ_2 がcup積となるものが定まる. このとき μ_3 を用いてMassey積が定義される(ただし写像 μ_3 自体は一意には決まらない). 以上について詳しくは[11] Section 9を参照されたい.

M を有向閉多様体とすると, Poincaré双対により $H^*(M)$ 上のcup積は $\mathbb{H}_*(M)$ 上の交叉積に対応する. ループ積は $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上の結合的な積であって, その $\mathbb{H}_*(M)$ への制限は交叉積であった. そこで, $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上の A_∞ 代数構造 $(\mu_k)_{k \geq 1}$ であって次の条件を満たすものを定義せよ, という問が考えられる.

²本稿では, 次数付ベクトル空間というとき \mathbb{Z} で次数付されたものだけを考える.

³ただし議論したのは出力が1つの操作のみである. 複数の出力を持つ操作は本稿では扱わない. [12]およびそこで挙げられている文献を参照されたい.

- $\mu_1 = 0$ かつ, μ_2 はループ積に一致する.
- 任意の k について $\mu_k(\mathbb{H}_*(M)^{\otimes k}) \subset \mathbb{H}_*(M)$ で, $(\mu_k)_{k \geq 1}$ の $\mathbb{H}_*(M)$ への制限は余鎖複体 $C^*(M)$ と A_∞ 代数としてホモトピー同値.

これが「ストリングトポロジーの演算を鎖複体のレベルまで戻って定義することで得られる情報」の最も簡単な例であろう. この間に対する解答は, 主結果の帰結として4節で説明する.

その前に, ストリングトポロジーと関係の深い話題である (シンプレクティック幾何の) Floer ホモロジーおよび結合代数の Hochschild コホモロジーについて述べ, これらにおいても鎖複体レベルの代数構造が自然と問題になることを説明したい.

2. Floer ホモロジーとストリングトポロジー

M を C^∞ 閉多様体とすると, その余接束の全空間 $T^*M := \bigcup_{q \in M} T_q^*M$ は自然なシンプレクティック多様体の構造を持ち, Floer ホモロジー $\mathrm{HF}_*(T^*M)$ が定義される. まずこれについて簡単に説明したい.

$\pi_M : T^*M \rightarrow M$ を射影とし, T^*M 上の1次微分形式 λ_M を

$$\lambda_M(X) := p((\pi_M)_*(X)) \quad (q \in M, p \in T_q^*M, X \in T_{(q,p)}T^*M)$$

で定義する. このとき $d\lambda_M$ はシンプレクティック形式 (つまり, 非退化な閉形式) になる. 一方, C^∞ 級関数 $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ であって T^*M のエンドで十分早く増大するものを取り⁴, Hamilton 汎関数 $\mathcal{A}_H : C^\infty(S^1, T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{A}_H(\gamma) := \int_{S^1} \gamma^* \lambda_M - H(\gamma(t)) dt \quad (\gamma \in C^\infty(S^1, T^*M))$$

で定める. 汎関数 \mathcal{A}_H の臨界点は, H の Hamilton ベクトル場の周期軌道と対応する. \mathcal{A}_H に対して直接変分法を展開することは困難であるが, \mathcal{A}_H の Morse ホモロジーにあたるものを定義することは可能である. すなわち, \mathcal{A}_H の臨界点により生成される次数付ベクトル空間を考え, その上の境界作用素を写像 $\mathbb{C}^\times \rightarrow T^*M$ に対する Floer 方程式 (H を用いて Cauchy-Riemann 方程式⁵ を変形したもの) の解の個数を数えて定義する. この鎖複体のホモロジー群 (H によらないことが示される) を T^*M の Floer ホモロジーといい $\mathrm{HF}_*(T^*M)$ と書く.

\mathbb{C}^\times は $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}$ と共形であるが, $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \rightarrow T^*M$ に対する Floer 方程式の解の個数を数えることで結合的な積 $\circ : \mathrm{HF}_*(T^*M)^{\otimes 2} \rightarrow \mathrm{HF}_*(T^*M)$ が定義される (pair-of-pants 積). また, $\mathbb{C}^\times \rightarrow T^*M$ に対する Floer 方程式の族 (境界条件を動かして S^1 上の族を考える) を用いて $\Delta : \mathrm{HF}_*(T^*M) \rightarrow \mathrm{HF}_{*+1}(T^*M)$ が定義される. このとき $(\mathrm{HF}_*(T^*M), \circ, \Delta)$ は BV 代数になる.

注意 2.1 以上の構成は余接束に限ったものではなく, Liouville 多様体というより一般の開シンプレクティック多様体に対して⁶ (符号の問題を除けば) 可能である. [13] を参照されたい.

⁴ 例えば M の Riemann 計量を固定して $H(q, p) := |p|^2$ とする.

⁵ T^*M 上の概複素構造でシンプレクティック形式 $d\lambda_M$ と整合的なものを用いて定義する.

⁶ Liouville 多様体に対して, ここで述べたのと同様な方法で定義される Floer ホモロジーを, 特に symplectic (co)homology という.

次の結果が示すように、余接束のFloerホモロジーおよびそのBV構造は、ストリングトポロジーにおけるBV構造と等価である。

定理 2.2 M がスピン構造を持つとき⁷、BV代数の同形 $\mathrm{HF}_*(T^*M) \cong \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ が成立する。

ベクトル空間の同形 $\mathrm{HF}_*(T^*M) \cong \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ は初め Viterbo により発見され、その後 Salamon-Weber, Abbondandolo-Schwarz による別証明が与えられた。ループ積と pair-of-pants 積との対応は Abbondandolo-Schwarz による。スピン構造や向きを持たない場合まで含めた取扱いは、Kragh による研究を経て Abouzaid [1] により完成したようである。以上について詳しくは [1] を参照されたい。

余接束（一般に Liouville 多様体）に対して、その Floer ホモロジーは BV 代数の構造を持つので、特に結合的な積や Lie 積が定義される。これらの演算は鎖複体のレベルで定義されるが、そこでは結合則や Jacobi 律はホモトピーを法としてしか成立しない。ここでホモトピーは、 $\mathbb{C}P^1$ から 4 点を取り除いた Riemann 面上の Floer 方程式（の族）を用いて定義される。さらに $\mathbb{C}P^1$ から k 点を取り除いた Riemann 面上の Floer 方程式（の族）を全ての自然数 $k \geq 2$ に対して考えることで、Floer ホモロジー上に A_∞ および L_∞ 代数の構造が定義できると思われる。

4 節で、主結果の帰結として $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上に A_∞ および L_∞ 代数の構造が定まることを見るが（各々ループ積およびループ括弧積の延長）、上で述べた $\mathrm{HF}_*(T^*M)$ 上の A_∞ および L_∞ 代数構造は、これらとホモトピー同値になると予想される。

3. Hochschild コホモロジーとストリングトポロジー

Gerstenhaber [5] による次の古典的な結果は、ストリングトポロジーとも関係が深い。

定理 3.1 任意の結合代数 A について、Hochschild コホモロジー $HH^{-*}(A, A)$ は自然な Gerstenhaber 代数の構造を持つ。

この結果は、 A が dga、より一般に A_∞ 代数でも成立する。ストリングトポロジーとの関係を説明するために、多様体上の微分形式のなす dga を考えよう⁸。 M を d 次元有向閉 C^∞ 多様体とする。整数 j に対して M 上の j 次微分形式全体のなす \mathbb{R} ベクトル空間を \mathcal{A}_M^j と書くと（ $0 \leq j \leq d$ でないときは $\mathcal{A}_M^j = 0$ とおく）、 \mathcal{A}_M^* は外微分と外積により dga になる。このとき、反復積分により写像

$$\mathcal{I} : \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \rightarrow HH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$$

が定義され、 M が単連結なときこれは同形になる。後述するように（注意 4.2）、写像 \mathcal{I} は両辺の Gerstenhaber 構造を保つ（左辺ではストリングトポロジー、右辺では定理 3.1 による Gerstenhaber 構造を考える）。

定理 3.1 の鎖複体レベルの精密化として、次に述べる定理 3.2 が知られている。それを述べるため、以下の言葉を用いる：鎖複体の圏におけるオペラッドを dg オペラッドという。基本的な例として、鎖複体 C の準同形オペラッド $\mathrm{End}(C) := (\mathrm{Hom}(C^{\otimes n}, C))_{n \geq 0}$ がある。鎖複体 C と dg オペラッド \mathcal{P} について、 \mathcal{P} の C への作用とは dg オペラッドの射 $\mathcal{P} \rightarrow \mathrm{End}(C)$ のことをいう（このとき C を dg \mathcal{P} 代数とよぶ）。 \mathcal{P} の C への作用があれば、ホモロジーをとることで $H_*(\mathcal{P})$ の $H_*(C)$ への作用が定まる。

⁷ M がスピンでないときは、 $\mathcal{L}M$ 上のある局所系 θ_M により $\mathrm{HF}_*(T^*M) \cong \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M; \theta_M)$ となる。

⁸ ここでは特異余鎖で考えてもよいのだが、あとの節との関係で微分形式を使って説明する。

定理 3.2 dg オペラッド \mathcal{O} であって、次の条件を満たすものが存在する.

- (i): 次数付ベクトル空間のオペラッドとして $H_*(\mathcal{O}) \cong H_*(\mathcal{D})$. ただし \mathcal{D} は小円盤オペラッド.
- (ii): 任意の結合代数 A について, $HH^{-*}(A, A)$ 上の Gerstenhaber 構造は Hochschild 余鎖複体 $CH^{-*}(A, A)$ への \mathcal{O} の作用に持ち上がる.

注意 3.3 条件 (i) より強く, \mathcal{O} は $C_*(\mathcal{D})$ (\mathcal{D} の特異鎖のなす dg オペラッド) と擬同形であるとしても定理は成立する.

この定理は, Deligne の手紙における問に端を発していることから, Deligne 予想とよばれていた. 現在では多くの証明が知られていて (McClure-Smith, Kontsevich-Soibelman, Voronov, Tamarkin, Berger-Fresse, Kaufmann), 特に Kontsevich-Soibelman は, 一般の A_∞ 代数について対応する結果を証明している. (文献については [11] Section 13.3.15 を見られたい.) スtringトポロジーにおいて定理 3.2 と類似の結果が成り立つかというのは自然な問であろう. 本稿の主結果はこれに対する肯定的な解答を与える.

4. 主結果

本稿の主結果は次の定理である. \mathcal{D} および $f\mathcal{D}$ を小円盤および枠付小円盤オペラッドとする (1.2 節参照).

定理 4.1 ([7], [8]) dg オペラッド $f\mathcal{P}$ とその部分オペラッド \mathcal{P} であって, 以下の条件を満たすものが存在する.

- (i): オペラッドの同形 $H_*(\mathcal{P}) \cong H_*(\mathcal{D})$ と $H_*(f\mathcal{P}) \cong H_*(f\mathcal{D})$ であって, 次の図式が可換になるものが存在する (縦の写像は, 包含写像により導かれる):

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathcal{P}) & \xrightarrow{\cong} & H_*(\mathcal{D}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(f\mathcal{P}) & \xrightarrow{\cong} & H_*(f\mathcal{D}). \end{array}$$

- (ii): 任意の dga A について, $HH^{-*}(A, A)$ 上の Gerstenhaber 構造は Hochschild 余鎖複体 $CH^{-*}(A, A)$ 上の dg \mathcal{P} 代数の構造に持ち上がる.
- (iii): 任意の有向閉 C^∞ 多様体 M について, dg $f\mathcal{P}$ 代数 $C_*^{\mathcal{L}M}$ および

- BV 代数としての同形 $\Phi: \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \cong H_*(C_*^{\mathcal{L}M})$
- dg \mathcal{P} 代数の準同形 $J: C_*^{\mathcal{L}M} \rightarrow CH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$

が存在する. ここで $H_*(J) \circ \Phi: \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \rightarrow HH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$ は, 反復積分を用いて定義される写像 \mathcal{I} (3 節参照) と一致する.

(ii) は定理 3.2 の dga 版であるが, これは新しい結果ではない (前節で述べたように A_∞ 代数版が示されている). 定理 4.1 の主要な主張は (iii) であり, これは定理 3.2 の Stringトポロジーにおける類似である.

注意 4.2 定理4.1の系として, 写像 $\mathcal{I} : \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) \rightarrow HH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$ が Gerstenhaber 構造を保つことが導かれる. これ自体は新しい結果ではないと思われる (少なくとも M が単連結の場合 Merkulov, Tradler 等による仕事がある).

ループ積は $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上の結合的な積であったが, これは $C_*^{\mathcal{L}M}$ に持ち上がり, dga の構造を定める. また, dga の準同形 $\iota : \mathcal{A}^{-*}(M) \rightarrow C_*^{\mathcal{L}M}$ であって図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_*(M) & \xrightarrow{\cong} & H_{\text{dR}}^{-*}(M) \\ \mathbb{H}_*(i) \downarrow & & \downarrow H_*(\iota) \\ \mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) & \xrightarrow{\cong} & H_*(C_*^{\mathcal{L}M}). \end{array}$$

が可換になるものが存在する. これにより $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上の A_∞ 代数構造 $(\mu_k)_{k \geq 1}$ であって, $\mu_1 = 0$ かつ μ_2 はループ積と一致し, さらに $\mathbb{H}_*(M)$ への制限が $\mathcal{A}^{-*}(M)$ とホモトピー同値なものが得られる (1.3節の問に対する解答).

ループ括弧積についても同様のことが成り立つ. すなわち, $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M)$ 上の L_∞ 代数構造 $(l_k)_{k \geq 1}$ であって $l_1 = 0$ かつ l_2 はループ括弧積と一致し, 任意の $k \geq 1$ について $l_k|_{\mathbb{H}_*(M)^{\otimes k}} = 0$ となるものが得られる.

5. 証明の概要

定理4.1の証明の主要な部分は鎖複体 $C_*^{\mathcal{L}M}$ の構成である. その際の本質的な論点である横断正則性の問題について5.1節で述べたあと, 構成の概要を5.2節で述べる. 5.3節では, $C_*^{\mathcal{L}M}$ 上の積構造とオペラッドの作用について説明する.

本節を通じて M を d 次元有向閉 C^∞ 多様体, $\mathcal{L} = \mathcal{L}M = C^\infty(S^1, M)$ とおく.

5.1. 横断正則性の問題

ストリングトポロジーにおける演算は, 評価写像に関するファイバー積をとって定義される. 例えばループ積を定義するには, ファイバー積をとって得られるホモロジー上の写像 $\mathbb{H}_*(\mathcal{L})^{\otimes 2} \rightarrow H_{*+d}(\mathcal{L}_e \times_e \mathcal{L})$ が必要であった.

ファイバー積を鎖複体のレベルで定義しようとする横断正則性が問題になる. これは交叉積を考える段階ですでに現れる. 実際, M 上の特異鎖 $x \in C_k(M)$, $y \in C_l(M)$ に対してその交叉 $x \cap y \in C_{k+l-d}(M)$ を定義するには, x と y が横断的に交わっている必要があるが, これは必ずしも成り立たない. 有限次元多様体上の交叉積の場合は, 鎖複体 $C_*(M)$ の代わりに余鎖複体 $C^{d-*}(M)$ を考えればよいが, ループ空間の場合は (無限次元であるので) この方法はこのままでは適用できない.

5.2. 鎖複体 $C_*^{\mathcal{L}M}$ の構成

上で述べた問題点を解消するために, [7] では de Rham 鎖という特異鎖と微分形式を折衷したものを考えた. これは, Fukaya [4] による “approximate de Rham chain” というアイデアを参考にしたものである. [7] のもう一つのアイデアは, 点付きループの空間を組織的に用いることである. 以下では, 鎖複体 $C_*^{\mathcal{L}M}$ の構成を, 四つのステップに分けて説明する.

ステップ 1: 点付き Moore ループの空間 \mathcal{L}_k

M 上の C^∞ 級 Moore ループのなす空間 $\mathcal{L}_0 M$ を考える. 正確には

$$\mathcal{L}_0 M := \{(\gamma, T) \mid T \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \gamma \in C^\infty([0, T], M), \gamma(0) = \gamma(T), \\ \gamma^{(m)}(0) = \gamma^{(m)}(T) = 0 \quad (\forall m \geq 1)\}$$

で定義する. ここで $\gamma^{(m)}$ は γ の m 階導関数であり, 最後の条件は C^∞ 級ループどうしの結合 (concatenation) をとるために必要になる. また, 任意の自然数 $k \geq 1$ に対して, k 個の標識点を持つ Moore ループの空間

$$\mathcal{L}_k M := \{(\gamma, t_1, \dots, t_k, T) \mid (\gamma, T) \in \mathcal{L}_0 M, \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T, \\ \gamma^{(m)}(t_j) = 0 \quad (\forall m \geq 1, \quad 1 \leq j \leq k)\}$$

を考える. 任意の $j \in \{0, \dots, k\}$ に対して, 評価写像 $e_j : \mathcal{L}_k M \rightarrow M$ を

$$e_j(\gamma, t_1, \dots, t_k, T) := \begin{cases} \gamma(0) & (j = 0) \\ \gamma(t_j) & (1 \leq j \leq k) \end{cases}$$

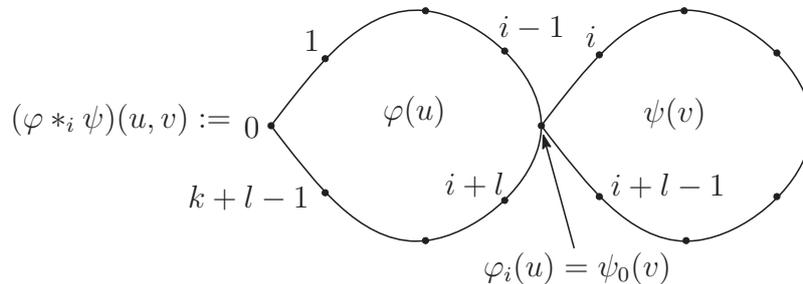
で定義する. また, 各 $p \in M$ に対して p 上の長さ 0 のループを対応させることで, 写像 $i_k : M \rightarrow \mathcal{L}_k M$ を定義する. 以降, $\mathcal{L}_k M$ を単に \mathcal{L}_k と書く.

ステップ 2: \mathcal{L}_k 上のプロット⁹

各自然数 n について \mathbb{R}^n の有向部分多様体全体のなす集合を \mathcal{U}_n とおき, $\mathcal{U} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{U}_n$ とおく. $U \in \mathcal{U}$ および写像 $\varphi : U \rightarrow \mathcal{L}_k$ の組 (U, φ) で次の条件 (a), (b) を満たすものを \mathcal{L}_k 上のプロットとよび, プロット全体の集合を $\mathcal{P}(\mathcal{L}_k)$ と書く.

- (a): φ は C^∞ 級写像. つまり, $\varphi := (\gamma^\varphi, t_1^\varphi, \dots, t_k^\varphi, T^\varphi)$ とおくと $t_1^\varphi, \dots, t_k^\varphi, T^\varphi \in C^\infty(U)$ で, かつ $\{(u, t) \mid u \in U, 0 \leq t \leq T^\varphi(u)\} \rightarrow M; (u, t) \mapsto \gamma^\varphi(u)(t)$ は C^∞ 級写像.
- (b): 任意の $j = 0, \dots, k$ について, $\varphi_j := e_j \circ \varphi : U \rightarrow M$ は沈め込み.

任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_k)$, $(V, \psi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_l)$ および $i \in \{1, \dots, k\}$ について, 条件 (b) によりファイバー積 $U_{\varphi_i} \times_{\psi_0} V := \{(u, v) \in U \times V \mid \varphi_i(u) = \psi_0(v)\}$ は再び \mathcal{U} の元になり, ループの結合をとって $\varphi *_i \psi : U_{\varphi_i} \times_{\psi_0} V \rightarrow \mathcal{L}_{k+l-1}$ が自然に定まる.



写像 $\circ_i : \mathcal{P}(\mathcal{L}_k) \times \mathcal{P}(\mathcal{L}_l) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}_{k+l-1})$ を

$$(U, \varphi) \circ_i (V, \psi) := (U_{\varphi_i} \times_{\psi_0} V, \varphi *_i \psi)$$

で定義する.

⁹プロット (plot) という言葉は, K.T. Chen による Differentiable space の理論, Souriau 等による Diffeological space の理論で使われているものである. しかし, ここで定義した集合 $\mathcal{P}(\mathcal{L}_k)$ はこれらの理論の公理を満たさない.

ステップ 3: \mathcal{L}_k の de Rham 鎖複体

プロットを用いてループ空間のホモロジーを計算するために、プロットと微分形式を組み合わせた de Rham 鎖というものを考える。整数 N に対して、 \mathbb{R} ベクトル空間

$$C_N^{\text{dR}} := \left(\bigoplus_{(U, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_k)} \mathcal{A}_c^{\dim U - N}(U) \right) / Z_N$$

を考える。但し $\mathcal{A}_c^*(U)$ は U 上のコンパクト台微分形式のなす \mathbb{R} ベクトル空間、 Z_N は

$$(U, \varphi, \pi_! \omega) - (V, \varphi \circ \pi, \omega)$$

の形の元で生成される部分空間とする。(ここで $(U, \varphi) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_k)$, $V \in \mathcal{U}$, $\pi : V \rightarrow U$ は C^∞ 級の沈め込みであり, $\pi_!$ はファイバーに沿った積分を表す.) 次数付ベクトル空間 $C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_k)$ 上の境界作用素 ∂ を

$$\partial[(U, \varphi, \omega)] := [(U, \varphi, d\omega)]$$

で定義する。ファイバーに沿った積分は外微分と可換なのでこれは well-defined であり, 明らかに $\partial^2 = 0$ を満たす。このようにして定義される鎖複体 $C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_k)$ を \mathcal{L}_k の de Rham 鎖複体, その元を de Rham 鎖ということにしよう。de Rham 鎖複体のホモロジーは次の補題から分かる。

補題 5.1 (i): 任意の $k \geq 0$ について, 標識点を忘れる写像

$$\mathcal{L}_k \rightarrow \mathcal{L}_0; \quad (\gamma, t_1, \dots, t_k, T) \mapsto (\gamma, T)$$

から導かれる鎖写像 $C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_k) \rightarrow C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_0)$ は, 擬同形である。

(ii): 同形 $H_*(C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_0)) \cong H_*(\mathcal{L}M : \mathbb{R})$ が存在する。ただし右辺は $\mathcal{L}M$ (C^∞ 位相を入れる) の特異ホモロジー。

整数 $1 \leq i \leq k$ と $l \geq 0$ に対し, 鎖写像 $\circ_i : C_{*+d}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_k) \otimes C_{*+d}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_l) \rightarrow C_{*+d}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_{k+l-1})$ を

$$[(U, \varphi, \omega)] \circ_i [(V, \psi, \eta)] := \pm [(U \varphi_i \times_{\psi_0} V, \varphi *_i \psi, \omega \times \eta)]$$

で定義する。これにより, $\mathcal{C}\mathcal{L} := (C_{*+d}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_k))_{k \geq 0}$ は (非対称) dg オペラッドになる。単位元は $[(M, i_1, 1)] \in C_d^{\text{dR}}(\mathcal{L}_1)$ である¹⁰。さらに $\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ の \mathcal{L}_k への自然な作用は $C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_k)$ への作用を誘導し, これにより $\mathcal{C}\mathcal{L}$ は巡回 (cyclic) dg オペラッドになる。

ステップ 4: 鎖複体 $C_*^{\mathcal{L}M}$ の定義

まず, 積を持つオペラッドの概念¹¹ を定義しよう。

定義 5.2 $\mathcal{O} = (\mathcal{O}(k))_{k \geq 0}$ を (非対称) dg オペラッドとする。 $\mu \in \mathcal{O}(2)_0$ であつて $\partial\mu = 0$, $\mu \circ_1 \mu = \mu \circ_2 \mu$ を満たすものを \mathcal{O} の積という。また, $\varepsilon \in \mathcal{O}(0)_0$ であつて $\partial\varepsilon = 0$, $\mu \circ_1 \varepsilon = \mu \circ_2 \varepsilon = 1_{\mathcal{O}}$ を満たすものを積 μ の単位元という (ただし $1_{\mathcal{O}}$ は \mathcal{O} の単位元)。

¹⁰ 正確には M の Euclid 空間への埋込をとって $M \in \mathcal{U}$ とみなす。

¹¹ ここで述べるのと少し違う形で Gerstenhaber-Voronov により導入された。

(非対称) dg オペラッド \mathcal{O} とその積 μ に対して, $\tilde{\mathcal{O}}_* := \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{O}(k)_{*+k}$ とおいて $\partial_\mu : \tilde{\mathcal{O}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{*-1}$ を

$$\partial_\mu(x_k)_{k \geq 0} := (\partial x_k)_{k \geq 0} + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \pm x_{k-1} \circ_j \mu + \sum_{j=1}^2 \pm \mu \circ_j x_{k-1} \right)_{k \geq 1}$$

で定義すれば, $(\tilde{\mathcal{O}}_*, \partial_\mu)$ は鎖複体になる. 基本的な例としては, A を dga とするとその準同形オペラッド $\text{End}(A)$ は積を持ち (A が単位元を持てば, $\text{End}(A)$ の積も定義5.2の意味で単位元を持つ), $\widetilde{\text{End}(A)}$ は A の Hochschild 余鎖複体に他ならない.

さて, ステップ3で定義した \mathcal{CL} も積と単位元を持つ. 実際

$$\mu := [(M, i_2, 1)], \quad \varepsilon := [(M, i_0, 1)]$$

とおけばよい (μ は $\mathcal{CL}(2)$ への $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の作用で不変である). そこで

$$C_*^{\mathcal{LM}} := (\widetilde{\mathcal{CL}}_*, \partial_\mu)$$

と定義する. $k=0$ 成分への射影 $C_*^{\mathcal{LM}} \rightarrow C_{*+d}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_0); (x_k)_k \mapsto x_0$ は擬同形になることが補題5.1 (i) と簡単な代数でわかるので, 補題5.1 (ii) と合わせると

$$H_*(C_*^{\mathcal{LM}}) \cong H_{*+d}(C_*^{\text{dR}}(\mathcal{L}_0)) \cong \mathbb{H}_*(\mathcal{LM} : \mathbb{R})$$

を得る. これの逆が定理4.1(iii) の同形 Φ である.

一方, 任意の $k \geq 0$ について $J_k : C_{*+d}^{\text{dR}}(\mathcal{L}_k) \rightarrow \text{Hom}^{-*}(\mathcal{A}_M^{\otimes k}, \mathcal{A}_M)$ を

$$J_k([(U, \varphi, \omega)])(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k) := \pm(\varphi_0)!(\omega \wedge \varphi_1^* \eta_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k^* \eta_k)$$

で定めれば, $(J_k)_{k \geq 0} : \mathcal{CL} \rightarrow \text{End}(\mathcal{A}_M)$ は dg オペラッドの準同形であり, 積を保つ. これにより定理4.1(iii) の準同形 $J : C_*^{\mathcal{LM}} \rightarrow CH^{-*}(\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_M)$ が定義される. $H_*(J) \circ \Phi$ が反復積分により定義される写像 \mathcal{I} と一致することを見るのは難しくない.

5.3. $C_*^{\mathcal{LM}}$ 上の積構造

\mathcal{O} を非対称 dg オペラッド, μ をその積とする. $\tilde{\mathcal{O}}_*$ 上の積 \circ および $*$ を

$$(x \circ y)_k := \sum_{l+m=k} \pm(\mu \circ_1 x_l) \circ_1 y_m, \quad (x * y)_k := \sum_{\substack{l+m=k+1 \\ 1 \leq i \leq l}} \pm x_l \circ_i y_m$$

で定義しよう. すると \circ は $(\tilde{\mathcal{O}}_*, \partial_\mu)$ 上に dga の構造を定め, $\{x, y\} := x * y \pm y * x$ で定義される積 $\{, \}$ は dg Lie 代数の構造を定める. $\mathcal{O} = \mathcal{CL}$ の場合, \circ および $\{, \}$ が $\mathbb{H}_*(\mathcal{LM}) \cong H_*(C_*^{\mathcal{LM}})$ 上に定める積はループ積およびループ括弧積に一致する. これらの演算は, 次の命題における dg オペラッド \mathcal{P} の作用の一部として理解できる.

命題 5.3 dg オペラッド $f\mathcal{P}$ とその部分オペラッド \mathcal{P} で, 定理4.1 (i) および次の二つの条件を満たすものが存在する.

- (a): (\mathcal{O}, μ) を (非対称) dg オペラッドおよびその積とすると, \mathcal{P} は複体 $(\tilde{\mathcal{O}}_*, \partial_\mu)$ に作用する.

(b): $(\mathcal{O}, \mu, \varepsilon)$ を (非対称) 巡回 dg オペラッドおよびその積と単位元とし, さらに $\mu \in \mathcal{O}(2)_0$ は $\mathcal{O}(2)$ への $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の作用で不変だとする. このとき, \mathcal{P} の $(\tilde{\mathcal{O}}_*, \partial_\mu)$ への作用は $f\mathcal{P}$ の作用にのびる.

注意 5.4 命題 5.3 は [8] で証明されているが, ここで述べた定式化とは異なっている. また, よく似た結果がより一般的な枠組みで [15] において証明されている. オペラッド \mathcal{P} および $f\mathcal{P}$ は Kaufmann [9], [10] が導入した組合せ的サボテン (cacti) オペラッドと類似しているがもう少し複雑なものである.

命題 5.3(a) を $\text{End}(A)$ に対して適用すれば (A は任意の dga), Hochschild 余鎖複体 $CH^{-*}(A, A)$ は dg \mathcal{P} 代数になることがわかる. また, (b) を \mathcal{CL} に対して適用すれば, $C_*^{\mathcal{LM}}$ は dg $f\mathcal{P}$ 代数になることがわかる. これらから定まるホモロジー上の構造 ($HH^{-*}(A, A)$ 上の Gerstenhaber 構造および $\mathbb{H}_*(\mathcal{LM})$ 上の BV 構造) が既知のものと同じであることをチェックすれば, 定理 4.1 の証明が完了する.

参考文献

- [1] M. Abouzaid, *Symplectic cohomology and Viterbo's theorem*, arXiv:1312.3354.
- [2] M. Chas, D. Sullivan, *String Topology*, arXiv:math/9911159.
- [3] F. R. Cohen, *The homology of C_{n+1} -spaces, $n \geq 0$* , The homology of iterated loop spaces, 207–351, Lecture Notes in Math. vol. 533, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [4] K. Fukaya, *Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to symplectic topology*, Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology, 231–276, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 217, Springer, Dordrecht, 2006.
- [5] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) 78 (1963), 267–288.
- [6] E. Getzler, *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories*, Comm. Math. Phys. 159 (1994), no. 2, 265–285.
- [7] K. Irie, *Transversality problems in string topology and de Rham chains*, arXiv:1404.0153.
- [8] K. Irie, *A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology and decorated cacti*, arXiv:1503.00403.
- [9] R. M. Kaufmann, *On spineless cacti, Deligne's conjecture and Connes-Kreimer's Hopf algebra*, Topology 46 (2007), no. 1, 39–88.
- [10] R. M. Kaufmann, *A proof of a cyclic version of Deligne's conjecture via cacti*, Math. Res. Lett. 15 (2008), no. 5, 901–921.
- [11] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 346. Springer, Heidelberg, 2012.
- [12] 内藤貴仁, 有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論, 第61回トポロジーシンポジウム講演集, 2014.
- [13] P. Seidel, *A biased view of symplectic cohomology*, Current developments in mathematics, 2006, 211–253, Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [14] D. Sullivan, *String topology background and present state*, Current developments in mathematics 2005, 41–88, Int. Press, Somerville, MA, 2007.
- [15] B. Ward, *Maurer-Cartan Elements and Cyclic Operads*, arXiv:1409.5709.

境界付き3次元多様体のフレアーホモロジー

深谷賢治 Simons Center for Geometry and Physics

境界付き3次元多様体のフレアーホモロジー（ヤンミルズ理論に基づく）については、90年代に種々の研究がなされたが、その進展はある時点で止まっている。筆者も幾つかの研究を90年代にした後、しばらくは研究していなかったが、最近90年代に提示した幾つかの予想が解決できることに気づいたので、報告する。

この問題はいわゆるアティヤー-フレアー予想と関わるが、アティヤー-フレアー予想はハンドル体の場合で、その場合は、曲面上の自明な束の平坦接続のモジュライ空間を考察する必要がある。このモジュライ空間は特異点を持っている。（可約接続があるため。）特異点を持つシンプレクティック多様体への擬正則曲線の理論を、曲面上の自明な束の平坦接続のモジュライ空間の場合を含めて構築することはなされていないため、その場合は論じない。従って、元来のアティヤー-フレアー予想は論じない。

3次元多様体 M とその上の $SO(3)$ 束 E を考える。ただし、 E のスティーフェルホイットニー類は M のどの連結成分上でも0でないとする。この状況でフレアー[2]はフレアーホモロジー群 $HF(M, E)$ を定義している。これは鎖複体 $CF(M, E)$ のホモロジーである。 $CF(M, E)$ のベクトル空間（ここでは \mathbb{Z}_2 係数で考える）としての基底は E の平坦接続である。（平坦接続のモジュライ空間の次元は、 M に境界がない場合0であるが、それは仮想次元である。一般には、しかるべき摂動をおこない、平坦接続のモジュライが0次元であるようにする。）境界作用素は、 $M \times \mathbb{R}$ 上の ASD（反自己共役）接続で、無限遠で与えられた平坦接続になるものを数えて定義する。このフレアーホモロジーの境界がある場合への一般化が主結果である。

3次元多様体 M が境界を持つとする。さらに、その上の $SO(3)$ 束 E に対して次の条件をかす。 E のスティーフェルホイットニー類 $w_2(E)$ の境界 $\Sigma = \partial M$ への制限は、基本コホモロジー類 $[\Sigma]$ に一致する。（すると、 $\Sigma = \partial M$ の連結成分の数が偶数でなければならないことわかる。）

Σ への E の制限を $E|_{\Sigma}$ と書き、その上の平坦接続のゲージ同値類全体を $R(\Sigma)$ とかく。 $R(\Sigma)$ は（特異点のない）シンプレクティック多様体で、さらに、 Σ の共形構造を決めると $R(\Sigma)$ の複素構造が定まる。

E の M 上の平坦接続のゲージ同値類全体を $R(M)$ とかく。平坦という方程式 $F_M = 0$ に横断正則性を仮定すると、（すなわち、その線形化方程式が全射とする

と), $R(M)$ の次元は $R(\Sigma)$ の次元の半分になる. また, 制限写像は $R(M) \rightarrow R(\Sigma)$ を定めるが, これがラグランジュはめ込みになる. 一般には, 方程式 $F_M = 0$ を境界から離れたところで摂動することで, ラグランジュはめ込み $R(M) \rightarrow R(\Sigma)$ が得られる.

赤穂とJoyce ([1]) はラグランジュ部分多様体のフレアー理論([6])をはめ込みの場合に一般化した. すなわち, $CF(R(M)) = H(R(M) \times_{R(\Sigma)} R(M); \Lambda_0^{\mathbb{Z}_2})$ 上にフィルター付き A_∞ 代数の構造を定めた. ($\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ はノビコフ環, $R(\Sigma)$ がモノトーンであることを使うと $\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ を係数環に用いることができる. [7]) これは, $m_k : CF(R(M))^{\otimes k} \rightarrow CF(R(M))$ なる写像からなる. ただし, m_0 は一般には0ではなく, 従って, m_1 を2回合成しても0とは限らない. コホモロジーを得るには, モーラーカルタン方程式 $\sum_{k=0}^{\infty} m_k(b, \dots, b) = 0$ の解 b (bounding cochain またはモーラーカルタン元と呼ぶ) を用いて, m_k を

$$m_k^b(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j_1, \dots, j_k} m_{k + \sum j_i} (b^{j_0}, x_1, b^{j_1}, \dots, b^{j_k}, x_k, b^{j_{k+1}})$$

に取り替える必要がある. そのような b が存在するとき, フィルター付き A_∞ 代数 $(CF(R(M)), \{m_k\})$ は非障害的であるという.

定理 1 : 上の状況で $(CF(R(M)), \{m_k\})$ は非障害的である. さらに, モーラーカルタン元 b のゲージ同値類を3次元多様体 M から標準的に定めることができる.

定理1の b を b_M とかく. シンプレクティック多様体上に2つのはめ込まれたラグランジュ部分多様体 L_1, L_2 があり, さらにモーラーカルタン元 b_1, b_2 が与えられると, ラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー $HF((L_1, b_1), (L_2, b_2); \Lambda_0^{\mathbb{Z}_2})$ を定義できる.

(これは $L_1 \cap L_2$ の点を基底とする, 自由 $\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ 加群上に, 擬正則曲線を使って定義される境界作用素を考えた鎖複体のホモロジー群である.)

境界付き3次元多様体 M_1, M_2 がとその上の $SO(3)$ 束 E_1, E_2 が前述の仮定を満たすとする. さらに, 2つの境界 $(\partial M_1, E_1|_{\partial M_1})$ と $(-\partial M_2, E_2|_{\partial M_2})$ は同型であるとする. こ

のとき, M_1, M_2 , E_1, E_2 を境界で貼り合わせ閉じた3次元多様体 M とその上の $SO(3)$ 束 E が得られる.

定理2: ゲージ理論のフレアーホモロジー $HF(M, E)$ とラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー $HF((R(M_1), b_{M_1}), (R(M_2), b_{M_2}); \Lambda_0^{\mathbb{Z}_2})$ は同型である.

さらに次のことが示される.

定理3: 定理1の状況で, さらに, $R(M) \rightarrow R(\Sigma)$ は単射であると仮定する. このとき $b_M = 0$ である.

3つの定理を合わせると次のことがわかる.

定理4: 定理2の状況で, さらに, $R(M_1) \rightarrow R(\Sigma)$, $R(M_2) \rightarrow R(\Sigma)$ は単射であると仮定する. このとき, ゲージ理論のフレアーホモロジー $HF(M, E)$ とラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー $HF(R(M_1), R(M_2))$ は同型である.

仮定から, $R(M_1), R(M_2)$ がモノトーンラグランジュ部分多様体になるので, $HF(R(M_1), R(M_2))$ はOhによって定義されたモノトーンラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーである.

定理1-4の証明には, 筆者が1990年代に[4]で導入したモジュライ空間を使う. ただし, 定理1-4は当時は証明されていなかった.

文献表

- [1] M. Akaho and D. Joyce, Immersed Lagrangian Floer theory, J. Differential Geometry 86 (2010) 381-500.
- [2] A. Floer, Instanton homology and Dehn surgery, in Floer Memorial Volume, Hofer, Zender, and Taubes, Editors. 1995, Birkhäuser. pp. 77-98.
- [3] K. Fukaya, Floer homology for 3-manifolds with boundary I (1997), never to be published but is available at <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/%7Efukaya/fukaya.html>.

- [4] K. Fukaya, Anti-Self-Dual equation on 4-manifolds with degenerate metric, *Geometric Analysis and Functional Analysis* 8 (1998) 466–528.
- [5] K. Fukaya, $SO(3)$ -Floer homology of 3 manifolds with boundary. arXiv:1506.01435.
- [6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory- anomaly and obstruction, *AMS/IP Studies in Advanced Math.* vol. 46, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009).
- [7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory over integers: spherically positive symplectic manifolds, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* Volume 9, Number 2 189–289 (2013), arXiv:1105.5124.
- [8] Y.-G. Oh, Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I, II, *Comm. Pure and Appl. Math.* 46 (1993), 949–994, 995–1012; Addenda, *ibid*, 48 (1995), 1299 – 1302.

