Circuiti elementari

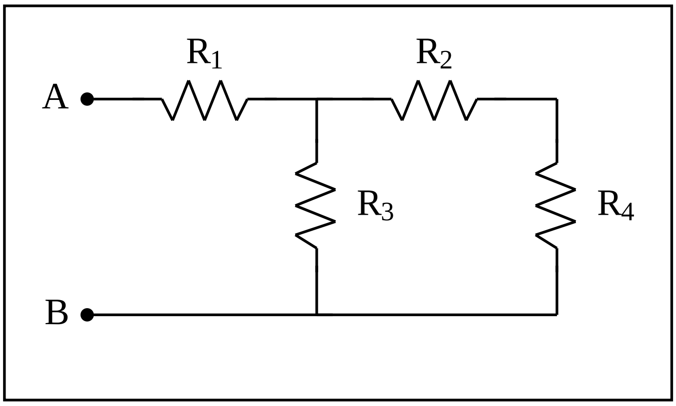
Gli esercizi proposti in questa sezione hanno lo scopo di introdurre l’allievo ad alcune tecniche, semplici e fondamentali, di analisi dei circuiti elettrici. Queste tecniche costituiranno, poi, un passo nella soluzione di esempi più complicati o nell’applicazione di metodi risolutivi più elaborati.

Pensiamo che lo studente possa trarre un buon profitto da questi esercizi preparatori che, se da un lato lo aiutano a riflettere su alcuni aspetti teorici che è bene abbia sempre presenti, dall’altro gli garantiscono la necessaria manualità per affrontare quesiti più impegnativi.

Gli esercizi sono pensati per farvi applicare le tecniche di costruzione del bipolo equivalente (serie e parallelo) e le trasformazioni triangolo-stella e stella-triangolo, per farvi usare le regole del partitore di corrente e di tensione, per aiutarvi a risolvere semplici reti mediante le leggi di Kirchhoff e la sovrapposizione degli effetti.

Esercizio P-1

Si determini la resistenza equivalente ‘vista’ dai terminali A e B.

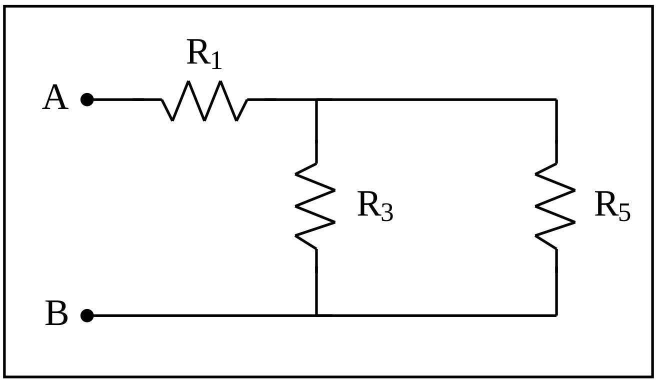


Dati: $R_1 = 10$, $R_2 = 4$, $R_3 = 10$, $R_4 = 6$.

Cominciamo ad osservare che i due resistori R_2 e R_4 sono in serie e, pertanto, possono essere sintetizzati nell’unico resistore

$$R_5 = R_2 + R_4 = 10 .$$

La rete può, allora, semplificarsi come mostrato nella figura che segue.



Da quest’ultima figura si deduce agevolmente che R_3 e R_5 sono in parallelo e che questo parallelo è in serie con R_1. In formule, si può scrivere che

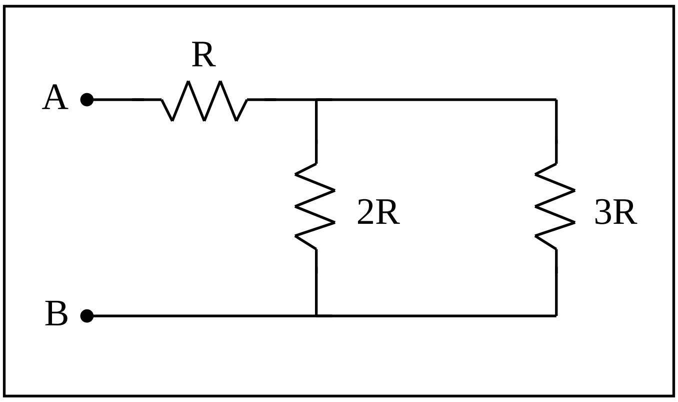
$$R_{AB} = R_1 + R_3 \,||\, R_5 = 10 + 10 \,||\, 10 = 10 + 5 = 15 ,$$

avendo indicato con R_{AB} la resistenza equivalente ‘vista’ dai morsetti A e B.

Esercizio da svolgere

Per la rete mostrata in figura, si determini il valore di R per cui risulta

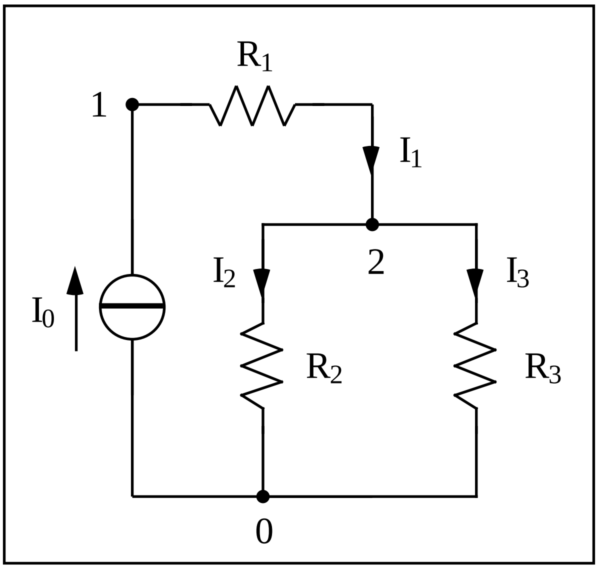
$R_{AB} = 33$.



Risposta: R = 15.

Esercizio P-2

Si determini le potenza associata a ciascun elemento del circuito di figura.



Dati: I_0 = 30, R_1 = 6, R_2 = 60, R_3 = 40.

La potenza che caratterizza il funzionamento di ciascun componente può essere valutata per mezzo delle espressioni:

- $P_0 = V_{10}\, I_0$ (potenza *erogata* dal generatore di corrente) ,
- $P_1 = R_1\, I_1^2$ (potenza *assorbita* dal resistore R_1) ,
- $P_2 = R_2\, I_2^2$ (potenza *assorbita* dal resistore R_2) ,
- $P_3 = R_3\, I_3^2$ (potenza *assorbita* dal resistore R_3) .

Bisogna, quindi, calcolare la differenza di potenziale V_{10} e le due correnti I_2 e I_3, dato che è evidente che $I_1 = I_0 = 30$. Le due correnti sono valutabili considerando che deve essere rispettata la legge per le tensioni di Kirchhoff alla maglia formata dai due resistori R_2 e R_3

$$R_2\, I_2 = R_3\, I_3 \quad \rightarrow \quad 3\, I_2 = 2\, I_3 \ ,$$

e che l’applicazione della legge per le correnti al nodo 2 comporta che

$I_0 = I_2 + I_3 \quad \rightarrow \quad I_2 + I_3 = 30 .$

Risolvendo il sistema composto dalle due precedenti equazioni, si ottiene immediatamente:

$I_2 = 12 , \quad I_3 = 18 .$

Ne consegue che le potenze *assorbite* nei resistori valgono

$P_1 = R_1\, I_1^2 = 5400 , \quad P_2 = R_2\, I_2^2 = 8640 , \quad P_3 = R_{31}\, I_3^2 = 12960 .$

Essendo la resistenza equivalente tra i morsetti 2 e 0 pari a

$$R_{20} = \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3} = 24 ,$$

la differenza di potenziale ai capi del generatore e la potenza da esso *erogata* varranno

$V_{10} = \left(R_1 + R_{20}\right) I_0 = 900 , \quad P_0 = V_{10}\, I_0 = 27000 .$

Si noti che il *teorema di conservazione delle potenze* consente di verificare la correttezza dei risultati ottenuti, essendo

$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 .$

```
Esercizio P-2
*Codifica Spice
R1   1   2   6
R2   2   0   60
R3   2   0   40
I0   0   1   30
.END
```

Esercizio da svolgere

Ripetere l’esercizio precedente sostituendo il generatore di corrente con uno di tensione $E_0 = 150$.