普遍Schur関数と旗束上のGysinの諸公式について

中川 征樹 (岡山大学大学院教育学研究科)*

第62回トポロジーシンポジウム (2015年8月6日(木) ~ 8月9日(日))

1. 研究の動機

1.1. トポロジーと対称関数

まず初めに, 多少長くなることを覚悟の上で, 研究の動機について書いておきたい¹. そもそもトポロジーと対称関数の間には古くから密接な関係がある. 例えば, よく知られているように, 複素ベクトル束のChern類は「分裂原理」を通して, しかるべき変数(いわゆるChernルート)の基本対称式で表される. このことはホモトピー論的には次のように言い表すことができる: $U(n)$ を n 次ユニタリー群, $BU(n)$ をその分類空間とするとき, $BU(n)$ の整数係数コホモロジー環² は次で与えられる:

$$H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_n].$$

ここで, $c_i \in H^{2i}(BU(n))$ ($i = 1, \dots, n$) は**普遍 Chern 類**, すなわち $BU(n)$ 上の「普遍ベクトル束」 $\gamma^n \rightarrow BU(n)$ の Chern 類である: $c_i = c_i(\gamma^n)$, $c_0 := 1$. T^n を $U(n)$ の(標準的な)極大トーラスとして, 自然な写像 $\rho: BT^n \rightarrow BU(n)$ によって, γ^n を BT^n 上へ引き戻すと, $\rho^*(\gamma^n) \cong \bigoplus_{i=1}^n \gamma_i^1$ のように, BT^n 上の直線束 γ_i^1 ($i = 1, \dots, n$) たち³ の直和に分かれ(分裂原理), 全 Chern 類 $c(-) = \sum_{i \geq 0} c_i(-)$ について, Chern 類の自然性より,

$$\rho^*(c(\gamma^n)) = c(\rho^*(\gamma^n)) = c(\bigoplus_{i=1}^n \gamma_i^1) = \prod_{i=1}^n c(\gamma_i^1) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(\gamma_i^1)) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i)$$

が成り立つ(ここで, $x_i := c_1(\gamma_i^1) \in H^2(BT^n)$ とおいた). このことから(さらに, よく知られているように, $\rho^*: H^*(BU(n)) \rightarrow H^*(BT^n)$ は単射である), 各 Chern 類 c_i を, x_1, \dots, x_n の基本対称多項式 $e_i(\mathbf{x}_n) = e_i(x_1, \dots, x_n)$ と見なせる, という解釈が導かれる. そこで, $\Lambda(\mathbf{x}_n) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ (S_n は n 次対称群) を対称多項式のなす環とすると,

$$\Lambda(\mathbf{x}_n) = \mathbb{Z}[e_1(\mathbf{x}_n), \dots, e_n(\mathbf{x}_n)] \xrightarrow{\sim} H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n], \quad e_i(\mathbf{x}_n) \mapsto c_i, \quad (1)$$

という同一視ができる. さらに, $n \rightarrow \infty$ の極限を考えると, $BU = BU(\infty)$ のコホモロジー環と対称関数のなす環 $\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda$ との間の, よく知られた同一視

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots] \xrightarrow{\sim} H^*(BU) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots], \quad e_i \mapsto c_i, \quad (2)$$

本研究は科研費(課題番号:15K04876)の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 05E05, 57R77, 55N20, 55N22, 14N15

キーワード: Schur 関数, 一般コホモロジー理論, Schur 関数, Schubert calculus, Gysin 準同型

* 〒700-8530 岡山県岡山市北区津島中3-1-1 岡山大学大学院教育学研究科

e-mail: nakagawa@okayama-u.ac.jp

¹本稿で述べる研究は, 2011年の春頃から行っている成瀬 弘氏(山梨大学大学院総合研究部)との共同研究に基づくものである. この場をお借りして, 成瀬氏にお礼を申し上げたい.

²特に断わらない限り, コホモロジーは整数係数であるとする: $H^*(-) = H^*(-; \mathbb{Z})$.

³複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 上の「標準直線束 (Hopf の直線束)」を $\gamma^1 := \{(\ell, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \ell\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ とし, これが定める $\mathbb{C}P^\infty \simeq BU(1)$ 上の直線束も γ^1 と書くことにする. $BT^n \simeq \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty$ であるから, i 番目の射影 $\mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ による γ^1 の引き戻しを γ_i^1 と書いた ($i = 1, \dots, n$).

が得られる ($e_i = e_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots$) は基本対称関数). さらに, BU はベクトル束の Whitney 和から誘導される積 $\phi: BU \times BU \rightarrow BU$ をもち, これによりホモトピー可換な H -空間となる. したがって BU のホモロジー $H_*(BU)$ は, いわゆる Pontrjagin 積により環となり, その環構造もよく知られている: まず, $H^*(BU(1)) = \mathbb{Z}[c_1]$ であるから, その自由加群としての基底 $\{c_1^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ が取れ, $H_*(BU(1))$ の基底として, その双対基底 $\{\beta_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ ($\beta_0 := 1$) を取る. 次に, 自然な写像 $BU(1) \rightarrow BU$ がホモロジーに誘導する準同型 $H_*(BU(1)) \rightarrow H_*(BU)$ による $\beta_i \in H_{2i}(BU(1))$ の像を同じく $\beta_i \in H_{2i}(BU)$ と書くことにすると, $H_*(BU)$ の環構造は以下のようになる:

$$H_*(BU) = \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \dots].$$

これを対称関数の言葉で言うと次のようになる: $h_i = h_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots$) を完全対称関数とする. すなわち, 母関数

$$H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i t^i = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i t}$$

により定まる Λ の元とする. このとき, β_i の定め方より, 次の同一視が得られる:

$$\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots] \xrightarrow{\sim} H_*(BU) = \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \dots], \quad h_i \mapsto \beta_i. \quad (3)$$

さらに付け加えると, 上の同一視 (2), (3) は \mathbb{Z} 上の Hopf 代数としての同型⁴ を与えている. このようにして, 例えば Macdonald の本 [55] の第 I 章に登場する様々な対称関数 (基本対称関数 e_r ($r = 1, 2, \dots$), 完全対称関数 h_r ($r = 1, 2, \dots$) の他, 冪和対称関数 p_r ($r = 1, 2, \dots$), 単項対称関数 m_λ (λ はいわゆる分割⁵) などなど) に対応する「幾何学的な対象」は何か? という問いを考えることが, 少なくとも筆者にとっては研究の原点だったと言える. そうすると, この本の第 I 章で最も詳しく扱われ, 表現論や組合せ論において最も重要な対称関数と考えられる **Schur 関数 (Schur 多項式)** に対応する幾何学的な対象は何だろうか? という問いがすぐに思い浮かぶ. ところが筆者の知る限り, Schur 関数を扱ったトポロジー (特に, 代数的トポロジー, ホモトピー論) 関係の論文はほとんどないようである. が, 幾何学的な対象は確かに存在し, それが次節で述べる複素 Grassmann 多様体の **Schubert 類** である.

1.2. Schubert calculus の観点

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ を, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n \geq 0$ を満たす非負整数の列として, 単項式 $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ と定義する. この単項式に n 次対称群 S_n の元 w が,

$$w \cdot \mathbf{x}^\alpha := \mathbf{x}^{w \cdot \alpha}, \quad w \cdot \alpha = w \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n) := (\alpha_{w^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{w^{-1}(n)})$$

により作用する. そこで,

$$a_\alpha = a_\alpha(\mathbf{x}_n) := \sum_{w \in S_n} \text{sgn}(w) w \cdot \mathbf{x}^\alpha = \det(x_i^{\alpha_j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

⁴ 対称関数環 Λ の Hopf 代数構造については, Macdonald [55, Examples 25] に簡単な記述がある. 例えば, 余積構造は

$$\Delta(h_r) = \sum_{p+q=r} h_p \otimes h_q \quad (4)$$

で与えられる.

⁵ 本稿では, 組合せ論の用語 (ごく標準的なもののみ) を断りなしに用いることもあると思われる. 適宜, Macdonald [55, I, 1. Partitions], 岡田 [63, §6.1] を参照していただきたい.

と定義すると, a_α は交代式である. 特に, $\rho_{n-1} := (n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0)$ に対しては,

$$a_{\rho_{n-1}} = \det(x_i^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \quad (\text{差積})$$

である. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ を, $\lambda := \alpha - \rho_{n-1}$, すなわち, $\lambda_j := \alpha_j - (n-j)$ ($j = 1, \dots, n$) とおくと, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ となるから, λ は長さが n 以下の分割である. このとき, 交代式 $a_\alpha = a_{\lambda + \rho_{n-1}}$ は差積 $a_{\rho_{n-1}}$ で割り切れ, その商 $a_{\lambda + \rho_{n-1}} / a_{\rho_{n-1}}$ は対称多項式となる. そこで,

$$s_\lambda(\mathbf{x}_n) := \frac{a_{\lambda + \rho_{n-1}}}{a_{\rho_{n-1}}} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + n - j})_{1 \leq i, j \leq n}}{\det(x_i^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n}} \quad (5)$$

と定義し⁶, これを分割 λ に対応する **Schur 多項式** という. 長さが n 以下の分割の集合を \mathcal{P}_n (分割全体のなす集合を \mathcal{P}) とするとき, 次が成り立つことが知られている:

1. Schur 多項式 $\{s_\lambda(\mathbf{x}_n)\}_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ は対称多項式のなす環 $\Lambda(\mathbf{x}_n)$ の自由 \mathbb{Z} -基底をなす.
2. $n \rightarrow \infty$ の極限を考えると, Schur 関数 $\{s_\lambda(\mathbf{x})\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ は対称関数のなす環 Λ の自由 \mathbb{Z} -基底をなす.

また, 例えば分割 (k) に対応する Schur 関数 $s_{(k)}(\mathbf{x})$ は完全対称関数 h_k に, 分割 $(1^k) = (1, 1, \dots, 1)$ に対応する Schur 関数 $s_{(1^k)}(\mathbf{x})$ は基本対称関数 e_k に一致することが知られている. 上記の 1., 2. と先の同一視 (1), (2) から, $s_\lambda(\mathbf{x}_n)$ に対応する $H^*(BU(n))$ のコホモロジー類は, (Schur 多項式の重要性に鑑みると) 幾何学的にも意味のあるものではないかと予想される. ところで, $Gr(n, \mathbb{C}^N)$ を \mathbb{C}^N 中の n 次元線形部分空間のなす複素 Grassmann 多様体とすると, 分類空間 $BU(n)$ の構成方法の一つとして「無限 Grassmann 多様体」 $Gr(n, \mathbb{C}^\infty)$ が取れることを思い起こすと, Grassmann 多様体 $Gr(n, \mathbb{C}^N)$ のコホモロジー環 $H^*(Gr(n, \mathbb{C}^N))$ の中に, 何かしら重要なコホモロジー類が棲んでいることが予見される. それが「Schubert 多様体」の定める「Schubert 類」である. 定義を復習しておこう⁷. $\{e_i\}_{i=1}^N$ を \mathbb{C}^N の標準基底とし, 基準となる旗, すなわち線形部分空間の系列

$$\tilde{F}_\bullet : \{0\} = \tilde{F}_0 \subset \tilde{F}_1 \subset \tilde{F}_2 \subset \dots \subset \tilde{F}_{N-1} \subset \tilde{F}_N = \mathbb{C}^N$$

を一つ固定する. ここで, $\tilde{F}_i := \langle e_{N+1-i}, \dots, e_{N-1}, e_N \rangle$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) とする. そこで,

$$N - n \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

を満たす分割 λ に対して⁸, **Schubert 多様体**

$$\Omega_\lambda(\tilde{F}_\bullet) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^N) \mid \dim(V \cap \tilde{F}_{N-n+i-\lambda_i}) \geq i \ (i = 1, \dots, n)\} \subset Gr(n, \mathbb{C}^N)$$

⁶2節において, この Schur 多項式 (関数) の「普遍版」と呼ぶべきものを導入するが, そこでの定義に合わせて,

$$s_\lambda(\mathbf{x}_n) = \sum_{w \in S_n} w \cdot \left[\frac{\mathbf{x}^{\lambda + \rho_{n-1}}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)} \right] \quad (6)$$

と表示することもできる.

⁷Grassmann 多様体の Schubert 類については, Fulton [27, §9.4], Manivel [56, §3.2] が基本的な文献だと思われる.

⁸すなわち, 対応する Young 図形が, 縦 n , 横 $N - n$ の「長方形」に含まれるような分割である. 本稿では, この条件を満たす分割の集合を $\mathcal{P}_{n,N}$ と書くことにしよう.

と定義すると, $\Omega_\lambda(\tilde{F}_\bullet)$ は, 余次元が $|\lambda| := \sum_{i=1}^n \lambda_i$ の既約な閉部分多様体となる. そこで, $\Omega_\lambda(\tilde{F}_\bullet)$ が定めるコホモロジー類を $\sigma_\lambda \in H^{2|\lambda|}(Gr(n, \mathbb{C}^N))$ と書き, これを **Schubert 類** という. このとき, Schubert 類 $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_{n,N}}$ は, コホモロジー環 $H^*(Gr(n, \mathbb{C}^N))$ の自由 \mathbb{Z} -基底をなす. ここで, 加群としての全射準同型を

$$\Lambda(\mathbf{x}_n) \longrightarrow H^*(Gr(n, \mathbb{C}^N)), \quad s_\lambda(\mathbf{x}_n) \longmapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & (\lambda \in \mathcal{P}_{n,N} \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

と定義する. このとき, Schubert 類の積規則を与える有名な **Pieri の規則**⁹ を利用すると, 上記の写像が環準同型であることが示される. これが, $N \rightarrow \infty$ の極限において, 1.1 節の同一視 (1) を, さらに $n \rightarrow \infty$ の極限において, (2) の同一視を与えるというわけである. ここでは分類空間 $BU(n)$ という“無限次元”の空間から話を始めたが, 本節で触れたように, 有限次元の複素 Grassmann 多様体 $Gr(n, \mathbb{C}^N)$ といった「Schubert 類が定義される空間」に対して, そのコホモロジー環と対称関数との関係を追求することは極めて自然である. このような空間としては, いわゆる **一般旗多様体**, すなわち連結な複素 (半単純) Lie 群 G を, その放物型部分群 P で割った等質多様体 G/P が考えられる. 例えば, Macdonald の本の第 III 章に登場する **Schur の Q -関数** と Lagrangian Grassmann 多様体 $LG(n, \mathbb{C}^{2n})$ のコホモロジー環の Schubert 類との対応はよく知られている (Jozefiak [39], Pragacz [66, §6]). さらに, 考えるコホモロジー理論を通常のコホモロジー理論 $H^*(-)$ だけでなく, K -理論 $K^*(-)$ や複素および代数的コボルディズム理論 $MU^*(-)$, $\Omega^*(-)$, そして, それらの「トーラス同変版」などへ拡張することが, 多くの数学者によって, この20年ほどの間に精力的に進められている. 関連する文献を網羅することはできないが, 思いつくままを挙げておく: Kostant-Kumar [44], [45], Knutson-Tao [41], Ikeda [35], Ikeda-Naruse [36], Ikeda-Mihalcea-Naruse [37], Ikeda-Naruse [38], Hornbostel-Kiritchenko [34].

1.3. Lie 群上のループ空間の (コ) ホモロジー

ここで, いささか唐突ではあるが, 有名な「(複素) Bott の周期性定理」について触れておきたい. これは, Bott の原論文 [12, p.314, Corollary] では, 「無限ユニタリー群 $U = U(\infty)$ のホモトピー群が周期的であり, 周期 2 を持つ: $\pi_k(U) = \pi_{k+2}(U)$ ($k = 0, 1, \dots$)」という形で述べられているが, 本研究にとって利用しやすい形で述べ直しておこう: ΩSU を, 無限特殊ユニタリー群 $SU = SU(\infty)$ 上の基点付きループ空間とすると, 「H-空間としてのホモトピー同値 $BU \xrightarrow{\sim} \Omega SU$ が存在する». このことから, ΩSU の (コ) ホモロジーと対称関数環 Λ との Hopf 代数としての同型が存在する:

$$H_*(\Omega SU) \cong \Lambda, \quad H^*(\Omega SU) \cong \Lambda.$$

このようにして, 我々の研究対象の中に Lie 群上のループ空間が入ってくる. K をコンパクトな単連結, 単純 Lie 群, ΩK をその基点付きループ空間とすると, ΩK はループの積により, ホモトピー可換な H-空間となり, そのホモロジー群は偶数次の元のみから成る自由 \mathbb{Z} -加群の構造をもつ. このことから, そのホモロジー $H_*(\Omega K)$ は \mathbb{Z} 上の可換な Hopf 代数の構造をもつ. この Hopf 代数構造の計算は, 多くの代数的トポロジストにより行われており, 本研究と関連する文献を挙げておくと, Bott [9], [10], [11], Bott-Samelson

⁹Fulton [27, p.146], Manivel [56, 3.2.8].

[13], Clarke [19], [20], [21], Kono-Kozima [42], Kozima [46], [47], [48], Petrie [64], Rao [71] などがある. 特に, Bott の結果が最も基本的であり, 例えば $\Omega SU(k+1)$ のホモロジーは, 次のような多項式環で与えられる:

$$H_*(\Omega SU(k+1)) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k].$$

ただし, $\sigma_i \in H_{2i}(\Omega SU(k+1))$ ($i = 1, \dots, k$). さらに, その余積構造は

$$\Delta(\sigma_r) = \sum_{p+q=r} \sigma_p \otimes \sigma_q \quad (\sigma_0 := 1), \quad (7)$$

により与えられる. この結果を, 1.1節で述べた対称関数の視点から眺めてみると, 極めて自然に次のような同一視に思い至る:

$$H_*(\Omega SU(k+1)) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_k] \xrightarrow{\sim} \Lambda_{(k+1)} := \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_k]. \quad (8)$$

Bott の論文 [11] を読むと, 彼の頭には間違いなく対称関数環との同一視 (8) があつたと考えられるが, その方向性を「深化」させるには, もう少し時が必要だったようである. すなわち, 1970年代に入り, Garland-Raghuathan [29] と Quillen (未発表) により独立に, ΩK がいわゆるアフィン Grassmann 多様体の構造をもつことが示された. すなわち, K の複素化を $G := K_{\mathbb{C}}$ とし,

$$\mathcal{G} := \{f : \mathbb{C}^* \rightarrow G \text{ (正則)}\} \supset \mathcal{P} := \{f \in \mathcal{G} \mid f \text{ は原点も込めて正則}\}$$

とおくとき, G に付随するアフィン Grassmann 多様体 Gr_G を $\text{Gr}_G := \mathcal{G}/\mathcal{P}$ と定義する. このとき, Garland-Raghuathan と Quillen は, ΩK と Gr_G がホモトピー同値であることを示した. これにより, Lie 群上のループ空間をも「無限次元の旗多様体」と見ることが可能となり, 1.2節と同様に, 「Schubert 多様体」, 「Schubert 類」¹⁰ が定義され, 同様の議論が展開される. これが近年, 「アフィン Schubert calculus」と呼ばれ, これまた凄まじい勢いで研究が行われている. ここに詳述する余裕はないが, 関連する文献を思いつくまま挙げておく: Lam [49], [50], Lam-Schilling-Shimozono [51], [52], Littig-Mitchell [54], Mitchell [58], [59], [60].

これらの研究を横目に見つつ, 筆者はもはや忘れ去られようとしている観のある代数的トポロジストの古い仕事を見直そうと考え, 特に, Clarke [19], [20], Kono-Kozima [42] に着目し, 彼らの結果を何とか「対称関数の視点」から解釈できないか, と2010年の終わり頃から模索を始めた. 成瀬氏と協力し, その模索の結果をひとまずまとめたものが, Nakagawa-Naruse [62] である. この論文においては, 通常のコホモロジー理論 $H^*(-)$ を「複素向き付け可能な(乗法的)一般コホモロジー理論」¹¹ に拡張して議論を行っている. 特に, 複素向き付け可能な一般コホモロジー理論の中で「普遍性」をもつ「複素コボルディズム理論」 $MU^*(-)$ における定式化を目標とし, 1.2節で述べた Schur 関数の「普遍版」であり, 本講演の題目の中にもある**普遍 Schur 関数**を導入した. これについては2節において述べることとする.

¹⁰ 今度は, コホモロジーではなく, ホモロジーにおける Schubert 類が考察の中心となる.

¹¹ Adams [1, Part II, p.37], Switzer [73, §16.27].

2. 普遍 (factorial) Schur 関数

1.2節で述べたことを標語的に言うと、「複素 Grassmann 多様体のコホモロジー環における Schubert 類は Schur 関数により代表される」。この事実を雛形として、そこで述べたように、複素 Grassmann 多様体を含む様々な旗多様体のコホモロジー、 K -理論などと、Schur 関数を含む様々な対称関数との密接な関連が明らかになりつつある。中でも、複素 Grassmann 多様体のトーラス同変コホモロジー環と **factorial Schur 関数** との関係 (Knutson-Tao [41, §6], Molev-Sagan [61, §2]) およびトーラス同変 K -理論と **factorial Grothendieck 多項式** (McNamara [57, §4], Ikeda-Naruse [38, §2.4, 9.3]) は取り分け重要であると考えられる。

2.1. 普遍 factorial Schur 関数

これらの先行研究を踏まえて、我々は、論文 [62, §4.5] において、これらの対称関数の「普遍版」を導入した。すなわち、 \mathbb{L} を Lazard 環¹² とし、

$$F_{\mathbb{L}}(u, v) = u + v + \sum_{i,j \geq 1} a_{i,j} u^i v^j \in \mathbb{L}[[u, v]]$$

を (一次元の可換な) **普遍形式群** とする。以下では、

$$a +_{\mathbb{L}} b = F_{\mathbb{L}}(a, b) \text{ (形式和)}, \quad \bar{a} = \chi_{\mathbb{L}}(a) \text{ (形式的逆元)}$$

と書くことにする。非負整数 k に対して、通常 t^k の拡張として、

$$[t|\mathbf{b}]^k := \prod_{i=1}^k (t +_{\mathbb{L}} b_i) = (t +_{\mathbb{L}} b_1)(t +_{\mathbb{L}} b_2) \cdots (t +_{\mathbb{L}} b_k), \quad [t|\mathbf{b}]^0 := 1$$

とおく。また、長さが n 以下の分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して、 $[\mathbf{x}|\mathbf{b}]^\lambda := \prod_{i=1}^n [x_i|\mathbf{b}]^{\lambda_i}$ と定義する。このとき、

定義 2.1. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ に対して、**普遍 factorial Schur 関数** $s_{\lambda}^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n|\mathbf{b})$ を、次の式により定義する¹³:

$$s_{\lambda}^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n|\mathbf{b}) = s_{\lambda}^{\mathbb{L}}(x_1, \dots, x_n|\mathbf{b}) := \sum_{w \in S_n} w \left[\frac{[\mathbf{x}|\mathbf{b}]^{\lambda + \rho_{n-1}}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i +_{\mathbb{L}} \bar{x}_j)} \right].$$

さらに、その「非同変版」である **普遍 Schur 関数** を $s_{\lambda}^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n) := s_{\lambda}^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n|0)$ により定義する¹⁴。

$s_{\lambda}^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n|\mathbf{b})$ の作り方と $F_{\mathbb{L}}(u, v)$ の「普遍性」により、全ての $a_{i,j} = 0$ と特殊化すると、通常 $\text{factorial Schur 関数}$ が得られ、 $a_{1,1} = \beta$ (いわゆる「Bott 元」)、それ以外の $a_{i,j} = 0$ と特殊化すると、 $\text{factorial Grothendieck 多項式}$ が得られることを注意しておく。その意味で、我々の $s_{\lambda}^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n|\mathbf{b})$ は「普遍性」を持っている。

¹² Lazard 環 \mathbb{L} と複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ との関係を最初に指摘したのは Quillen [69, Theorem 2] である。Adams [1, Part II, Theorem 8.2], 河野-玉木 [43, 定理 6.30] などとも参照。

¹³ 1.2節の (6) 式と比較していただきたい。

¹⁴ 「非同変版」である 普遍 Schur 関数 は、既に Fel'dman [25, Definition 4.2] により導入されており、ここでは *generalized Schur polynomials* と呼ばれている。

3. Gysin 写像 (準同型)

3.1. Gysin 写像いろいろ

この節では本講演のもう一つの主役である **Gysin 写像 (準同型)** について述べておく¹⁵. 幾何学の様々な分野において, そして様々な設定の下で, 「自然な向き」とは「逆向きの写像」が定義され, 大変有用なものとなる. その主なものを (仔細には触れずに) 列挙しておく,

- (a) コホモロジー理論 $H^*(-)$ における Gysin 準同型¹⁶
- (b) ファイバー上の積分¹⁷
- (c) K -理論¹⁸ $K(-)$ における Gysin 写像¹⁹
- (d) 複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ における Gysin 写像²⁰

などがある.

このように, 一般に「Gysin 写像 (準同型)」と呼ばれる写像は, 様々なコホモロジー理論において, 様々な設定の下で構成されているが, 重要なことは「複素向き付け可能な一般コホモロジー理論」 $h^*(-)$ に対して, 然るべき空間の間の射 $f: X \rightarrow Y$ から, 「逆向きの写像」 $f_*: h^*(X) \rightarrow h^*(Y)$ であって,

- (自然性) 合成射 $g \circ f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対して, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ が成り立つ.
- (射影公式) $x \in h^*(X)$, $y \in h^*(Y)$ に対して, $f_*(f^*(y) \cdot x) = y \cdot f_*(x)$ が成り立つ.
- (基底変換) ファイバー積からなる可換図式

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ \tilde{g} \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

に対して, $f^* \circ g_* = \tilde{g}_* \circ \tilde{f}^*: h^*(Y) \rightarrow h^*(X)$ が成り立つ.

を持つものが定義できる, ということであると考えられる.

3.2. Gysin の公式いろいろ

Gysin 写像 (準同型) に関連して, 様々な「公式」が知られている. その中で本研究に密接に関連するものを挙げておこう.

¹⁵ これまで本研究の動機について長々と書いてきたが, 本講演に直結する「Gysin の公式」との関係については, 次のような経緯がある: 去る 2014 年 10 月 20 日に, P. Pragacz 氏が来日され, 岡山大学にて講演された. その時の内容は, 論文 [68] に書かれてあるものであったが, その折に, 成瀬氏が「Pragacz の論文の内容は, 論文 [62] で定義された「普遍 Schur 関数」, 「普遍 Schur P, Q -関数」, さらに「普遍 Hall-Littlewood 関数」にも拡張できるのではないかと仰ったことが研究の発端である.

¹⁶ Fulton [27, Appendix B.1], 服部 [32, §8.1], Manivel [56, appendix A.3].

¹⁷ Borel-Hirzebruch [6, §8].

¹⁸ ここでは代数多様体上の接続層から構成される Grothendieck 群を指すものとする.

¹⁹ Borel-Serre [8, §5, d.], Hartshorne [31, Appendix A, p.436], Hirzebruch [33, §23, p.170].

²⁰ Quillen [70, 1.4].

3.2.1. “ $G/B \rightarrow G/P$ ” の形の Gysin の公式

G を連結な半単純 (もしくは簡約) 複素代数群, B および T を, それぞれ Borel 部分群, 極大トーラスとする. G のルート系を $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$, $\Pi \subset \Delta^+$ を単純ルートの集合とする. 部分集合 $\Theta \subset \Pi$ に対応する放物型部分群を $P = P_\Theta$ とし, W_Θ および Δ_Θ を, それぞれ P_Θ に対応する Weyl 群, ルート系とする. 極大トーラス T の指標群を $\hat{T} = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$, $\text{Sym}(\hat{T})$ を, その対称代数とすると, 指標 $\chi \in \hat{T}$ に対して, G/B 上の直線束 $L_\chi := G \times_\chi \mathbb{C}$ の第一 Chern 類 $c_1(L_\chi) \in H^2(G/B; \mathbb{C})$ を対応させることにより, 特性準同型 $c : \text{Sym}(\hat{T}) \rightarrow H^*(G/B; \mathbb{C})$ が定義される. $\pi : G/B \rightarrow G/P$ を自然な射影とすると, 次の定理が知られている:

定理 3.1 (Akyildiz-Carrell [3], [4], Theorem 1). *Gysin* 準同型

$$\pi_* : H^*(G/B; \mathbb{C}) \rightarrow H^*(G/P; \mathbb{C})$$

は, 次で与えられる²¹:

$$\pi^* \circ \pi_* c(f) = c \left(\sum_{w \in W_\Theta} \frac{\det(w) w \cdot f}{\prod_{\alpha \in \Delta_\Theta^+} \alpha} \right) \quad (f \in \text{Sym}(\hat{T})). \quad (10)$$

Akyildiz-Carrell ([3], [4, Theorem 1]) は, この公式を, 旗多様体上の正則ベクトル場の零点を利用した Gysin 準同型の記述を利用して証明している²².

3.3. “ $\mathcal{F}l(E) \rightarrow X$ ” の形の公式

$E \xrightarrow{p} X$ を階数 n の複素ベクトル束とし²³, $\tau = \tau_E : \mathcal{F}l(E) \rightarrow X$ を, 付随する (完全) 旗束とする. 旗束上には, いわゆる「部分束からなる普遍的旗」

$$U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset U_n = \tau^*(E)$$

が存在するが, 商束 $Q_i := \tau^*(E)/U_{n-i} = E/U_{n-i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) を考える²⁴ ことにより, 「商束からなる普遍的旗」

$$E = Q_n \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1$$

が構成される. $\mathcal{F}l(E)$ 上の直線束を $L_i := \text{Ker}(Q_i \rightarrow Q_{i-1})$ と定義し, $x_i := c_1(L_i) \in H^2(\mathcal{F}l(E))$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とおく (E の Chern ルート). $\mathcal{F}l(E)$ の構成方法より, $\tau^*(E) = \bigoplus_{i=1}^n L_i$ と直線束の直和に分かれるので, 全 Chern 類を考えることにより,

$$c(E) = \tau^* c(E) = c(\bigoplus_{i=1}^n L_i) = \prod_{i=1}^n c(L_i) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i)$$

²¹ \mathbb{C} 上では特性準同型 $c : \text{Sym}(\hat{T}) \rightarrow H^*(G/B; \mathbb{C})$ は全射であるから, この公式は,

$$\pi^* \circ \pi_*(x) = \sum_{w \in W_\Theta} w \cdot \left[\frac{x}{\prod_{\alpha \in \Delta_\Theta^+} \alpha} \right] \quad (x \in H^*(G/B; \mathbb{C})) \quad (9)$$

と書けることを注意しておく.

²² 本質的に同じ公式を Brion [16, Proposition 2.1] が示している. Brion は, この公式を Weyl の指標公式 および Grothendieck-Riemann-Roch の定理という「大道具」を用いて示している. また, この公式は Kajimoto [40, Theorem 2.3] においても示されている.

²³ 底空間 X について, 特に制限はしないが, いわゆる「ベクトル束の分類定理」が成り立つような空間とする.

²⁴ ベクトル束 E の $\mathcal{F}l(E)$ 上への引き戻し $\tau^*(E)$ も同じ記号 E で書くことにする.

が成り立つ. このことから, $\mathcal{F}l(E)$ のコホモロジー環は,

$$H^*(\mathcal{F}l(E)) = H^*(X)[x_1, \dots, x_n] / \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = c(E) \right)$$

で与えられる. このとき, 射影 $\tau: \mathcal{F}l(E) \rightarrow X$ が誘導する Gysin 準同型 $\tau_*: H^*(\mathcal{F}l(E)) \rightarrow H^*(X)$ について, 次の公式が知られている.

定理 3.2 (Pragacz [65], Lemma 2.4, Pragacz [67], Proposition 4.2 (ii), Fulton-Pragacz [28], p.41). 多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ に対して,

$$\tau^* \circ \tau_*(P(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{w \in S_n} w \cdot \left[\frac{P}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)} \right] \quad (11)$$

が成り立つ.

Fulton-Pragacz [28, p.41] では, まず射影空間束 $\pi: P(E) = G_1(E) \rightarrow X$ の場合²⁵ の Gysin 準同型を計算し, その結果と次の分解

$$\mathcal{F}l(E) = \mathcal{F}l(Q_{n-1}) \xrightarrow{\tau' = \tau_{Q_{n-1}}} G_1(E) = P(E) \xrightarrow{\pi'} X$$

を用い, 階数 n に関する帰納法により証明している. 公式 (10), (9) と (11) の類似性は明白であるが, その証明方法は大きく異なる. しかし, 何らかの束の射影から誘導される Gysin 写像が, 対称群 (より一般に Weyl 群) の作用による和の形で書けている, という事実は, これらを統一的に扱える可能性があることを示唆しているのではないだろうか? そこで, 我々は Bressler-Evens の仕事 [14] に着目することにした. すなわち, $h^*(-)$ を, 複素向き付け可能な乗法的一般コホモロジー理論とする. ただし, $h^*(pt)$ はねじれ元をもたないと仮定する. 複素直線束 $L \rightarrow X$ に対して, その $h^*(-)$ 理論 Euler 類 $\chi(L) \in h^*(X)$ が定まる. G をコンパクトな連結, 半単純 Lie 群, T をその極大トーラスとして, Borel のファイブレーション

$$G/T \hookrightarrow BT \xrightarrow{\rho} BG$$

を考える. $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ を G のルート系, W_G を G の Weyl 群, 指標 $\lambda \in \text{Hom}(T, S^1)$ に付随する BT 上の直線束を L_λ と書こう. このとき, $\rho: BT \rightarrow BG$ が誘導する Gysin 準同型 $\rho_*: h^*(BT) \rightarrow h^*(BG)$ について, Bressler-Evens は次を示した²⁶:

定理 3.3 (Bressler-Evens [14], Theorem 1.8). 上の設定の下で,

$$\rho^* \circ \rho_*(f) = \sum_{w \in W_G} w \cdot \left[\frac{f}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \chi(L_{-\alpha})} \right] \quad (f \in h^*(BT)) \quad (12)$$

が成り立つ.

²⁵ 階数 n の複素ベクトル束 $E \xrightarrow{p} X$ に対して, r 次元線形部分空間からなる Grassmann 束を $G_r(E) \rightarrow X$ と書くことにする (1.2 節では Grassmann 多様体を $Gr(n, \mathbb{C}^N)$ と書いていた). 特に, 射影空間束 $P(E) = G_1(E)$ である.

²⁶ 実は, 常コホモロジー理論 $H^*(-)$ の場合は, 既に Borel-Hirzebruch [7, Theorem 20.3] において示されていることに筆者は最近気が付いた.

この公式の導出には, Becker-Gottlieb [5] の移送準同型 (トランスファー) を利用した Brumfiel-Madsen の公式 [17, Theorem 3.5] が用いられていることを注意しておく.

さらに, Bressler-Evens [14] には述べられていないが, 定理 3.3 を次のように拡張することができる: H を最大階数 (すなわち極大トーラス T を含む) 閉連結部分群とし, H の Weyl 群, ルート系をそれぞれ W_H , $\Delta_H = \Delta_H^+ \sqcup \Delta_H^-$ とする. Borel のファイブレーション

$$G/H \hookrightarrow BH \xrightarrow{\sigma} BG$$

を考えると, $\sigma: BH \rightarrow BG$ が誘導する Gysin 準同型 $\sigma_*: h^*(BH) \rightarrow h^*(BG)$ について, 次が成り立つ:

系 3.4.

$$\sigma^* \circ \sigma_*(f) = \sum_{\bar{w} \in W_G/W_H} w \cdot \left[\frac{f}{\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_H^+} \chi(L_{-\alpha})} \right] \quad (f \in h^*(BH)).$$

定理 3.3 とその系 3.4 を用いると, 先の定理 3.1, 3.2 は容易に証明することができる. 例えば, 階数 n の複素ベクトル束 $E \xrightarrow{p} X$ が与えられたとき, ベクトル束の分類定理により, 分類写像 $f: X \rightarrow BU(n)$ が存在し, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}l(E) & \xrightarrow{\tilde{f}} & BT^n \\ \tau \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{f} & BU(n). \end{array}$$

$G = U(n)$ の場合, ルート系 $\Delta = \{\pm(x_i - x_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ であることと, Gysin 準同型の「基底変換」により, 定理 3.2 は定理 3.3 から直ちに従うことがわかる. さらに, Bressler-Evens の公式は複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ にも適用できる. 複素ベクトル束 $E \xrightarrow{p} X$ に対して, 複素コボルディズム理論における Chern 類 (Conner-Floyd Chern 類²⁷) $c_i^{MU}(E) \in MU^{2i}(X)$ が定義され, $\mathcal{F}l(E)$ の複素コボルディズム理論 $MU^*(\mathcal{F}l(E))$ は,

$$MU^*(\mathcal{F}l(E)) = MU^*(X)[x_1, \dots, x_n] / \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = c^{MU}(E) \right)$$

($c^{MU}(E)$ は全 Chern 類) で与えられる. このとき, 射影 $\tau: \mathcal{F}l(E) \rightarrow X$ が誘導する Gysin 準同型 $\tau_*: MU^*(\mathcal{F}l(E)) \rightarrow MU^*(X)$ について, 次が成り立つ:

定理 3.5. 多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ に対して,

$$\tau^* \circ \tau_*(P(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{w \in S_n} w \cdot \left[\frac{P}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + \mathbb{L} \bar{x}_j)} \right]$$

が成り立つ.

²⁷ Adams [1, Part I, §4], Conner-Floyd [22, Corollary 8.3].

4. 旗束上の Gysin の公式の応用

4.1. 普遍 Schur 関数の特徴付け

3.3 節の設定の下で考える. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ に対する Schur 多項式 $s_\lambda(\mathbf{x}_n)$ は, 変数 x_1, \dots, x_n に関する対称多項式であるから, 基本対称多項式 $e_i(\mathbf{x}_n)$ たちの多項式で表される. 今, ベクトル束 E の Chern ルートを x_1, \dots, x_n とするとき, E の Chern 類 $c_i(E)$ は $e_i(\mathbf{x}_n)$ と同一視できた. そこで, $s_\lambda(\mathbf{x}_n)$ を $c_i(E)$ たちの多項式として表したものを $s_\lambda(E) \in H^{2|\lambda|}(X)$ と書くことにしよう. この記法の下で, 射影 $\tau: \mathcal{F}l(E) \rightarrow X$ が誘導する Gysin 準同型 $\tau_*: H^*(\mathcal{F}l(E)) \rightarrow H^*(X)$ を考えるとき, 単項式 $\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}} := x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \dots x_n^{\lambda_n}$ の, Gysin 準同型による像は, 定理 3.2 により,

$$\tau_*(\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}}) = \sum_{w \in S_n} w \cdot \left[\frac{\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)} \right] = s_\lambda(E) \quad (13)$$

で与えられる (Pragacz [65, Lemma 2.3], Pragacz [67, Proposition 4.4], Pragacz [68, Example 8], Fulton-Pragacz [28, p.41, (4.1)]). この公式は, Fulton-Pragacz [28, p.42] では **Jacobi-Trudi の恒等式** と呼ばれており²⁸, これを利用して, 例えば Grassmann 束 $G^q(E) = G_{n-q}(E) \xrightarrow{\pi} X$ 等に対する, 様々な Gysin の公式が導かれている. 定理 3.5 を用いると, この Jacobi-Trudi の恒等式 (13) を複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ に直ちに拡張することができ, 次の定理を得る:

定理 4.1. *Gysin 準同型 $\tau_*: MU^*(\mathcal{F}l(E)) \rightarrow MU^*(X)$ を考えるとき, 単項式 $\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \dots x_n^{\lambda_n}$ について,*

$$\tau_*(\mathbf{x}^{\lambda+\rho_{n-1}}) = s_\lambda^{\mathbb{L}}(E) \quad (14)$$

が成り立つ.

4.2. 普遍 Hall-Littlewood 関数

論文 Nakagawa-Naruse [62, Definition 4.1] では, 普遍 Schur 関数 $s_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n)$ に加えて, 通常の Schur P, Q -関数の「普遍版」である **普遍 Schur P, Q -関数** $P_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n), Q_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n)$ (およびその factorial 版) も導入されており, これに対しても同様の特徵付けが得られている. これは Pragacz の結果 [68, Example 11] の, 複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ への一般化でもある. 紙数の関係上, **Hall-Littlewood 関数**²⁹ についての結果のみを述べて, 本稿を終えることとする³⁰. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ を長さが n 以下の分割とする. 正の整数 $m_1, m_2, \dots, m_d, m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$, を

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \dots = \lambda_{m_1} \quad (m_1 \text{個}), \\ \lambda_{m_1+1} &= \lambda_{m_1+2} = \dots = \lambda_{m_1+m_2} \quad (m_2 \text{個}), \\ &\vdots \\ \lambda_{m_1+m_2+\dots+m_{d-1}+1} &= \dots = \lambda_n \quad (m_d \text{個}) \end{aligned}$$

²⁸筆者は 2014 年の 10 月頃から, この辺りの Gysin の公式について勉強し始めた. その折に, 公式 (13) を面白いと感じた. そう思っているいろいろと調べてみると, (本質的に) 同じ公式は, 随分古くから, 多くの数学者によって導かれていたことがわかった. 参考までに挙げておくと, Damon [24, Corollary 2], Harris-Tu [30, Proposition 2.3], Manivel [56, Exercise 3.8.3], Sugawara [72, Theorem A] などがある.

²⁹Macdonald [55, III, §2].

³⁰記法については概ね Pragacz [68] に従うこととする.

により定義する. これにより, $\{1, 2, \dots, n\}$ を d 個の “区間” I_1, I_2, \dots, I_d に分けよう: $[n] := \{1, 2, \dots, n\} = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \dots \sqcup I_d$. 各 $i \in [n]$ に対して, i が属する “区間” が I_r であるとき, $n(i) := r$ と定義する. S_n の部分群 S_n^λ を, λ の固定化部分群としよう. 具体的には $S_n^\lambda = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_d}$ である. 次に, 普遍形式群 $F_{\mathbb{L}}(u, v)$ の対数を $l(x)$ とする³¹. 対数 $l(x)$ を用いると, 形式和 $a +_{\mathbb{L}} b = F_{\mathbb{L}}(a, b)$ を $a +_{\mathbb{L}} b = l^{-1}(l(a) + l(b))$ と書くことができる. これを用いて, 不定元 t に対して, $[t](x) := l^{-1}(t \cdot l(x))$ と定義する³². 以上の記号の下に, 次のように定義しよう:

定義 4.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ に対して, 普遍 **Hall-Littlewood** 関数 $H_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n; t)$ を, 次の式により定義する:

$$H_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n; t) = H_\lambda^{\mathbb{L}}(x_1, \dots, x_n; t) := \sum_{\bar{w} \in S_n / S_n^\lambda} w \cdot \left[\mathbf{x}^\lambda \prod_{1 \leq i < j \leq n, n(i) \neq n(j)} \frac{x_i +_{\mathbb{L}} [t]\bar{x}_j}{x_i +_{\mathbb{L}} \bar{x}_j} \right].$$

次に, 列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に対して, これに付随する 「 $(d-1)$ -段の旗束」 を $\eta_\lambda : \mathcal{F}^\lambda(E) \rightarrow X$ としよう. すなわち, 階数が

$$n - m_d, n - m_d - m_{d-1}, \dots, n - m_d - m_{d-1} - \dots - m_2$$

である E の商束からなる部分旗束³³ である. 射影 $\eta_\lambda : \mathcal{F}^\lambda(E) \rightarrow X$ が誘導する Gysin 準同型 $\eta_{\lambda*} : MU^*(\mathcal{F}^\lambda(E)) \rightarrow MU^*(X)$ を考えよう. $f : X \rightarrow BU(n)$ をベクトル束 E の分類写像とするとき, $\mathcal{F}^\lambda(E)$ の作り方から, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^\lambda(E) & \xrightarrow{\bar{f}} & B(U(m_1) \times U(m_2) \times \dots \times U(m_d)) \\ \eta_\lambda \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X & \xrightarrow{f} & BU(n). \end{array}$$

これと系 3.4 より, 次を得る:

定理 4.3. S_n^λ -不変な多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^{S_n^\lambda}$ に対して,

$$(\eta_\lambda)^* \circ (\eta_\lambda)_*(P(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{\bar{w} \in S_n / S_n^\lambda} w \left[\frac{P}{\prod_{1 \leq i < j \leq n, n(i) \neq n(j)} (x_i +_{\mathbb{L}} \bar{x}_j)} \right]$$

が成り立つ.

これより, 普遍 Hall-Littlewood 関数 $H_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n; t)$ の特徴付けが得られる:

系 4.4. Gysin 準同型 $(\eta_\lambda)_* : MU^*(\mathcal{F}^\lambda(E)) \rightarrow MU^*(X)$ に対して, 次が成り立つ:

$$(\eta_\lambda)_* \left(\mathbf{x}^\lambda \prod_{1 \leq i < j \leq n, n(i) \neq n(j)} (x_i +_{\mathbb{L}} [t]\bar{x}_j) \right) = H_\lambda^{\mathbb{L}}(\mathbf{x}_n; t).$$

³¹ 河野-玉木 [43, 定義 6.26], Quillen [69, p.1293].

³² 通常, 非負整数 n に対して, 「 n -列」 $[n](x)$ を, 帰納的に $[n](x) := [n-1](x) +_{\mathbb{L}} x$ ($n \geq 1$), $[0](x) := 0$ により定義する. 対数 $l(x)$ を用いると, $[n](x) = l^{-1}(n \cdot l(x))$ と書けることに注意する.

³³ Fulton [27, §9.1] の記法に従えば, $\mathcal{F}^\lambda(E) = F\ell^{n-m_d, n-m_d-m_{d-1}, \dots, n-m_d-m_{d-1}-\dots-m_2}(E)$ である.

参考文献

- [1] J. F. Adams, Stable Homotopy and Generalised Homology, Chicago Lectures in Mathematics (1974), The University of Chicago Press.
- [2] E. Akyildiz, Gysin homomorphism and Schubert calculus, Pacific J. of Math. **115** (1984), 257–266.
- [3] E. Akyildiz and J. B. Carrell, Zeros of holomorphic vector fields and the Gysin homomorphism, Proc. Symp. Pure Math. Summer Institute of Singularities (Arcata, 1981), **40**, Part 1, Providence, 1983, 47–54.
- [4] E. Akyildiz and J. B. Carrell, An algebraic formula for the Gysin homomorphism from G/B to G/P , Ill. J. of Math. **31** (1987), 312–320.
- [5] J. C. Becker and D. H. Gottlieb, The transfer map and fiber bundles, Topology **14** (1975) 1–12.
- [6] A. Borel and F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, Amer. J. Math. **80** (1958), 458–538.
- [7] A. Borel and F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces II, Amer. J. Math. **81** (1959), 315–382.
- [8] A. Borel and J. P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97–136.
- [9] R. Bott, On torsion in Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **40** (1954), 586–588.
- [10] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 251–281.
- [11] R. Bott, The space of loops on a Lie group, Michigan Math. J. **5** (1958), 35–61.
- [12] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups, Ann. of Math. (2) **70** (1959), 313–337.
- [13] R. Bott and H. Samelson, Applications of the theory of Morse to the symmetric spaces, Amer. J. Math. **80** (1958), 964–1029.
- [14] P. Bressler and S. Evens, The Schubert calculus, braid relations, and generalized cohomology, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), no. 2, 799–811.
- [15] P. Bressler and S. Evens, Schubert calculus in complex cobordism, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 2, 799–813.
- [16] M. Brion, The push-forward and Todd class of flag bundles, Parameter Spaces (P. Pragacz, ed.), **36**, Banach Center Publications, 1996, 45–50.
- [17] G. Brumfiel and I. Madsen, Evaluation of the transfer and the universal surgery classes, Inv. Math. **32** (1976), 133–169.
- [18] A. S. Buch, Grothendieck classes of quiver varieties, Duke Math. J. **115** (2002), 75–103.
- [19] F. Clarke, On the K -theory of the loop space on a Lie group, Proc. Camb. Phil. Soc. **76** (1974), 1–20.
- [20] F. Clarke, The K -theory of $\Omega Sp(n)$, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **32** (1981), 11–22.
- [21] F. Clarke, On the homology of ΩSp , J. London Math. Soc. (2) **24** (1981), 346–350.
- [22] P. E. Conner and E. E. Floyd, The relation of cobordism to K -theories, Lecture Notes in Mathematics **28** (1966), Springer-Verlag.
- [23] J. Damon, The Gysin homomorphism for flag bundles, Amer. J. Math. **95** (1973), 643–659.
- [24] J. Damon, The Gysin homomorphism for flag bundles: applications, Amer. J. Math. **96** (1974), 248–260.
- [25] K. E. Fel'dman, An equivariant analog of the Poincaré-Hopf theorem, J. Math. Sci., **113** (2003), 906–914; Translated from Zap. Nauchn. Sem. POMI, **267** (2001), 303–318.

- [26] W. Fulton, Intersection Theory, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.
- [27] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, 1997.
- [28] W. Fulton and P. Pragacz, Schubert varieties and degeneracy loci, Lecture Notes in Math. **1689**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [29] H. Garland and R. S. Raghunathan, A Bruhat decomposition for the loop space of a compact group: A new approach to results of Bott, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72** (1975), 4716–4717.
- [30] J. Harris and L. Tu, Chern numbers of kernel and cokernel bundles, Invent. Math. **75** (1984), 467–475.
- [31] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag, 1977.
- [32] 服部 晶夫, 岩波講座 基礎数学 位相幾何学II, 岩波書店 (1978年).
- [33] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Reprint of the 1978 Edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.
- [34] J. Hornbostel and V. Kiritchenko, Schubert calculus for algebraic cobordism, J. reine. angew. Math. **656** (2011), 59–85.
- [35] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, Adv. in Math. **215** (2007), 1–23.
- [36] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, Trans. Amer. Math. Soc., **361** (2009), 5193–5221.
- [37] T. Ikeda, L. C. Mihalea, and H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, Adv. in Math. **226** (2011), 840–866.
- [38] T. Ikeda and H. Naruse, K -theoretic analogue of factorial Schur P - and Q -functions, Adv. in Math. **243** (2013), 22–66.
- [39] T. Józefiak, Schur Q -functions and cohomology of isotropic Grassmannians, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **109** (1991), 471–478.
- [40] H. Kajimoto, The Poincaré duality and the Gysin homomorphism for flag manifolds, Hiroshima Math. J. **27** (1997), 189–207.
- [41] A. Knutson and T. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians, Duke Math. J. **119** (2003), 221–260.
- [42] A. Kono and K. Kozima, The space of loops on a symplectic group, Japanese J. Math. **4** (1978), 461–486.
- [43] 河野 明, 玉木 大, 岩波講座 現代数学の展開11 一般コホモロジー, 岩波書店 (2002年).
- [44] B. Kostant and S. Kumar, The Nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G , Adv. in Math. **62** (1986), 187–237.
- [45] B. Kostant and S. Kumar, T -equivariant K -theory of generalized flag varieties, J. Differential Geom. **32** (1990), no.2, 549–603.
- [46] K. Kozima, The Hopf algebra structure of $K_*(\Omega Sp(n))$, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979), 315–326.
- [47] K. Kozima, The comodule structure of $K_*(\Omega Sp(n))$, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), 315–325.
- [48] K. Kozima, The Hopf algebra structure of $MU_*(\Omega Sp(n))$, J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 225–232.
- [49] T. Lam, Schubert polynomials for the affine Grassmannian, J. Amer. Math. Soc. **21**, No.1 (2008), 259–281.
- [50] T. Lam, Affine Schubert classes, Schur positivity, and combinatorial Hopf algebras, Bull. London Math. Soc. **43** (2011), 328–334.

- [51] T. Lam, A. Schilling, and M. Shimozono, Schubert polynomials for the affine Grassmannian of the symplectic group, *Math. Z.* **264** (2010), 765–811.
- [52] T. Lam, A. Schilling, and M. Shimozono, K -theory Schubert calculus of the affine Grassmannian, *Compos. Math.* **146** (2010), 811–852.
- [53] M. Levine and F. Morel, *Algebraic Cobordism*, Springer Monographs in Math. 2007.
- [54] P. J. Littig and S. A. Mitchell, Generating varieties for affine Grassmannians, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 3717–3731.
- [55] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [56] L. Manivel, *Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci*, SMF/AMS Texts and Monographs vol. **6**, Amer. Math. Soc., 2001.
- [57] P. J. McNamara, Factorial Grothendieck polynomials, *Electron. J. Combin.*, **13** (2006), no.1, Research Paper 71.
- [58] S. A. Mitchell, A filtration of the loops on $SU(n)$ by Schubert varieties, *Math. Z.* **193**, no.3 (1986), 347–362.
- [59] S. A. Mitchell, The Bott filtration of a loop group, *Algebraic topology*, Barcelona, 1986, 215–226, *Lecture Notes in Math.*, **1298**, Springer, Berlin, 1987.
- [60] S. A. Mitchell, Quillen’s theorem on buildings and the loops on a symmetric space, *Enseign. Math. (2)* **34** (1988), no.1-2, 123–166.
- [61] A. I. Molev and B. E. Sagan, A Littlewood-Richardson rule for factorial Schur functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), 4429–4443.
- [62] M. Nakagawa and H. Naruse, Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P - and Q -functions, arXiv:math.AT/1310.8008; *Advanced Studies in Pure Mathematics* に掲載予定.
- [63] 岡田 聡一, *数理解物理シリーズ4 古典群の表現論と組合せ論 下*, 培風館 (2006年).
- [64] T. Petrie, The weakly complex bordism of Lie groups, *Ann. of Math. (2)* **88** (1968), 371–402.
- [65] P. Pragacz, Enumerative geometry of degeneracy loci, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **21** (1988), 413–454.
- [66] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S - and Q -polynomials, *Topics in invariant theory* (Paris, 1989/1990), 130–191, *Lecture Notes in Math.*, **1478**, Springer, Berlin, 1991.
- [67] P. Pragacz, Symmetric polynomials and divided differences in formulas of intersection theory, *Parameter Spaces* (P. Pragacz, ed.), **36**, Banach Center Publications, 1996, 125–177.
- [68] P. Pragacz, *A Gysin formula for Hall-Littlewood polynomials*, ArXiv:1403.0788.
- [69] D. Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**, No.6 (1969), 1293–1298.
- [70] D. Quillen, Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, *Adv. in Math.* **7** (1971), 29–56.
- [71] V. Rao, The Hopf algebra structure of the complex bordism of the loop spaces of the special orthogonal groups, *Indiana Univ. Math. J.* **38** (1989), 277–291.
- [72] T. Sugawara, The Gysin homomorphism for generalized flag bundles, *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A*, **42** (1988), 131–144.
- [73] R. Switzer, *Algebraic Topology -Homology and Homotopy*, *Classics in Mathematics*, Reprint of the 1975 Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

On the topological classification of quasitoric manifolds

蓮井 翔 (京都大学大学院理学研究科, D3)*

概 要

Quasitoric manifold とは n 次元トーラス $T^n = (S^1)^n$ のよい作用をもつ $2n$ 次元多様体であって, その作用による軌道空間が単純多面体と角つき多様体として同相になるようなものを指す. 本講演ではそうした quasitoric manifold に関する分類結果, とくに $(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -束型の quasitoric manifold の分類について紹介する.

1. 序

Quasitoric manifold は滑らかな射影的トーリック多様体の位相幾何学的拡張物であり, [DJ91] において導入された. 本稿の第2節はその定義の復習に充てられる. トーリック多様体が扇と呼ばれる組合せ的対象に対応するのと同様, quasitoric manifold は単純多面体 P と P 上の特性行列 λ の組 (P, λ) に対応づけられる. 第3節ではこの対応について述べる.

トーリックトポロジーにおける大きな問題の一つとして, 柘田幹也教授によって提唱された quasitoric manifold の cohomological rigidity problem がある. この問題は quasitoric manifold 全体から成るクラス, あるいはそのサブクラスが, 以下に述べる意味において cohomologically rigid であるか否かを問うものである. 現在までのところ反例は見つかっていない.

位相空間から成るクラス \mathcal{C} が **cohomologically rigid** であるとは, \mathcal{C} に属する空間たちがそれらのコホモロジーの環構造のみによって位相的に分類されることをいう. すなわち, 次の条件が成り立つとき \mathcal{C} は cohomologically rigid であるといわれる: $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し, $H^*(X; \mathbb{Z})$ と $H^*(Y; \mathbb{Z})$ が次数つき環として同型であれば X と Y は同相である. さらに任意の次数つき環の同型 $\varphi: H^*(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z})$ に対して $\varphi = f^*$ となる同相写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するとき, \mathcal{C} は **strongly cohomologically rigid** であるという.

これまで quasitoric manifold の分類は cohomological rigidity problem を指針として行われてきた. 第5節および第6節ではそうした諸結果の紹介を行い, 最後に $(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -束型の quasitoric manifold の strong cohomological rigidity について証明の概略を記す.

2. Quasitoric manifold の定義

用語法や記号等は別として, 本節から第4節までの記述は [BP02] に従っている. 以下, T^n はコンパクトトーラス $(S^1)^n$ とし, \mathbb{C}^n には $T^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n: (t_1, \dots, t_n) \times (z_1, \dots, z_n) \mapsto (t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$ による T^n -作用が入っているものとする.

定義 2.1. T^n -作用をもつ空間 X, Y 間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が弱同変であるとは, ある自己同型 $\psi: T^n \rightarrow T^n$ が存在し, 任意の $x \in X$ と $t \in T^n$ に対して $f(t \cdot x) = \psi(t) \cdot f(x)$ を満たすことをいう.

定義 2.2. T^n の $2n$ 次元微分多様体 M への滑らかな作用が **locally standard** であるとは, M の座標近傍系 $\{(U, f, V)\}$ であって, U および V がそれぞれ M および \mathbb{C}^n の T^n -不

* e-mail: s.hasui@math.kyoto-u.ac.jp

変な開部分集合, f が弱同変な微分同相写像となるものが存在することをいう.

定義 2.3. $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ とし, 各 $x \in \mathbb{R}_+^n$ に対して $\text{depth}(x)$ を x の 0 に等しい成分の個数として定める. Hausdorff 空間 X が n 次元角つき多様体であるとは, 開被覆 $\{U_i\}$ と同相写像の族 $\{f_i: U_i \rightarrow V_i\}$ であって, 各 V_i は \mathbb{R}_+^n の開部分集合であり, さらに座標変換が各点において depth を保つようなものが存在することをいう.

角つき多様体 M, N の間に同相写像 $f: M \rightarrow N$ であって各点において depth を保つものが存在するとき, M と N は角つき多様体として同相であるという.

定義 2.4. n 次元凸多面体 P の各頂点にちょうど n 枚の側面が集まっているとき, P は単純多面体であるという.

注 2.5. \mathbb{C}^n/T^n は \mathbb{R}_+^n と自然に同一視できるので, n 次元微分多様体 M への locally standard な T^n -作用による軌道空間 M/T^n は自然に角つき多様体とみなすことができる. 単純多面体についても同様である.

定義 2.6. Locally standard な T^n -作用をもつ微分多様体であって, その軌道空間が角つき多様体として単純多面体 P に同相であるようなものを P 上の **quasitoric manifold** という.

以下, こうした quasitoric manifold の分類についての結果を紹介する. 分類の基準としてはまず弱同変同相, さらに同相, コホモロジー同値 (ここでは整数係数コホモロジー環の次数つき環としての同型を指す) を考える.

3. 弱同変同相についての分類

定義 3.1. 単純多面体 P 上の quasitoric manifold の弱同変同相類全体を \mathcal{M}_P と記す.

以下, P は n 次元単純多面体で m 枚の側面をもち, かつそれらは F_1, \dots, F_m と番号づけられているものとする.

定義 3.2. P 上の特性行列とは, 整数係数の $n \times m$ 行列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ であって次の non-singular condition と呼ばれる条件を満たすものをいう: 側面 F_{i_1}, \dots, F_{i_n} がある頂点で交わっているとき, $\det \lambda_{(i_1, \dots, i_n)} = \pm 1$. ここで $\lambda_{(i_1, \dots, i_n)}$ は小行列 $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n})$ を表す.

以下のようにして P 上の特性行列 λ から P 上の quasitoric manifold $M(\lambda)$ を構成することができる. 各点 $q \in P$ に対して q の属する最小の面を $G(q)$ と記す. 特性写像 ℓ_λ は P の各面に T^n の部分トーラスを対応させる写像であって, 次で定義される:

$$\ell_\lambda(F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}) := \text{im}(\lambda_{(i_1, \dots, i_k)}: T^k \rightarrow T^n).$$

ここで T は \mathbb{R}/\mathbb{Z} と見做されており, $\lambda_{(i_1, \dots, i_k)}$ はそれに対応する線型写像が商加群に導く準同型を表している. $T^n \times P$ に同値関係 \sim_λ を次で定める:

$$(t_1, p) \sim_\lambda (t_2, q) \iff p = q \text{ かつ } t_1 t_2^{-1} \in \ell_\lambda(G(q)).$$

$M(\lambda) := (T^n \times P) / \sim_\lambda$ とし, T^n の第一成分への標準的な作用を考えることにより quasitoric manifold $M(\lambda)$ が得られる. 実際, $M(\lambda)$ から P への射影を π とし, 各頂点 v に対して P から v の属さない側面をすべて除いたものを U_v と記すとき, $\pi^{-1}(U_v)$ は \mathbb{C}^n

に弱同変同相であることが容易に分かる. これらにより微分多様体の構造を定めればよい.

逆に, M を P 上の quasitoric manifold とするとき, 以下のようにして特性行列 $\lambda(M)$ が得られる. M から $P \cong M/T^n$ への射影を π と記す. 作用が locally standard であることから, $\pi^{-1}(\text{rel.int } F_i)$ の各元は同じ等方部分群を持ち, それは1次元の部分トーラスである. これを $T_M(F_i)$ と記し, 対応するベクトルを $\lambda_i \in \mathbb{Z}^n$ とする. すなわち, $\lambda_i = {}^t(\lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{n,i})$ は $T_M(F_i) = \{(z^{\lambda_{1,i}}, \dots, z^{\lambda_{n,i}}) \in T^n \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ となる \mathbb{Z}^n の元であって, さらに各成分の最大公約数が1であるようなものである. これは符号を除いて一意に定まる. $\lambda(M) := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ とすれば, これが non-singular condition を満たすことは作用が locally standard であることから分かり, 従って $\lambda(M)$ は P 上の特性行列となる.

定義 3.3. P 上の特性行列全体の集合を Λ_P , 写像 $\Lambda_P \rightarrow \mathcal{M}_P: \lambda \mapsto M(\lambda)$ を ϕ と記す.

補題 3.4 ([DJ91]). P 上の任意の quasitoric manifold M に対して, 射影 $M \rightarrow P$ には連続な切断が存在する.

Proof. [Dav78, p.344]における“blow up”の議論により, 主 T^n -束 $p: \tilde{M} \rightarrow P$ と連続写像 $r: \tilde{M} \rightarrow M$ であって $\pi \circ r = p$ となるものが構成できる. P は可縮であるため, $p: \tilde{M} \rightarrow P$ は自明束であって切断をもつ. この切断と r を合成すればよい. \square

命題 3.5 ([DJ91]). P 上の任意の quasitoric manifold M に対して M と $M(\lambda(M))$ は同変同相. 特に ϕ は全射である.

Proof. 補題3.4より得られる連続な切断を $s: P \rightarrow M$ と記す. すると $T^n \times P \rightarrow M$ が $(t, q) \mapsto t \cdot s(q)$ により定まるが, これが $M(\lambda) = (T^n \times P) / \sim_\lambda$ から M への同変同相写像を導くことは容易に示される. \square

Λ_P には $GL(n, \mathbb{Z})$ が左からの積によって, $(\mathbb{Z}/2)^m$ が列を -1 倍することによって作用する.

定義 3.6. $\mathcal{X}_P := GL(n, \mathbb{Z}) \backslash \Lambda_P / (\mathbb{Z}/2)^m$.

定義 3.7. $\{1, \dots, m\}$ 上の単体複体 K_P を次のように定める:

$$\{i_1, \dots, i_k\} \in K_P \iff F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset.$$

K_P の自己同型全体のなす群を $\text{Aut}(K_P)$ と記す.

注 3.8. $\text{Aut}(K_P)$ は列の入れ替えにより Λ_P に作用する. さらにこの作用は \mathcal{X}_P への右作用を導く.

命題 3.9 ([DJ91]). $\phi: \Lambda_P \rightarrow \mathcal{M}_P$ は全単射 $\bar{\phi}: \mathcal{X}_P / \text{Aut}(K_P) \rightarrow \mathcal{M}_P$ を導く.

Proof. まず ϕ が $\mathcal{X}_P / \text{Aut}(K_P)$ から \mathcal{M}_P への写像を導くことを示す. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ を P 上の特性行列とし, $M := M(\lambda)$, $M' := M(\lambda')$ とおく. $\sigma \in \text{Aut}(K_P)$ と $A \in GL(n, \mathbb{Z})$ が存在して

$$\lambda'_{\sigma(i)} = \pm A \lambda_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

となるとき, M と M' が弱同変同相であることを示せばよい. K_P の重心細分が P の単体分割を与えることに注意すると, σ は角つき多様体としての同相 $\bar{f}: P \rightarrow P$ であって, 各側面に対し $\bar{f}(F_i) = F_{\sigma(i)}$ となるようなものを導くことが分かる. A から導かれる T^n の自己同型を ψ と記し, $\tilde{f}: T^n \times P \rightarrow T^n \times P: (t, q) \mapsto (\psi(t), \bar{f}(q))$ と定める. すると \tilde{f} は $f: M \rightarrow M'$ を導くが, これが弱同変同相であることは明らかである.

逆に上のような M と M' が弱同変同相であるとする. すなわち, 同相写像 $f: M \rightarrow M'$ と T^n の自己同型 ψ が存在して任意の $x \in M$ と $t \in T^n$ に対して $f(t \cdot x) = \psi(t) \cdot f(x)$ を満たすと仮定する. ψ に対応する $GL(n, \mathbb{Z})$ の元を A とする. また, f は軌道空間 $P \cong M/T^n \cong M'/T^n$ に角つき多様体としての自己同相 \bar{f} を導く. \bar{f} により定まる $\text{Aut}(K_P)$ の元を σ と記す. このとき $\lambda'_{\sigma(i)} = \pm A \lambda_i$ ($i = 1, \dots, m$) が成り立つことは容易に分かる. こうして $\bar{\phi}$ の単射性が示された. \square

4. コホモロジー環

Quasitoric manifold のコホモロジー環について以下のことが知られている.

定義 4.1. P を n 次元単純多面体とし, その $(n-i-1)$ 次元の面の枚数を f_i と記す. P の h -vector (h_0, \dots, h_n) は次の式によって定義される:

$$h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}.$$

次の定理は quasitoric manifold に入る標準的な CW 複体の構造 ([BP02, p. 66]) から得られる.

定理 4.2 ([DJ91]). P を n 次元単純多面体, (h_0, \dots, h_n) をその h -vector とする. P 上の任意の quasitoric manifold M について, そのホモロジー群は奇数次において 0 であり, また偶数次においては自由である. さらに, M の $2i$ 次の Betti 数を $b_{2i}(M)$ と記すとき, $b_{2i}(M) = h_i$ が成り立つ.

注 4.3. すなわち, 同じ単純多面体上の 2 つの quasitoric manifold を比較するとき, それらのコホモロジーは次数つき加群としては同型であって, 必ず環構造まで見る必要がある.

前節同様, P は n 次元単純多面体で m 枚の側面を持ち, それらは F_1, \dots, F_m と番号づけられているものとする. M を P 上の quasitoric manifold とし, M から P への射影を π と記す. このとき各 $\pi^{-1}(F_i)$ は $(2n-2)$ 次元の閉部分多様体であることに注意.

定理 4.4 ([DJ91]). $\lambda = (\lambda_{i,j})$ を P 上の特性行列とし, $M := M(\lambda)$ とおく. このとき M の整係数コホモロジー環は次で与えられる:

$$H^*(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / (\mathcal{I}_P + \mathcal{J}_\lambda).$$

ここで $v_i \in H^2(M; \mathbb{Z})$ は閉部分多様体 $\pi^{-1}(F_i)$ の Poincaré 双対, $\mathcal{I}_P, \mathcal{J}_\lambda$ は以下のイデアルを表す.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_P &= (v_{i_1} \cdots v_{i_k} \mid F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \emptyset), \\ \mathcal{J}_\lambda &= (\lambda_{i,1} v_1 + \dots + \lambda_{i,m} v_m \mid i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

5. 特定の単純多面体上での分類に関する諸結果

定義 5.1. 単純多面体 P に対し, その上の quasitoric manifold の同相類全体の集合を $\mathcal{M}_P^{\text{homeo}}$ と記す. また, P 上の quasitoric manifold の整数係数コホモロジー環の同型類全体を $\mathcal{M}_P^{\text{coh}}$ と記す. ここでコホモロジー環の同型というのは単に次数つき環としての同型を考えている (つまりコホモロジー作用素などの構造は考えない). 自然な全射 $\mathcal{M}_P \rightarrow \mathcal{M}_P^{\text{homeo}}, \mathcal{M}_P^{\text{homeo}} \rightarrow \mathcal{M}_P^{\text{coh}}$ をそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 と記す.

本節は $\mathcal{M}_P^{\text{homeo}}$ の cohomological rigidity が分かっているような場合をまとめたものである. $\mathcal{M}_P^{\text{homeo}}$ が cohomologically rigid であることは ϕ_2 が全単射であることと同値であることを注意.

まず, 次のことは容易に分かる.

命題 5.2 ([DJ91]). n 次元単体 Δ^n に対し, $\#\mathcal{M}_{\Delta^n} = \#\mathcal{M}_{\Delta^n}^{\text{homeo}} = \#\mathcal{M}_{\Delta^n}^{\text{coh}} = 1$ であり, \mathcal{M}_{Δ^n} に属する唯一の類は標準的な T^n -作用を備えた $\mathbb{C}P^n$ により代表される.

次は [OR70] の結果の系として得られる. $m \geq 4$ とし, P_m は凸 m 角形を表すものとする.

定理 5.3 ([DJ91]). \mathcal{M}_{P_m} は可算無限個の元を持ち, $\mathcal{M}_{P_m}^{\text{homeo}}$ に属する各類は $\mathbb{C}P^2, \overline{\mathbb{C}P^2}, S^2 \times S^2$ らの連結和によって代表される. とくに ϕ_2 は全単射である.

次は [CPS12] の主定理を簡略化した形で述べたものである.

定理 5.4 ([CPS12]). 単体2つの積 $\Delta^n \times \Delta^m$ ($1 \leq n < m$) に対し, $\mathcal{M}_{\Delta^n \times \Delta^m}^{\text{coh}}$ は可算無限個の元を持つ. ϕ_1 は単射ではなく, ϕ_2 は全単射である.

より多くの単体の積については, 次の立方体 I^3 上での分類結果がある.

定理 5.5 ([H2]). $\mathcal{M}_{I^3}^{\text{homeo}}$ は strongly cohomologically rigid である.

最後に双対巡回多面体上の quasitoric manifold の分類に関する結果を述べる. 巡回多面体 $C^n(m)$ ($1 < n < m$) は m 個の頂点を持つ n 次元凸多面体であり, その双対 $C^n(m)^*$ は m 枚の側面を持つ n 次元単純多面体となる. 詳細は [Zie95]などを参照のこと.

定理 5.6 ([H1]). $n \geq 4$ かつ $m - n \geq 4$, あるいは $n \geq 6$ かつ $m - n \geq 3$ であるとき, $C^n(m)^*$ 上に quasitoric manifold は存在しない.

定理 5.7 ([H1]). 双対巡回多面体 $C^n(n+3)^*$ ($n = 3, 4, 5$) 上の quasitoric manifold について, 以下が成り立つ.

- (1) $\phi_1: \mathcal{M}_{C^3(6)^*} \rightarrow \mathcal{M}_{C^3(6)^*}^{\text{homeo}}$ は全単射ではないが $\phi_2: \mathcal{M}_{C^3(6)^*}^{\text{homeo}} \rightarrow \mathcal{M}_{C^3(6)^*}^{\text{coh}}$ は全単射であり, またこれらはすべて可算無限個の元をもつ.
- (2) $\#\mathcal{M}_{C^4(7)^*} = \#\mathcal{M}_{C^4(7)^*}^{\text{homeo}} = \#\mathcal{M}_{C^4(7)^*}^{\text{coh}} = 4$.
- (3) $\#\mathcal{M}_{C^5(8)^*} = \#\mathcal{M}_{C^5(8)^*}^{\text{homeo}} = \#\mathcal{M}_{C^5(8)^*}^{\text{coh}} = 46$.

6. バンドル型の quasitoric manifold に関する諸結果

定義 6.1. 下のような空間と連続写像の列を考える.

$$B_n \xrightarrow{p_{n-1}} B_{n-1} \xrightarrow{p_{n-2}} \cdots \xrightarrow{p_2} B_2 \xrightarrow{p_1} B_1 = \mathbb{C}P^1$$

B_i 上の複素直線束 L_i ($i = 1, \dots, n-1$) が存在し, 各 i に対して $p_i: B_{i+1} \rightarrow B_i$ が $\mathbb{C}P^1$ -束の射影 $P(L_i \oplus \underline{\mathbb{C}}) \rightarrow B_i$ に等しいとき, B_n は n -stage Bott manifold であるという. ここで $\underline{\mathbb{C}}$ は自明束を, $P(L_i \oplus \underline{\mathbb{C}})$ は射影化を表す.

Bott manifold は立方体上の quasitoric manifold になることが知られている. T^n の作用と I^n の側面の番号づけを適当に取り換えることにより, n -stage Bott manifold の特性行列は次のような形に書ける:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

そこで $(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -束型の quasitoric manifold を次のように定義する. $\mathbb{C}P^2$ と $\mathbb{C}P^2$ の同変連結和としての $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ は I^2 上の quasitoric manifold であり, その特性行列は $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とできることに注意.

定義 6.2. 立方体 I^{2n} 上の quasitoric manifold M が $(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -束型であるとは, 下のような形の I^{2n} 上の特性行列 λ が存在して, M と $M(\lambda)$ が弱同変同相となることをいう:

$$\lambda = \begin{pmatrix} E_2 & 0 & \cdots & 0 & \kappa & * & \cdots & * \\ 0 & E_2 & \ddots & \vdots & 0 & \kappa & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & E_2 & 0 & \cdots & 0 & \kappa \end{pmatrix}. \quad (1)$$

ここで E_2 は単位行列, $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ としている.

$(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -束型の quasitoric manifold が $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ 上の iterated $(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -bundle となることは第3節での $M(\lambda)$ の構成から示すことができる.

Bott manifold については以下の2つの分類結果が存在する.

定理 6.3 ([Choi]). 3-stage (resp. 4-stage) の Bott manifold 全体は strongly cohomologically rigid (resp. cohomologically rigid) である.

定理 6.4 ([CMM]). $\mathbb{Z}/2$ -係数のコホモロジー環が $H^*(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}/2)^{\otimes n}$ に同型であるような n -stage Bott manifold 全体は strongly cohomologically rigid である.

最後に $(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -束型の quasitoric manifold に関する分類結果と, その証明の概略を述べる.

定理 6.5 ([H2]). M, M' を $(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -束型の quasitoric manifold とし, $\varphi: H^*(M'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Z})$ を次数つき環としての同型写像とする. このとき弱同変同相写像 $f: M \rightarrow M'$ であって $\varphi = f^*$ となるものが存在する. とくに $(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ -束型の quasitoric manifold 全体は strongly cohomologically rigid である.

証明は以下のような手順で行われる. λ, λ' を (1) の形をもつ I^{2n} 上の特性行列とし, $M = M(\lambda), M' = M(\lambda')$ と考えてよい. 定理4.4の表示において v_{2n+i} ($i = 1, \dots, 2n$) を

X_i と置き直すとき, M のコホモロジー環は適当なイデアル I を用いて $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{2n}]/I$ と書ける. 同様に, M' のコホモロジー環は $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{2n}]/I'$ と書ける. したがって φ は $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{2n}]$ の次数つき環としての自己同型であって I' を I に写すものと見做すことができる.

$\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{2n}]$ のフィルトレーション \mathcal{F} を以下によって与える:

$$(X_{2n-1}, X_{2n}) \subseteq (X_{2n-3}, \dots, X_{2n}) \subseteq \dots \subseteq (X_{2n-2i+1}, \dots, X_{2n}) \subseteq \dots \subseteq (X_1, \dots, X_{2n}).$$

次の補題が証明の鍵となる.

補題 6.6. (1) の形をもつ特性行列 μ と弱同変同相写像 $f: M(\mu) \rightarrow M$ が存在し, $f^* \circ \varphi$ はフィルトレーション \mathcal{F} を保つ.

この補題により, $f^* \circ \varphi$ は行列で表すと次の形になる:

$$f^* \circ \varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \psi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \psi_n \end{pmatrix}.$$

各 ψ_i は $H^*(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ の自己同型を与える. 実は, 任意の $H^*(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ の次数つき環としての自己同型は弱同変自己同相として実現できることが分かる. より強く, 次の補題が成立する.

補題 6.7. (1) の形をもつ特性行列 μ' と弱同変同相写像 $g: M' \rightarrow M(\mu')$ が存在し, g^* は行列で書くと次のようになる:

$$g^* = \begin{pmatrix} \psi_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \psi_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

今, $f^* \circ \varphi \circ g^*$ は次のような形をしている:

$$f^* \circ \varphi \circ g^* = \begin{pmatrix} E_2 & * & \cdots & * \\ 0 & E_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

このとき次の補題を繰り返し用いることにより, $\mu = \mu'$ かつ $f^* \circ \varphi \circ g^* = E_{2n}$ となることが分かる.

補題 6.8. μ, μ' を (1) の形をした I^4 上の特性行列, $\theta: H^*(M(\mu'); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(M(\mu); \mathbb{Z})$ を次数つき環としての同型写像とする. θ が行列で $\begin{pmatrix} E_2 & * \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ とあらわされるとき, $\theta = E_4$ であり, さらに $\mu = \mu'$ となる.

以上により, φ は弱同変同相写像 $g^{-1} \circ f^{-1}$ として実現された.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \dashrightarrow & M' \\
 f \uparrow & & \downarrow g \\
 M(\mu) & \equiv & M(\mu')
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H^*(M; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\varphi} & H^*(M'; \mathbb{Z}) \\
 f^* \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow g^* \\
 H^*(M(\mu); \mathbb{Z}) & \equiv & H^*(M(\mu'); \mathbb{Z})
 \end{array}$$

参考文献

- [BP02] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series, vol. **24**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [Choi] S. Choi, *Classification of Bott manifolds up to dimension eight*, arXiv:math-AT/1112.2312
- [CMM] S. Choi, M. Masuda and S. Murai, *Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds*, arXiv:math-AT/1401.0893v1 Proc. Steklov Inst. Math. , **275** (2011), 177–190
- [CPS12] S. Choi, S. Park, and D. Y. Suh, *Topological classification of quasitoric manifolds with the second Betti number 2*, Pacific J. Math. 256(1) (2012), 19–49
- [Dav78] M. W. Davis, *Smooth G -manifolds as collections of fiber bundles*, Pacific J. Math. **77** (1978), 315–363.
- [DJ91] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451.
- [H1] S. Hasui, *On the classification of quasitoric manifolds over the dual cyclic polytopes*, arXiv:math-AT/1308.4219, to appear in Algebraic and Geometric Topology
- [H2] S. Hasui, *On the cohomology equivalences between bundle-type quasitoric manifolds over a cube*, arXiv:math-AT/1309.4182
- [OR70] P. Orlik and F. Raymond, *Actions of the torus on 4-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 531–559.
- [Zie95] G. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Math. **152**, Springer-Verlag, New-York, 1995.