Risposta: assumendo nullo il potenziale del nodo 0, risulta che

$V_1 = 150$, $V_2 = 120$,

e, pertanto, le tre correnti saranno pari a

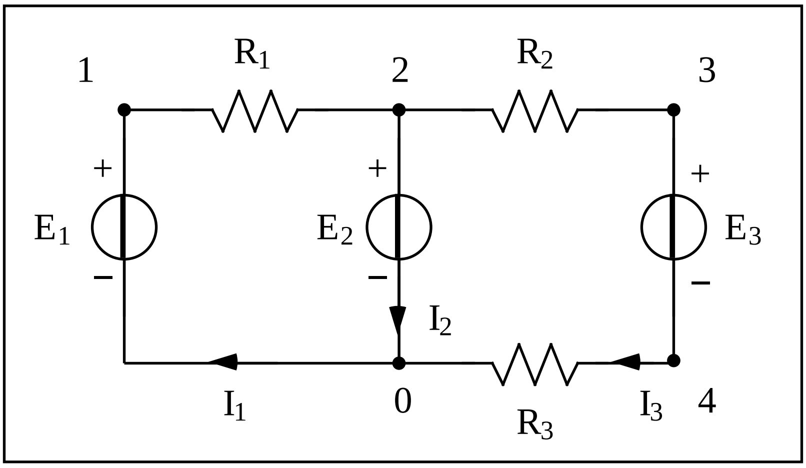
$I_1 = 5$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3$.

La conservazione delle potenze risulta verificata, essendo

$$E_0\, I_1 = 750 = R_1\, I_1^2 + R_2\, I_2^2 + R_3\, I_3^2 = 150 + 240 + 360 \,.$$

Esercizio P-3

Risolvere il circuito mostrato in figura determinando la potenza erogata da ciascun generatore.



Dati: $E_1 = 10$, $E_2 = 20$, $E_3 = 30$, $R_1 = 4$, $R_2 = 1$, $R_3 = 3$.

La differenza di potenziale tra i nodi 2 e 0 è imposta dal generatore E_2: ai fini del calcolo della potenza associata al generatore E_1, la porzione del circuito rappresentato a destra dei morsetti 2 e 0 non interviene. Si può, infatti, considerare la LKT relativa al percorso chiuso costituito da E_1 - R_1 - E_2, e scrivere

$$E_1 - E_2 - R_1 I_1 = 0 ,$$

per ottenere immediatamente

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1} = - 2.5 .$$

Pertanto, la potenza erogata dal generatore E_1 vale:

$$P_1 = E_1 I_1 = - 25 .$$

Il fatto che la potenza P_1 sia negativa vuol dire che questo generatore, in realtà, sta assorbendo dalla rimanente parte della rete una potenza di 25 watt.

Anche il generatore E_3 eroga una potenza che non dipende da ciò che è collegato a sinistra dei morsetti 2 e 0 e, quindi, si può scrivere:

$$E_2 - E_3 - (R_2 + R_3)\, I_3 = 0 \quad \rightarrow \quad I_3 = \frac{E_2 - E_3}{R_2 + R_3} = -\, 2.5 \; .$$