コンパクト Stein 曲面と写像類群

大場貴裕 (東京工業大学)*

コンパクト Stein 曲面 (compact Stein surface) は、一種の境界付き複素曲面である。より正確には次のようになる。まず、Stein 多様体とは \mathbb{C}^N にプロパーかつ正則に埋め込みができる複素多様体のことである。任意の Stein 多様体は下に有界でかつプロパーな狭義多重劣調和関数と呼ばれる実数値関数を持つ。コンパクト Stein 曲面とは、コンパクトな境界付き4次元多様体で、上のような狭義多重劣調和関数を持ち、境界がその関数のレベル集合であるもののことをいう。

コンパクト Stein 曲面は複素構造などの制約により、一見すると滑らかなカテゴリーでの話には不向きなように思えてしまう。しかし、コンパクト Stein 曲面の研究にはトポロジーによる豊富な道具立てがあり、それが近年のコンパクト Stein 曲面の研究のひとつの側面を支えている。

例えば、Eliashberg [El1], Gompf [Go] はコンパクト Stein 曲面のハンドル分解を用いた特徴付けを行った。この特徴付けにより、Kirby 図式と呼ばれるハンドル分解を表す図式でのコンパクト Stein 曲面の扱いが可能になった。

時代が少し下ると、Loi と Piergallini [LP], Akbulut と Ozbagci [AO] は、Lefschetz ファイバー空間を用い、さらに前者らはブレイド状曲面を用いたコンパクト Stein 曲面の特徴付けも行った。Lefschetz ファイバー空間とは、曲面をファイバーとする曲面上のファイバー空間で、Lefschetz 型特異点という特異点を含む。また、ブレイド状曲面とは双円盤にプロパーに埋め込まれた曲面で、双円盤の第一射影を曲面へ制限すると円盤上の分岐被覆になっているものである。Lefschetz ファイバー空間、ブレイド状曲面は写像類群、ブレイド群により制御でき、構成的な研究との相性が良い。実際、これらの群の既存の研究や扱いの良さが、コンパクト Stein 曲面の研究に豊富な話題を提供したり、進展の手助けをしたりしている。

著者の研究も彼らによってなされたコンパクト Stein 曲面の特徴付けを土台としている。そこで、第1節ではコンパクト Stein 曲面と Lefschetz ファイバー空間の関係に基づく話題と著者の結果を紹介する。次いで第2節では、コンパクト Stein 曲面とブレイド状曲面の関係に基づく話題と著者の最近の研究の一端を紹介する。なお、本稿において多様体とその間の写像はすべて滑らかと仮定する。

1 Lefschetz ファイバー空間とコンパクト Stein 曲面

1.1. はじめに

この節では著者の結果である、Stein 充填の一意性の結果の紹介をする。その結果についての先行研究などを述べるために、まずいくつかの定義を与える。

M を連結な有向閉3次元多様体とする。 M 上の平面場 ξ が**接触構造 (contact structure)** であるとは、 M 上の1次微分形式 α が存在し、 $\xi = \text{Ker}\alpha$ かつ M の向きに関し $\alpha \wedge d\alpha > 0$ となることをいう。この α を ξ の**接触形式 (contact form)** という。接触多様体 $(M, \xi), (M', \xi')$ が**接触同型 (contactomorphic)** であるとは、微分同相写像

本研究は科研費 (課題番号: 15J05214) の助成を受けたものである。

* 〒152-8550 東京都目黒区大岡山2-12-1 東京工業大学 大学院理工学研究科
e-mail: oba.t.ac@m.titech.ac.jp

$H : M \rightarrow M'$ が存在し, $H_*(\xi) = \xi'$ を満たすときをいう. また, M 上の接触構造 ξ, ξ' が **アイソトピック (isotopic)** であるとは, 接触構造のまま滑らかに一方から他方へ変形できるときをいう. 3次元接触多様体 (M, ξ) が4次元シンプレクティック多様体や, コンパクト Stein 曲面の境界になるときに興味深い理論が展開されてきた. 本稿では後者の場合を紹介する. ξ が **Stein 充填可能 (Stein fillable)** であるとは, 境界が M に微分同相なコンパクト Stein 曲面 (X, J) が存在し, (M, ξ) と $(\partial X, T\partial X \cap J(T\partial X))$ が接触同型であるときをいう. (X, J) を (M, ξ) の **Stein 充填 (Stein filling)** という.

接触多様体を与えたときに, その Stein 充填の分類は古くから考えられてきた問題である. Stein 充填が1つに決まる場合の結果の一部分を振り返ってみると次のような結果がある. Eliashberg [El2] により3次元球面 S^3 上の標準的な接触構造を持つ接触多様体の Stein 充填は4次元球体 B^4 であることが示されている. McDuff [Mc] によりレンズ空間 $L(p, 1)$ ($p \neq 4$) 上の標準的な接触構造を持つ接触多様体の Stein 充填は Euler 数が $-p$ である球面上の円盤束であることが示されている. さらに, $L(p, 1)$ ($p \neq 4$) 上の他の Stein 充填可能な接触構造についても同様の結果が成り立つことを, Plamenevskaya と Van Horn-Morris [PV] が示している.

最後に紹介した結果はシンプレクティック幾何学よりも写像類群の組合せ群論的な議論を主に用いて証明している. 著者の結果も, そのような議論に拠るところが大きい. 以降では, 写像類群と Stein 充填, 接触多様体との関係を見ていく.

1.2. 写像類群と Lefschetz ファイバー空間

この小節では, 写像類群と Lefschetz ファイバー空間の復習をする. 写像類群については, [FM] を, Lefschetz ファイバー空間については [GS, Chapter 8], [OS, Chapter 10] を詳しくは参照して頂きたい.

$\Sigma := \Sigma_{g,b}$ を種数が g で境界成分が b 個のコンパクトで連結な有向曲面とする. $\text{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma)$ を Σ の向きを保ち, 境界上では恒等写像である微分同相写像全体からなる集合とする. $\text{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma)$ は写像の合成を積として群構造を持つ. Σ の **写像類群 (mapping class group) \mathcal{M}_Σ** とは, $\text{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma)$ のアイソトピー類がなす群のことである. Σ の中の単純閉曲線 α に沿う **右手 Dehn ツイスト (right-handed Dehn twist) t_α** とは, α に沿って曲面 Σ を一度切り開き, 反時計回りに1周ねじり, 貼り合わせる操作により定まる Σ 上の向きを保つ微分同相写像である. (図1). 単純閉曲線 α と α' がアイソトピックであるとき, $[t_\alpha] = [t_{\alpha'}] \in \mathcal{M}_\Sigma$ であり, 本稿では t_α が定める写像類 $[t_\alpha]$ のことも t_α と書くことにする. また \mathcal{M}_Σ の積の表記は次のように約束する: $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_\Sigma$ に対し, $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{M}_\Sigma$ は φ_1 を先に施し次に φ_2 を施すことを意味するものとする.

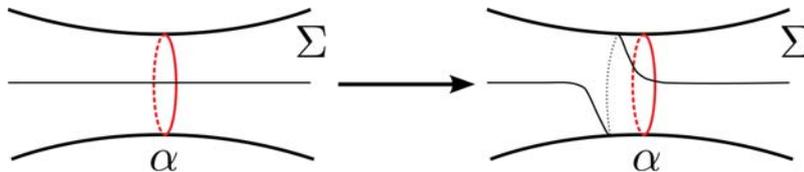


図1: 単純閉曲線 α に沿う右手 Dehn ツイスト.

次に X をコンパクトで連結な境界付き有向4次元多様体とする.

定義 1.1. X から円盤 D^2 への写像 $f : X \rightarrow D^2$ が **Lefschetz ファイバー空間 (Lefschetz fibration)** であるとは, D^2 の内部の有限個の点からなる集合 $Q_f = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

が存在し次を満たすものをいう：

1. $f|f^{-1}(D^2 - Q_f)$ は $D^2 - Q_f$ 上の Σ をファイバーとするファイバー束である；
2. 各 $a_i \in Q_f$ に対し，特異ファイバー $f^{-1}(a_i)$ 上に f の臨界点 p_i がただ一つ存在する；
3. 各 p_i, a_i の周りで，これらを中心とする局所複素座標 (z_1, z_2) ， w が存在し， f は $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ と表示される．ただし，これらの局所複素座標は X, D^2 の向きと両立するものとする．

定義 1.2. $f : X \rightarrow D^2, f' : X' \rightarrow D^2$ を Lefschetz ファイバー空間とする． f と f' が **同型 (isomorphic)** であるとは，向きを保つ微分同相写像 $H : X \rightarrow X', h : D^2 \rightarrow D^2$ が存在し $h \circ f = f' \circ H$ が成り立つときをいう．

$f : X \rightarrow D^2$ を Lefschetz ファイバー空間とする． a_0 を ∂D^2 上の点とする．組 (s_1, s_2, \dots, s_n) を， a_0 と a_i を端点とする弧 s_i から成り， $i \neq j$ のとき $s_i \cap s_j = \{a_0\}$ となるものとする．ただし， a_0 の周りを反時計回りに回ったときに s_1, s_2, \dots, s_n の順に現われるとする．各 $i = 1, 2, \dots, n$ について， a_i を中心とする十分小さい円盤 V_i を取り，その境界には反時計回りになるような向きをとる． V_i と s_i を結ぶことで得られる， a_0 を起点とするループを γ_i とする．このとき， $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ は $\pi_1(D^2 - Q_f, a_0)$ の基底である．組 $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ のことを **Hurwitz 生成システム (Hurwitz generating system)** と呼ぶことにする (図 2)．Lefschetz ファイバー空間の定義から，各 γ_i 上には

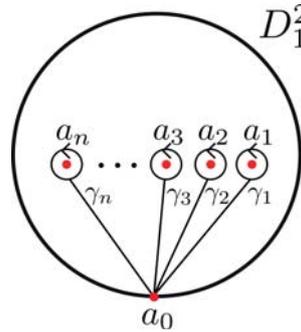


図 2: Hurwitz 生成システム.

Σ をファイバーとするファイバー束が現われる．このファイバー束のモノドロミー，すなわちファイバー束が $(\Sigma \times [0, 1]) / ((x, 1) \sim (\phi(x), 0)) \rightarrow [0, 1] / (1 \sim 0)$ となる $[\phi] \in \mathcal{M}_\Sigma$ は，ある単純閉曲線 $\alpha_i \subset \Sigma$ に沿う右手デーンツイスト t_{α_i} であることが知られている． α_i のことを特異ファイバー $f^{-1}(a_i)$ に対する **消滅サイクル (vanishing cycle)** という．また，組 $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_n})$ を f の $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ に対する **モノドロミー (monodromy)** と呼ぶ．一般にモノドロミーは Hurwitz 生成系の取り方等に依存する．このような曖昧さを次のような変形でモノドロミーの情報として扱うことができる：

$$(t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_i}, t_{\alpha_{i+1}}, \dots, t_{\alpha_n}) \leftrightarrow (t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_{i+1}}, t_{\alpha_{i+1}}^{-1} t_{\alpha_i} t_{\alpha_{i+1}}, \dots, t_{\alpha_n}),$$

$$(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_n}) \leftrightarrow (t_{(\alpha_1)\varphi}, t_{(\alpha_2)\varphi}, \dots, t_{(\alpha_n)\varphi}),$$

ただし， φ は \mathcal{M}_Σ の任意の元である． $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_n})$ と $(t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, \dots, t_{\beta_n})$ が上の2つの変形で移りあうとき，2つの組は **Hurwitz 同値 (Hurwitz equivalent)** であるという．このとき， $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_n}) \equiv (t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, \dots, t_{\beta_n})$ と書く．Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーが Hurwitz 同値であるとき，これらは同型になることが知られている．

定義 1.3. Lefschetz ファイバー空間 $f : X \rightarrow D^2$ が **allowable** であるとは, f の任意の特異ファイバーに対する消滅サイクル α_i について, そのホモロジー類 $[\alpha_i] \in H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ が非零であるときをいう. 以下, ALF は allowable Lefschetz ファイバー空間を指すことにする.

ALF はコンパクト Stein 曲面を調べる上で重要な役割を果たす.

定理 1.4 (Loi-Piergallini [LP, Theorem 3], Akbulut-Ozbagci [AO, Theorem 5]). X をコンパクトで連結な境界付き有向4次元多様体とする. このとき, 以下は同値である:

1. X はコンパクト Stein 曲面である.
2. X は ALF を許容する, すなわち X を全空間とする ALF が存在する.

1.3. オープンブック分解と接触構造

この小節ではオープンブック分解と接触構造の関係を復習する. 詳しくは, [Et], [OS, Chapter 9] を参照して頂きたい.

B を M の中の有向絡み目とする. π を $M - B$ から円周 S^1 への写像とする.

定義 1.5. 組 (B, π) が M の**オープンブック分解 (open book decomposition)** であるとは, $\pi : M - B \rightarrow S^1$ がファイバー束であり, 任意の $\theta \in S^1$ に対し境界付きコンパクト有向曲面 $\Sigma_\theta \subset M$ が存在し, $\text{Int}\Sigma_\theta = \pi^{-1}(\theta)$ かつ $\partial\Sigma_\theta = B$ をみたすときをいう. B をオープンブック分解 (B, π) の**バインディング (binding)**, $\Sigma \approx \Sigma_\theta$ を (B, π) の**ページ (page)** という.

M のオープンブック分解 (B, π) を与えると, ファイバー束 $\pi : (M - B) \rightarrow S^1$ についてのモノドロミー $\varphi \in \mathcal{M}_\Sigma$ が定まる. これをオープンブック分解の**モノドロミー (monodromy)** という. 逆に, コンパクトな境界付き有向曲面 Σ と $\varphi \in \mathcal{M}_\Sigma$ が与えられているとする. $\partial\Sigma$ は連結成分を r 個持つとし, その各連結成分を $\partial\Sigma_1, \partial\Sigma_2, \dots, \partial\Sigma_r$ と番号付けしておく. $\Sigma_\varphi := (\Sigma \times [0, 1]) / ((x, 1) \sim (\varphi(x), 0))$ は境界付き3次元多様体であり, その境界は r 個のトーラスたちである. r 個のソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ を用意し, これらの境界を, $\partial\Sigma_\varphi$ の各連結成分に次のようにして定まる写像 F で貼る. θ_1, θ_2 を, $\partial D^2, [0, 1]$ の中の点とする. このとき, 各ソリッドトーラスの $S^1 \times \{\theta_1\} \subset S^1 \times \partial D^2$ の像が, $\partial\Sigma_i \times \{\theta_2\} \subset \partial\Sigma_\varphi$ である向きを保つ微分同相写像として F を定める. $\Sigma_\varphi \cup_F (\coprod_r S^1 \times D^2)$ は有向閉3次元多様体であり, そのオープンブック分解として, ページが Σ であるものが取れる. これより, オープンブック分解を組 (Σ, φ) でも表すことにする.

ξ を M 上の接触構造とする. M のオープンブック分解が ξ の**サポートティングオープンブック分解 (supporting open book decomposition)**, または ξ をサポートするとは, ξ の接触形式 α について, 各ページ上 $d\alpha$ が面積要素であり, バインディングに沿うベクトル場 v に対し $\alpha(v) > 0$ となるものをいう. Thurston と Winkelnkemper [TW] により, M の任意のオープンブック分解に対し, それにサポートされる接触構造が存在することが示されている. Giroux はより強い主張として, 以下の定理を示した:

定理 1.6 (Giroux [Gi]). M を有向閉3次元多様体とする. このとき, 以下の2つの集合の間の一対一の対応がある:

- $\{ M \text{ 上の接触構造 } \xi \} / \text{アイソトピー}$
- $\{ M \text{ のオープンブック分解 } (\Sigma, \varphi) \} / \text{正の安定化}$

ここでオープンブック分解 (Σ, φ) の**正の安定化 (positive stabilization)**とは、次のようにして得られるオープンブック分解 $(\Sigma', t_\alpha \varphi)$ のことである： Σ の中のプロパーな弧 a を一つ取り、その両端と1-ハンドル h の核 a' の端点が一致するように h を Σ に貼る。こうして得られた、 $\Sigma \cup h$ を Σ' とし、 α を $a \cup a'$ とする。

Giroux の対応から、 M 上の接触構造はオープンブック分解により理解することができる。特に、Stein 充填可能な接触構造に関しては、サポーティングオープンブック分解のモノドロミーにより調べることが可能である。

定理 1.7 (定理1.4の言い換え). M を連結な有向閉3次元多様体とし、 ξ を M 上の接触構造とする。このとき、以下は同値である：

1. ξ は Stein 充填可能である。
2. ξ のサポーティングオープンブック分解 (Σ, φ) で、 φ が右手 Dehn ツイストのみの積で表示されるものが存在する。このとき、右手 Dehn ツイストを生成する単純閉曲線たちのホモロジー類は非零である。

この言い換えは、ALF の“境界”を見ることにより得ることができる。 $f: X \rightarrow D^2$ をファイバーが Σ でモノドロミーが $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_n})$ である ALF とする。 $pr: (D^2 - \{0\}) \rightarrow S^1$ を $(r, \theta) \mapsto \theta$ で定義する。ただし、 (r, θ) は $D^2 - \{0\}$ の極座標とする。このとき、 $(pr \circ f) | (pr \circ f)^{-1}(S^1): (pr \circ f)^{-1}(S^1) \rightarrow S^1$ は ∂X のオープンブック分解 $(\Sigma, t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \cdots t_{\alpha_n})$ を定める。逆に、 (M, ξ) のサポーティングオープンブック分解 (Σ, φ) を与えたとする。 φ が定理1.7の(2)を満たすとすると、 $t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \cdots t_{\alpha_n} = \varphi$ なる φ の分解が存在する。このとき、ファイバーが Σ でモノドロミーが $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_n})$ である ALF が得られる。この全空間は (M, ξ) の Stein 充填となることに注意しておく。以降、このようにして得られる ALF のことを、 (Σ, φ) から得られる ALF と呼ぶことにする。

1.4. Stein 充填の一意性

この節の主結果を述べるために、まず定義を1つする。**Mazur 型多様体 (Mazur type manifold)**とは、境界が S^3 でない向き付け可能な可縮4次元多様体で、0-, 1-, 2-ハンドルそれぞれ1つずつから成るハンドル分解を持つものである。

定理 1.8 (Oba [Ob2]). M を整係数ホモロジー3球面とし、 ξ を M 上の Stein 充填可能な接触構造とする。 ξ がオープンブック分解 $(\Sigma_{0,4}, \varphi)$ にサポートされているならば、 (M, ξ) の Stein 充填は微分同相の差を除いて一意である。また、 M が S^3 に微分同相であるとき、その Stein 充填は4次元球体 B^4 に微分同相で、それ以外の場合は、ある Mazur 型多様体に微分同相である。

- 注意 1.9.**
1. 定理 1.8 の仮定を満たし、 S^3 に微分同相でない整係数ホモロジー球面は著者により無限個構成されている ([Ob1]).
 2. 定理 1.8 のオープンブック分解の仮定について、ページの境界数を3以下に変えたとする。この場合の仮定を満たす整係数ホモロジー球面は S^3 のみであることが、Kirby 図式を用いて簡単に確かめられる。

この定理は冒頭でも述べたように、主に写像類群の議論で証明される。Stein 充填や Stein 充填可能な接触構造と、写像類群の結びつきは定理1.4, 1.7で既に見た。Stein 充填可能な接触構造のサポーティングオープンブック分解について、そのページの種数が0である場合、より強い主張として次のような結果が知られている。

定理 1.10 (Wendl[We, Theorem 1]). M を連結な有向閉3次元多様体とし, ξ を Stein 充填可能な接触構造とする. ξ が, ページの種数が0であるオープンブック分解 (Σ, φ) にサポートされているすると, (M, ξ) の任意の Stein 充填 X は, (Σ, φ) から定まる ALF 許容する.

この定理の強調しておきたい点は, 任意の Stein 充填が, 任意に与えたサポーティングオープンブック分解から得られるという点である. ゆえに, 与えたサポーティングオープンブック分解 (Σ, φ) のモノドロミー φ の右手 Dehn ツイストへの分解をすべて列挙すれば, Stein 充填すべて列挙したことになる.

そこで, まず定理 1.8 の仮定を満たす接触多様体の Stein 充填に関し, そのトポロジーに生じる条件を考察する.

補題 1.11 ([Ob2]). M を整係数ホモロジー3球面とし, ξ を M 上の Stein fillable な接触構造とする. ξ が, ページの種数が0であるオープンブック分解にサポートされているとすると, (M, ξ) の Stein 充填 X のホモロジーに関し次が成り立つ.

$$H_i(X; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0). \end{cases}$$

証明は [Ob2] を参照して頂きたい. この補題と定理 1.10 を用いて, 定理 1.8 を示す.

定理 1.8 の証明の概略. 一意性に関する結果の証明のみをここでは述べる. Mazur 型であることについては [Ob2] を参照して頂きたい.

X を接触多様体 (M, ξ) の Stein 充填とする. 定理 1.10 から, X は ξ のサポーティングオープンブック分解 (Σ, φ) から定まる ALF $f: X \rightarrow D^2$ を許容する. すなわち, f はファイバーが $\Sigma_{0,4}$ であり, モノドロミーが $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_n})$ となる ALF である. X は, $\Sigma_{0,4} \times D^2$ に特異ファイバーの数だけ2-ハンドルを接着したハンドル分解を持つ. よって, X のオイラー標数 $\chi(X)$ は, $\chi(X) = \chi(\Sigma_{0,4} \times D^2) + n = -2 + n$. 一方, 補題 1.11 より, $\chi(X) = 1$ である. ゆえに, $n = 3$. 次に, ホモロジー類 $[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3] \in H_1(\Sigma_{0,4}; \mathbb{Z})$ の曲面上で取りうる配置を考えると, 以下の図3のようになる. (i) と (ii) の場合は, Hurwitz

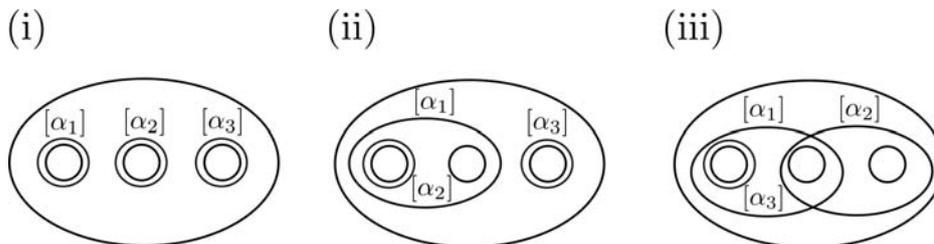


図 3: ホモロジー類 $[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3] \in H_1(\Sigma_{0,4}; \mathbb{Z})$ の配置.

同値と Kirby 図式の議論を用いて X が B^4 になることが分かり, 定理が成り立つ. (iii) の場合を考える. いま, φ の別の分解 $t_{\beta_1} t_{\beta_2} t_{\beta_3}$ をとる. $(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, t_{\alpha_3}) \equiv (t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, t_{\beta_3})$ であることを示せば, それぞれの組をモノドロミーに持つ ALF が同型となり, 全空間が微分同相であることが分かる. ゆえに, これを示す. まず, Hurwitz 同値な変形を行うことで, $[\alpha_1] = [\beta_1], [\alpha_2] = [\beta_2], [\alpha_3] = [\beta_3]$ を仮定できる. 部分群 $\langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2} \rangle \subset \mathcal{M}_{\Sigma_{0,4}}$ を考えると, 階数2の自由群であることが分かる. $[\alpha_1] = [\beta_1], [\alpha_2] = [\beta_2]$ であること

から, $\psi_1, \psi_2 \in \langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2} \rangle$ で, $(\alpha_i)\psi_i = \beta_i$ ($i = 1, 2$) となるものが存在する. よって, $(t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, t_{\beta_3}) \equiv (t_{(\alpha_1)\psi_1}, t_{(\alpha_2)\psi_2}, t_{\alpha_3}) \equiv (t_{\alpha_1}, t_{(\alpha_2)\psi_2\psi_1^{-1}}, t_{\alpha_3})$. ここで, ある表現 $\langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2} \rangle \rightarrow \mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z})$ を取ることで, $\psi_2\psi_1^{-1} = t_{\alpha_2}^p t_{\alpha_1}^q$ なる $p, q \in \mathbb{Z}$ が存在することが示せる. ゆえに, $(t_{\alpha_1}, t_{(\alpha_2)\psi_2\psi_1^{-1}}, t_{\alpha_3}) \equiv (t_{\alpha_1}, t_{(\alpha_2)t_{\alpha_2}^p t_{\alpha_1}^q}, t_{\alpha_3}) \equiv (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, t_{\alpha_3})$ となり, 定理を得る. \square

2 分岐被覆とコンパクト Stein 曲面

2.1. はじめに

Loi と Piergallini は以下の定理により, ブレイド状曲面とコンパクト Stein 曲面の関係性を見出した.

定理 2.1 (Loi-Piergallini [LP, Theorem 3]). X をコンパクトで連結な境界付き有向4次元多様体とする. このとき, 以下は同値である:

1. X はコンパクト Stein 曲面である.
2. X は4次元球体 B^4 の分岐被覆の全空間であり, その分岐集合は正ブレイド状曲面(定義2.3)である.

ブレイド状曲面は, ブレイドモノドロミーや, チャート表示など, 構成的な手法と相性が良い. しかし, 現段階ではブレイド状曲面を用いたコンパクト Stein 曲面の研究はほとんどなされていない.

そこで, 次のような問題を考える: 正ブレイド状曲面 S について, S 上分岐する被覆を2つ以上考えたときに, それらの全空間が互いに微分同相でかつ Stein 構造が相異なるものを与える S は存在するか. 本節ではこの問いの肯定的な答えとして, 実際に構成したブレイド状曲面の例を紹介する.

2.2. ブレイド状曲面と4次元球体 B^4 の分岐被覆

ここではブレイド状曲面と, その曲面上分岐する分岐被覆を復習する. ブレイド状曲面については, [Ru], [Ka, Chapter 16, 17], [APZ, Section 3] を, 分岐被覆については [APZ, Section 5, 6] を詳しくは参照して頂きたい.

D_1^2, D_2^2 を向きづけられた円盤とし, S を $D_1^2 \times D_2^2$ にプロパーに埋め込まれた曲面とする.

定義 2.2. $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ が次数 m の (単純) ブレイド状曲面 ((simple) braided surface) であるとは, 第一射影 $pr_1 : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_1^2$ の制限 $p_S := pr_1|_S : S \rightarrow D_1^2$ が次数 m の単純分岐被覆であるときをいう.

Q_S を単純分岐被覆 p_S の分岐点集合とする. $|Q_S| = n$ とする. 基点 a_0 を ∂D_1^2 にとり, 1.2 と同様に $\pi_1(D_1^2 - Q_S, a_0)$ の基底として Hurwitz 生成システム $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ をとる. S_m を m 次対称群とし, $\rho : \pi_1(D_1^2 - Q_S, a_0) \rightarrow S_m$ を被覆 p_S の被覆モノドロミーとする. すなわち, ρ は $\pi_1(D_1^2 - Q_S, a_0)$ の推移的な表現で, 各 $\rho(\gamma_i)$ は互換である. この ρ_{p_S} の m 次ブレイド群への持ち上げとして, S のブレイドモノドロミー (braid monodromy) $\rho_S : \pi_1(D_1^2 - Q_S, a_0) \rightarrow B_m$ が定まる. 組 $(\rho_S(\gamma_1), \rho_S(\gamma_2), \dots, \rho_S(\gamma_n))$ のことも S のブレイドモノドロミーと呼ぶことにする. p_S の単純性から, $\rho_S(\gamma_i) = w_i^{-1} \sigma_{j_i}^{\varepsilon_i} w_i$ なる $\sigma_{j_i}, w_i \in B_m, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ が存在する. ただし, σ_{j_i} は B_m の標準的生成元である.

定義 2.3. ブレイド状曲面 S が正 (positive) であるとは, S のブレイドモノドロミー ρ_S が任意の i について $\rho_S(\gamma_i) = w_i^{-1} \sigma_{j_i} w_i$ であるときをいう.

$p : X \rightarrow B^4 \approx D_1^2 \times D_2^2$ を正ブレイド状曲面 S 上分岐する分岐被覆とする. $f := pr_1 \circ p : X \rightarrow D_1^2$ は ALF である. $Q_f = Q_S$ であり, f のファイバーは $f^{-1}(a_0) = p^{-1}(\{a_0\} \times D_2^2)$ ($a_0 \in \partial D_1^2$) である (図4). $p|_{p^{-1}(\{a_0\} \times D_2^2)} : p^{-1}(\{a_0\} \times D_2^2) \rightarrow \{a_0\} \times D_2^2$ が $S \cap (\{a_0\} \times D_2^2)$ 上分岐する分岐被覆であることにも注意しておく. また, f のモノドロミーは S のブレイドモノドロミーの持ち上げである. 詳しくは [LP, Proposition 1] を参照して頂きたい.

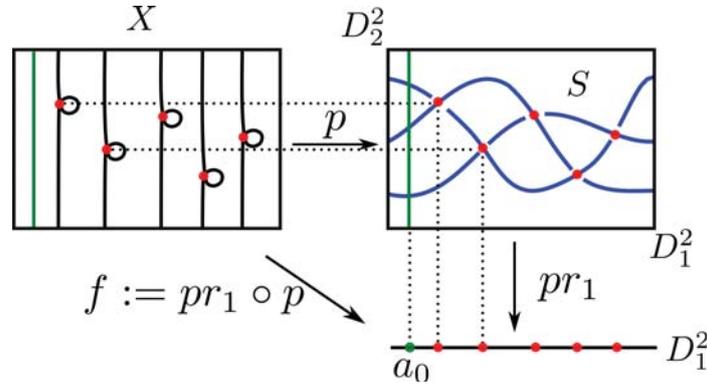


図 4: 左右の長方形は各々 $X, D_1^2 \times D_2^2$ を表し, その中の点は f, p_S の特異点を表す.

B^4 の単純分岐被覆を構成するにあたり補題を1つ準備する. そのために, まずいくつかの定義をする. $q : \Sigma \rightarrow D^2$ を次数 d の単純分岐被覆とする. 分岐点集合 Q_q の濃度を m とする. ブレイド群 B_m を穴が m 個開いた円盤 D_m の写像類群 \mathcal{M}_{D_m} と同一視し, $\beta \in B_m$ に対し定まる元を $[h_\beta] \in \mathcal{M}_{D_m}$ と書く. ただし, ここでの写像類群は第1.2節とは異なり, 穴の部分を集集合として保つ D_m 上の向きを保つ微分同相写像のアイソトピー類がなす群である. いま, $D^2 - Q_q$ を D_m と同一視する. $\beta \in B_m$ が q に関し持ち上げ可能 (liftable) であるとは, 微分同相写像 $H_\beta : \Sigma \rightarrow \Sigma$ が存在し, $q \circ H_\beta = h_\beta \circ q$ を満たすときをいう.

補題 2.4 ([Ob3]). $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ を正ブレイド状曲面とし, そのブレイドモノドロミーを $(w_1^{-1}\sigma_{j_1}w_1, w_2^{-1}\sigma_{j_2}w_2, \dots, w_n^{-1}\sigma_{j_n}w_n)$ とする. a_0 を ∂D_1^2 の点とし, $q : \Sigma \rightarrow \{a_0\} \times D_2^2 \subset D_1^2 \times D_2^2$ を $S \cap (\{a_0\} \times D_2^2)$ 上分岐する次数 d の単純分岐被覆とする. もし, 各 $w_i\sigma_{j_i}w_i^{-1} \in B_m$ が q に関し持ち上げ可能ならば, S 上分岐する $B^4 \approx D_1^2 \times D_2^2$ の単純分岐被覆 $p : X \rightarrow B^4$ が存在し, $pr_1 \circ p : X \rightarrow D_1^2$ はファイバーが Σ である ALF である.

証明の概略. $b_0 \in \{a_0\} \times \partial D_2^2$ をとり, $\pi_1((\{a_0\} \times D_2^2) - (S \cap (\{a_0\} \times D_2^2)), (a_0, b_0))$ に対し, Hurwitz 生成システム (x_1, x_2, \dots, x_m) を取る. 補題を示すには, $\rho : \pi_1(D^4 - S, (a_0, b_0)) \rightarrow S_d$ が q の被覆モノドロミー ρ_q から定まることを示せばよい. $\pi_1(D^4 - S, (a_0, b_0))$ は $\iota_*(x_1), \iota_*(x_2), \dots, \iota_*(x_m)$ で生成され, 表示に関しても S のブレイドモノドロミーから計算できることが知られている ([Fo, p. 133], [Ya], [Ru, Proposition 4.1]). ただし, $\iota : ((\{a_0\} \times D_2^2) - (S \cap (\{a_0\} \times D_2^2)), (a_0, b_0)) \hookrightarrow (D^4 - S, (a_0, b_0))$ は包含写像である. 後は, ブレイドモノドロミーが q に関して持ち上げ可能であることを用いて, ρ が構成できることを示せばよい. 残りの証明は [Ob3] を参照して頂きたい. \square

2.3. 分岐集合が同じであるが Stein 構造が異なるコンパクト Stein 曲面

この節の主定理を紹介し、証明の概略を述べる。

定理 2.5. N を 2 以上の任意の自然数とする。このとき、正ブレイド状曲面 $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ が存在し、 S を分岐集合とする単純分岐被覆 $p_i : X_i \rightarrow B^4 \approx D_1^2 \times D_2^2$ ($i = 1, 2, \dots, N$) で次を満たすものが存在する：

1. X_1, X_2, \dots, X_N は互いに微分同相である；
2. 各 X_i に分岐被覆 p_i から定まる Stein 構造を J_i とすると、 $J_i \neq J_j$ ($i \neq j$) である。

証明の概略. $N = 2$ の場合のみ示す。まず、 $a_0 \in \partial D_1^2$, $b_0 \in \{a_0\} \times \partial D_2^2$ をとる。8 次ブレイド群 B_8 の元、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= \sigma_5, \quad \beta_2 := (\sigma_6^{-1} \sigma_7^{-2} \sigma_6^{-1} \sigma_4 \sigma_3^2 \sigma_4)^{-1} \sigma_5 (\sigma_6^{-1} \sigma_7^{-2} \sigma_6^{-1} \sigma_4 \sigma_3^2 \sigma_4), \\ \beta_3 &:= (\sigma_6^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-1} \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-2} \sigma_3^{-1} \sigma_4)^{-1} \sigma_7 \cdot \\ &\quad (\sigma_6^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-1} \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-2} \sigma_3^{-1} \sigma_4), \\ \beta_4 &:= (\sigma_4^{-1} \sigma_5^{-2} \sigma_4^{-1} \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2)^{-1} \sigma_3 (\sigma_4^{-1} \sigma_5^{-2} \sigma_4^{-1} \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2), \\ \beta_5 &:= (\sigma_6 \sigma_5^2 \sigma_6)^{-1} \sigma_7 (\sigma_6 \sigma_5^2 \sigma_6), \quad \beta_6 := (\sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6)^{-1} \sigma_2 (\sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6). \end{aligned}$$

正ブレイド状曲面 S を、組 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$ をブレイドモノドロミーとして持つものとして定義する。 $q_1, q_2 : \Sigma_{1,4} \rightarrow \{a_0\} \times D_2^2$ を、次のような被覆モノドロミー $\rho_{q_1}, \rho_{q_2} : \pi_1(\{a_0\} \times D_2^2, (a_0, b_0)) \rightarrow S_4$ を持つ次数 4 の単純分岐被覆とする：

$$\begin{aligned} \rho_{q_1}(x_1) &= (1\ 2), \quad \rho_{q_1}(x_2) = (1\ 2), \quad \rho_{q_1}(x_3) = (2\ 3), \quad \rho_{q_1}(x_4) = (2\ 3), \\ \rho_{q_1}(x_5) &= (3\ 4), \quad \rho_{q_1}(x_6) = (3\ 4), \quad \rho_{q_1}(x_7) = (1\ 2), \quad \rho_{q_1}(x_8) = (1\ 2), \\ \rho_{q_2}(x_1) &= (1\ 2), \quad \rho_{q_2}(x_2) = (1\ 2), \quad \rho_{q_2}(x_3) = (3\ 4), \quad \rho_{q_2}(x_4) = (3\ 4), \\ \rho_{q_2}(x_5) &= (2\ 3), \quad \rho_{q_2}(x_6) = (2\ 3), \quad \rho_{q_2}(x_7) = (1\ 2), \quad \rho_{q_2}(x_8) = (1\ 2). \end{aligned}$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5$ は q_1, q_2 に関し持ち上げ可能であることは簡単に確かめることができる。したがって補題 2.4 より、各 q_i に対し単純分岐被覆 $p_i : X_i \rightarrow B^4 \approx D_1^2 \times D_2^2$ が定まる。各 $pr_1 \circ p_i : X_i \rightarrow D_1^2$ は ALF であったから、消滅サイクルの情報から Kirby 図式を描くことができる。実際 Kirby 計算をすることにより、 X_1 と X_2 は Euler 数が -4 である球面上の円盤束に微分同相であることがわかる。また、分岐被覆 p_i から定まる Stein 構造 J_i に関して第 1 Chern 類を Kirby 図式から計算することができる。 $c_1(X_1, J_1) \neq 0$ であり、 $c_1(X_2, J_2) = 0$ であることが分かる。以上から定理が得られた。□

最後に系を 1 つ紹介する。定理 2.6 において境界の接触多様体に目を向けてみる。接触多様体 (M, ξ) の中の有向絡み目 L が**横断的絡み目 (transverse link)** であるとは、各点 $x \in L$ について、向きも込めて $T_x L + \xi_x = T_x M$ を満たすものである。 S^3 の標準的接触構造 ξ_{std} について、ブレイド状曲面の境界は横断的絡み目になっている。

系 2.6. N を 2 以上の任意の自然数とする。このとき、横断的絡み目 $L \subset (S^3, \xi_{std})$ が存在し、 L を分岐集合とする単純分岐被覆 $p_i : M_i \rightarrow S^3$ ($i = 1, 2, \dots, N$) で次を満たすものが存在する：

1. M_1, M_2, \dots, M_N は互いに微分同相である；
2. 各 M_i に単純分岐被覆から定まる接触構造を ξ_i とすると、 $i \neq j$ ならば ξ_i と ξ_j はアイトピックでない。

謝辞 第 62 回トポロジーシンポジウムにお招きいただきました、大槻知忠先生（京都大学数理解析研究所）、平澤美可三先生（名古屋工業大学）、三松佳彦先生（中央大学）に心より御礼を申し上げます。

参考文献

- [AO] S. Akbulut and B. Ozbagci, *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces*, *Geom. Topol.* **5** (2001), 939–945.
- [APZ] N. Apostolakis, R. Piergallini, and D. Zuddas, *Lefschetz fibrations over the disc*, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **107** (2013), no. 2, 340–390.
- [El1] Y. Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2* , *Internat. J. Math.* **1** (1990), no. 1, 29–46.
- [El2] Y. Eliashberg, *Filling by holomorphic discs and its applications*, *Geometry of Low-dimensional Manifolds: 2*, Proc. Durham Symp. 1989, London Math. Soc. Lecture Notes **151**, Cambridge Univ. Press, 1990, 45–67.
- [Et] J. Etnyre, *Lectures on open book decompositions and contact structures*, *Floer Homology, Gauge Theory, and Low Dimensional Topology*, Clay Math. Proc. **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [FM] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series **49**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012.
- [Fo] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, *Topology of 3-manifolds and related topics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962), pp. 120–167.
- [Gi] E. Giroux, *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, 405–414.
- [Go] R. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, *Ann. of Math.* (2) **148** (1998), no. 2, 619–693.
- [GS] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Grad. Stud. Math. **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Ka] S. Kamada, *Braid and knot theory in dimension four*, *Mathematical Surveys and Monographs*, **95**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [LP] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4* , *Invent. Math.* **143** (2001), no. 2, 325–348.
- [Mc] D. McDuff, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, *Invent. Math.* **103** (1991), 651–671.
- [Ob1] T. Oba, *A note on Mazur type Stein fillings of planar contact manifolds*, arXiv:1405.3751.
- [Ob2] T. Oba, *Stein fillings of homology spheres and mapping class groups*, arXiv:1407.5257.
- [Ob3] T. Oba, *Compact Stein surfaces as branched coverings with distinct covering monodromies*, in preparation.
- [OS] B. Ozbagci and A. Stipsicz, *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, *Bolyai Soc. Math. Stud.* **13**, Springer-Verlag, 2004.
- [PV] O. Plamenevskaya and J. Van Horn-Morris, *Planar open books, monodromy factorizations and symplectic fillings*, *Geom. Topol.* **14** (2010), 2077–2101.
- [Ru] L. Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), no. 1, 1–37.
- [TW] W. Thurston and H. Winkelnkemper, *On the existence of contact forms*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52** (1975), 345–347.
- [We] C. Wendl, *Strongly fillable contact manifolds and J -holomorphic foliations*, *Duke Math. J.* **151**(3) (2010), 337–384.
- [Ya] T. Yajima, *Wirtinger presentations of knot groups*, *Proc. Japan Acad.* **46**(1970), 997–1000.

Donaldson-Thomas 不変量

戸田 幸伸 (東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構)*

1. 3次元 Calabi-Yau 多様体

複素 n 次元の, 至る所ゼロではない正則 $(n, 0)$ 形式を持つコンパクト Kähler 多様体を考える. 1950年代に Calabiによりその様な複素多様体には Ricci 平坦な計量が入ると予想され, 大きな問題となっていた. この Calabi 予想は 1977年頃 Yauにより解決され, 以後この様な多様体は Calabi-Yau 多様体と呼ばれる様になった. 多くの場合で, Calabi-Yau 多様体は射影的代数多様体 (つまり複素射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ 内の幾つかの同次多項式の零点集合) になる. 例えば $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ を $n+1$ 次の同次多項式とすると, 超平面

$$\{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n : f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\} \quad (1)$$

は, (特異点が存在しないなら) Calabi-Yau 多様体になる. 一方, 一般に Calabi-Yau 多様体は (1) の様に超曲面の形をしているわけではない. そこで可能な Calabi-Yau 多様体を分類し, その幾何構造を調べることは代数幾何学における 1つの重要な課題となる.

例えば複素 1次元の滑らかな射影的代数多様体は Riemann 面に他ならず, 良く知られている様に Riemann 面はその種数を用いて分類される. 1次元の Calabi-Yau 多様体とは種数 1の場合, つまり楕円曲線に対応し, 楕円曲線が $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ 内の 3次式の零点集合となる事も良く知られている. 複素 2次元になるとより複雑になるが, それでも 19世紀末から 20世紀初頭にかけてイタリア学派により分類理論が完成されている. それによると 2次元 Calabi-Yau 多様体の位相型は $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ 内の 4次超曲面 (K3 曲面) か 2つの楕円曲線の直積 (Abel 曲面) のいずれかとなる. 特に K3 曲面は非常に美しい幾何的性質を持ち, 多くの数学者を魅了してきた. その後, 複素 3次元代数多様体の分類理論の研究は長い間進展がなかったが, 森重文氏による Hartshorne 予想の解決がきっかけとなって研究が進み, 1980年代に 3次元代数多様体の (粗い意味での) 分類理論が完成した. この成果により, 3次元 Calabi-Yau 多様体が 3次元代数多様体の重要な 1つのクラスを成す事が判明した. しかし 3次元になると Calabi-Yau 多様体には多くの位相型が存在し, 完全な分類は現在でも未解決の問題である. この様な歴史的背景により, 3次元 Calabi-Yau 多様体の研究は代数多様体の分類論において非常に重要でかつ魅力的なものとなっている.

2. ミラー対称性

一方, 1990年頃から 3次元 Calabi-Yau 多様体と物理学の超弦理論との関わりが注目されるようになっていった. 超弦理論とは, 物質の構成要素が 1次元の紐から成るとする理論であり, それによると我々の宇宙は $\mathbb{R}^4 \times X$ の形の 10次元空間から成るとされる. X は Planck 定数 (10^{-35} m) ほど小さい実 6次元空間であり, 超対称性に関する制約から複素 3次元 Calabi-Yau 多様体にならなければいけない. しかし超弦理論は 1種類ではなく, 複数の理論が存在することが知られている. それら物理理論の間の等価性を仮定すると,

筆者は文科省による世界トップレベル研究拠点プログラム (WPI), 及び科学研究費 (基盤 B, 26287002) により支援されています.

2000 Mathematics Subject Classification: 14N35, 18E30

キーワード: 連接層の導来圏, Donaldson-Thomas 不変量, 安定性条件

* e-mail: yukinobu.toda@ipmu.jp

Calabi-Yau 多様体の幾何学に関する興味深い予想が得られる。これは、ミラー対称と呼ばれる（互いに同型とは限らない）2つの3次元 Calabi-Yau 多様体 X, X^\vee の間の不思議な関係である。最もナイーブな関係は、Hodge 数に関する対称性 $h^{1,1}(X) = h^{2,1}(X^\vee)$ である。ここで $h^{1,1}(X)$ は X 上の Kähler 型式の小変形空間 $H^1(X, \Omega_X)$ の次元、 $h^{2,1}(X^\vee)$ は X^\vee 上の複素構造の小変形空間 $H^1(X^\vee, T_{X^\vee})$ の次元と捉えることが出来る。実はこれらの変形空間には更にある種の代数構造が入り（Frobenius 構造と呼ばれる）、超弦理論における対称性はこれら代数構造の間の等価性も意味する。 $H^1(X, \Omega_X)$ に入る代数構造は X 上の有理曲線（つまり $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ から X への射の像となる代数曲線）の本数を用いて構成でき、一方 $H^1(X^\vee, T_{X^\vee})$ に入る代数構造は X^\vee の複素構造を用いて構成される。 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 内の5次超曲面とそのミラーに対してこれら代数構造を比較したのが1990年代初頭の Candelas, de la Ossa, Green, Parkes [10] ら物理学者による仕事である。その結果、彼らは5次超曲面 X 上の有理曲線の本数を、そのミラー X^\vee 上の複素構造のモジュライ空間上の周期積分を用いて導くことに成功した。彼らの議論は物理に基づくため、この時点では X 上の有理曲線の本数に関する予想を与えたにすぎない。それでも、これは驚くべき成果であった。実際、次数の小さい有理曲線の本数に関しては知られていた結果と一致していたし、また次数の高い場合は当時の代数幾何の技術で正確な本数を数えることには困難があったため、物理学者がそれらの本数を正確に予言したのは驚異的であった。また、有理曲線の本数と周期積分という、一見すると関係がなさそうな数学的对象に関係があるというのも興味深い。Candelas 達の予想は後に Givental によって数学的な証明が与えられ、ミラー対称性が数学者の間でも注目されるようになっていった。

3. Gromov-Witten 不変量

上記の Candelas 達の仕事によって、ミラー対称性を数学的に理解する上で代数多様体上の曲線の本数を数えることが重要であることが明らかになった。しかし一般に代数多様体 X 上の曲線の本数を数えようと思っても、そもそも曲線が無限に存在する場合は正しい曲線の本数上げを定義することから数学的に非自明な問題となる。まず、数えたい曲線の種数 g と次数 $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ が無限に存在するため、それらを固定する必要がある。それでも、与えられた種数と次数を持つ X 上の曲線は無限に存在する可能性があり、それらをナイーブに数えることは出来ない。ところが、 X が3次元 Calabi-Yau 多様体の場合にはこれらの曲線が仮想的に有限個しかないとみなせる。 C を滑らかな種数 g の代数曲線とし、 $f: C \rightarrow X$ を $f_*[C] = \beta$ を満たす射とする。この様な (f, C) の組の本数を数えたい。 C を固定すると、射 f の変形空間の接空間は $H^0(C, f^*T_X)$ となり、障害空間は $H^1(C, f^*T_X)$ となる。よって、Riemann-Roch の定理により射 f の変形空間の仮想的な次元は

$$\dim H^0(C, f^*T_X) - \dim H^1(C, f^*T_X) = 3 - 3g$$

となる。これに C の複素構造の変形空間の次元 $3g - 3$ を足すと、ゼロになる。つまり、組 (f, C) のモジュライ空間（のコンパクト化） $\overline{M}_g(X, \beta)$ は仮想的にゼロ次元とみなせる。実際に仮想的なゼロ次元のモジュライ空間を構成するには議論を要するが、代数幾何的には例えば Behrend-Fantechi [5] による完全障害理論を用いて構成することが出来る。実際、[5] によって $\overline{M}_g(X, \beta)$ 上にゼロ次元の仮想基本類 $[\overline{M}_g(X, \beta)]^{\text{vir}}$ を構成する

ことができ、それを積分することで組 (f, C) の数え上げ不変量

$$\text{GW}_{g,\beta} := \int_{[\overline{M}_g(X,\beta)]^{\text{vir}}} 1 \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

が定義される. こうして得られた不変量 $\text{GW}_{g,\beta}$ は Gromov-Witten (以下, GW と略す) 不変量と呼ばれる. Candelas 達が予想し, Givental が証明した有理曲線の本数に関する結果は, 5次超曲面 X 上の種数0の GW 不変量 $\text{GW}_{0,\beta}$ に関するものである. ここで組 (f, C) には非自明な自己同型が存在しうるため, モジュライ空間 $\overline{M}_g(X, \beta)$ は一般にはスタック (局所的に多様体を有限群で割ったものであるが, その群作用のデータも残した空間) となる. よって GW 不変量 (2) は有限群の位数の情報が分母に反映された有理数となることに注意する.

4. Donaldson-Thomas 不変量

GW 不変量が数学的に厳密に定義されたのは1990年代後半のことである. 一方, 3次元 Calabi-Yau 多様体上の曲線というわけではないが, 何らかの多様体上の何らかの数学的対象を数え上げる不変量はそれ以前から存在していた. 1980年代に導入され, トポロジーの研究に大きな影響を与えた実4次元多様体上の Donaldson 不変量はその1つである. これはベクトル束上の接続を考える理論, つまりゲージ理論の研究から産まれたものであり, 与えられたベクトル束のある種の特異な接続を数え上げる不変量と解釈することが出来る. また, 3次元多様体論における Casson 不変量も Taubes の仕事によりゲージ理論的に解釈でき, これもある種の接続の数え上げ不変量とみなせる.

Donaldson-Thomas (以下, DT と略す) 不変量とは, 複素3次元 Calabi-Yau 多様体上でゲージ理論を考察することによって Donaldson 不変量や Casson 不変量の類似物を構成するという目的で, 1990年代後半に Donaldson の指導の下 Thomas [25] により導入された不変量である. この場合3次元 Calabi-Yau 多様体 X 上のベクトル束 E の特異な接続とは, E の複素構造を与える $\bar{\partial}$ -接続に対応する. よって DT 不変量とは3次元 Calabi-Yau 多様体 X 上の正則ベクトル束を数え上げる不変量とみなせる. しかし, Donaldson 不変量や Casson 不変量の構成の際に行ったゲージ理論的議論を3次元 Calabi-Yau 多様体にそのまま当てはめようとする, 様々な技術的問題が生じる. 例えば正則ベクトル束のモジュライ空間はコンパクトではないのでそれをコンパクト化する必要がある. コンパクト化に必要な数学的対象物は, 謂わば「特異点付き正則ベクトル束」に対応するものであるが, この様なものをゲージ理論的に取り扱うのは難しい.

そこで Thomas が採用したアプローチは, モジュライ空間のコンパクト化をゲージ理論を用いて行うのではなく, 完全に代数幾何学的に行うというものである. 代数幾何学には接続層という概念が存在し, これは上述の特異点付き正則ベクトル束とみなすことが出来る. 接続層のモジュライ理論は古典的な話題であり, Mumford, Gieseker, 丸山らによって然るべきモジュライ空間が構成されていた. そこで明らかになっていたことは, 接続層のモジュライ空間を構成する際にはもう1つ, 安定性条件と呼ばれるデータが必要であることであった. 代数多様体 X 上の接続層の安定性条件は, 豊富因子 ω を与える事で決まる. X 上の接続層 E が ω について安定であるとは, 任意の非自明な部分接続層 $F \subset E$ に対して条件

$$\frac{c_1(F) \cdot \omega^{\dim X - 1}}{\text{rank}(F)} < \frac{c_1(E) \cdot \omega^{\dim X - 1}}{\text{rank}(E)} \quad (3)$$

が成立するものとして定義される. 例えば代数曲線上の階数と次数を固定したベクトル束全体を考えると, その様なベクトル束は多すぎてそれらをパラメトライズする有限型のモジュライ空間が存在しないことがすぐに分かる. しかし, その中で安定なベクトル束に限定すると考察するベクトル束は激減して有限型のモジュライ空間が存在することが分かる. しかも, 全てのベクトル束は安定ベクトル束達の拡大で得られるため, 安定ベクトル束が分かれば原理的には全てのベクトル束が分かることになる.

以上より, 代数多様体 X 上の豊富因子 ω 及び数値類 $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$ を与えると, ω について安定な連接層 E で $\text{ch}(E) = v$ を満たすもののモジュライ空間 $M_\omega(v)$ が構成できる. モジュライ空間 $M_\omega(v)$ は必ずしもコンパクトではないが, コンパクトになる v と ω に関する十分条件は知られている. その十分条件を満たすなら, $M_\omega(v)$ は射影的代数多様体 (正確には射影的スキーム) となる. また, $M_\omega(v)$ の点に対応する X 上の安定層 E を取ると, $M_\omega(v)$ の E における接空間は $\text{Ext}^1(E, E)$ と同一視され, 障害空間は $\text{Ext}^2(E, E)$ で与えられる. よって, GW 不変量と同様に $M_\omega(v)$ の仮想次元を考えると

$$\dim \text{Ext}^1(E, E) - \dim \text{Ext}^2(E, E) \quad (4)$$

となる. ここで, X が3次元 Calabi-Yau 多様体であると仮定する. すると Serre 双対性定理により $\text{Ext}^2(E, E)$ と $\text{Ext}^1(E, E)$ は互いに双対となり, よって仮想次元 (4) は0になる. つまり, $M_\omega(v)$ は一般には正の次元を持つものの, 仮想的にはゼロ次元とみなせる筈である. この点に着目して, Thomas は GW 不変量を代数幾何的に構成する際に用いた完全障害理論を用いて, $M_\omega(v)$ 上にゼロ次元の仮想基本類 $[M_\omega(v)]^{\text{vir}}$ を構成した. $M_\omega(v)$ がコンパクトになるという仮定の下で, DT 不変量はこの仮想基本類を積分することで定義される.

$$\text{DT}_\omega(v) := \int_{[M_\omega(v)]^{\text{vir}}} 1 \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

ここで GW 不変量とは異なり, DT 不変量 (5) は必ず整数になることに注意する. これは, 安定層には非自明な自己同型が存在しないことに起因している. また, $\text{DT}_\omega(v)$ は一般に ω の選び方にも依存することに注意する.

DT 不変量の (5) による定義は Thomas によるものである. その後 Behrend [4] は, $M_\omega(v)$ 上のある種の構成可能関数 χ_B を構成して, DT 不変量 (5) が χ_B によって重みづけられた Euler 数と一致することも証明した. つまり, 次が成立する:

$$\text{DT}_\omega(v) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} m \cdot \chi_B^{-1}(m). \quad (6)$$

公式 (6) は DT 不変量がモジュライ空間 $M_\omega(v)$ の Euler 数と近い不変量であることを示しており, また DT 不変量を実際に計算する上でも大変有用であることが明らかになった.

5. GW/DT/PT 対応

この様に, 代数幾何学で培われた技術を用いて DT 不変量が数学的に厳密な形で Thomas や Behrend により構成された. しかし, Donaldson 不変量や Casson 不変量の様に DT 不変量を用いた面白い応用が直ちに得られたわけではなかった. DT 不変量の研究が進展するきっかけとなったのは, 2003年の Maulik-Nekrasov-Okounkov-Pandharipande [20]

によるDT不変量とGW不変量の間に関する予想である. 前述した様に, GW不変量は3次元Calabi-Yau多様体 X 上の曲線を数え上げており, 一方DT不変量は X 上の安定層を数え上げている. 接続層とは大雑把に言って特異点付きベクトル束の様なものであり, その特異点集合は X 内の複素余次元2以上の閉集合, つまり曲線か点を与える. 特に階数が1の安定層 E で $\det(E) = \mathcal{O}_X$ となるものを考えると, その様な層は E の特異点の情報のみで決まる. 実際, E に対して $\dim C \leq 1$ となる閉集合 (より正確には閉部分スキーム) $C \subset X$ が定まり, E は C を定義するイデアル層 $I_C \subset \mathcal{O}_X$ と同型となる. そこで, $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して不変量 (5) の構成を $[C] = \beta, \chi(\mathcal{O}_C) = n$ となるイデアル層 I_C のモジュライ空間に適用することで不変量 $I_{n,\beta} \in \mathbb{Z}$ を得る. 前節の記号を用いるなら, β, n をそれぞれ Poincaré 双対性定理によって $H^4(X, \mathbb{Q}), H^6(X, \mathbb{Q})$ の元とみなすと,

$$I_{n,\beta} = \text{DT}_\omega(1, 0, -\beta, -n) \quad (7)$$

となる. ここで不変量 $I_{n,\beta}$ は ω には依存しないが, これは数値類 $(1, 0, -\beta, -n)$ の取り方による特殊事情である.

$\beta \neq 0$ なら, GW不変量と同様にDT不変量 (7) も X 上の曲線を数え上げる不変量である. 一方, DT不変量 (7) 及びそれに寄与する曲線の性質はGW不変量と大分異なる. まず, GW不変量は有理数値を取るが, DT不変量は必ず整数値を取る. また, GW不変量に寄与する曲線はほとんど滑らか (高々結節しか持たない) であるが, DT不変量に寄与する曲線の特異点には何の制限もなく幾らでも悪い特異点を持ちうる. 更にGW不変量に寄与する曲線は X に埋め込まれているとは限らないが, DT不変量に寄与する曲線は X に埋め込まれている. よってGW不変量とDT不変量との間に何らかの関係があるかどうかは, それぞれの定義からは明らかではない. 実際, これらの間の関係を見るには不変量の生成関数を考える必要がある. GW不変量の生成関数を

$$\text{GW}(X) := \sum_{g \geq 0} \sum_{\beta > 0} \text{GW}_{g,\beta} \lambda^{2g-2} t^\beta$$

とおき, DT不変量の生成関数を

$$\text{DT}_\beta(X) := \sum_n I_{n,\beta} q^n, \quad \text{DT}(X) := \sum_{\beta \geq 0} \text{DT}_\beta(X) t^\beta.$$

とおく. ここで, λ, q, t は単なる変数であり, $\beta > 0$ は β が X 内の1次元部分スキームが定める基本ホモロジー類であることを意味する. 次がMNOP [20] により提唱された予想である.

予想 5.1. ([20]) (i) 生成関数の商 $\text{DT}_\beta(X)/\text{DT}_0(X)$ は q についての有理関数を $q = 0$ において Laurent 展開したものであり, 更にこの有理関数は変換 $q \leftrightarrow 1/q$ で不変である.
(ii) 変数変換 $q = -e^{i\lambda}$ の下で, 次の等式が成立する.

$$\exp(\text{GW}(X)) = \frac{\text{DT}(X)}{\text{DT}_0(X)}. \quad (8)$$

等式 (8) は GW/DT 対応と呼ばれる. ここで行う変数変換 $q = -e^{i\lambda}$ はそのままでは意味を成さないが, (i) の有理性予想を認めると意味を成す. つまり, (8) の右辺で与え

られるDT不変量の生成関数を q についての有理関数とみなし,これを $q = -1$ の近傍で展開しなおすとGW不変量の生成関数が得られるというものである. よって等式(8)は1つ1つの不変量を比較して見えてくる関係式ではなく,全ての不変量を用いて生成関数を構成することで見えてくる関係式である. また,生成関数 $DT_0(X)$ は X 内の0次元部分スキームを数えるDT不変量の生成関数である.(8)の右辺において $DT_0(X)$ で割るという操作は,この様な0次元部分スキームの寄与を打ち消して曲線の寄与のみを取り出すという事を意味する.

前述した様に, GW不変量は有理数値を取り, DT不変量は整数値を取る. よって等式(8)は, GW不変量のある種の隠れた整数性を意味するものである. この様なGW不変量のある種の隠れた整数性は, 物理側の方ではMNOP予想以前から議論されていた. 1990年代後半にGopakumar-Vafa [12]はType IIA超弦理論とM理論の間の双対性を用いてGW不変量の生成関数がある種の整数値不変量を用いて記述できると予想した. 彼らの考察した不変量はGopakumar-Vafa (以下, GV)不変量と呼ばれる. 大雑把にいうと, GV不変量は X 上の1次元台を持つ安定層のモジュライ空間のコホモロジー群に入る $sl_2 \times sl_2$ -作用を考え, その作用に関する適当なトレースを取ることで定義されると期待される(例えば[13]を参照). しかし, GW不変量やDT不変量で考察した様に, 変形障害理論の寄与を何らかの形でGV不変量の定義に組み込む必要がある. その様な寄与をGV不変量に組み込むことは技術的に難しく, 予想5.1が提唱された時点では数学的に満足いく形でのGV不変量の定義は得られていなかった. 予想5.1の動機はGV不変量の代わりに, 整数値を取りかつ数学的に厳密に定義されているDT不変量を用いてGW不変量の隠れた整数性を与える事, そしてDT不変量を用いてGV不変量の(元々のGopakumar-Vafaの論文[12]とは違った形での)数学的定義を与える事にあった.

ここで, 等式(8)の右辺における生成関数の商を考える. この生成関数の商を取るという操作の幾何的意味づけを問題にしたのが2007年のPandharipande-Thomasの論文[22]であった. 彼らは等式(8)の右辺の級数の各係数が, 安定対と呼ばれる幾何的対象を数え上げていると予想した. 彼らが定義した安定対とは, 台の次元が1である接続層 F とその大域切断 $s \in H^0(X, F)$ の組で, ある種の条件を満たすものである. 不変量 $I_{n,\beta}$ と同様に, 各 $n \in \mathbb{Z}$ と $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ に対して, $[F] = \beta, \chi(F) = n$ を満たす安定対 (F, s) を数え上げる不変量 $P_{n,\beta}$ を彼らは構成した. この不変量 $P_{n,\beta}$ はPT不変量と呼ばれる. 論文[22]における予想は, 等式(8)の右辺がPT不変量によって記述されるというものであった.

予想 5.2. ([22])

$$\frac{DT(X)}{DT_0(X)} = \sum_{n,\beta} P_{n,\beta} q^n t^\beta. \quad (9)$$

予想5.1と予想5.2を組み合わせると, GW不変量とPT不変量の間関係式が得られる. しかもその関係式は, 等式(8)よりも単純なものとなる. 一方論文[22]において, 等式(9)が成立するであろう背景には, それまで展開されてこなかった興味深い数学が存在するであろうことも述べられていた. それは, 接続層の導来圏における壁越え理論である.

6. 接続層の導来圏と安定性条件

代数多様体上の接続層の導来圏とは1960年代にGrothendieckによって導入された概念で、その導入の元々の動機は層係数コホモロジーの間のSerre双対性定理の相対版を確立するというにあった。代数多様体 X に対して、その上の接続層の導来圏 $D(X)$ が定義される。圏 $D(X)$ の対象は、 X 上の接続層の有界複体 \mathcal{F}^\bullet から成る。ここで2つの有界複体の間の射 $\mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$ は、それらのコホモロジーの間に誘導する射が同型である時に擬同型であると呼ばれる。導来圏 $D(X)$ は接続層の有界複体の圏を擬同型からなる射で局所化したものとして定義される。擬同型によって局所化しているため、 $D(X)$ はAbel圏にはならず、その代わり三角圏と呼ばれる構造を持つ。

導来圏 $D(X)$ は暫くは単なる技術的な道具という認識でしかなかったが、1994年にKontsevichが圏論的ミラー対称性予想 [16] を提唱したことにより $D(X)$ に対する考え方が一変するようになった。圏論的ミラー対称性予想とは、 X と X^\vee がミラーの関係にある時、 X の導来圏 $D(X)$ と X^\vee 上の導来深谷圏が同値になるという予想である。導来深谷圏は X^\vee 上のシンプレクティック構造から定まる圏であり、その上の複素構造には依らない。一方、 $D(X)$ は X 上のシンプレクティック構造には依らず、 X の複素構造のみで定まる。よって圏論的ミラー対称性予想は、代数幾何学とシンプレクティック幾何学の間に興味深い対称性を意味する。Kontsevichによる予想のアイデアがきっかけとなって、導来圏を通じた様々な対称性が発見されていった。例えば2つの双有理同値な3次元Calabi-Yau多様体 X, X' は同型なミラーを持つため、それらの導来圏は同値になる筈である。実際この事実はBridgeland [6] により示された。他にも導来McKay対応 [9]、行列因子化との対応 [21] 等興味深い現象の発見は後を絶たず、導来圏の研究は現在では代数幾何学の主流テーマの1つと言っても良い。

接続層の圏に豊富因子を用いて安定性条件が定まったように、導来圏の対象に対しても何らかの安定性条件を定めるという考えは自然である。実際その様な安定性条件は超弦理論の文脈でDouglas [11] が考察し、Bridgeland [7] がこれを数学的に厳密な形で定式化した。前述した様に導来圏はAbel圏ではないため、部分対象といった概念が存在しない。よって通常安定層の定義に採用した様な部分層による不等式 (3) を直接一般化することは出来ない。そこでBridgelandが採用したアイデアは、そういった部分対象を定めるデータも安定性条件に加えるという事である。そのデータとは、以下に述べる t -構造の核と呼ばれるものである。接続層 F を複体 $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow F \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ とみなすことで F を $D(X)$ の対象とみなすことができ、よって $\text{Coh}(X)$ を $D(X)$ の部分圏とみなすことが出来る。この様な部分圏が満たす性質を一般化したものが、 t -構造の核である。大雑把にいうと部分圏 $\mathcal{A} \subset D(X)$ が t -構造の核であるとは、 \mathcal{A} がAbel圏の構造を持ち更に \mathcal{A} とその次数シフト達が $D(X)$ を生成するものである。この様な \mathcal{A} は $\text{Coh}(X)$ 以外にもありえて、例えば導来圏の同値 $D(X) \cong D(Y)$ が存在すると $\text{Coh}(Y)$ も $D(X)$ の t -構造の核を定める。Bridgelandによる $D(X)$ 上の安定性条件とは、 t -構造の核 $\mathcal{A} \subset D(X)$ と群準同型 $Z: K(X) \rightarrow \mathbb{C}$ の組 (\mathcal{A}, Z) であって、何らかの公理を満たすものである。この様な組があると、 Z を用いた (3) と同様の不等式によって \mathcal{A} における Z -安定対象が定まる。

Bridgelandは $D(X)$ 上の全ての安定性条件の集合 $\text{Stab}(X)$ を考え、その上に複素多様体の構造が入ることを証明した。この複素多様体はミラー対称性の文脈で特に重要である。 X をCalabi-Yau多様体とし、 X^\vee をそのミラー多様体とする。この時 M_{X^\vee} を X^\vee

上の複素構造のモジュライ空間とすると、埋め込み

$$M_{X^v} \hookrightarrow [\text{Aut } D(X) \backslash \text{Stab}(X) / \mathbb{C}] \quad (10)$$

の存在が予想されている。例えば X が5次超曲面の場合、 M_{X^v} を記述すると(10)の右辺が図1の空間を含むと予想される。一方、特に3次元以上の代数多様体上で $\text{Stab}(X)$ を研究することは非常に困難であり、一般に $\text{Stab}(X) \neq \emptyset$ であることも示されていない。実際、 $\dim X \geq 2$ ならば標準的な t -構造の核 $\text{Coh}(X)$ は Bridgeland 安定性条件の公理と整合しないことが証明される。従って安定性条件を構成するには標準的な t -構造ではない、何か別の t -構造の核を構成する必要がある。現時点で最も強力な結果は X が A -型の3次元 Calabi-Yau 多様体 (3次元 Abel 多様体を自由な有限群作用で割った Calabi-Yau 多様体) の場合に $\text{Stab}(X)$ を記述した Bayer-Macri-Stellari [2] による結果であるが、例えば5次超曲面に対して $\text{Stab}(X) \neq \emptyset$ であることは未解決である。

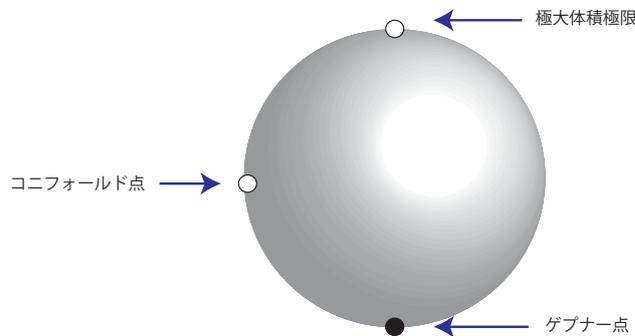


図 1: 5次超曲面の安定性条件の空間の図の予想

7. 導来圏における壁越え現象

代数多様体 X に対して、Bridgeland 安定性条件の空間 $\text{Stab}(X)$ が定まることを述べた。 $\sigma \in \text{Stab}(X)$ と $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$ に対し、 σ について安定な対象 $E \in D(X)$ で $\text{ch}(E) = v$ となるものの同型類の集合 $M_\sigma(v)$ を考える。一般に $M_\sigma(v)$ は σ に依存するが、その依存の仕方は所謂壁越え現象によって解析される。つまり $\text{Stab}(X)$ には実余次元1の部分多様体 (壁と呼ばれる) $\mathcal{W} \subset \text{Stab}(X)$ が存在し、 $M_\sigma(v)$ は $\text{Stab}(X) \setminus \mathcal{W}$ の連結成分 (領域と呼ばれる) では不変であるが、壁を超えるとジャンプする。

予想 5.2 が提唱された当初、等式 (9) は Bridgeland 安定性条件の壁越え現象によって理解できると考えられた。等式 (9) の左辺に寄与する対象は1次元以下の部分スキーム $C \subset X$ のイデアル層 I_C であり、これは $D(X)$ の対象である。一方等式 (9) の右辺に寄与する対象は安定対 (F, s) であるが、これは2項複体 $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} F \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ によって $D(X)$ の対象とみなせる。そこで安定性条件 $\sigma_I, \sigma_P \in \text{Stab}(X)$ が存在して、数値類が $(1, 0, -\beta, -n)$ である σ_I -安定対象がイデアル層 I_C から成り、 σ_P -安定対象が安定対から定まる2項複体から成ると期待される。もしそうであるなら、 σ_I と σ_P の間の壁越え現象を記述することで予想 5.2 にアプローチできるのではと考えられた。しかしながら、前述した様に一般に $\text{Stab}(X) \neq \emptyset$ かどうかも未解決なので、上の様な σ_I, σ_P の構成

問題はより困難なものである。また、仮に σ_I と σ_P が構成されたとしても等式(9)を実際に導くには更なる議論が必要となる。

私は論文 [26]において、導来圏の極限安定性条件の概念を導入した。これは Bridgeland による安定性条件の公理を弱めたものであるが、ミラー対称性の文脈でも面白い意味を持つ。大雑把にいうと、これは図 1 における極大体積極限の形式的近傍の様なものである。そして、安定対から定まる 2 項複体はこの極限安定性条件に関する安定対象として実現できることを示した。更に論文 [27]において極限安定性条件を若干粗くした弱安定性条件の概念を導入し、DT/PT 対応を弱安定性条件における壁越えによって解釈できること、そして実際に Joyce による壁越え公式 [14] をこの場合に適用することで等式(9)の Euler 数版を証明した。ここで Euler 数版とは、モジュライ空間の Euler 数を取ることで定義される不変量に関する結果を意味する。つまり、等式(6)において χ_B を形式的に 1 とおいて定義した不変量に関する結果である。また同様のアイデアを用いて予想 5.1 (i) の Euler 数版も論文 [28] で証明した。Euler 数版ではない本来の予想を証明するには、導来圏の対象の局所変形空間に関する技術的な結果（これは当時 Behrend-Getzler によりアナウンスされていた）を認めれば、Joyce-Song [15] による Behrend 関数を含んだ壁越え公式を適用して論文 [27], [28] と同様の議論で予想 5.2, 予想 5.1 (i) をそれぞれ証明することが可能である。これらは後に Bridgeland [8] によって Behrend-Getzler に依存せずに証明された。

8. Bogomolov-Gieseker 型不等式予想と DT 不変量

導来圏の弱安定性条件を用いることで曲線の数え上げ理論に応用を与える事が可能になったが、更なる応用を与えるためには本来の Bridgeland 安定性条件を構成する必要がある。2011年に私は論文 [3]において Bayer, Macri らと共同で 3次元代数多様体上の安定性条件の候補を与えるデータを構築した。対応する t -構造の核は接続層の圏 $\text{Coh}(X)$ の 2重傾斜によって与えられる。我々が与えたデータが実際に Bridgeland 安定性条件の公理を満たすことは自明ではなく、ある種の 2項複体の 3次 Chern 数を評価する Bogomolov-Gieseker (以下, BG と略す) 型の不等式予想を証明する必要がある。元々の BG 不等式とは代数曲面上の安定ベクトル束の 2次の Chern 数を評価する不等式であり、古典的代数幾何における藤田予想の 2次元における証明など興味深い幾何的応用が得られていた。我々の提唱した不等式予想は BG 不等式の 3次元版であると言える。実際、我々の不等式予想から未解決問題である 3次元藤田予想がほぼ従うことが [1] によって示されている。我々の不等式予想は現在 Macri [19] によって \mathbb{P}^3 の場合, Schmidt [24] によって \mathbb{P}^4 内の 2次曲面の場合, Maciocia-Piyaratne [17], [18] によってピカル数が 1 の主偏曲 3次元 Abel 多様体の場合, そして Bayer-Macri-Stellari [2] によって A 型の 3次元 Calabi-Yau 多様体の場合に証明されている。

論文 [3]における BG 型不等式予想は未解決であるが、仮にこの予想が成立する 3次元 Calabi-Yau 多様体 X を考えると $\text{Stab}(X)$ が空ではないことが分かり、この空間を詳細に研究することが可能になる。特に $\sigma \in \text{Stab}(X)$ と $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$ に対して $\text{ch}(E) = v$ を満たす σ -半安定対象 $E \in D(X)$ を数える DT 型不変量 $\text{DT}_\sigma(v) \in \mathbb{Q}$ が定まり、壁越え公式を満たす写像

$$\text{DT}_*(v): \text{Stab}(X) \rightarrow \mathbb{Q} \quad (11)$$

が得られると予想される。実際にこの様な不変量の存在を示すには、半安定対象のモ

ジュライ理論を確立しなければならない。私はPiyaratneと共同で、論文 [3]において予想した不等式を用いて、必要となるモジュライ理論を論文 [23]において確立した。特に、A型の3次元Calabi-Yau多様体の場合に不変量(11)の存在を証明した。この不変量(11)の詳細な研究は今後の課題である。

参考文献

- [1] A. Bayer, A. Bertram, E. Macri, and Y. Toda. Bridgeland stability conditions on 3-folds II: An application to Fujita’s conjecture. *J. Algebraic Geom. (to appear)*. arXiv:1106.3430.
- [2] A. Bayer, E. Macri, and P. Stellari. The space of stability conditions on abelian threefolds, and on some Calabi-Yau threefolds. *preprint*. arXiv:1410.1585.
- [3] A. Bayer, E. Macri, and Y. Toda. Bridgeland stability conditions on 3-folds I: Bogomolov-Gieseker type inequalities. *J. Algebraic Geom.*, Vol. 23, pp. 117–163, 2014.
- [4] K. Behrend. Donaldson-Thomas invariants via microlocal geometry. *Ann. of Math*, Vol. 170, pp. 1307–1338, 2009.
- [5] K. Behrend and B. Fantechi. The intrinsic normal cone. *Invent. Math.*, Vol. 128, pp. 45–88, 1997.
- [6] T. Bridgeland. Flops and derived categories. *Invent. Math*, Vol. 147, pp. 613–632, 2002.
- [7] T. Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math*, Vol. 166, pp. 317–345, 2007.
- [8] T. Bridgeland. Hall algebras and curve-counting invariants. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 24, pp. 969–998, 2011.
- [9] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 14, pp. 535–554, 2001.
- [10] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, and L. Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory. *Nuclear Physics*, Vol. B359, pp. 21–74, 1991.
- [11] M. Douglas. Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability. *Proceedings of the 2002 ICM*, pp. 395–408, 2002.
- [12] R. Gopakumar and C. Vafa. M-theory and topological strings II. hep-th/9812127.
- [13] S. Hosono, M. Saito, and A. Takahashi. Relative Lefschetz actions and BPS state counting. *Internat. Math. Res. Notices*, Vol. 15, pp. 783–816, 2001.
- [14] D. Joyce. Configurations in abelian categories IV. Invariants and changing stability conditions. *Advances in Math*, Vol. 217, pp. 125–204, 2008.
- [15] D. Joyce and Y. Song. A theory of generalized Donaldson-Thomas invariants. *Mem. Amer. Math. Soc.*, Vol. 217, , 2012.
- [16] M. Kontsevich. *Homological algebra of mirror symmetry*, Vol. 1 of *Proceedings of ICM*. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [17] A. Maciocia and D. Piyaratne. Fourier-Mukai Transforms and Bridgeland Stability Conditions on Abelian Threefolds. *preprint*. arXiv:1304.3887.
- [18] A. Maciocia and D. Piyaratne. Fourier-Mukai Transforms and Bridgeland Stability Conditions on Abelian Threefolds II. *preprint*. arXiv:1310.0299.
- [19] E. Macri. A generalized Bogomolov-Gieseker inequality for the three-dimensional projective space. *Algebra Number Theory*, Vol. 8, pp. 173–190, 2014.
- [20] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande. Gromov-Witten theory and Donaldson-Thomas theory. I. *Compositio. Math*, Vol. 142, pp. 1263–1285, 2006.
- [21] D. Orlov. Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singu-

- larities. *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, Progr. Math.* , Vol. 270, pp. 503–531, 2009.
- [22] R. Pandharipande and R. P. Thomas. Curve counting via stable pairs in the derived category. *Invent. Math.* , Vol. 178, pp. 407–447, 2009.
- [23] D. Piyaratne and Y. Toda. Moduli of Bridgeland semistable objects on 3-folds and Donaldson-Thomas invariants. arXiv:1504.01177.
- [24] B. Schmidt. A generalized Bogomolov-Gieseker inequality for the smooth quadric threefold. *preprint*. arXiv:1309.4265.
- [25] R. P. Thomas. A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds and bundles on $K3$ -fibrations. *J. Differential. Geom.*, Vol. 54, pp. 367–438, 2000.
- [26] Y. Toda. Limit stable objects on Calabi-Yau 3-folds. *Duke Math. J.* , Vol. 149, pp. 157–208, 2009.
- [27] Y. Toda. Curve counting theories via stable objects I: DT/PT correspondence. *J. Amer. Math. Soc.* , Vol. 23, pp. 1119–1157, 2010.
- [28] Y. Toda. Generating functions of stable pair invariants via wall-crossings in derived categories. *Adv. Stud. Pure Math.* , Vol. 59, pp. 389–434, 2010. New developments in algebraic geometry, integrable systems and mirror symmetry (RIMS, Kyoto, 2008).

微分同相群とトポロジー

～ 特性類と不変量を中心として ～

森田 茂之*

2015年8月8日

概 要

微分同相群とトポロジーの関わりについて、ここ80年ほどの発展の一面を特性類と不変量の観点から振り返り、将来への展望を述べる。

具体的には、まずベクトルバンドルの特性類の理論と、Pontrjagin-Thom 構成と呼ばれる、トポロジーの基本的な指導原理についてまとめる。そして、これらの理論や原理を一般化することにより、多様体をファイバーとするファイバーバンドルの特性類について、現在までに得られて来たいろいろな結果を概観する。続いて、この流れと密接に関連しつつも、それぞれ独立な展開を見せて来た三つの流れを述べる。最後に、これらの流れの延長線上に浮かんで来た、いくつかの問題を挙げる。

1. はじめに

ちょうど10年前の2005年8月、高知大学で開催された第52回トポロジーシンポジウムで講演させていただいた。そのときのタイトルは

微分同相群とトポロジー ～いくつかの問題と展望～

であった。その初めの部分で、トポロジーの懸案の難問であった Kervaire 不変量の問題を取り上げた。この難問が、予想よりずっと早く2009年について Hill-Hopkins-Ravenel によって (ほとんど) 解決された ([16] 参照)。それをまず述べる。

定理 1.1 (Hill-Hopkins-Ravenel [15]) Kervaire 不変量 1 の枠付き多様体 (framed manifold) が存在する次元は、2, 6, 14, 30, 62, 126 に限る。

上記の次元のうち、初めの5個についてはすでに存在が知られており、126次元の場合だけが問題として残った。これについてはいくつかの (ときに相反する) 予想あるいは期待が述べられている (Atiyah, Snaith 等)。

本題に戻って、今回の話の主テーマは、多様体および多様体の族の分類の理論の発展を振り返ることである。基本となるのは、Euler 類および Pontrjagin 類を初めとするベクトルバンドルの特性類と、Pontrjagin-Thom 構成と呼ばれる指導原理である。後者は、幾何的な問題とホモトピー論の問題を結びつける強力な手法である。

そして時間が許す範囲内で、上記と密接に関連する三つの事項：(i) 曲面バンドルの特殊性、(ii) 葉層構造の特性類の理論、(iii) Kontsevich の形式的シンプレクティック幾何、の発展についても、微分同相群と直接に関連する部分にしばって概観したい。最後に筆者が重要と考えるいくつかの課題を述べる。

この話では、多様体 M は断らない限り C^∞ 級の微分可能多様体とし、その C^∞ 微分同相群を $\text{Diff } M$ と書く。 M が向き付け可能で向き付けられている場合には、向きを

* e-mail: morita@ms.u-tokyo.ac.jp

保つ微分同相群を $\text{Diff}_+ M$ と書く. M が実解析的な多様体の場合は, その実解析的微分同相群を $\text{Diff}^\omega M$ と書く. これらの微分同相群には C^∞ 位相を入れるが, 離散位相を入れた場合には $\text{Diff}^\delta M, \text{Diff}^{\omega, \delta} M$ などと書く.

今回の話の詳しい内容については, 筆者が中央大学でさせていただいた講義の記録[27]を参照されたい. また, 微分同相群に関するサーヴェイについては, Sakasai[32] および Hatcher [14] も見てほしい. 筆者の能力・興味および時間・スペースの関係から, 取り上げた事項には偏りがあるものと思う. また, 引用文献も必要最小限にした. これらの点についてはご容赦いただければ幸いである.