La potenza erogata dal generatore E_3 vale (si noti il verso di I_3)

$$P_3 = -\, E_3\, I_3 = 75 \; .$$

Applicando la LKC al nodo 2 è facile verificare che la corrente I_2 è nulla e, pertanto, si può scrivere che la potenza erogata dal generatore E_2 (si faccia attenzione al verso di I_2) vale

$$P_2 = -\, E_2\, I_2 = 0 \; .$$

Come verifica, si può determinare la potenza complessivamente assorbita dai resistori e constatare che essa coincide con quella erogata dai tre generatori:

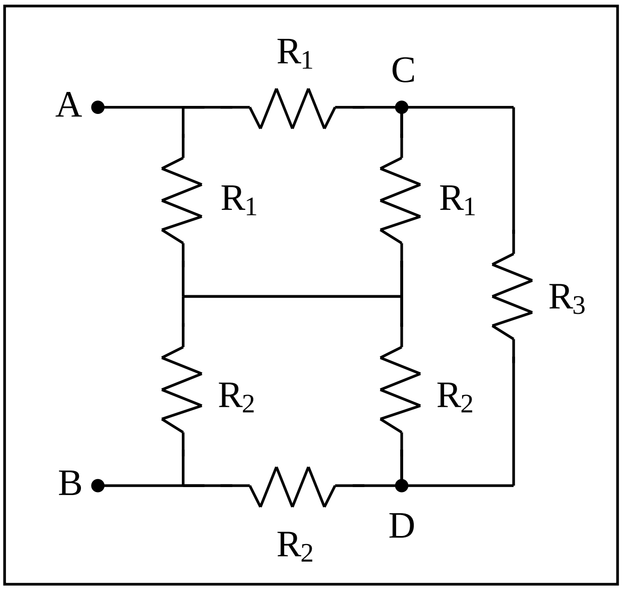
$$R_1\, I_1^2 + R_2\, I_2^2 + R_3\, I_3^2 = 50 \; .$$

```
Esercizio P-3
*Codifica Spice
R1     1    2    4
R2     2    3    1
R3     4    0    3
V1     1    0    10
V2     2    0    20
V3     3    4    30
.END
```

Nel file di uscita prodotto dal compilatore Spice trovate anche l’indicazione ‘total power dissipation = 50 watt’, che coincide con la potenza complessivamente erogata dai soli generatori di tensione (e nell’esempio appena svolto sono presenti solo generatori indipendenti di tensione). Qualora fossero presenti anche dei generatori indipendenti di corrente, la potenza messa in gioco da questi ultimi non viene esplicitamente indicata da Spice.

Esercizio da svolgere

Per il circuito di figura trovare il valore della tensione V_{AB}, sapendo che $V_{CD} = 100$.

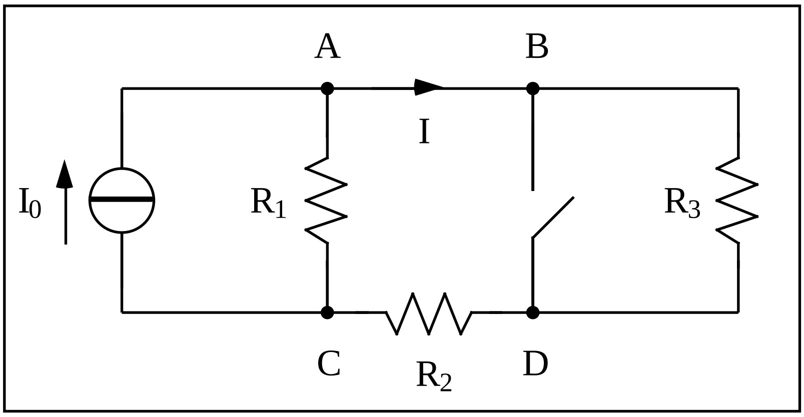


Dati: $R_1 = 9$, $R_2 = 6$, $R_3 = 2.5$.

Risposta: $V_{AB} = 800$.

Esercizio P-4

Per il circuito mostrato in figura determinare la corrente I nelle condizioni di interruttore sia chiuso che aperto.



Dati: $I_0 = 15$, $R_1 = 1$, $R_2 = 4$, $R_3 = 10$.