2. Gauss 写像から Thom 同境界理論への道

Gauss 曲面論における Gauss 写像を思い出すことから始めよう. \mathbb{R}^3 の中に向き付けられた曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ が与えられたとする. このとき, Gauss 写像とは Σ から単位球面 S^2 への写像

$$\gamma^\perp : \Sigma \rightarrow S^2$$

でつぎのように定義された. 各点 $p \in \Sigma$ において接平面 $T_p(\Sigma)$ に正の向きに立てた長さ1の法線ベクトルを \mathbf{n}_p とし, その始点を原点に平行移動して得られるベクトルを \mathbf{n}'_p とする. このとき

$$\gamma^\perp(p) = \mathbf{n}'_p \text{ の終点 } \in S^2$$

とおくのである. これと等価の写像

$$\gamma : \Sigma \rightarrow S^2 \cong \{\mathbb{R}^3 \text{ の向き付けられた2次元部分空間}\}$$

$$\gamma(p) = p \text{ における接平面 } T_p(\Sigma) \text{ を原点に平行移動したもの}$$

を現代流に言えば, S^2 は Grassmann 多様体の一例であり, γ は Σ の接バンドルの分類写像ということになる. 実際この考えは, すぐにつぎのように一般化できる. M を n 次元の向き付けられた C^∞ 多様体とし, $T(M)$ をその接バンドルとする, Whitney 埋め込み定理により, 十分大きな k に対して M は \mathbb{R}^{n+k} の部分多様体として実現できる. 一方

$$\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{\mathbb{R}^{n+k} \text{ の向き付けられた } n \text{ 次元部分空間}\}$$

とおけば, これは Grassmann 多様体と呼ばれる閉多様体であり, その上には n 次元の tautological bundle と呼ばれる向き付けられた n 次元ベクトルバンドル ξ_n^n が定義されている. このとき

$$\gamma : M \rightarrow \tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

$$\gamma^\perp : M \rightarrow \tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$$

を, 各点 $p \in M$ に対し

$$\gamma(p) = \text{接空間 } T_p(M) \text{ を原点に平行移動したもの}$$

$$\gamma^\perp(p) = \gamma(p) \text{ の直交補空間}$$

と定義すれば

$$\gamma^*(\xi_n^n) \cong T(M), \quad (\gamma^\perp)^*(\xi_k^k) \cong \nu(M, \mathbb{R}^{n+k}) \text{ (法バンドル)}$$

となる. すなわち γ, γ^\perp はそれぞれ M の接バンドルおよび (\mathbb{R}^{n+k} 中の) 法バンドルの分類写像と呼ばれるものになる. 一方, ξ_k^n は $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 上の n 次元ベクトルバンドルであるが, $(n+k)$ 次元の自明なベクトルバンドルの部分バンドルとして定義される. その直交補バンドルを $(\xi_k^n)^\perp$ と書けば, $\gamma^*((\xi_k^n)^\perp) \cong \nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ となるので, γ は法バンドルの分類写像の役割も果たしている. このように, tautological バンドルの直交補バンドルを用いることにより, 法バンドルの分類写像として γ^\perp の代わりに γ を使うことができるという事実は, 当然のことではあるが, 後に紹介する重要な仕事 Madsen-Tillmann[23], Madsen-Weiss[24] において基本的な役割を果たす.

2.1. ベクトルバンドルの特性類

向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体 M の接バンドル $T(M)$ は, M 上の向き付けられた n 次元実ベクトルバンドルである, すなわち

$$GL_+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); \det A > 0\}$$

を構造群とするファイバーバンドルである. このようなバンドルの特性類は1940年代までには完全に知られていた. $GL(n, \mathbb{C})$ や $GL(n, \mathbb{R})$ についても同様であるが, ここでは $GL_+(n, \mathbb{R})$ の場合だけを思い出しておこう.

群の系列

$$GL_+(1, \mathbb{R}) \rightarrow GL_+(2, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots \rightarrow GL_+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots$$

は, 分類空間の系列

$$BGL_+(1, \mathbb{R}) \rightarrow BGL_+(2, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots \rightarrow BGL_+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots$$

を誘導し, その \mathbb{Q} 係数および $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジーは (Euler 類 e を除き) 強い意味で安定する:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} H^*(BGL_+(n, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) &= H^*(BGL_+(\infty, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots] \\ H^*(BGL_+(2n, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) &\cong \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{n-1}, e] \quad (\text{Pontrjagin 類, Euler 類}) \\ H^*(BGL_+(2n+1, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) &\cong \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n] \quad (\text{Pontrjagin 類}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} H^*(BGL_+(n, \mathbb{R}); \mathbb{Z}/2) &= H^*(BGL_+(\infty, \mathbb{R}); \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[w_2, w_3, \dots] \\ H^*(BGL_+(n, \mathbb{R}); \mathbb{Z}/2) &\cong \mathbb{Z}/2[w_2, \dots, w_n] \quad (\text{Stiefel-Whitney 類}) \end{aligned}$$

包含写像 $SO(n) \subset GL_+(n)$ がホモトピー同値写像であることと, 良く知られたファイバーバンドル

$$SO(n) \rightarrow SO(n+1) \rightarrow S^n$$

から, ファイブレーション

$$S^n \rightarrow BGL_+(n, \mathbb{R}) \rightarrow BGL_+(n+1, \mathbb{R})$$

が存在することが分かる.

さらに、上記の分類空間はすべて、閉多様体である Grassmann 多様体のある系列の和として具体的に構成することができる。すなわち

$$\text{BGL}_+(n, \mathbb{R}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{\mathbb{R}^{n+k} \text{ の向き付けられた } n \text{ 次元線形部分空間} \} \right)$$

そして、各 $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 上には n 次元の tautological バンドル ξ_k^n が定義されるが、包含写像 $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k+1})$ において、 ξ_{k+1}^n の $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ への制限は ξ_k^n となる。実際、これらは $\text{BGL}_+(n, \mathbb{R})$ 上の n 次元の tautological バンドル ξ_{∞}^n の制限である。

そして、上記の特性類へのアプローチとしては、Grassmann 多様体の Schubert 胞体による胞体分割を用いる直接計算、上記のファイブレーションを用いた n に関する帰納法、微分幾何の概念である接続と曲率を用いるもの (Chern-Weil 理論)、障害の理論 (切断の存在への障害類) を用いるもの、等たくさんものがある。これにより、ベクトルバンドルの 1 次特性類の理論は完成された理論となっている。

2.2. Pontrjagin-Thom 構成

「はじめに」の節ですでに述べたように、Pontrjagin-Thom 構成を一言でいえば、多様体に関する問題とホモトピーの問題を関連させる構成法のことである。場合によって、ホモトピーの問題を多様体の問題に関連させて調べることもあり、逆に多様体に関する幾何的な問題をホモトピーの問題に帰着させてそれを解く場合もある。Pontrjagin の 1930 年代に始まる仕事 (前者に属する) と、1950 年代の Thom の有名な同境理論の仕事 (後者に属する) から、Pontrjagin-Thom 構成と呼ばれるようになった。

基礎となる操作は、 \mathbb{R}^k の 1 点コンパクト化と k 次元球面 S^k との同一視：

$$\mathbb{R}^k \cup \{\infty\} = S^k$$

である。実際には、これとホモトピー的に等価となるつぎのような具体的操作を考える。たとえば \mathbb{R}^k の中の単位円板を D^k とし、その境界 $\partial D^k = S^{k-1}$ および外側の部分を 1 点につぶした空間を、 S^k と同一視するのである。すなわち

$$\mathbb{R}^k / (\mathbb{R}^k \setminus \text{Int } D^k) = D^k / \partial D^k = S^k$$

という同一視である。簡単にいえば、Pontrjagin は上記の構成を多様体にパラメータ付けられた自明な族に対して行い、Thom はねじれた族に対して行ったのである。

2.2.1. Pontrjagin の仕事

多様体 M に対し、その接バンドル $T(M)$ と k 次元自明バンドル $\varepsilon^k = M \times \mathbb{R}^k$ との Whitney 和 $T(M) \oplus \varepsilon^k$ (k 十分大) を M の安定接バンドルという。安定接バンドルの自明化が与えられた多様体を安定枠付き多様体 (stably framed manifold) という。コンパクトな安定枠付き多様体の境界は、自然に安定枠付き多様体の構造をもつ。これにより、安定枠付き閉多様体の間に、安定枠付き同境という同値関係を入れることができる。 n 次元安定枠付き閉多様体全体の、この同値関係による商集合を Ω_n^{fr} と書けば、これは多様体の離散和によりアーベル群となる。Whitney 埋め込み定理により、この群は十分大きな次元の球面 S^{n+k} (本質的に同じことであるが \mathbb{R}^{n+k}) 中の部分多様体の幾何学としてつぎのようにして“実現”することができる。その際、安定接バンドル

の役割は安定法バンドルが果たすことになる（両者の和には自然な自明化があることに注意）。

実際の展開は逆で、Pontrjagin は今から述べることを先に考え、球面のホモトピー群の問題を上記の枠付き多様体の同境による分類問題に帰着させたのである。この展開を Hopkins[16] に従って簡単に記す。ホモトピー群

$$\pi_{n+k} S^k = [S^{n+k}, S^k]$$

を調べるために、微分可能な写像 $f: S^{n+k} \rightarrow S^k$ を考える。このとき f の正則値 $p \in S^k$ を任意に取れば、 $f^{-1}(p) \subset S^{n+k}$ は余次元 k の閉部分多様体であり、その法バンドルには、 $p \in S^k$ の法バンドルすなわち $T_p(S^k)$ の自明化を指定することにより、自明化が与えられる。こうして $f^{-1}(p)$ は normally framed manifold となるが、正則値を替えてもその枠付き同境類はかわらないことが分かる。逆に S^{n+k} の中に normally framed manifold M が与えられたとすると、法バンドルの自明化を使ってその管状近傍は $M \times D^k$ と同一視できることになる。そこで写像 $p_M: S^{n+k} \rightarrow S^k$ を、管状近傍の上では第2成分への射影 $M \times D^k \rightarrow D^k$ と $D^k \rightarrow D^k/\partial D^k = S^k$ の合成写像とし、管状近傍の補集合の点はすべて ∂D^k の行き先 $\infty \in S^k$ に移すことで定義することができる。これが Pontrjagin 構成である。互いに枠付き同境な枠付き閉多様体の Pontrjagin 構成はホモトピックであることが分かる。

こうして結局、同型

$$\Omega_n^{\text{fr}} \cong \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k} S^k$$

が得られる。 $n = 0$ のとき $\pi_k S^k \cong \mathbb{Z}$ はすでに Brouwer, Hopf により知られていた。Pontrjagin は $n = 1, 2$ のときを考えた。 $n = 1$ のときは埋め込み $S^1 \subset S^{k+1}$ の法バンドルの自明化が $\pi_1 \text{GL}_+(k, \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2$ ($k > 2$) であることを使って $\Omega_1^{\text{fr}} \cong \mathbb{Z}/2$ であることを示した。つぎに $n = 2$ の場合に進み、2次元多様体の分類から埋め込まれた種数 g の閉曲面 $\Sigma_g \subset S^{k+2}$ の法バンドルの自明化を調べればよいことになる。 $g = 0$ の場合は、 $\pi_2 \text{GL}_+(k, \mathbb{R}) = 0$ から法バンドルの自明化は S^2 をバウンドする D^3 に拡張し、この元は 0 を表すことが分かる。 $g > 1$ の場合は Σ_g 上の閉曲線上に法バンドルの自明化を制限し、そこに $n = 1$ の場合を適用することにより、写像

$$q: H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

が定義される。初め Pontrjagin はこの写像が線形であると判断した。そして、その核を用いることにより、(今にいう) framed surgery をつぎつぎと適用することにより $g = 0$ まで到達できることから、 $\Omega_2^{\text{fr}} = 0$ と結論した。後にこれは誤りで、上記の q は quadratic すなわち

$$q(u+v) = q(u) + q(v) + u \cdot v \quad (u, v \in H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}/2))$$

であることに気が付き、 $\Omega_2^{\text{fr}} \cong \mathbb{Z}/2$ と修正した。Kervaire はさらにこの考えを進めて、彼の名を冠して呼ばれるようになる準同型写像

$$\text{Kervaire 不変量} : \Omega_{4n+2}^{\text{fr}} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

を定義した。そして、この写像がどの次元 $4n+2$ に対して全射となるか？が上記の難問となったのである。1969年の Browder の仕事により、問題はブーメランのように再びホモトピー論の側に投げ返された。そして、40年後に極めて深く複雑な理論を用いることにより、上述のように解決されたのである。

2.2.2. Thom の仕事

Thom は現在でもトポロジーの最も重要な概念といえるコボルディズム (同境) 理論の創始者である. 念のため, 同境の定義を思い出しておく. 二つの向き付けられた n 次元閉多様体 M, N は, あるコンパクトで向き付けられた多様体 W が存在して

$$\partial W = M \amalg -N \quad (-N \text{ は } N \text{ の向きを逆にしたもの})$$

となるとき, 互いに向き付け同境であるという. これは, n 次元閉多様体の全体に同値関係を誘導する. この同値関係による商集合 Ω_n には多様体の離散和の誘導する演算によりアーベル群の構造が入る. Thom は Pontrjagin の考えを大きく一般化した Thom 複体と Thom 構成の考えにより, つぎのようにして Ω_n の決定問題をホモトピーの問題に帰着させた.

Whitney 埋め込み定理により, Ω_n の決定問題は十分大きな k について \mathbb{R}^{n+k} の中の向き付けられた n 次元閉部分多様体のある分類問題となる. $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ をそのような部分多様体とする. M の法バンドル $\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ は k 次元の向き付けられたベクトルバンドルである. その分類写像を前述のように $\gamma^+ : M \rightarrow \tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$ とすれば, それはバンドル写像 $\tilde{\gamma}^+ : \nu(M, \mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \xi_n^k$ によってカバーされる. ただし, ξ_n^k は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$ 上の tautological なベクトルバンドルである. ここでもし $\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ が自明ならば, 自明化を与えることによりバンドルを束ねて Pontrjagin 構成を行えば $\pi_{n+k} S^k$ の元が得られる. しかし, 一般に $\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ はもちろん自明とは限らない. そこで M 方向に束ねることはあきらめて, 無限遠だけをつぶすことを考える. そこで登場するのが Thom 複体である. 一般の設定で, ξ を位相空間 X 上のベクトルバンドルとし, (適当な計量を入れて) 随伴する円板バンドルおよび球面バンドルをそれぞれ $D(\xi), S(\xi)$ とする. このとき ξ の Thom 複体 $T(\xi)$ を

$$T(\xi) = \xi \text{ の全空間} / (\text{Int } D(\xi) \text{ の補集合}) = D(\xi) / S(\xi)$$

と定義する.

前の設定に戻って, M の管状近傍 $N(M)$ と $\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})$ の円板バンドルを同一視し, バンドル写像 $\tilde{\gamma}^+ : \nu(M, \mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \xi_n^k$ が誘導する Thom 複体間の連続写像を $T(\tilde{\gamma}^+) : T(\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})) \rightarrow T(\xi_n^k)$ とすれば, 写像

$$\begin{aligned} S^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k} \text{ の 1 点コンパクト化} &\rightarrow \\ \mathbb{R}^{n+k} / (\text{Int } N(M) \text{ の補集合}) = T(\nu(M, \mathbb{R}^{n+k})) &\rightarrow T(\xi_n^k) \end{aligned}$$

が得られる. ξ_n^k は $\text{BGL}(k, \mathbb{R})$ 上の tautological バンドル ξ_∞^k の $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$ への制限であるから, 結局写像

$$t_k : S^{n+k} \rightarrow T(\xi_n^k) \subset T(\xi_\infty^k) = \text{MSO}(k) \quad (\text{Thom の記号})$$

が得られる. つぎに $k \mapsto k+1$ として得られる写像 $t_{k+1} : S^{n+k+1} \rightarrow T(\xi_\infty^{k+1}) = \text{MSO}(k+1)$ は, 包含写像 $\text{BGL}(k, \mathbb{R}) \subset \text{BGL}(k+1, \mathbb{R})$ による ξ_∞^{k+1} の $\text{BGL}(k, \mathbb{R})$ への制限が $\xi_\infty^k \oplus \varepsilon^1$ となることから

$$S^{n+k+1} = \Sigma S^{n+k} \xrightarrow{\Sigma t_k} \Sigma \text{MSO}(k) \rightarrow \text{MSO}(k+1) \quad (\Sigma \text{ は懸垂を表す})$$

に一致することが分かる. $\text{MSO} = \{\text{MSO}(k)\}_k$ を Thom スペクトラムという.

定理 2.1 (Thom [33]) 自然な同型

$$\Omega_n \cong \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k} \text{MSO}(k) = \pi_n \text{MSO}$$

が存在する. さらに, つぎが成立する.

$$\Omega_* \otimes \mathbb{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^4, \dots]$$

この定理の証明には, Thom 複体と Thom 構成の考えに加えて, Thom 横断性定理および Thom 同型という重要な考えが使われる. そしてそれまでにすでに知られていた $\text{BGL}_+(k, \mathbb{R})$ のコホモロジーと十分に発達していたホモトピー論を使って, 帰着されたホモトピーの問題を解いたのである.

この定理をきっかけとして, Hirzebruch の符号数定理, Milnor の異種球面の発見, Kervaire-Milnor のホモトピー球面の理論 (それは $\text{Diff}_+ S^n$ に関する) を経て微分トポロジーの黄金時代を迎えた.

3. 多様体バンドルの特性類

3.1. 曲面バンドルの特性類 ~MMM 類~

曲面バンドルの特性類の定義を簡単に思い出しておく ([29][26][25] 参照). 種数 g の向き付けられた閉曲面 Σ_g をファイバーとする向き付けられた微分可能なファイバーバンドル $\pi: E \rightarrow X$ を, 単に曲面バンドルと呼ぶことにする. 構造群は $\text{Diff}_+ \Sigma_g$ である. π のファイバーに沿う接バンドルを $T\pi$ と書けば, これは E 上の向き付けられた2次元ベクトルバンドルである. したがって, その Euler 類 $e \in H^2(E; \mathbb{Z})$ が定義される. e のベキ $e^{i+1} \in H^{2i+2}(E; \mathbb{Z})$ に Gysin 準同型写像 $\pi_*: H^{2i+2}(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ を施して得られるコホモロジー類

$$e_i = \pi_*(e^{i+1}) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$$

を第 i MMM 類と呼ぶ. これらのコホモロジー類は構成からバンドル写像に関して自然である. したがって, 準同型写像

$$\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots] \rightarrow H^*(\text{BDiff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Z})$$

が得られる. 以上は位相幾何的な定義であるが, 一方 Mumford[29] は代数幾何の枠組みの中でモジュライ空間 \mathbf{M}_g の Chow 代数 $\mathbf{A}^*(\mathbf{M}_g)$ を定義し, その元として特性類 $\kappa_i \in \mathbf{A}^i(\mathbf{M}_g)$ を定義した. このとき, 自然な全射 $\mathbf{A}^i(\mathbf{M}_g) \rightarrow H^{2i}(\text{BDiff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q})$ が存在して $\kappa_i \mapsto (-1)^{i+1} e_i$ となる.

3.2. Harer 安定性と安定コホモロジー

定理 3.1 (Harer [13]) $\text{BDiff}_+ \Sigma_g$ のコホモロジー群は種数 g に関して安定する. すなわち, 任意の k に対し k 次コホモロジー群 $H^k(\text{BDiff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Z})$ は g が十分大きいとき互いに同型となる. とくに, 有理数係数の安定コホモロジー群

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(\text{BDiff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q})$$

が存在する.

上記の安定コホモロジー群は, Madsen と Weiss によって以下に述べる形で完全に決定された.

証明は Madsen-Tillmann の論文 [23] で提出された予想を肯定的に証明することによりなされた. そこでは, 族の Pontrjagin-Thom 構成が本質的な役割を果たす. 詳しくは, 原論文および, 広い観点からの別証を与えた [9], そして二つの解説論文 Tillmann [35], Wahl [37] とそれらの引用文献を参照されたい. ここでは, 族の Pontrjagin-Thom 構成についてそのアイデアを簡単に記す. 曲面バンドル

$$\pi : E \rightarrow X$$

が与えられたとしよう. 全空間 E を十分大きな k に対して \mathbb{R}^{2+k} に埋め込む. このとき各点 $x \in X$ に対して, x 上のファイバー $E_x = \pi^{-1}(x) \cong \Sigma_g$ の \mathbb{R}^{2+k} への埋め込みが得られる. E_x の法バンドル $\nu(E_x, \mathbb{R}^{2+k})$ の分類写像として, 接バンドルの分類写像 $\gamma : E_x \rightarrow \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+k})$ をとり, tautological バンドル ξ_k^2 の直交補バンドル $(\xi_k^2)^\perp$ の引き戻しとして $\nu(E_x, \mathbb{R}^{2+k})$ を捉える, その Pontrjagin-Thom 構成を考えれば, 写像

$$S^{2+k} \rightarrow T((\xi_k^2)^\perp)$$

が得られる. この構成は底空間 X 上の各点で行うことができる. それらを全部集めれば, 写像

$$\alpha_\pi : X \rightarrow \Omega_0^{2+k} T((\xi_k^2)^\perp)$$

が得られる. この構成で, $k \mapsto k+1$ として得られる写像 $X \rightarrow \Omega_0^{2+k+1} T((\xi_{k+1}^2)^\perp)$ は, 包含写像 $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+k}) \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+k+1})$ による $(\xi_{k+1}^2)^\perp$ の $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2+k})$ への制限が $(\xi_k^2)^\perp \oplus \varepsilon^1$ となることから

$$X \rightarrow \Omega_0^{2+k} T((\xi_k^2)^\perp) \rightarrow \Omega_0^{2+k} (\Omega T((\xi_{k+1}^2)^\perp)) = \Omega_0^{2+k+1} T((\xi_{k+1}^2)^\perp)$$

に一致することが分かる. $\text{MTSO}(2) = \{T((\xi_k^2)^\perp)\}_k$ を Madsen-Tillmann スペクトラムという. 最後に, 上記の構成を分類空間上の普遍 Σ_g バンドルに対して施すことにより, つぎの写像を得る.

$$\alpha_{\Sigma_g} : \text{BDiff}_+ \Sigma_g \rightarrow \Omega_0^\infty \text{MTSO}(2)$$

定理 3.2 (Madsen-Weiss [24]) 族の Pontrjagin-Thom 構成が誘導する写像

$$\alpha_{\Sigma_\infty} : \text{BDiff}_+ \Sigma_\infty \rightarrow \Omega_0^\infty \text{MTSO}(2)$$

は整数係数のホモロジー群の同型を誘導する. とくに

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(\text{BDiff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q}) \cong H^*(\Omega_0^\infty \text{MTSO}(2); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots]$$

3.3. tautological algebra と非安定コホモロジー

MMM 類 e_i 達で生成される $H^*(\text{BDiff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q})$ の部分代数を $\mathcal{R}^*(\text{Diff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q})$ と書くことにする. 一方, κ_i 達で生成される $\mathbf{A}^*(\mathbf{M}_g)$ の部分代数を $\mathcal{R}^*(\mathbf{M}_g)$ と書き, これをモジュライ空間 \mathbf{M}_g の tautological 代数という. 自然な全射 $\mathcal{R}^*(\mathbf{M}_g) \rightarrow \mathcal{R}^*(\text{Diff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q})$ が存在する. $\mathcal{R}^*(\text{Diff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q})$ は多項式代数の商であるから, その次元は次数に関して

高々多項式の増大度である。ところが、 M_g の orbifold としての Euler-Poincaré 標数の決定 (Harer-Zagier, Penner) および、通常の Euler-Poincaré 標数との差の評価 (Harer-Zagier) から、 $H^*(\text{BDiff}_+\Sigma_g; \mathbb{Q})$ の次元は次数に関して指数関数以上の増大度を持つことが分かっている。したがって、MMM 類で表すことのできないコホモロジー類 (非安定コホモロジー類という) が大量に存在する。しかし、現在までに知られている明示的に構成された非安定コホモロジー類は、極めて少ない (Looijenga, Tommasi)。

3.4. 曲面から高次元多様体へ

3.4.1. 特性類の定義～一般化された MMM 類～

曲面バンドルの MMM 類の定義は、つぎのようにして一般の多様体 M をファイバーとするファイバーバンドルの特性類の定義に自然に一般化される ([6][7][17] 等参照)。 M を向き付けられた n 次元 C^∞ 閉多様体とする。

$$\pi : E \rightarrow X$$

を向き付けられた M バンドルとし、 $T\pi$ をファイバーに沿う接バンドルとする。すなわち

$$T\pi = \{v \in T(E); \pi_*(v) = 0\}$$

である。このとき、 $T\pi$ は E 上の向き付けられた n 次元の実ベクトルバンドルである。したがって、その分類写像

$$f_\pi : E \rightarrow \text{BGL}_+(n, \mathbb{R})$$

が定義される。このとき、任意の元 $c \in H^k(\text{BGL}_+(n, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) (k \geq n)$ に対し $f_\pi^*(c) \in H^k(E; \mathbb{Q})$ は c に対応する $T\pi$ の特性類である。この特性類に Gysin 準同型写像

$$\pi_* : H^k(E; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{k-n}(X; \mathbb{Q})$$

を施して得られる元

$$\kappa_c := \pi_*(f_\pi^*(c)) \in H^{k-n}(X; \mathbb{Q})$$

を考える。この構成は M バンドルのバンドル写像に関して明らかに自然である。したがって

$$\kappa_c \in H^{k-n}(\text{BDiff}_+M; \mathbb{Q})$$

と考えることができる。すなわち κ_c は M バンドルの特性類である。これを c に対応する一般化された MMM 類という。

これらを全部集めれば、線形写像

$$\mathcal{R} : H^{*\geq n}(\text{BGL}_+(n, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) \rightarrow H^{*-n}(\text{BDiff}_+M; \mathbb{Q})$$

得られる。ここで $* = n$ の場合は、 M の特性数 (Pontrjagin 数と Euler 数) の全体が得られていることに注意したい。そこで

$$\mathcal{R}^*(\text{Diff}_+M; \mathbb{Q}) = \text{Im } \mathcal{R} \text{ が生成する } H^*(\text{BDiff}_+M; \mathbb{Q}) \text{ の部分代数}$$

とおく。 $M = \Sigma_g$ の場合は、すでに定義した $\mathcal{R}^*(\text{Diff}_+\Sigma_g; \mathbb{Q})$ と一致することがすぐに分かる。

注意 3.3 $M = S^1$ の場合, 任意の向き付けられた S^1 バンドルのファイバーに沿う接バンドルは自明であるから, $\mathcal{R}^*(\text{Diff}_+ S^1)$ は自明となる. 一方, 良く知られているように $S^1 \simeq \text{Diff}_+ S^1$ であるから

$$\text{BDiff}_+ S^1 \simeq \text{BS}^1 = \mathbb{C}P^\infty$$

となる, したがって $H^*(\text{BDiff}_+ S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e]$ となる.

3.4.2. Harer 安定性の一般化と族の Pontrjagin-Thom 構成

M を向き付けられた n 次元の閉多様体とする. このとき, 曲面バンドルの場合を一般化することにより, 写像

$$\alpha_M : \text{BDiff}_+ M \rightarrow \Omega_0^\infty \text{MTSO}(n)$$

が定義される. ここで $\text{MTSO}(n)$ は n 次元の場合の Madsen-Tillmann スペクトラムである.

$W_g = g(S^n \times S^n)$ とし $\text{Diff}(W_g, D^{2n}), \text{Diff } W_\infty = \lim_{g \rightarrow \infty} \text{Diff}(W_g, D^{2n})$ を考える.

定理 3.4 (Berglund-Madsen [2]) 任意の $n > 2$ に対して, $\text{BDiff}(W_g, D^{2n})$ の有理数係数コホモロジー群は g に関して安定する.

定理 3.5 (Galatius-Randall-Williams[10]) 任意の $n > 2$ に対して, 族の Pontrjagin-Thom 構成が誘導する写像

$$\alpha_{W_\infty} : \text{BDiff } W_\infty \rightarrow \Omega_0^\infty \text{MTSO}(2n)$$

は整数係数のホモロジー群の同型を誘導する.

上記の二つの定理については, さらなる一般化・精密化が得られつつある.

4. 関連するいくつかの流れ

4.1. 曲面の特殊性

上記のように, 曲面バンドルの特性類の理論は, 一般の次元の多様体をファイバーとするファイバーバンドルの特性類の理論に一般化される部分も多い. しかし, 曲面の場合にのみ成り立つ事項もまた多く, この場合は極めて特殊な場合とも言えるのである. いくつか代表的な事項を挙げるとつぎのようになる.

(i) $\text{Diff}_0 \Sigma_g$ は可縮 ($g \geq 2$) $\Rightarrow \text{BDiff}_+ \Sigma_g = K(\mathcal{M}_g, 1)$ (Earle-Eells [5])

(ii) $\mathcal{M}_g \cong \text{Out}_+ \pi_1 \Sigma_g$ (Dehn-Nielsen)

(iii) $\mathcal{M}_g (g \geq 2)$ は Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_g \cong \mathbb{R}^{6g-6}$ に properly discontinuous に作用する

ここで $\text{Diff}_0 \Sigma_g$ は $\text{Diff}_+ \Sigma_g$ の単位元の連結成分を表し $\mathcal{M}_g = \text{Diff}_+ \Sigma_g / \text{Diff}_0 \Sigma_g$ は Σ_g の写像類群と呼ばれる群である. また商空間 $\mathbf{M}_g = \mathcal{T}_g / \mathcal{M}_g$ はすでに記したが, 種数 g のリーマン面のモジュライ空間と呼ばれる重要な空間である. これらの結果により, つぎのような有理コホモロジーの自然な同型が存在する.

$$H^*(\text{BDiff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathbf{M}_g; \mathbb{Q}) \quad (g \geq 2)$$

4.1.1. Johnson に始まる流れ

曲面の写像類群 \mathcal{M}_g はホモロジー群 $H := H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ に作用する. この作用は交叉数の誘導する H 上の歪対称双一次形式 $\mu : H \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}$ を保ち, 良く知られた行列表現 $\rho_0 : \mathcal{M}_g \rightarrow \text{Aut}(H, \mu) \cong \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ が得られる. この表現は全射であることが古典的に知られており, したがって完全系列

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \xrightarrow{\rho_0} \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

が得られる. こうして定義される群 \mathcal{I}_g を Torelli 群という. Johnson は 1970 年代後半に Torelli 群の研究を始め, 1980 年代半ばまでの比較的短い期間にいくつかの基本的な定理を得た. Torelli 群のアーベル化の決定および $g \geq 3$ のときの有限生成性等である ([18] 参照). これと並んで彼が提出した重要な概念が Johnson filtration である. これは, Dehn-Nielsen の定理を念頭に, \mathcal{M}_g の $\pi_1 \Sigma_g$ の降中心列 (Malcev 完備化) への作用の誘導する filtration である. Johnson の仕事は多くの研究者によって引き継がれて発展し, 現在もその流れが続いている. 技術的な理由で境界を一つ持つ種数 g のコンパクト曲面 Σ_g^1 の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の場合を書けば, Johnson filtration $\{\mathcal{M}_{g,1}(k); k = 0, 1, \dots\}$ に随伴する次数付き加群から, シンプレクティック微分リー代数と呼ばれるリー代数 $\mathfrak{h}_{g,1}$ への準同型写像

$$\tau : \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{g,1}(k) / \mathcal{M}_{g,1}(k+1) \rightarrow \mathfrak{h}_{g,1}$$

が定義されており, この研究が中心テーマの一つである. ここで $\mathfrak{h}_{g,1}$ は, 曲面のホモロジー $H_{\mathbb{Q}} = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q})$ の生成する自由リー代数のシンプレクティック微分全体のなすリー代数として定義され, また τ は現在 Johnson 準同型と呼ばれている. $g \rightarrow \infty$ とした極限 \mathfrak{h}_{∞} は, 後述する Kontsevich の理論にも現れ, 写像類群のみならず, 自由群の自己同型群の研究との深い関連が生じてきた. また写像類群を大きく拡張するホモロジーシリンダーの理論 (Habiro, Goussarov, Garoufalidis, Levine, Sakasai,...) でも, 重要な役割を果たすことが分かっている. さらに, ここでは詳しいことは述べられないが, 数論とも深い関連があることも示されており, このリー代数の重要性はますます増大している.

この項の最後に Torelli 群と微分同相群のコホモロジーとの直接の関連に関する二つの仕事: Torelli 群のコホモロジーの無限生成性を示した Akita[1] と, $\mathcal{R}^*(\text{Diff}_+ \Sigma_g; \mathbb{Q})$ と Johnson 準同型との関係を明らかにした Kawazumi-M.[19] を挙げておきたい.

4.1.2. 複素解析, 代数幾何, 数論との関わり

すでに述べた曲面の特殊性により, 曲面バンドルの理論は数学の多くの分野と深い関わりを持っている. とくに Teichmüller 理論, 代数曲線のモジュライ空間の理論, そして arithmetic 写像類群の理論等を通じて, 微分幾何, 複素解析, 代数幾何, 数論との関わりが深い. また, Witten の仕事, Witten-Kontsevich の定理以降, 数理論理との関連も生まれた. しかし, これらについて詳しく述べることは筆者の能力を遥かに超えている.

ここでは, 一つだけ代数幾何との関連を挙げたい. すでに定義を述べたモジュライ空間の tautological 代数 $\mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$ の研究は, Faber 予想と呼ばれる予想の提出 (1993 年) 以降, 活発な状況が続いている (Faber[8] 参照). この研究は一般の閉多様体 M に

関する $\mathcal{R}^*(\text{Diff}_+M; \mathbb{Q})$ の研究の基本的なモデルとなることから、トポロジーにおいても重要と思われる。

4.2. 葉層構造の特性類

本稿の主テーマに密接に関連する2番目の流れは、平坦バンドルの特性類および葉層構造の特性類の理論である。1970年代初頭の Godbillon-Vey 類と呼ばれる特性類の発見と、その直後の Thurston の有名な仕事（この特性類の連続変化）を契機として、葉層構造の特性類の理論が比較的短い期間に飛躍的な発展をした（Bott[3]等参照）。この展開と前後して現れた Gelfand-Fuks 理論 [11] および Chern-Simons 理論は、葉層構造の特性類の理論と密接な関係がある。もう一つこの理論で中心的な役割を果たして来たのは、Haefliger の仕事 [12] である。

4.2.1. Haefliger 分類空間

Haefliger は葉層構造の研究に代数的トポロジーの手法を持ち込んだ。 \mathbb{R}^n の向きを保つ局所微分同相写像の芽 (germ) 全体のつくる位相重群 (topological groupoid) (Γ_n^+ と記される) を考え、その分類空間 $B\Gamma_n^+$ を構成した。この空間は Haefliger 分類空間と呼ばれる。そして、多様体 M 上の余次元 n の横断的に向き付けられた葉層構造を、 Γ_n^+ に値を取る1コサイクルとして捉えた。とくに、その分類写像 $M \rightarrow B\Gamma_n^+$ が定義される。微分する操作は、準同型 $\Gamma_n^+ \rightarrow BGL_+(n, \mathbb{R})$ を誘導し、つぎのファイブレーションが得られる。

$$B\bar{\Gamma}_n^+ \rightarrow B\Gamma_n^+ \rightarrow BGL_+(n, \mathbb{R})$$

4.2.2. $B\text{Diff}^\delta M$ のコホモロジーに関する Thurston の仕事

ここでは、 $\text{Diff} M$ に離散位相を入れた群 $\text{Diff}^\delta M$ の分類空間 $B\text{Diff}^\delta M$ （それは M をファイバーとするファイバーバンドルで、ファイバーに横断的な葉層構造の入ったものを分類する）のコホモロジーに直接関係する二つの定理を挙げたい。これらの定理の定式化と証明には、広い意味での Pontrjagin-Thom 構成の考えが使われている。

一つことばを準備する。 G を位相群とし G^δ は同じ群に離散位相を与えたものとする。 $B\bar{G}$ を連続写像 $BG^\delta \rightarrow BG$ のホモトピーファイバーとする。このときファイブレーション

$$B\bar{G} \rightarrow BG^\delta \rightarrow BG$$

が存在する。さて、 $\text{Diff}_K \mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^n の微分同相写像でコンパクトな台を持つもの全体とする。このとき、 $B\bar{\text{Diff}}_K \mathbb{R}^n$ 上の普遍バンドルの分類写像

$$B\bar{\text{Diff}}_K \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow B\bar{\Gamma}_n^+$$

は、 $\infty \in \mathbb{R}^n$ の近傍をつぶすことによりつぎの写像

$$\Sigma^n(B\bar{\text{Diff}}_K \mathbb{R}^n) \rightarrow B\bar{\Gamma}_n^+ \tag{1}$$

を誘導する。

定理 4.1 (Mather($n = 1$), Thurston[34]) 上記の写像(1)の随伴写像

$$B\bar{\text{Diff}}_K \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega^n(B\bar{\Gamma}_n^+)$$

は整数係数のホモロジー群の同型を誘導する。

つぎに, M を向き付けられた n 次元閉多様体とすると, $\overline{\text{BDiff}}_+ M \times M$ 上の普遍バンドルの分類写像

$$\overline{\text{BDiff}}_+ M \times M \rightarrow \text{B}\Gamma_n^+$$

を考える. この写像は, 各点 $p \in \overline{\text{BDiff}}_+ M$ に対して, M の接バンドルの分類写像 $M \rightarrow \text{BGL}_+(n, \mathbb{R})$ の $\text{B}\Gamma_n^+$ へのリフトを与える. そこで X_M をそのようなリフトの全体の成す空間とする.

定理 4.2 (Thurston[34]) 自然な写像

$$\overline{\text{BDiff}}_+ M \rightarrow X_M$$

は整数係数のホモロジー群の同型を誘導する.

このように Thurston の仕事は, 葉層構造の問題を $\text{B}\Gamma_n^+$ を使ってホモトピーの問題に帰着させた. しかし, ここで Thom の仕事の場合と決定的に異なるのは, $\text{B}\Gamma_n^+$ のホモトピー型が (多くのことが分かったとはいえ) 未知のままであるということである.

4.3. Kontsevich の形式的シンプレクティック幾何

3番目の流れとして取り上げる Kontsevich のグラフホモロジーの理論は, 1990年代の初めに提出されたもので associative, commutative, lie の3種類 (それらの variants を含めれば6種類以上) がある. 論文 [20] の冒頭の記述によれば, そもそもの出発点は, ある良い性質をもつ d.g.a. を用いた “写像類群のコホモロジー類の奇妙な構成法” に気づいたこと (associative 版) で, 続いて commutative, lie 版を創った, とある.

ごく大雑把に言えば, 三つの無限次元リー代数 $\mathfrak{a}_\infty, \mathfrak{c}_\infty, \mathfrak{h}_\infty$ のコホモロジーが, それぞれ, 写像類群 (あるいはリーマン面のモジュライ空間), グラフホモロジー, 自由群の外部自己同型群 (あるいは Culler-Vogtmann [4] のグラフのモジュライ空間) の有理コホモロジーと等価となる, という驚くべき理論である. 三つのリー代数の定義は原論文を見ていただくことにしてここでは省略する. ただし最後のリー代数は, Kontsevich の理論以前に Johnson 準同型のターゲットとしてすでに現れていたものである.

ここでは三つの場合の各々について, $H^*(\text{BDiff } M)$ に直接関係する部分についてだけ簡単に記述することにする.

4.3.1. associative case

定理 4.3 (Kontsevich [20, 21]) つぎの同型が存在する.

$$PH_k(\mathfrak{a}_\infty)_{2n} \cong \bigoplus_{\substack{2g-2+m=n \\ m>0}} H^{2n-k}(\mathbf{M}_g^m; \mathbb{Q})^{\otimes m}.$$

ここで \mathbf{M}_g^m は種数 g の m 個の点付き代数曲線のモジュライ空間を表す. Σ_g 上の m 個の点を固定する微分同相群を $\text{Diff}_+ \Sigma_g^m$ と書けば, 同型

$$H^*(\mathbf{M}_g^m; \mathbb{Q}) \cong H^*(\text{BDiff}_+ \Sigma_g^m; \mathbb{Q})$$

が存在することが知られている. したがって上記の定理は, \mathfrak{a}_∞ のホモロジー群が代数曲線のすべてのモジュライ空間のコホモロジーの情報を持っていることを示している. この事実の直接の応用として, たとえば Sakasai-Suzuki-M.[28] があるが, 様々な応用が期待される.