• Tasto chiuso

In questa prima condizione di funzionamento il resistore R_3 è in corto circuito e, pertanto, applicando la regola del partitore di corrente, si può scrivere

$$I = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 15 \frac{1}{1 + 4} = 3 \; .$$

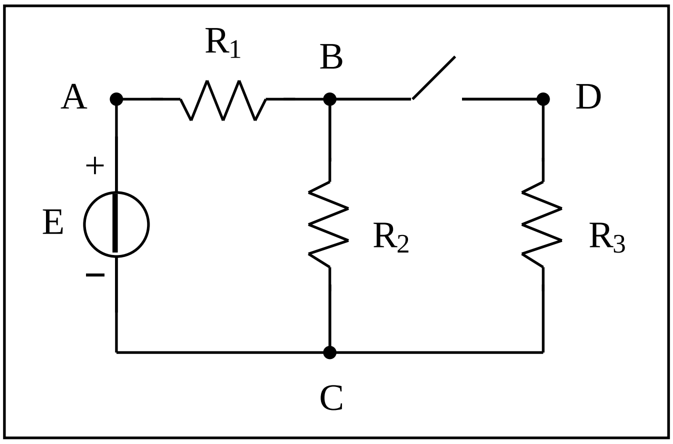
• Tasto aperto

In questa seconda condizione di funzionamento il resistore R_3 è in serie con R_1 e, quindi, applicando di nuovo la regola del partitore di corrente, si ottiene

$$I = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 15 \frac{1}{1 + 4 + 10} = 1 \; .$$

<u>Esercizio da svolgere</u>

Per il circuito mostrato in figura determinare la differenza di potenziale V_{BC} nelle condizioni di interruttore sia aperto che chiuso.



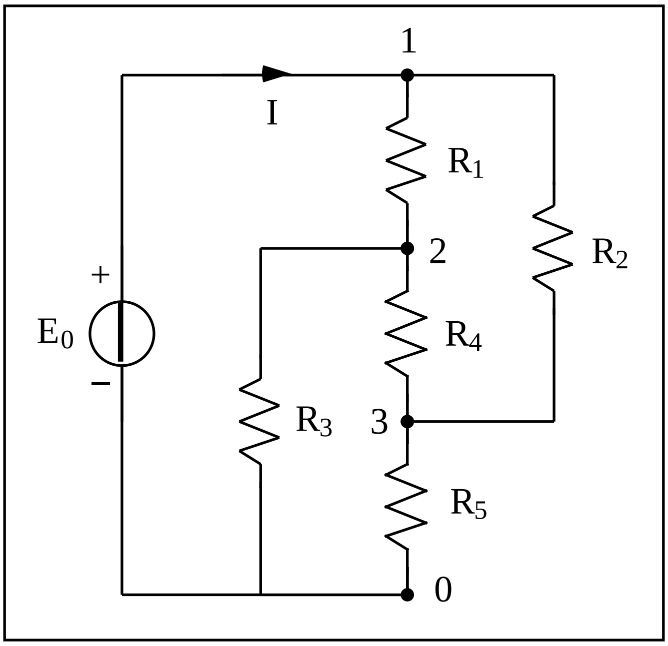
Dati: $E = 15$, $R_1 = 1$, $R_2 = 4$, $R_3 = 4$.

Risposta:

- tasto aperto : $V_{BC} = 12$;
- tasto chiuso : $V_{BC} = 10$.

Esercizio P-5

Determinare la potenza erogata dal generatore per la rete mostrata in figura.



Dati: $E_0 = 50$, $R_1 = R_2 = 4$, $R_3 = R_5 = 6$, $R_4 = 8$.

Si cominci a trasformare il triangolo costituito dai resistori R_1, R_2 e R_4 nella stella equivalente mostrata nella figura che segue. Come è noto dalla teoria, i valori dei resistori equivalenti sono:

$$R_A = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2 + R_4} = 1\ , \quad R_B = \frac{R_1\,R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = 2\ , \quad R_C = \frac{R_2\,R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = 2\ .$$

La resistenza totale ‘vista’ dal generatore è, quindi:

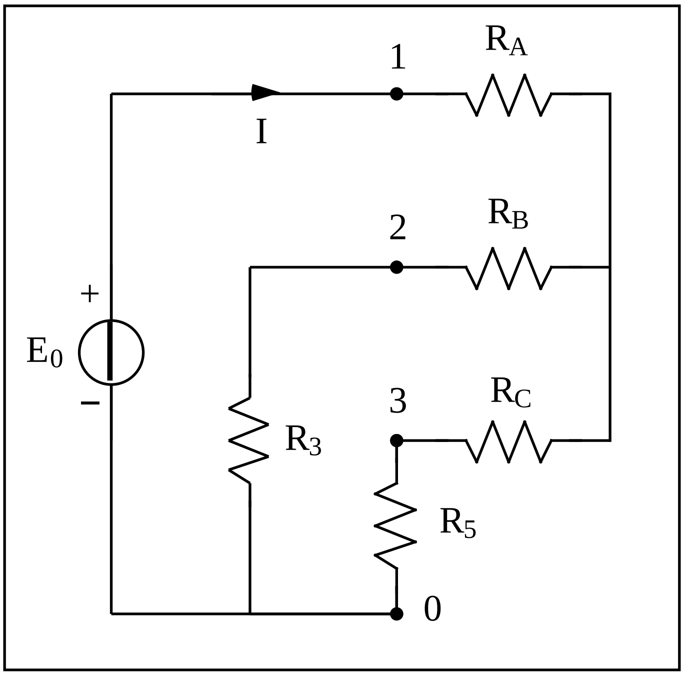
$$R_0 = R_A + \frac{(R_B + R_3)\,(R_C + R_5)}{R_B + R_3 + R_C + R_5} = 5\ .$$

Si deduce, allora, immediatamente il valore della corrente

$$I = \frac{E_0}{R_0} = 10\ ,$$

da cui discende la potenza erogata dal generatore

$$P = E_0\, I = 500\ .$$

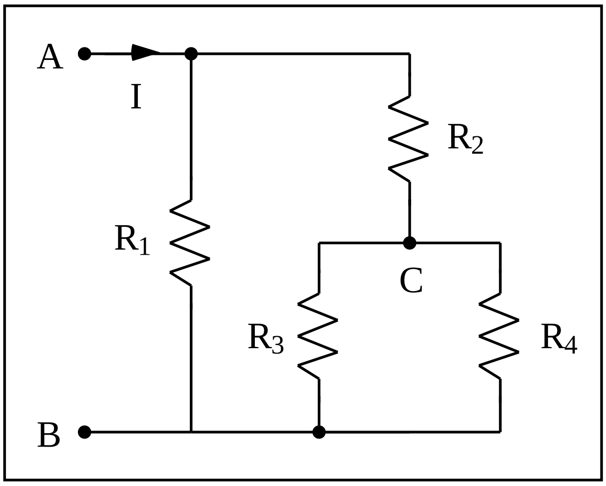


Per controllare i risultati riportati, si adoperi il listato Spice di seguito riportato.

```
Esercizio P-5
*Codifica Spice
VE   1   0   50
R1   1   2   4
R2   1   3   4
R3   2   0   6
R4   2   3   8
R5   3   0   6
.END
```

Esercizio da svolgere

Per il circuito mostrato in figura determinare la corrente I sapendo che $V_{CB} = 30$.