4.3.2. commutative case

定理 4.4 (Kontsevich [20, 21]) つぎの同型が存在する.

$$PH_k(\mathfrak{c}_\infty)_{2n} \cong H_k(G_*^{(n+1)}).$$

ここで $G_*^{(n)}$ ($n \geq 2$) は Kontsevich が定義したグラフ複体であり, その次元は $2n - 2$ である. この定理と直接関連する仕事として Watanabe[38] や LMO 不変量 [22] がある. 問題集 Ohtsuki[31] も参照されたい.

4.3.3. lie case

定理 4.5 (Kontsevich [20, 21]) つぎの同型が存在する.

$$PH_k(\mathfrak{h}_\infty)_{2n} \cong H^{2n-k}(\text{Out } F_{n+1}; \mathbb{Q}).$$

ここで $\text{Out } F_{n+1}$ は階数 $(n + 1)$ の自由群の外部自己同型群を表す. 証明は, Culler-Vogtmann の Outer 空間 [4] の胞体分割の構造と, \mathfrak{h}_∞ のホモロジーを計算するチェイン複体とを巧みに関連付けることにより成される. 前述のように, このリー代数は写像類群の研究においてすでに表れていたものであるが, この定理はそれが写像類群だけではなく, 自由群の自己同型群とも深く関わることを示したものであり, 驚きの結果であった. 筆者は, この定理と写像類群の研究を組み合わせることで $\text{Out } F_n$ の一連のサイクルを定義した. さらに最近の Conant-Kassabov-Vogtmann の仕事からは数論との関係も生まれ, $\text{Out } F_n$ のホモロジーの研究は極めて大きな発展を見せている.

最後に, この定理と微分同相群の直接の関連を示す一つの例を挙げる. Laudenbach の結果 $\pi_0 \text{Diff}_+(n(S^1 \times S^2)) \cong \text{Out } F_n \pmod{2\text{-torsion}}$ から, 準同型写像

$$PH_k(\mathfrak{h}_\infty)_{2n-2} \cong H^{2n-2-k}(\text{Out } F_n; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2n-2-k}(\text{BDiff}_+(n(S^1 \times S^2)); \mathbb{Q})$$

が得られる. しかし, これが非自明かどうかは現状で全く未知である.

5. 将来への課題

課題 5.1 Euler 類を真に超える特性類は存在するだろうか? 具体的問いとしては, 微分可能な閉多様体 M をファイバーとするファイバーバンドルの“異種特性類”(古典的な理論では説明できない特性類)をできるだけ多く構成せよ. とくに $M = \Sigma_g$ の場合に非安定コホモロジー類の系統的な構成法を与えよ.

課題 5.2 “恒等写像” $\text{Diff}^\delta M \rightarrow \text{Diff } M$ の誘導する自然な準同型写像

$$H^*(\text{BDiff } M) \rightarrow H^*(\text{BDiff}^\delta M) \quad (\text{係数は } \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p \text{ 等})$$

を研究せよ. とくにその核, 余核を調べよ.

参考: Friedlander, Milnor 予想: 任意のリー群 G に対し, 自然な準同型 $H^*(BG; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(BG^\delta; \mathbb{Z}/p)$ は同型か? $H_*(\text{BDiff}_+^\delta \Sigma_g)$ に関する最新の研究については [30] 参照.

課題 5.3 M を実解析的多様体とする。このとき、包含写像 $\text{Diff}^{\omega, \delta} M \rightarrow \text{Diff}^{\delta} M$ の誘導する自然な準同型写像

$$H^*(\text{BDiff}^{\delta} M) \rightarrow H^*(\text{BDiff}^{\omega, \delta} M) \quad (\text{係数は } \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p \text{ 等})$$

は同型か？あるいは、非自明な核をもつか？とくに、 $M = S^1$ のとき上記の準同型は非自明な核をもつか？(Thurston’s “lost theorem” (Ghys))

Herman の仕事(1970’s)以後、本質的進展は Tsuboi[36] のみと思われる。

課題 5.4 “巨大空間” (huge space, Bott の命名) のホモロジー、たとえば $H_*(\text{B}\Gamma_n; \mathbb{Z})$ あるいは $H_*(\text{BDiff}_+^{\delta} S^1; \mathbb{Z})$ の研究をせよ。

課題 5.5 位相的カテゴリーの (smooth カテゴリーに比較しての) “柔軟性” (Freedman の定理, Thurston の定理) を念頭にして、4次元のトポロジーにおける C^0 と C^{∞} の差を、ホモロジーシリンダーの族に関するある種の特性類で検出できないか？

参考文献

- [1] T. Akita, *Homological infiniteness of Torelli groups*, *Topology* **40** (2001), 213–221.
- [2] A. Berglund, Ib Madsen, *Homological stability of diffeomorphism groups*, *Pure Appl. Math. Q.* **9(1)** (2013), 1–48.
- [3] R. Bott, *Lectures on characteristic classes and foliations*, *Lecture Notes in Mathematics* **279**, Springer, 1972.
- [4] M. Culler, K. Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, *Invent. Math.* **84** (1986) 91–119.
- [5] C.J. Earle, J. Eells, *The diffeomorphism group of a compact Riemann surface*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967) 557–559.
- [6] J. Ebert, *Algebraic independence of generalized MMM-classes*, *Algebr. Geom. Topol.* **11** (2011), 69–105.
- [7] J. Ebert, O. Randal-Williams, *Generalised Miller-Morita-Mumford classes for block bundles and topological bundles*, *Algebr. Geom. Topol.* **14(2)** (2014), 1181–1204.
- [8] C. Faber, *Tautological algebras of moduli spaces of curves*, in the book “Moduli spaces of Riemann Surfaces”, 197–219, *IAS/Park City Math. Ser.*, 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
- [9] S. Galatius, I. Madsen, U. Tillmann, M. Weiss, *The homotopy type of the cobordism category*, *Acta Math.* **202** (2009), no. 2, 195–239.
- [10] S. Galatius, O. Randal-Williams, *Stable moduli spaces of high-dimensional manifolds*, *Acta Math.* **221** (2014), no. 2, 257–377.
- [11] I.M. Gelfand, D.B. Fuks, *The cohomology of the Lie algebra of formal vector fields*, *Izv. Akad. Nauk. SSSR* **34** (1970), 322–337.
- [12] A. Haefliger, *Homotopy and integrability*, in *Manifolds-Amsterdam* (Amsterdam, 1970), 133–163. *Lecture Notes in Mathematics* **197**, Springer Berlin, 1971.
- [13] J. L. Harer, *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*, *Ann. of Math. (2)* **121** (1985), no. 2, 215–249.
- [14] A. Hatcher, *A 50-year view of diffeomorphism groups*, 50th Cornell Topology Festival, May 2012, Hatcher’s HP: <http://www.math.cornell.edu/hatcher/>
- [15] M. Hill, M. Hopkins, D. Ravenel, *The non-existence of elements of Kervaire invariant one*, preprint, arXiv:0908.3724v2.

- [16] M. Hopkins, *The Kervaire invariant problem*, 第7回高木レクチャー, 東大数理, Nov. 2009, 東大数理ビデオアーカイブス.
- [17] K. Igusa, “Higher Complex torsion and the Framing Principle”, *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, volume 177, number 835, 2005.
- [18] D. Johnson, *A survey of the Torelli group*, in: *Low-dimensional topology* (San Francisco, Calif., 1981), *Contemp. Math.* **20**, 165–179. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [19] N. Kawazumi, S. Morita, *The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and stable characteristic classes*, *Math. Res. Lett.* **3** (1996) 629–642.
- [20] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, in: “The Gel’fand Mathematical Seminars, 1990–1992”, Birkhäuser, Boston (1993) 173–187.
- [21] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, in: “First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)”, *Progr. Math.* 120, Birkhäuser, Basel (1994) 97–121.
- [22] T. Le, J. Murakami, T. Ohtsuki, *A universal quantum invariant of 3-manifolds*, *Topology* **3** (1998) 539–574.
- [23] Ib Madsen and U. Tillmann, *The stable mapping class group and $Q(\mathbb{C}P_{+}^{\infty})$* , *Invent. Math.* **145** (2001), 509–544.
- [24] Ib Madsen and M. Weiss, *The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford’s conjecture*, *Ann. of Math. (2)* **165** (2007), no. 3, 843–941.
- [25] E.Y. Miller, *The homology of the mapping class group*, *J. Diff. Geom.* **24** (1986), 1–14.
- [26] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, *Invent. Math.* **90** (1987), 551–577.
- [27] S. Morita, トポロジーの課題探訪 ～ 特性類と不変量を中心として ～, 中央大学における特別講義, 新シリーズ (2013.10 – 2015.1) 講義ノート (北野晃朗氏による), <http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH/>
- [28] S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki, *Abelianizations of derivation Lie algebras of the free associative algebra and the free Lie algebra*, *Duke Math. J.* **162** (2013), 965–1002.
- [29] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, in “Arithmetic and geometry, Vol. II”, *Progr. Math.* **36** (1983), 271–328.
- [30] S. Nariman, *Stable homology of surface diffeomorphism groups made discrete*, preprint, arXiv:math.AT/1506.0033 (2015).
- [31] T. Ohtsuki, *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, With an introduction by J. Roberts, *Geom. Topol. Monogr.*, 4, in the book of “Invariants of Knots and 3-Manifolds” (Kyoto, 2001), 377–572, *Geom. Topol. Publ.*, Coventry, 2002.
- [32] T. Sakasai, 曲面の写像類群と自由群の外部自己同型群のコホモロジーに関するこれまでの歩みと最近の進展, 投稿中, 2015.
- [33] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), 17–86.
- [34] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), 304–307.
- [35] U. Tillmann, *Mumford’s conjecture - a topological outlook*, in “Handbook of Moduli, Volume III”, *Adv. Lect. Math.* **26**, Int. Press (2013), 399–429.
- [36] T. Tsuboi, *On the group of real analytic diffeomorphisms*, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (2009), no. 4, 601–651.
- [37] N. Wahl, *The Mumford conjecture, Madsen-Weiss and homological stability for mapping class groups of surfaces*, in: *Moduli Spaces of Riemann Surfaces*, Park City Mathematics Series Volume 20 (2013), 109–138.
- [38] T. Watanabe, *On Kontsevich’s characteristic classes for higher dimensional sphere bundles. I. The simplest class*, *Math. Z.* **262** (2009), 683–712.

漸近次元とその無限次元性

山内貴光 (愛媛大学大学院理工学研究科)*

概 要

大尺度幾何学の不変量である漸近次元の基本的性質を概説し, その無限次元性について, 位相次元論的立場から紹介する.

大尺度幾何学 (large scale geometry, coarse geometry) では, (非有界) 距離空間の局所的情報は無視され, その大域的構造が議論される. 直感的には, 遠くから眺めたときの広がり方が似ている2つの空間が同じ (粗同値¹) とみなされる. 例えば, 1次元ユークリッド空間 \mathbb{R} は, 整数全体のなす \mathbb{R} の部分距離空間 \mathbb{Z} と粗同値である. また, 有界集合は, 1点集合と粗同値である.

有限生成群 G の有限な生成系 S に対して定義される G 上の語距離

$$d_S(g, h) = \min\{n : h = g\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \text{ for some } \sigma_1, \dots, \sigma_n \in S \cup S^{-1}\}, \quad g, h \in G,$$

(ただし, $S^{-1} = \{\sigma^{-1} : \sigma \in S\}$) の値は, 生成系 S のとり方に依存する. しかし, G の2つの有限な生成系 S と S' に対して, それらの語距離による2つの距離空間 (G, d_S) と $(G, d_{S'})$ は, 粗同値である. 従って, 有限生成群に関する粗同値について不変な性質は, 群の性質である. さらに, 有限生成群 G が測地距離空間 X (例えば, その Cayley グラフ) に余コンパクトかつ真性不連続で等長的に作用するとき, 語距離をもつ G は X と粗同値である (Milnor-Švarc の補題). この方法で, 群を幾何学的に扱うことができる.

漸近次元は, Gromov [15] によって導入された大尺度幾何学における基本的な不変量である. Yu [34] は, (語距離に関する) 漸近次元が有限な有限生成群に対して, 粗 Baum-Connes 予想が正しいこと, 従って Novikov 予想が正しいことを証明した². この Yu の研究を機に, 距離空間, 特に有限生成群の漸近次元の研究が大きく進展した.

さらに Yu [35] は, Hilbert 空間に粗埋め込み可能で有界幾何をもち一様離散な距離空間に対して, 粗 Baum-Connes 予想が正しいことを証明した. また, Hilbert 空間に粗埋め込み可能な距離空間の性質として, 性質 A を導入した. 性質 A は群の従順性の一般化として導入された概念であるが, 漸近次元が有限で有界幾何をもつ距離空間は性質 A を満たす (Higson and Roe [20]). この意味で, 性質 A は漸近次元の有限次元性に近い無限次元概念と捉えることもできる.

漸近次元は, (位相) 次元論における被覆次元の大尺度版として導入された概念である. 次元論や連続写像の拡張理論の大尺度幾何への対応が Dranishnikov [7] によって明示的に与えられて以降, 次元論における定理の類似を考えることによる漸近次元の研究が進められ, 基本的な定理が証明されてきた. 本講演では, まず, 漸近次元とその基本的性質を概説する. その後, 漸近次元に関するいくつかの無限次元性を紹介し, 関連する問題を次元論的立場から考える.

本研究は科研費 (課題番号:26800040) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 54F45, 20F69

キーワード: 漸近次元, 位相次元

* 〒790-8577 松山市文京町2番5号 愛媛大学 大学院理工学研究科

e-mail: yamauchi.takamitsu.ts@ehime-u.ac.jp

¹ 定義 1.1 を参照.

² 大尺度幾何と粗 Baum-Connes 予想について解説した最近の文献として, [22], [25] がある.

1. 大尺度幾何と漸近次元

1.1. 粗同値

本節では、大尺度幾何の基本事項を振り返る (cf. [22]). 以下、距離空間を単に X で表した場合、距離 d_X をもつとする. 距離空間 X と $x \in X$, $R \geq 0$ に対して、 x を中心とする R -閉球 $\{y \in X : d_X(x, y) \leq R\}$ を $B(x, R)$ で表す. また、部分集合 $A \subset X$ は X の距離による部分距離空間であるとし、

$$\text{diam } A = \sup\{d_X(x, x') : x, x' \in A\}$$

と定める. 距離空間 X が有界であるとは、 $\text{diam } X$ が有限であるときをいう. \mathbb{N} は正の整数全体を、 $|A|$ は集合 A の濃度を表す. 特に断らない限り、写像に連続性は仮定しない. 粗同値は次で定義される.

定義 1.1. 距離空間 X が距離空間 Y と粗同値 (coarsely equivalent) であるとは、次の (1), (2) を満たす写像 $f : X \rightarrow Y$ が存在するときをいう.

(1) 次を満たす2つの関数 $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在する:

- (i) 任意の $x, x' \in X$ に対して、 $\rho_-(d_X(x, x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x'))$.
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_-(t) = \infty$.

(2) $Y = \bigcup_{y \in f(X)} B(y, R)$ を満たす $R > 0$ が存在する.

上の条件 (1), (2) を満たす写像 $f : X \rightarrow Y$ を粗同値写像 (coarse equivalence) という. また、条件 (1) を満たす写像 $f : X \rightarrow Y$ を粗埋め込み写像 (coarse embedding) といい、 X から Y への粗埋め込み写像が存在するとき、 X は Y へ粗埋め込み可能であるという.

注意 1.2. 定義 1.1 の (1) の ρ_+, ρ_- が共に定数項 0 の一次関数で、(2) の R が 0 として取れば、 X と Y はリプシッツ同型である. また、(1) の ρ_+, ρ_- が共に一次関数で取れば、 X と Y は擬等長である.

例 1.3. 実数直線 \mathbb{R} は、整数全体のなす \mathbb{R} の部分距離空間 \mathbb{Z} と粗同値である³.

例 1.4. 有界距離空間 X は、1点からなる距離空間 $\{p\}$ と粗同値である⁴.

例 1.5. 距離空間 X (または、その距離 d_X) が一様離散 (uniformly discrete) であるとは、ある $R > 0$ が存在して、任意の異なる $x, y \in X$ に対して $d_X(x, y) \geq R$ が成り立つときをいう. 任意の距離空間 X は、一様離散で X と粗同値であるような部分距離空間を持つ⁵.

粗同値が距離空間のクラスにおける同値関係であることは、以下の命題 1.7 から確認できる. そのための用語を準備する.

³写像 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ を、各 $x \in \mathbb{R}$ に対して x を超えない最大の整数 $[x]$ に対応させる写像とする. 例えば、定義 1.1 の (1) の $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を $\rho_-(t) = [t]$, $\rho_+(t) = [t] + 1$ で与え、(2) の R を $R = 1$ で与えれば、 f が粗同値写像であることが確かめられる.

⁴点 p に値をとる定値写像 $f : X \rightarrow \{p\}$ は粗同値写像である. 実際、定義 1.1 の (1) の $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を $\rho_-(t) = \max\{t - \text{diam } X, 0\}$, $\rho_+(t) = 0$ で与え、(2) の R を $R = 1$ で与えればよい.

⁵異なる2点の距離が1以上離れている X の部分集合全体のなす集合族に包含関係で順序を入れる. Zorn の補題を用いて、この順序集合の極大元 D を取れば、 D から X への包含写像は粗同値写像である.

定義 1.6. X と Y を距離空間とする.

- (1) 写像 $f : X \rightarrow Y$ が **bornologous** であるとは, 次を満たす関数 $\rho_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在するときをいう: 任意の $x, x' \in X$ に対して, $d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_f(d_X(x, x'))$.
- (2) 2つの写像 $f_1 : X \rightarrow Y, f_2 : X \rightarrow Y$ が近いとは, $\sup\{d_Y(f_1(x), f_2(x)) : x \in X\}$ が有限であるときをいう.

命題 1.7 (cf. [17, Lemma 2.2]). 距離空間の間の bornologous な写像 $f : X \rightarrow Y$ が粗同値写像であるための必要十分条件は, bornologous な写像 $g : Y \rightarrow X$ が存在して, $g \circ f$ と $\text{id}_X, f \circ g$ と id_Y が共に近いことである. ここで id_X は X における恒等写像を表す.

例 1.8. G と H を有限生成群とし, S と S' をそれぞれ G, H の有限な生成系とし, d_S と $d_{S'}$ をそれぞれ S, S' から定まる語距離⁶とする. このとき, 写像 $f : G \rightarrow H$ が群準同型写像ならば, $f : (G, d_S) \rightarrow (H, d_{S'})$ は bornologous である⁷. 特に, G が H と同型ならば, 命題 1.7 より (G, d_S) は $(H, d_{S'})$ と粗同値である.

注意 1.9. 有限生成群の語距離は, 有界幾何⁸をもち左不変⁹で一様離散な距離である. 一般に, 可算群には, 有界幾何をもち左不変で一様離散な距離が存在し, それらの距離は互いに粗同値である (cf. [22, Example 1.4.7]). このことから, 以下, 可算群は, この性質をもつ距離空間と考える. 特に, 有限生成群は語距離による距離空間と考える.

1.2. 漸近次元

まず, 次元論における被覆次元の定義を振り返る. 集合 X の部分集合族 \mathcal{U}, \mathcal{V} に対して, \mathcal{U} が \mathcal{V} を細分する ($\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$) とは, 各 $U \in \mathcal{U}$ に対して $U \subset V$ を満たす $V \in \mathcal{V}$ が存在するときをいう. また, $m(\mathcal{U}) = \sup\{|\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}| : x \in X\}$ を, \mathcal{U} の重複度 (multiplicity) という¹⁰.

定義 1.10. 正規空間¹¹ X が次の条件を満たすとき, X の被覆次元 (covering dimension) は n 以下 ($\dim X \leq n$) であるという: 「 X の任意の有限開被覆 \mathcal{U} に対して, $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ かつ $m(\mathcal{V}) \leq n + 1$ を満たす X の有限開被覆 \mathcal{V} が存在する.」また, $\dim X \leq n$ かつ $\dim X \not\leq n - 1$ であるとき, X の被覆次元は n ($\dim X = n$) であるといい, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\dim X \not\leq n$ であるとき, X の被覆次元は無限 ($\dim X = \infty$) であるという.

距離空間 X の部分集合族 \mathcal{U} に対して,

$$\text{mesh } \mathcal{U} = \sup\{\text{diam } U : U \in \mathcal{U}\}$$

とおく. 部分集合族 \mathcal{U} が一様有界であるとは, $\text{mesh } \mathcal{U}$ が有限であるときをいう. 被覆次元が n 以下であるとは, 任意に与えた有限開被覆よりも「細かい」有限開被覆で, 重複度が $n + 1$ 以下のものが存在するということであった. この定義の「細かい」を「粗い」に替え, 開被覆の有限性を除いて一様有界性を課した概念が漸近次元である¹².

⁶ 序文を参照.

⁷ 定義 1.6 (1) の $\rho_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を, $\rho_f(t) = \max\{d_{S'}(e_H, f(s)) : s \in S\} \cdot t$ で与えればよい.

⁸ 一様離散な距離空間 X (または, その距離 d_X) が有界幾何 (bounded geometry) をもつとは, 任意の $R > 0$ に対して $N(R) \in \mathbb{N}$ が存在し, 各 $x \in X$ に対して $|B(x, R)| \leq N(R)$ であるときをいう.

⁹ 群 G 上の距離 d が左不変 (left-invariant) であるとは, 任意の $g, h, \gamma \in G$ に対して $d(\gamma g, \gamma h) = d(g, h)$ が成り立つときをいう.

¹⁰ $m(\mathcal{U}) \in \mathbb{N}$ であるとき, 任意の $x \in X$ は高々 $m(\mathcal{U})$ 個の \mathcal{U} のメンバーにしか含まれない.

¹¹ 被覆次元を定義す際には, 通常, 位相空間に正規性を仮定する. 距離空間やコンパクトな Hausdorff 空間は正規空間である.

¹² 実際に Gromov が与えた定義は, この後に述べる定理 1.16 の (b) の条件である.

定義 1.11 ([15]). 距離空間 X が次の条件を満たすとき, X の漸近次元 (asymptotic dimension) は n 以下 ($\text{asdim } X \leq n$) であるという: 「 X の任意の一様有界な開被覆 \mathcal{U} に対して, $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ かつ $m(\mathcal{V}) \leq n + 1$ を満たす X の一様有界な開被覆 \mathcal{V} が存在する。」 また, $\text{asdim } X \leq n$ かつ $\text{asdim } X \not\leq n - 1$ であるとき, X の漸近次元は n ($\text{asdim } X = n$) であるといい, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\text{asdim } X \not\leq n$ であるとき, X の漸近次元は無限 ($\text{asdim } X = \infty$) であるという.

注意 1.12 (cf. [2, Propositions 22 and 23]). 距離空間 X が距離空間 Y へ粗埋め込み可能ならば, $\text{asdim } X \leq \text{asdim } Y$. よって, X が Y と粗同値ならば, $\text{asdim } X = \text{asdim } Y$. 従って, 漸近次元は大尺度幾何学における不変量である.

例 1.13. 距離空間 X が有界ならば, $\text{asdim } X \leq 0$ ¹³.

例 1.14. $\text{asdim } \mathbb{R} = 1$ ¹⁴. 従って, $\text{asdim } \mathbb{Z} = 1$.

例 1.15 (cf. [2, p.1270]). サイクルをもたない連結な1次元単体複体を木 (tree) という. 木は, 1辺の長さを1とする辺長距離 (edge-length metric) をもつとする. このとき, 任意の木の漸近次元は1以下である. 階数 n の自由群 \mathbb{F}_n の Cayley グラフは木であり, \mathbb{F}_n は \mathbb{Z} と等長な部分距離空間を含むので, その漸近次元は1である.

以下, 漸近次元の基本的性質を, 次元論の定理と比較しながら紹介する. 詳しくは [2], [3] を参照されたい.

正の数 R に対して, 距離空間 X の部分集合族 \mathcal{U} が R -disjoint であるとは, 任意の異なる $U, U' \in \mathcal{U}$ に対して, $\inf\{d_X(x, x') : x \in U, x' \in U'\} \geq R$ が成り立つときをいう. 次元論における Ostrand の定理 (cf. [14, Theorem 3.2.4]) の類似として, 次が成り立つ.

定理 1.16 (cf. [3, Theorem 2.1.2]). 距離空間 X と $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, 次は同値である.

- (a) $\text{asdim } X \leq n$.
- (b) 任意の $R > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n + 1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n$ が存在する.
 - (1) $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.
 - (2) 各 \mathcal{U}_i は R -disjoint である.
 - (3) 各 \mathcal{U}_i は一様有界である.

次元論における countable sum theorem¹⁵ の類似として, 次が成り立つ.

定理 1.17 ([1, Finite Union Theorem]). 距離空間 X の部分集合 A, B に対して, $\text{asdim}(A \cup B) \leq \max\{\text{asdim } A, \text{asdim } B\}$.

定理 1.17 における部分集合の数を単に可算無限にすることはできない¹⁶. しかし, 以下の条件を満たす集合族に対しては, 定理 1.17 を一般化できる.

¹³ $\mathcal{V} = \{X\}$ が一様有界な X の開被覆であることから従う.

¹⁴ \mathbb{R} の一様有界な開被覆 \mathcal{U} を任意に与え, $S = \text{mesh } \mathcal{U}$ とおく. 例えば, 开区間からなる集合族 $\mathcal{V} = \{(3(n-1)S, 3(n+1)S) : n \in \mathbb{Z}\}$ は, 重複度2の \mathbb{R} の開被覆で $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ を満たすので, $\text{asdim } \mathbb{R} \leq 1$ を得る. $\text{asdim } \mathbb{R} \not\leq 0$ は \mathbb{R} の連結性から従う.

¹⁵ 正規空間 X における任意の開部分空間の列 $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, $\dim(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \leq \sup\{\dim F_i : i \in \mathbb{N}\}$ (cf. [14, Theorem 3.1.8]).

¹⁶ 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\text{asdim } \{n\} = 0$ だが, $\text{asdim } \mathbb{Z} = 1$ である.

定義 1.18. 距離空間 X の部分集合族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の漸近次元が一様に n 以下であるとは、任意の $R > 0$ に対して、次を満たす $S > 0$ が存在するときをいう: 任意の $\alpha \in A$ に対して、次の (1)–(3) を満たす $n + 1$ 個の X_α の部分集合族 $U_0^\alpha, \dots, U_n^\alpha$ が存在する.

- (1) $\bigcup_{i=0}^n U_i^\alpha$ は X_α を被覆する.
- (2) 各 U_i^α は R -disjoint である.
- (3) 任意の $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対して, $\text{mesh} U_i^\alpha \leq S$.

定義 1.19. 距離空間 X の部分集合列 $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が **coarsely disjoint** であるとは、任意の $R > 0$ に対して、集合族 $\{X_i\}_{i \geq i_0}$ が R -disjoint となるような $i_0 \in \mathbb{N}$ が存在するときをいう.

定理 1.20 (cf. [1, Theorem 1]). 距離空間 X の部分集合列 $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が coarsely disjoint であり、その漸近次元が一様に n 以下であるとする. このとき, $\text{asdim}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i) \leq n$.

次元論における Cartesian product theorem¹⁷ と同様の定理が、漸近次元についても成り立つ.

定理 1.21 ([8, Proposition 5], [3, Corollary 14], [5, Theorem 2.5]). 2つの空でない距離空間 X, Y に対して, $\text{asdim}(X \times Y) \leq \text{asdim} X + \text{asdim} Y$ ¹⁸.

例 1.22. $\text{asdim} \mathbb{R}^n = n$ ¹⁹. 従って, $\text{asdim} \mathbb{Z}^n = n$.

次元論における theorem on dimension-lowering mappings²⁰ の類似の定理として、次が成り立つ.

定理 1.23 ([5, Theorem 4.11]). 距離空間の間の bornologous な写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して, $\text{asdim} X \leq \text{asdim} Y + \sup\{\text{asdim} f^{-1}(B) : B \subset Y, \text{asdim} B = 0\}$.

可算群の拡大に対して、次が成り立つ.

定理 1.24 ([10, Theorem 2.3], cf. [5, Theorem 5.4]). 可算群 K, G, H の間の短完全列 $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ が与えられたとき, $\text{asdim} G \leq \text{asdim} H + \text{asdim} K$.

2. 漸近次元の無限次元性

2.1. 有限次元性に近い無限次元性と、それらの関係

序文で紹介した Yu の性質 A は、次で定義される²¹.

定義 2.1 ([35]). 一様離散な距離空間 X が性質 A (property A) を満たすとは、任意の $\varepsilon > 0$ と $R > 0$ に対して、次の (1), (2) を満たす $S > 0$ と $X \times \mathbb{N}$ の有限部分集合からなる族 $\{A_x : x \in X\}$ が存在するときをいう.

- (1) $d_X(x, y) \leq R$ ならば $|A_x \Delta A_y| \leq \varepsilon |A_x \cap A_y|$ ²².
- (2) 各 $x \in X$ に対して, $A_x \subset B(x, S) \times \mathbb{N}$.

¹⁷ 2つの空でない距離空間 X, Y に対して, $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ (cf. [14, Theorem 3.4.9]).

¹⁸ ただし, $X \times Y$ は $d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$ で定まる距離をもつとする.

¹⁹ $\text{asdim} \mathbb{R}^n \leq n$ は例 1.14 と定理 1.21 から従う. $\text{asdim} \mathbb{R}^n \not\leq n - 1$ は $\dim[0, 1]^n \not\leq n - 1$ であることを用いて示せる (cf. [22, Example 2.2.6]).

²⁰ 正規空間 X から距離空間 Y への連続な閉写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して,

$\dim X \leq \dim Y + \sup\{\dim f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ (cf. [14, Theorem 3.3.10]).

²¹ 性質 A の基本的性質については [31] が詳しい. パラコンパクト性と対比した研究として [6] がある.

²² ただし, $A_x \Delta A_y = (A_x \setminus A_y) \cup (A_y \setminus A_x)$.

定理 2.2 ([35, Theorem 2.2]). 性質 A を満たす一様離散な距離空間は, Hilbert 空間へ粗埋め込み可能である.

本節では, 漸近次元の有限次元性より弱く, 性質 A より強く, 粗同値で不変な2種類の性質について考える. 1つ目は, 次元論における性質 C (property C)²³ の大尺度幾何学への対応概念として Dranishnikov [7] によって導入された漸近的性質 C である.

定義 2.3 ([7]). 距離空間 X が漸近的性質 C (asymptotic property C) を満たすとは, 任意の正の数の列 $R_0 < R_1 < \dots$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす有限個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ が存在するときをいう.

- (1) $\bigcup_{i=0}^k \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
- (2) 各 \mathcal{U}_i は R_i -disjoint である.
- (3) 各 \mathcal{U}_i は一様有界である.

定理 2.4 ([7, Theorem 7.11]). 漸近的性質 C を満たし有界幾何をもつ距離空間は, 性質 A を満たす.

注意 2.5. 定理 1.16 より, 漸近次元が有限な距離空間は, 漸近的性質 C を満たす. 漸近次元が無限で漸近的性質 C を満たす距離空間の例は, Radul [24] によって与えられた.

2つ目は 多様体の位相的剛性の研究において Guentner, Tessera and Yu [18] によって導入された有限分解複雑性である²⁴.

定義 2.6. 距離空間 X の2つの部分集合族 \mathcal{E}, \mathcal{F} と $R > 0$ に対して, \mathcal{F} が \mathcal{E} を R -分割する ($\mathcal{E} \xrightarrow{R} \mathcal{F}$) とは, 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して, $E = \bigcup (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ を満たす R -disjoint な $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ が存在するときをいう.

定義 2.7 ([18]). X を距離空間とする. $\mathcal{F}_0 = \{X\}$ とおき, プレーヤー A, B による次のゲームを考える.

ラウンド i プレーヤー A は (\mathcal{F}_{i-1} を見て) $R_i > 0$ を与える. プレーヤー B は (R_i を見て) \mathcal{F}_{i-1} を R_i -分割する X の部分集合族 \mathcal{F}_i を与える.

$$\{X\} = \mathcal{F}_0 \xrightarrow{R_1} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{R_2} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{R_3} \dots \xrightarrow{R_i} \mathcal{F}_i \xrightarrow{R_{i+1}} \dots$$

プレーヤー B が, あるラウンド k で一様有界な \mathcal{F}_k を与えることができたとき, B の勝利とする. そうでないとき, プレーヤー A の勝利とする.

このゲームにおいてプレーヤー B が必勝法をもつとき, X は有限分解複雑性 (finite decomposition complexity, FDC) をもつという.

²³ コンパクト距離空間 X が (Haver の) 性質 C [16] を満たすとは, 任意の正の数の列 $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす有限個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ が存在するときをいう.

- (1) $\bigcup_{i=0}^k \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
- (2) 各 \mathcal{U}_i は互いに素である. すなわち, 異なる $U, U' \in \mathcal{U}_i$ に対して $U \cap U' = \emptyset$ である.
- (3) 任意の $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ に対して, $\text{mesh } \mathcal{U}_i < \varepsilon_i$ である.

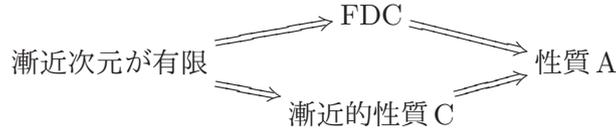
0次元空間の可算和で表されるコンパクト距離空間, 特に有限次元コンパクト距離空間は, 性質 C を満たす. 性質 C を満たすコンパクト距離空間が局所可縮であれば, ANR である [16, Proposition 4]. このことから, 性質 C は連続写像の拡張に関して重要な性質である.

²⁴ 例えば, 次が証明された [18, Theorem 4.12]: 基本群が有限分解複雑性をもつ非球面的閉多様体 M に対して, 次を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する: M と閉多様体 N がホモトピー同値ならば, $M \times \mathbb{R}^n$ と $N \times \mathbb{R}^n$ は同相である.

定理 2.8 ([19, Theorems 4.1 and 4.3]). 漸近次元が有限な距離空間は, FDC をもつ. FDC をもち有界幾何をもつ一様離散な距離空間は, 性質 A を満たす.

注意 2.9. FDC は可算群の部分群や可算直和, および拡大をとる操作で閉じており, 従って, 初等従順群²⁵ は FDC をもつ [19]. 従順群が FDC をもつか, 特に, 初等従順群でない従順群の例である Grigorchuk 群が FDC をもつかは, 未解決である ([19, Question 5.1.3]).

以上のことから, 有界幾何をもつ一様離散な距離空間に対して, 次が成り立つ.



注意 2.9 より, 整数群 \mathbb{Z} の可算直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は FDC をもつ. ここで, 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ における (注意 1.9 の) 距離は, 次で与えられる.

$$d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} i|x_i - y_i|, \quad (x_i), (y_i) \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}.$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して \mathbb{Z}^n は $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ へ粗埋め込み可能なので, 注意 1.12 と例 1.22 より $\text{asdim}(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}) = \infty$ である. $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ が漸近的性質 C を満たさなければ, FDC と漸近的性質 C は異なる概念であることが示される. このことから, Dranishnikov and Zarichnyi [11] は, 次の問題を提起した.

問題 2.10 ([11, Question 4.3]). 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は漸近的性質 C 満たすか.

問題 2.10 に対して, 肯定的な解答を得た.

定理 2.11 ([33]). 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は漸近的性質 C を満たす.

定理 2.11 により, 漸近次元が無限で漸近的性質 C を満たす可算群の存在が示されたことになる (cf. 注意 2.5). 一方, 問題 2.10 が肯定的であったので, 次は未解決のままである.

問題 2.12. FDC をもち漸近的性質 C を満たさない可算群 (または距離空間) は存在するか²⁶.

注意 2.13. 整数群 \mathbb{Z} の漸近次元は 1 であり, 階数 n の自由群 \mathbb{F}_n の漸近次元も 1 である (例 1.15). しかし, 階数 2 の自由群からなる可算直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_2$ が漸近的性質 C を満たすかは, 分かっていない²⁷. また, 漸近的性質 C は群の拡大で閉じるか分かっていない. 特に, \mathbb{Z} の wreath 積 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = (\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ が漸近的性質 C を満たすか分かっていない.

注意 2.9 より, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_2$ と $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ は FDC をもつ. もし, これらいずれかが漸近的性質 C を満たさないことが示されれば, FDC をもち漸近的性質 C を満たさない可算群の存在が示されたことになる. 一方, 群 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ は $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ を部分群として含むので, その漸近次元は無限である. もし, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ が漸近的性質 C を満たすことが示されれば, 漸近次元が無限で漸近的性質 C を満たす有限生成群の存在が示されたことになる.

²⁵ 有限群と可換群を含み, 直和と拡大をとる操作で閉じる可算群のクラスの中で最小なものに属する群.

²⁶ 「漸近的性質 C $\not\Rightarrow$ FDC」「性質 A $\not\Rightarrow$ FDC」「性質 A $\not\Rightarrow$ 漸近的性質 C」も分かっていないと思われる.

²⁷ 定理 2.11 の証明では, \mathbb{Z} における異なる長さの区間をずらして考えることにより, 求める集合族の列を構成している. この方法が \mathbb{F}_2 に直接適用できない.

2.2. Higson コロナの次元と無限次元性

距離空間の大尺度幾何を反映するコンパクトな Hausdorff 空間として, Higson コロナがよく知られている (cf. [26, Section 5.1]).

定義 2.14. 固有距離空間²⁸ X 上の有界な連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき, f を **Higson 関数** という: 任意の $\varepsilon > 0$ と $R > 0$ に対して, X の有界集合 B が存在し, $d_X(x_1, x_2) < R$ を満たす任意の $x_1, x_2 \in X \setminus B$ に対して $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

固有距離空間 X に対して, 次の条件を満たす X のコンパクト化 hX が存在する²⁹: 任意の有界な連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$f \text{ は } hX \text{ 上の連続関数へ拡張される} \iff f \text{ は Higson 関数である.}$$

この hX を X の **Higson コンパクト化** といい, その境界 (剰余) $\nu X = hX \setminus X$ を X の **Higson コロナ** という.

2つの距離空間 X と Y が粗同値であれば, νX と νY は同相である (cf. [26, Corollary 5.12]). 距離空間の漸近次元と, その Higson コロナの被覆次元には, 次の関係がある³⁰.

定理 2.15 ([9, Theorem 1.1]). 固有距離空間 X に対して, $\dim \nu X \leq \text{asdim } X$.

定理 2.16 ([7, Theorem 6.2]). 固有距離空間 X の漸近次元が有限であるとき, $\text{asdim } X$ と $\dim \nu X$ は一致する.

Dranishnikov [7] は, 次の問題を提起した.

問題 2.17 ([7, Problem 1]). 任意の固有距離空間 X に対して, $\text{asdim } X = \dim \nu X$ は成り立つか. もしくは, $\text{asdim } X = \infty$ かつ $\dim \nu X < \infty$ を満たす固有距離空間 X は存在するか.

この問題は未解決である. 例えば, X が性質 A, 漸近的性質 C, FDC 等の性質を満たすときに, $\text{asdim } X = \dim \nu X$ が成り立つかも分かっていない³¹.

以下, $\dim \nu X < \text{asdim } X$ を満たす X の条件を考える. X を漸近次元が無限で一様離散な固有距離空間とする. また, X は漸近次元が n ($\in \mathbb{N}$) の部分距離空間 Y をもつとする. このとき, Y の hX における閉包 $\text{cl}_{hX} Y$ は, Y の Higson コンパクト化である [9, Theorem 1.4]. よって, 定理 2.16 より次が成り立つ.

$$n = \text{asdim } Y = \dim \nu Y = \dim(\text{cl}_{hX} Y \setminus Y) \leq \dim \nu X^{32}.$$

従って, 次を得る.

事実 2.18. $\text{asdim } X = \infty$ かつ $\dim \nu X = n < \infty$ を満たす固有距離空間 X は, 漸近次元が有限で n より大きい部分距離空間をもたない³³.

このことから, Dranishnikov の問題 2.17 より弱い問題として, 次が考えられる.

²⁸ 任意の有界閉集合がコンパクトである距離空間を固有距離空間という. 有界幾何をもち一様離散な距離空間は固有距離空間である.

²⁹ hX の構成については, 例えば [21, Section 1] を参照. 複素数値 Higson 関数全体のなす C^* 環に対して, Gelfand-Naimark の定理を用いても定義される [26, Section 5.1].