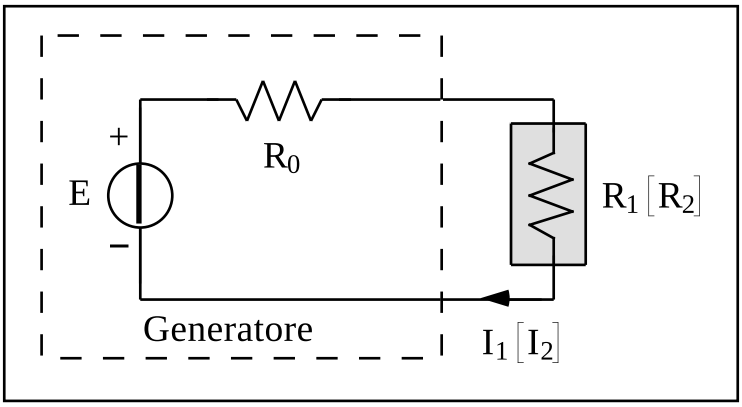


Dati: $R_1 = 10$, $R_2 = 7$, $R_3 = 7.5$, $R_4 = 5$.

Risposta: $I = 20$.

Esercizio P-6

I due terminali di un generatore sono collegati una prima volta con un filo di resistenza $R_1 = 4$, una seconda volta con un filo di resistenza $R_2 = 9$. Sapendo che le quantità di calore sviluppate intorno ai fili sono uguali nei due casi, determinare la resistenza interna del generatore.



Dette I_1 e I_2 le intensità delle correnti che percorrono i due fili (schematizzati come resistori) di 4 Ω e di 9 Ω, la quantità di calore che si sviluppa in entrambi i casi vale

$$Q = R_1\, I_1^2\, \Delta t = R_2\, I_2^2\, \Delta t \ ,$$

in cui si è indicato con Δt l’intervallo di tempo in cui si è osservato il riscaldamento (la cui conoscenza non serve a risolvere l’esercizio). Sostituendo i valori numerici assegnati, è immediato scrivere che

$$4\, I_1^2 = 9\, I_2^2 \quad \rightarrow \quad I_1 = 1.5\, I_2 \ .$$

Indicando con R_0 la resistenza interna del generatore E, si ha pure

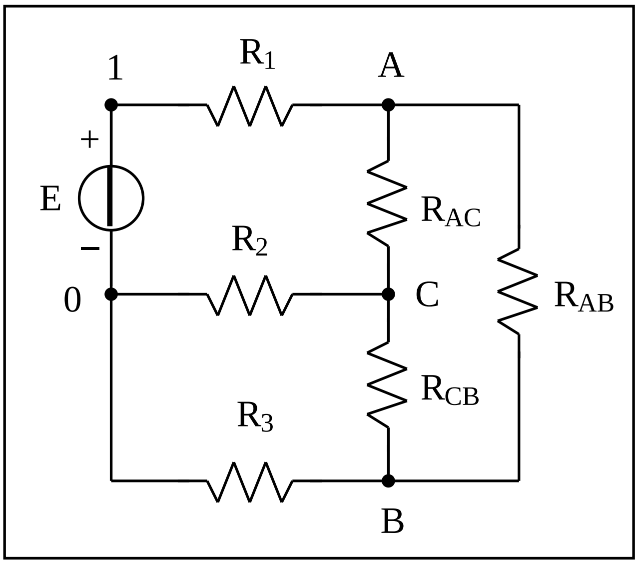
$$E = \left(R_1 + R_0\right) I_1 = \left(R_2 + R_0\right) I_2 \ ,$$

da cui discende

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + R_0}{R_1 + R_0} = 1.5 \quad \rightarrow \quad R_0 = 6 \ .$$

Esercizio da svolgere

Calcolare la potenza erogata dal generatore.



Dati: $E = 100$, $R_1 = 6.5$, $R_2 = 1$, $R_3 = 3$, $R_{AB} = 3$, $R_{CB} = 6$, $R_{AC} = 9$.

Risposta: $P_E = 1$ kW.

```
Esercizio P-6
*Codifica Spice
VE      1   0   100
R1      1   A      6.5
R2      0   C   1
R3      0   B   3
RAC     A   C   9
RCB     C   B   6
RAB     A   B   3
.END
```

Esercizio P-7

Si determini il valore della temperatura di regime di un avvolgimento in rame sapendo che alla temperatura ambiente di 24 °C la sua resistenza vale R_{24} = 8 e che dopo aver funzionato molte ore a regime, la misura della sua resistenza è pari a R_X = 8.5.