³⁰ Higson コロナの被覆次元の特徴付けとして, [4, Corollary 6], [13, Corollary 7.2] がある.

³¹ 関連する研究に [12] がある.

³² 正規空間 X の任意の閉部分空間 F に対して, $\dim F \leq \dim X$ (cf. [14, Theorem 3.1.3]).

³³ 任意の距離空間 X は, 一様離散で X と粗同値であるような部分距離空間を持つことに注意する (例 1.5).

問題 2.19. 次の (1), (2) を満たす固有距離空間 X と $n \in \mathbb{N}$ は存在するか:

- (1) $\text{asdim } X = \infty$.
- (2) X の任意の部分距離空間 Y に対して, $\text{asdim } Y < \infty$ ならば $\text{asdim } Y \leq n$.

注意 2.20. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して \mathbb{Z}^n を部分群として含む $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, Thompson 群 F は, 問題 2.19 の例の候補にならない. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して \mathbb{Z}^n は Grigorchuk 群へ粗埋め込み可能なので [29], Grigorchuk 群も候補にならない.

注意 2.21. グラフの最短のサイクルの長さを, そのグラフの内周 (girth) という. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, 内周 $i+2$ の 3 正則グラフ X_i が存在する [28]. これらのグラフ³⁴ を coarsely disjoint に並べた和集合 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ を X とすると, X は性質 A を満たさない [32]. 従って, X の漸近次元は無限である. この X が漸近次元 2 の部分距離空間をもつかは, 分かっていないと思われる³⁵.

注意 2.22. Walsh [30] は, 次の (1), (2) を満たすコンパクト距離空間を構成した.

- (1) $\dim X = \infty$.
- (2) X の任意の部分空間 Y に対して, $\dim Y < \infty$ ならば $\dim Y \leq 0$.

この性質を満たす空間は, 遺伝的無限次元空間 (hereditarily infinite-dimensional space) と呼ばれる.

参考文献

- [1] G. Bell and Dranishnikov, *On asymptotic dimension of groups*, *Algebr. Geom. Topol.* **1** (2001), 57–71.
- [2] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, *Topology Appl.* **155** (2008), 1265–1296.
- [3] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension in Będlewo*, *Topology Proc.* **38** (2011), 209–236.
- [4] N. Brodskiy and J. Dydak, *Coarse dimensions and partitions of unity*, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM* **102** (2008), 1–19.
- [5] N. Brodskiy, J. Dydak, M. Levin and A. Mitra, *A Hurewicz theorem for the Assouad-Nagata dimension*, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **77** (2008), 741–756.
- [6] M. Cencelj, J. Dydak and A. Vavpetič, *Coarse amenability versus paracompactness*, *J. Topol. Anal.* **6** (2014), 125–152.
- [7] A. Dranishnikov *Asymptotic Topology*, *Russian Math. Surveys* **55** (2000), 1085–1129.
- [8] A. Dranishnikov and T. Januszkiewicz, *Every Coxeter group acts amenably on a compact space*, *Topology Proc.* **24** (1999), 135–141.
- [9] A. N. Dranishnikov, J. Keesling, V. V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, *Topology* **37** (1998), 791–803.
- [10] A. Dranishnikov and J. Smith, *Asymptotic dimension of discrete groups*, *Fund. Math.* **189** (2006), 27–34.
- [11] A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Asymptotic dimension, decomposition complexity, and Haver’s property C*, *Topology Appl.* **169** (2014), 99–107.

³⁴ 1 辺の長さを 1 とする辺長距離 (edge-length metric) をもつとする.

³⁵ この X は漸近次元 1 の部分距離空間をもつ. 実際, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\text{diam } X_i = d_{X_i}(u_i, v_i)$ を満たす 2 頂点 u_i, v_i を結ぶ最短の道 (path) を Y_i とし, $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ とおくと, 定理 1.20 と $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam } Y_i = \infty$ であることから, $\text{asdim } Y = 1$ を得る.

- [12] J. Dydak, *Coarse amenability and discreteness*, J. Aust. Math. Soc., to appear.
- [13] J. Dydak and A. Mitra, *Large scale absolute extensors*, preprint, arXiv:1304.5987.
- [14] R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics, 10, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.
- [15] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [16] W. E. Haver, *A covering property for metric spaces*, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973), pp. 108–113, Lecture Notes in Math., Vol. 375, Springer, Berlin, 1974.
- [17] E. Guentner, *Permanence in coarse geometry*, Recent progress in general topology. III, 507–533, Atlantis Press, Paris, 2014.
- [18] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *A notion of geometric complexity and its application to topological rigidity*, Invent. Math. **189** (2012), 315–357.
- [19] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *Discrete groups with finite decomposition complexity*, Groups Geom. Dyn. **7** (2013), 377–402.
- [20] N. Higson and J. Roe, *Amenable group actions and the Novikov conjecture*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 143–153.
- [21] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology Proc. **19** (1994), 129–148.
- [22] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2012.
- [23] P. A. Ostrand, *Dimension of metric spaces and Hilbert’s problem 13*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 619–622.
- [24] T. Radul, *On transfinite extension of asymptotic dimension*, Topology Appl. **157** (2010), 2292–2296.
- [25] 尾國新一, 粗 Baum-Connes 予想とその周辺, 数学, to appear.
- [26] J. Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **104**, no. 497, 1993.
- [27] J. Roe, *Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2489–2490.
- [28] H. Sachs, *Regular graphs with given girth and restricted circuits*, J. London Math. Soc. **38** (1963) 423–429.
- [29] J. Smith, *The asymptotic dimension of the first Grigorchuk group is infinity*, Rev. Mat. Complut. **20** (2007), 119–121.
- [30] J. J. Walsh, *Infinite-dimensional compacta containing no n -dimensional ($n \geq 1$) subsets*, Topology **18** (1979), 91–95.
- [31] R. Willett, *Some notes on property A*, Limits of graphs in group theory and computer science, 191–281, EPFL Press, Lausanne, 2009.
- [32] R. Willett, *Property A and graphs with large girth*, J. Topol. Anal. **3** (2011), 377–384.
- [33] T. Yamauchi, *Asymptotic property C of the countable direct sum of the integers*, Topology Appl. **184** (2015), 50–53.
- [34] G. Yu, *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*, Ann. of Math. **147** (1998), 325–355.
- [35] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201–204.

可微分写像の特異点の判定法とその応用

佐治健太郎 (神戸大理)*

1. 序

本稿では写像, 多様体はすべて C^∞ 級微分可能とする. M, N をそれぞれ m, n 次元多様体とする. 写像 $f: M \rightarrow N$ に対して $p \in M$ が f の特異点であるとは

$$\text{rank } df_p < \min\{m, n\}$$

をみたすときをいう. $2m \leq n$ であれば任意の $f: M \rightarrow N$ ははめ込みで近似できる. つまり, ほとんどは特異点を持たない写像である. もし $2m > n$ のときは一般にはそのような近似をとることができず, テキトーに写像を選んで特異点を持っていた場合は, 特異点を扱う必要が生じる. 本稿では主に特異点の認識問題とその応用についての最近の結果と関連話題について述べる. 特異点は局所的に定義される概念なので, 以降は写像芽の言葉で述べる. $C^\infty(m, n) = \{f: (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)\}$ とする.

定義 1. 二つの写像芽 $f, g: (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が右左同値 (または \mathcal{A} -同値または \mathcal{RL} -同値) であるとは微分同相写像芽 $\sigma: (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^m, 0)$, $\tau: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が存在して $g = \tau \circ f \circ \sigma$ が成り立つときをいう. この同値関係を $\sim_{\mathcal{A}}$ とかく.

この同値関係は定義域と像域の微分同相写像でうつり合うという意味なので大変自然な同値関係である. この同値関係に対して次の二つの基本的な問題が考えられる.

- (分類問題) $C^\infty(m, n)$ 内の「よい」部分集合 S に対して S に属する写像芽を $\sim_{\mathcal{A}}$ で分類せよ. 各分類の代表元で, 「わかりやすい」ものをその標準形という.
- (認識問題) ある写像芽 f に対して $g \in C^\infty(m, n)$ が f に \mathcal{A} 同値であるための必要十分条件を求めよ. そのような必要十分条件のうちで「わかりやすい」ものを f の判定法という.

これらは活発に研究されている. S としては, 安定, 余次元が低い, 単純, 有限確定¹等が考えられている ([33, 34, 45] 等). 認識問題も, 分類の手法に沿って写像芽を特別な形にして考えられている ([35, 36, 45] 等). また, 一般に与えられた二つの \mathcal{K} 同値な写像芽 f, g が $f \sim_{\mathcal{A}} g$ となる必要十分条件が与えられている ([39]).

これまでの研究では判定法と呼べるものはほとんど無かった. 点 p が $f: (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^n, f(p))$ の特異点であるとき, f の判定法をそのまま特異点 p の判定法という.

2. 判定法

ここでは最近得られている様々な特異点の判定法を述べる.

科学研究費補助金基盤研究 (C)26400087 の補助を受けております.

* e-mail: saji@math.kobe-u.ac.jp

¹ これらの用語は [11, 14, 18, 19, 41] 等を参照.

2.1. モラン写像

写像芽 $f : (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^m, f(p))$ が

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(x_1, \dots, x_{m-1}, \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_m^i + x_m^{k+1} \right) \quad (k \leq m)$$

の原点における写像芽に \mathcal{A} 同値であるとき, p を k -モラン特異点という ([35])². この特異点は基本的であり, ジェット空間内の集合への横断性 ([18, 41]) や内在的微分を使ったもの ([14, 43]) 等の特徴付けがある. ここでは与えられた写像芽のジェットの情報のみで直接書けるこの特異点の特徴付け (判定法) を述べる. まずは判定法のための基本データを述べる. 与えられた写像芽 f に対して座標系 (u_1, \dots, u_m) をとり, ヤコビ行列式を $\lambda = \det(f_{u_1}, \dots, f_{u_m})$ とおく. 特異点 p が非退化であるとは $d\lambda(p) \neq 0$ のときをいう. 非退化特異点 p に対して, p の近くで $S(f)$ は余次元 1 の部分多様体である. また, $\text{rank } df_p = m - 1$ が従う. 一方 $\text{rank } df_p = m - 1$ のとき, 任意の $q \in S(f)$ 上で $\ker df_q = \langle \eta_q \rangle_{\mathbf{R}}$ が成り立つ (\mathbf{R}^m, p) のベクトル場 η が存在する. このベクトル場を退化ベクトル場という ([26]).

定理 2 ([55]). 写像芽 $f : (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^m, f(p))$ に対して, p が k -モラン特異点 ($k \leq m$) であるための必要十分条件は次の二つが成り立つことである.

- $\eta\lambda(p) = \dots = \eta^{k-1}\lambda(p) = 0, \eta^k\lambda(p) \neq 0,$
- $\text{rank } d_p(\lambda, \eta\lambda, \dots, \eta^{k-1}\lambda) = k.$

モラン特異点に関する他の研究は [7, 10, 47, 48, 53, 60, 61] を参照.

$m \leq 3$ とする. m 次元多様体間の写像 $f : M \rightarrow N$ は安定ならば任意の特異点 $p \in M$ は k -モラン特異点 ($k \leq 3$) である. $m \geq 4$ だと他の特異点があらわれる. ここで毛色の少し違う特異点の判定法をひとつ述べたい.

写像芽 $f : (\mathbf{R}^4, p) \rightarrow (\mathbf{R}^4, f(p))$ が

$$I_{2,2}^+ : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1^2 + x_2x_3, x_2^2 + x_1x_4, x_3, x_4),$$

$$I_{2,2}^- : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_4, x_1x_2 + x_1x_4 - x_2x_3, x_3, x_4)$$

の原点における写像芽に \mathcal{A} 同値であるとき, p をそれぞれ $I_{2,2}^\pm$ 特異点という. 4次元多様体間の写像 $f : M \rightarrow N$ は安定ならば任意の特異点 $p \in M$ は k -モラン特異点 ($k \leq 4$) か $I_{2,2}^\pm$ 特異点である. 写像芽 $f : (\mathbf{R}^4, p) \rightarrow (\mathbf{R}^4, f(p))$ を $\text{rank } df_p = 2$ とする. このとき, 線形写像 L が存在して $L \circ f = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ と書いた時, $d(g_1)_p = \mathbf{0}, d(g_2)_p = \mathbf{0}$ とできる. また, $\text{rank } df_p = 2$ より, (\mathbf{R}^4, p) のベクトル場 ξ, η であって, $\langle \xi_p, \eta_p \rangle_{\mathbf{R}} = \ker df_p$ となるものがとれる. 以下が成立する ([52]).

p が $I_{2,2}^+$ 特異点 ($I_{2,2}^-$ 特異点) である必要十分条件は

- $\det \text{Hess}_{(\xi, \eta)} \lambda(p) < 0 \quad (\det \text{Hess}_{(\xi, \eta)} \lambda(p) > 0),$
- $d(\xi g_1), d(\xi g_2), d(\eta g_1), d(\eta g_2)$ は p で一次独立

²1-モラン特異点は折り目, フォールドともいう. 2-モラン特異点はカスプ, ホイットニーの髷ともいう.
³3-モラン特異点はスワローテイル (の切り口) ともいう.

が成り立つことである. ここで, $\text{Hess}_{(\xi,\eta)} \lambda$ はベクトル場 ξ, η に関する λ のヘッセ行列

$$\begin{pmatrix} \xi\xi\lambda & \xi\eta\lambda \\ \eta\xi\lambda & \eta\eta\lambda \end{pmatrix}$$

であり, ξ, η が $\ker df$ を張っているのものでこれは対称である. この特異点は4次元多様体間の安定写像にあらわれる唯二の余階数2の特異点であるため, 注目されており, いろいろな性質が調べられている ([7, 8, 44, 52] 等を参照).

他の特異点の判定法は [49, 53, 64] を参照.

2.2. 波面

M を m 次元多様体, (N, g) を $m+1$ 次元リーマン多様体とする. 写像 $f: M \rightarrow N$ が波面的写像であるとは, 任意の $p \in M$ に対して p の開近傍 U と $L = (f, \nu)$ の形の写像 $L: U \rightarrow T_1N$ 存在して, 任意のベクトル $X \in T_qM$ に対して

$$g(df(X), \nu) = 0$$

が q において成り立つときをいう. また, L がはめ込みであるようにとれるとき, f を波面という. 波面はたとえば次の特異点をもつ. 写像芽 $f: (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^{m+1}, f(p))$ が

$$\left(x_1, \dots, x_{m-1}, (k+2)x_m^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} (i+1)x_i x_m^i, (k+1)x_m^{k+2} + \sum_{i=1}^{k-1} i x_i x_m^{i+1} \right) \quad (k \leq m)$$

の原点における写像芽に \mathcal{A} 同値であるとき, p を A_{k+1} -特異点という³. これらは同次元間の写像の折り目, カスプと似たものであり, 同様に基本的な特異点である ([1, 19, 22] 等を参照). この特異点の判定法を述べる. 波面的写像 f に対して座標 (u_1, \dots, u_m) をとり, $\lambda = \det(f_{u_1}, \dots, f_{u_m}, \nu)$ を符号付き面積密度関数という. 非退化特異点, 退化ベクトル場もモラン写像のときと同様に定義できる ([26]).

定理 3 ([26, 55]). 波面 $f: (\mathbf{R}^m, p) \rightarrow (\mathbf{R}^{m+1}, f(p))$ に対して, p が A_{k+1} -特異点 ($k \leq m$) であるための必要十分条件は次の二つが成り立つことである.

- $\eta\lambda(p) = \dots = \eta^{k-1}\lambda(p) = 0, \eta^k\lambda(p) \neq 0,$
- $\text{rank } d_p(\lambda, \eta\lambda, \dots, \eta^{k-1}\lambda) = k.$

他の特異点の判定法は [9, 22, 23, 50, 51] を参照. 波面の特異点に関連する研究は [17, 21, 25, 32, 37, 38, 40, 56, 58, 59, 63] 等を参照.

3. 応用

以下で判定法の応用を述べる. 以下で見るように判定法は写像のジェットの情報のみで直接特異点を特徴付けているので調べたい特異点該当のものをすぐにチェックできるだけでなく, 特異点の性質を更に深く調べることができる.

³ A_2 -特異点はカスプ辺, A_3 -特異点はスワローテイルともいう.

3.1. 特異点の \mathcal{A} -イソトピー

自然数 r に対して, 写像芽 $f \in C^\infty(m, n)$ が r -確定であるとは, 任意の $j^r f(0) = j^r g(0)$ をみたす g が f と \mathcal{A} 同値であるときをいう. r -確定であって \mathcal{A} -同値な二つの写像芽 f, g が \mathcal{A} -イソトピック ($\sim_{i\mathcal{A}}$ とかく) であるとは連続曲線 $\sigma : I \rightarrow \text{Diff}^r(m) \subset J^r(m, m)$ と $\tau : I \rightarrow \text{Diff}^r(n) \subset J^r(n, n)$ が存在して, $\sigma(0), \tau(0)$ は恒等写像の r -ジェットであり,

$$j^r(g)(0) = j^r(\tau(1) \circ f \circ \sigma(1))(0)$$

が成り立つときをいう. ただし, $I = [0, 1]$ であり, $\text{Diff}^r(m)$ は微分同相写像芽 $(\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^m, 0)$ の r -ジェットの集合であり, ユークリッド空間と同一視して位相をいれている.

つまり, $f \sim_{i\mathcal{A}} g$ とは $j^r f(0)$ と $j^r g(0)$ とが \mathcal{A} -軌道の同じ弧状連結成分に属することと必要十分である. さらに, 向きを保つ微分同相写像の r -ジェットの集合 $\text{Diff}^{r,+}(m)$ が弧状連結であるので, 向きを保つ微分同相写像 $\sigma^+ : (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^m, 0)$ と $\tau^+ : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ が存在して $j^r g(0) = j^r(\tau^+ \circ f \circ \sigma^+)(0)$ が成り立つことと必要十分である.

判定法を応用して次がわかる. 写像芽 $f \in C^\infty(n, n)$ は n -モラン特異点とするとき,

- $n = 4i + 1, i \neq 0$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}}$

$$F_\varepsilon^{4i+1} := \left(x_1, \dots, x_{4i}, \varepsilon(t^{4i+2} + tx_1 + \dots + t^{4i-1}x_{4i-1} + t^{4i}x_{4i}) \right), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

さらに, $F_{+1}^{4i+1} \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{-1}^{4i+1}$.

- $n = 1$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}} F_\varepsilon^1 := \varepsilon t^2$. さらに, $F_{+1}^1 \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{-1}^1$.
- $n = 4i + 2$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}}$

$$F_\varepsilon^{4i+2} := \left(x_1, \dots, x_{4i}, x_{4i+1}, \varepsilon(t^{4i+3} + tx_1 + \dots + t^{4i+1}x_{4i+1}) \right), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

さらに, $F_{+1}^{4i+2} \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{-1}^{4i+2}$.

- $n = 4i + 3$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}}$

$$F_\varepsilon^{4i+3} := \left(\varepsilon x_1, \dots, x_{4i+2}, t^{4i+4} + tx_1 + \dots + t^{4i+1}x_{4i+1} + t^{4i+2}x_{4i+2} \right), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

さらに, $F_{+1}^{4i+3} \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{-1}^{4i+3}$.

- $n = 4i$ のとき, $f \sim_{i\mathcal{A}}$

$$F_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^{4i} := \left(\varepsilon_1 x_1, \dots, x_{4i+2}, x_{4i+3}, \varepsilon_2(t^{4i+1} + \varepsilon_1 tx_1 + t^2 x_2 + \dots + t^{4i+2}x_{4i+2} + t^{4i+3}x_{4i+3}) \right), \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1.$$

さらに, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)$ ならば $F_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^{4i} \not\sim_{i\mathcal{A}} F_{(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)}^{4i}$.

1-モラン特異点に関しては [2, 3] で, \mathcal{A} 軌道のホモトピー型が調べられている. 他の応用については [52, 64] を参照.

3.2. カस्प辺近辺の様相

写像芽の \mathcal{A} -同値は像域の微分同相写像を用いるので, 特異点の微分幾何的情報は失われる. 近年, 特異点の種類を固定して, 特異点の近くで微分幾何的性質を研究することが盛んに行われている ([6, 12, 16, 42]). ここでは判定法の一つの応用として, カस्प辺近辺の幾何的模様の研究を報告する. 判定法を用いて, カस्प辺のモンジュ標形とも言うべき次が示せる.

補題 4. [30] 波面 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ に対して p はカस्प辺とする. このとき, 定義域の微分同相写像と像域のユークリッド等距離同型により f は

$$\left(u, \frac{a_{20}}{2}u^2 + \frac{a_{30}}{6}u^3 + \frac{1}{2}v^2, \frac{b_{20}}{2}u^2 + \frac{b_{30}}{6}u^3 + \frac{b_{12}}{2}uv^2 + \frac{b_{03}}{6}v^3 \right) + h(u, v)$$

$$a_{20}, a_{30}, b_{20}, b_{30}, b_{12}, b_{03} \in \mathbf{R}, \quad (b_{03} \neq 0, b_{20} \geq 0)$$

の形になる. ただし $h(u, v)$ は 4 次以上の項である.

カस्प辺の近くにおいても通常と同様に

$$(EM - FL) du^2 + (EN - GL) dudv + (FN - GM) dv^2 = 0, \quad (1)$$

$$L du^2 + 2M dudv + N dv^2 = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (L(GL - EN) - 2M(FL - EM)) du^2 \\ & + 2(M(GL + EN) - 2FLN) dudv \\ & + (2M(GM - FN) - N(GL - EN)) dv^2 = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

(ただし, (u, v) は座標であり, $E = \langle f_u, f_u \rangle$, $F = \langle f_u, f_v \rangle$, $G = \langle f_v, f_v \rangle$, $L = \langle f_{uu}, \nu \rangle$, $M = \langle f_{uv}, \nu \rangle$, $N = \langle f_{vv}, \nu \rangle$ である.) により, 上からそれぞれ曲率線, 漸近線, 特性曲線による模様が定義される. さて, $a_i du^2 + 2b_i dudv + c_i dv^2$ ($i = 1, 2$) の定める模様が同じとは位相同型 $(\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$ と $\{v \neq 0\}$ で 0 にならない関数倍で両者が移り合うときをいう.

ジェネリック (係数の空間内で余次元 1) な模様は係数 $a_{20}, a_{30}, b_{20}, b_{30}, b_{12}, b_{03}$ のみで定まり, 次のようになる ([31]).

曲率線 常に $du^2 - dv^2$ の定める模様と同じ (図 1 左).

漸近線 $b_{20} \neq 0$ ならば $udu^2 + dv^2$ の定める模様と同じ (図 1 右). $b_{20} = 0, b_{30} - a_{20}b_{12} \neq 0, \Delta \neq 0, 4b_{12}^3 + b_{03}^2 b_{30} \neq 0$ のとき, 図 2 のどれかと同じ.

特性曲線 $b_{20} \neq 0$ ならば $udu^2 + dv^2$ と同じ (図 1 右). $b_{20} = 0, b_{30} - a_{20}b_{12} \neq 0, \Delta \neq 0, 4b_{12}^3 + b_{03}^2 b_{30} \neq 0$ のとき, 図 2 のどれかと同じ.

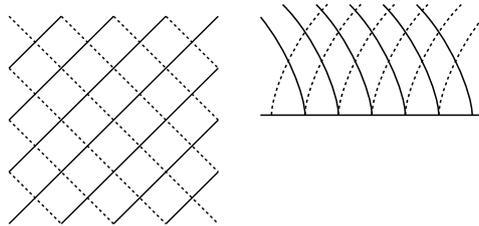


図 1: 模様その 1

注意 5. b_{20} はカस्प辺の法曲率であり, $b_{30} - a_{20}b_{12}$ はその微分である. 条件 $4b_{12}^3 + b_{03}^2 b_{30} \neq 0$ はカस्प辺の平行曲面がスワローテイルにならないという条件である ([62]).

カस्प辺以外の特異点近辺における模様については [5, 13, 15] 等を参照.

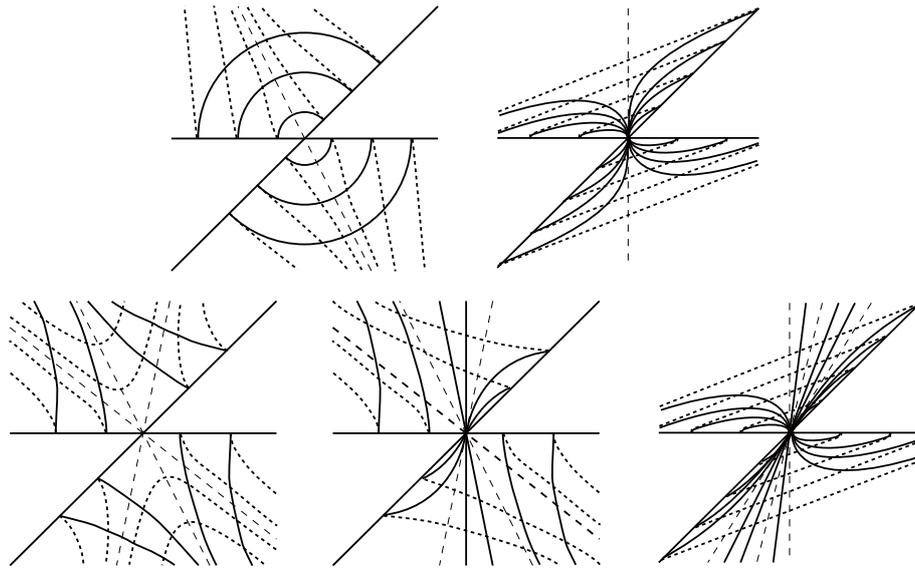


図 2: 模様その2

3.3. 接続接束とその特異点

ここでは波面の内的な定式化である接続接束とその応用を述べる.

定義 6. m 次元有向多様体 M 上の接続接束とは,

- (1) E は M 上階数 m の有向ベクトル束,
- (2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は E 上の計量で, D はこの計量に適合する接続,
- (3) $\varphi: TM \rightarrow E$ は

$$D_X\varphi(Y) - D_Y\varphi(X) = [X, Y] \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

をみたす束準同型,

の組 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ のことをいう ([54, 57]).

次の二つの例は基本的である.

例 7. (1) M を m 次元多様体, (N, g) を m 次元リーマン多様体とし, $f: M \rightarrow N$ を同次元間の写像とする. $E_f = TN|_{f(M)}$ を TN の $f(M)$ への制限とし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を g が E_f に誘導する計量とし, g のレビ-チビタ接続の制限を D とする. $\varphi_f = df: TM \rightarrow E_f$ とすると, $(E_f, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi_f)$ は接続接束となる. これを同次元間の写像 f から誘導された接続接束という.

(2) M を m 次元多様体, (N, g) を $m+1$ 次元リーマン多様体とし, $f: M \rightarrow N$ を波面的写像とする. $E_f = \nu(p)^\perp \subset TN|_{f(M)}$ を $\nu(p)$ の直交補空間とし,

$$\varphi_f(X) = df(X)$$

とする. D を g のレビ-チビタ接続の $f(M)$ の接成分への制限, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を g から誘導された計量とすると, $(E_f, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi_f)$ は接続接束となる. これを波面的写像 f から誘導された接続接束という.

点 $p \in M$ が φ の特異点 (φ -特異点) であるとは, $\varphi_p : T_p M \rightarrow E_p$ が $\ker \varphi_p \neq \{0\}$ であるときをいう.

定義から, 局所的に自明化 (と自然な基底) をとると φ は M 上の $m \times m$ 行列に値をとる関数とみなすことができ, λ をこの行列の行列式とすると, φ -特異点は $\lambda = 0$ となる点と一致する. また, φ -特異点の余階数をこの行列の余階数で定義する. 余階数が1の φ -特異点 p に関して p のある近傍 U が存在して, U 上のベクトル場 η が存在して $q \in U \cap S(\varphi)$ 上で常に

$$\ker \varphi(q) = \langle \eta(q) \rangle_{\mathbb{R}}$$

が成り立つ. φ -特異点 p が非退化であるとは, $d\lambda \neq 0$ のときと定義する. 判定法を参考に, A_{k+1} - φ -特異点を次のように定義する.

定義 8. 接続接束 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$ の特異点 p が A_{k+1} - φ -特異点であるとは

- $\eta\lambda(p) = \dots = \eta^{k-1}\lambda(p) = 0, \eta^k\lambda(p) \neq 0,$
- $\text{rank } d_p(\lambda, \eta\lambda, \dots, \eta^{k-1}\lambda) = k$

が成り立つときをいう.

判定法から, 例7で構成された同次元間の写像 (波面) f から誘導された接続接束 φ_f に対して, p が A_{k+1} - φ_f -特異点であることの必要十分条件は p が f の k -モラン特異点 (A_{k+1} -特異点) である. $m = 2$ とする. このとき, 非退化な φ -特異点の近くで特異点の集合は正則曲線となり, いろいろな微分幾何的不変量が定義される. p を非退化な φ -特異点とし, p の近くでの φ -特異点の集合のパラメーター表示を $\gamma(t)$ とする.

$$\kappa_s(t) = -\text{sgn}(\eta\lambda) \frac{\langle D_{\gamma'} n, \varphi(\gamma') \rangle}{|\varphi(\gamma')|^3}$$

を特異曲率と呼ぶ. ここで, n は $\mu(\varphi(\gamma'), n) > 0$ をみたす E の単位切断であり, μ は $p \in M$ に対して E_p の正規直交枠 e_1, e_2 に対して $\mu_p(e_1, e_2) = 1$ となる歪対称双線型形式である.

$$M^+ = \{p \in M \mid \lambda > 0\}, \quad M^- = \{p \in M \mid \lambda < 0\}$$

とする. p を A_3 - φ -特異点とする. このとき, 定義から $\eta\eta\lambda \neq 0$ であるので, η は $S(\varphi)$ に対して二点接触する. η が M^+ を指し示すとき, p は $+$ の A_3 - φ -特異点とよび, そうでないとき, $-$ の A_3 - φ -特異点とよぶ. このとき次のガウス・ボンネ型の定理が成り立つ.

定理 9 ([54, 57]). $S(\varphi)$ は A_2, A_3 - φ -特異点のみをもつとする. このとき,

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \frac{1}{2\pi} \int_M K d\hat{A} = \chi(M^+) - \chi(M^-) + S^+ - S^-, \\ \frac{1}{2\pi} \int_M K dA &= \chi(M) - \frac{1}{\pi} \int_{S(\varphi)} \kappa_s d\tau. \end{aligned}$$

ここで, S^+, S^- はそれぞれ正, 負の A_3 - φ -特異点の数をあらわし, K は D に関するガウス曲率, $d\hat{A}, dA$ は座標 (u, v) をとったときにそれぞれ $d\hat{A} = \lambda du \wedge dv, dA = |\lambda| du \wedge dv$ で定まるものとする.

系 10 ([28, 27, 54]). M を有向2次元多様体, N を有向3次元多様体とし, $f: M \rightarrow N$ を特異点としてカスプ辺とスワローテイルのみを持つものとする. このとき, 次が成り立つ. (ただし, S^+, S^- はそれぞれ正, 負のスワローテイルの数)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_M K d\hat{A} &= \chi(M^+) - \chi(M^-) + S^+ - S^-, \\ \frac{1}{2\pi} \int_M K dA &= \chi(M) - \frac{1}{\pi} \int_{S(\varphi)} \kappa_s d\tau. \end{aligned}$$

系 11 ([46]). M, N を有向2次元多様体とし, $f: M \rightarrow N$ を特異点として折り目とカスプのみをもつものとする. このとき, 次が成り立つ. (C^\pm は正, 負のカスプの数)

$$\deg(f)\chi(N) = \chi(M^+) - \chi(M^-) + C^+ - C^-.$$

系 12 ([29]). M を有向2次元多様体とし, $f: M \rightarrow \mathbf{R}^2$ を特異点として折り目とカスプのみをもつものとする. $S(f) = C_1 \cup \dots \cup C_n$ を単純閉曲線の非交和とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\frac{\chi(M)}{2} = R(C_1) + \dots + R(C_n).$$

ただし, $R(C_j) \in \mathbf{Z}/2$ は $f(C_j)$ の回転数である.

波面には単位法線ベクトルがある. 単位法線ベクトルも接続接束を誘導するのでそれを考慮に入れると二つの接続接束が定義される. 波面を単位法線ベクトルを込めて内的に定式化した概念も得られる. それらの接続接束に対して, 定理9を適用すると, 合計4個の等式が得られる[57]. これらの中には知られていたものもあるが, 新しい公式もある. 例えば次が従う.

系 13 ([4, p287]). M を有向閉曲面とし, $f: M \rightarrow \mathbf{R}^3$ をはめ込みとする. f の単位法線ベクトル $\nu: M \rightarrow S^2$ の特異点は折り目とカスプのみであるとする. このとき,

$$2\chi(\{K < 0\}) = C^+ - C^-$$

が成り立つ. ただし, $\{K < 0\} \subset M$ はガウス曲率が負の部分をあらわし, C^+, C^- はそれぞれ正, 負の ν のカスプの個数をあらわす.

系 14 ([57]). $f: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を凸はめ込み (単位法線ベクトル ν が特異点を持たないはめ込み) とし, $f_t = f + t\nu$ ($t \in \mathbf{R}$) を f の平行曲面とする. f_t の特異点がカスプ辺とスワローテイルのみからなるならば,

$$2\chi(\{K_t < 0\}) = S_t^+ - S_t^-$$

が成り立つ. ただし, $\{K_t < 0\} \subset M$ は f_t のガウス曲率が負の部分をあらわし, S_t^\pm は正, 負のスワローテイルの個数をあらわす.

\mathbf{R}^3 内の曲面とその単位法線ベクトルに対応する概念が, ミンコフスキー空間内の擬球面内の曲面に関するルジャンドル双対性として [20] によって整備され, 様々な研究が行われている. この枠組の上で例えば, $f: M \rightarrow LC^* \subset \mathbf{R}_1^4$ を空間的曲面とすると,

双対曲面 $f_l : M \rightarrow LC^*$, $f_h : M \rightarrow H^3(-1)$, $f_s : M \rightarrow S_1^3(1)$ が得られる. これらの特異点がカस्प辺とスワローテイルのみであれば, 定理 9 が f と全ての双対曲面に対して成立する.

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Vol. 1, Monogr. Math. **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [2] Y. Ando, *The homotopy type of the space consisting of regular jets and folding jets in $J^2(n, n)$* , Japan. J. Math. **24** (1998), 169–181.
- [3] Y. Ando, *Smooth maps having only singularities with Boardman symbol $(1, 0)$* , Topology Appl. **142** (2004), 205–226.
- [4] D. Bleecker and L. Wilson, *Stability of Gauss maps*, Illinois J. Math. **22** (1978), 279–289.
- [5] J. W. Bruce and F. Tari, *On binary differential equations*, Nonlinearity **8** (1995), 255–271.
- [6] J. W. Bruce and J. M. West, *Functions on a crosscap*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), 19–39.
- [7] N. Dutertre and T. Fukui, *On the topology of stable maps*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), no. 1, 161–203.
- [8] T. Ekholm and M. Takase, *Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions*, Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), 251–266.
- [9] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [10] T. Fukuda, *Topology of folds, cusps and Morin singularities*, A fête of topology, (1988), 331–353.
- [11] 福田拓生・西村尚史, 特異点と分岐, 共立出版, 2002.
- [12] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella – a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35–67.
- [13] R. Garcia, C. Gutierrez, and J. Sotomayor, *Lines of principal curvature around umbilics and Whitney umbrellas*, Tohoku Math. J. **52** (2000), 163–172.
- [14] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Math. **14** Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [15] V. Guíñez, *Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), 477–502.
- [16] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps* Selecta Math. **20** (2014), 769–785.
- [17] G. Ishikawa and Y. Machida, *Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature*, Internat. J. Math. **17** (2006), 269–293.
- [18] 泉屋周一・石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版, 1998.
- [19] 泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩, 幾何学と特異点, 共立出版, 2001.
- [20] S. Izumiya, *Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone*, Moscow Math. J. **9** (2009), no. 2, 325–357.
- [21] S. Izumiya, *The theory of graph-like Legendrian unfoldings and its applications*, J. Singul. **12** (2015), 53–79.
- [22] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92–127.

- [23] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789–849.
- [24] S. Izumiya and M. Takahashi, *Caustics and wave front propagations: applications to differential geometry*, Geometry and topology of caustics CAUSTICS '06, 125–142, Banach Center Publ. **82**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008.
- [25] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), 265–299.
- [26] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), no. 2, 303–351.
- [27] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 19–29.
- [28] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Classes d'homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d'aronde dans \mathbb{R}^3* , Canad. J. Math. **47** (1995), 544–572.
- [29] H. Levine, *The singularities, S_1^q* , Illinois J. Math. **8** (1964), 152–168.
- [30] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, to appear in Canad. J. Math.
- [31] L. F. Martins and K. Saji, *On pairs of geometric foliations on a cuspidal edge*, preprint.
- [32] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature around non-degenerate singular points on wave fronts*, preprint.
- [33] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings. VI: The nice dimensions*, Proc. Liverpool Singularities-Symposium I, Lecture Notes in Math. **192**, 207–253, Springer, Berlin, 1971.
- [34] D. Mond, *On the classification of germs of maps from \mathbf{R}^2 to \mathbf{R}^3* , Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 333–369.
- [35] B. Morin, *Formes canoniques des singularites d'une application differentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 5662–5665.
- [36] B. Morin, *Formes canoniques des singularites d'une application differentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 6503–6506.
- [37] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Differential Geom. **82** (2009), 279–316.
- [38] K. Naokawa, *Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips*, Osaka J. Math. **50** (2013), 425–437.
- [39] T. Nishimura, *Criteria for right-left equivalence of smooth map-germs*, Topology **40** (2001), 433–462.
- [40] T. Nishimura, *Whitney umbrellas and swallowtails*, Pacific J. Math. **252** (2011), 459–471.
- [41] 野口廣・福田拓生, 初等カタストロフイー, 共立出版, 1976.
- [42] R. Oset Sinha and F. Tari, *Projections of surfaces in \mathbf{R}^4 to \mathbf{R}^3 and the geometry of their singular images*, Rev. Mat. Iberoam. **31** (2015), 33–50.
- [43] I. R. Porteous, *Simple singularities of maps*, Proc. Liverpool Singularities Sympos., I (1969/70), Lecture Notes in Math., Vol. **192**, Springer, Berlin, 1971, 286–307.
- [44] R. Porter, *Characteristic classes and singularities of mappings*, Differential geometry, (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 27, Part 1, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), 397–402.
- [45] J. H. Rieger, *Families of maps from the plane to the plane*, J. London Math. Soc. **36** (1987), 351–369.

- [46] J. R. Quine, *A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978), 307–314.
- [47] O. Saeki, *Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **117** (1995), 223–235.
- [48] O. Saeki and K. Sakuma, *Maps with only Morin singularities and the Hopf invariant one problem*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **124** (1998), 501–511.
- [49] K. Saji, *Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications*, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 229–239.
- [50] K. Saji, *Criteria for cuspidal S_k singularities and their applications*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **4** (2010), 67–81.
- [51] K. Saji, *Criteria for D_4 singularities of wave fronts*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 137–147.
- [52] K. Saji, *Isotopy of Morin singularities*, preprint.
- [53] K. Saji, *Criteria for Morin singularities into higher dimensions*, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.
- [54] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.
- [55] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [56] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka J. Math. **47** (2010), 591–607.
- [57] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, J. Geom. Anal. **22** (2012), no. 2, 383–409.
- [58] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *An index formula for hypersurfaces which admit only generic corank one singularities*, preprint.
- [59] T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, *The hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation*, Experiment. Math. **17** (2008), 269–282.
- [60] E. Szabó, A. Szücs, and T. Terpai, *On bordism and cobordism groups of Morin maps*, J. Singul. **1** (2010), 134–145.
- [61] A. Szücs, *On the cobordism groups of cooriented, codimension one Morin maps*, J. Singul. **4** (2012), 196–205.
- [62] K. Teramoto, *Parallel and dual surfaces of cuspidal edges*, preprint.
- [63] R. Uribe-Vargas, *A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve*, Moscow Math. J. **6**, (2006), 731–768.
- [64] T. Yoshida, Y. Kabata, T. Ohmoto, *Bifurcation of plane-to-plane map-germs of corank 2*, Quart. J. Math. **66** (2015), 369–391.