Dati: $\alpha = 3.9\ 10^{-3}$ °C^{-1}.

La resistività di un materiale varia con la temperatura, espressa in gradi Celsius, secondo la legge

$$\rho(T) = \rho_{20} \left[1 + \alpha\ (T - 20) \right] ,$$

in cui ρ_{20} rappresenta la resistività alla temperatura (convenzionale) di 20 °C. Scrivendo questa relazione due volte, una per la temperatura incognita T, un’altra per la temperatura di 24 °C, si ottiene

$$\rho_X = \rho_{20} \left[1 + \alpha\ (T - 20) \right] , \qquad \rho_{24} = \rho_{20}\ (1 + 4\ \alpha)\ .$$

Dividendo membro a membro queste due ultime relazioni, si ha

$$\frac{\rho_X}{\rho_{24}} = \frac{1 + \alpha\ (T - 20)}{1 + 4\ \alpha}\ .$$

Se la distribuzione della temperatura è uniforme ed il corpo in esame è omogeneo, il rapporto tra due resistività coincide con quello delle due corrispondenti resistenze, sicché

$$\frac{R_X}{R_{24}} = \frac{1 + \alpha\ (T - 20)}{1 + 4\ \alpha}\ .$$

Ora, esplicitando quest’equazione rispetto alla temperatura, risulta

$$T = 20 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_X}{R_{24}} - 1 \right) + 4\ \frac{R_X}{R_{24}} \quad 40.3\ °\ C\ .$$

Esercizio da svolgere

Una linea elettrica, lunga 0.7 km, è costituita da conduttori con una resistenza chilometrica pari a 0.75 Ω/km a 20 °C. Calcolare la caduta di tensione sapendo che la corrente vale 50 e la temperatura è - 10 °C.

Risposta: la caduta di tensione richiesta vale 4.67, circa.

Nel risolvere questo esercizio si è adoperato il valore

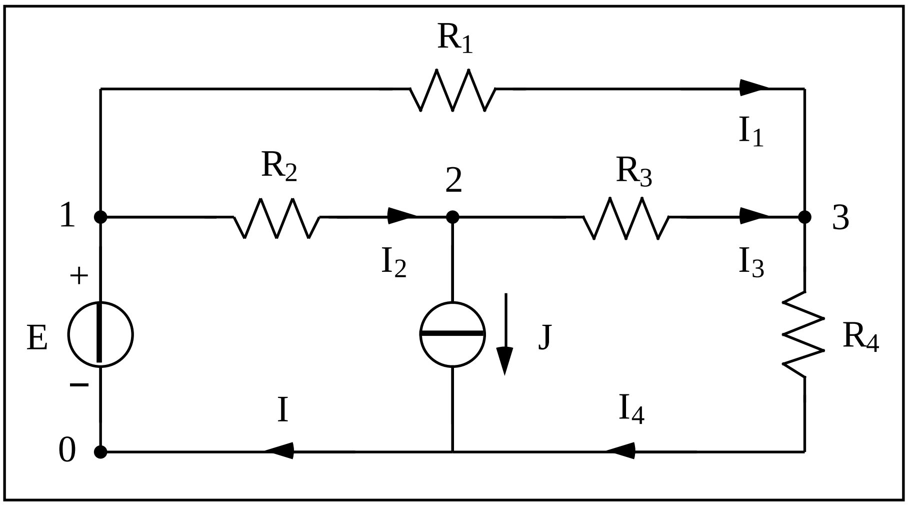
$$\alpha = \frac{1}{273}\ °C^{-1} \quad 0.00366\ °C^{-1}$$

per il coefficiente di temperatura. In realtà, questo parametro varia da metallo a metallo intorno a questo valore, come si può controllare dalla tabella che segue.

Metallo	α (°**C**$^{-1}$)
Alluminio	0.0043
Argento	0.0038
Ferro	0.0045
Platino	0.0035
Rame	0.0039

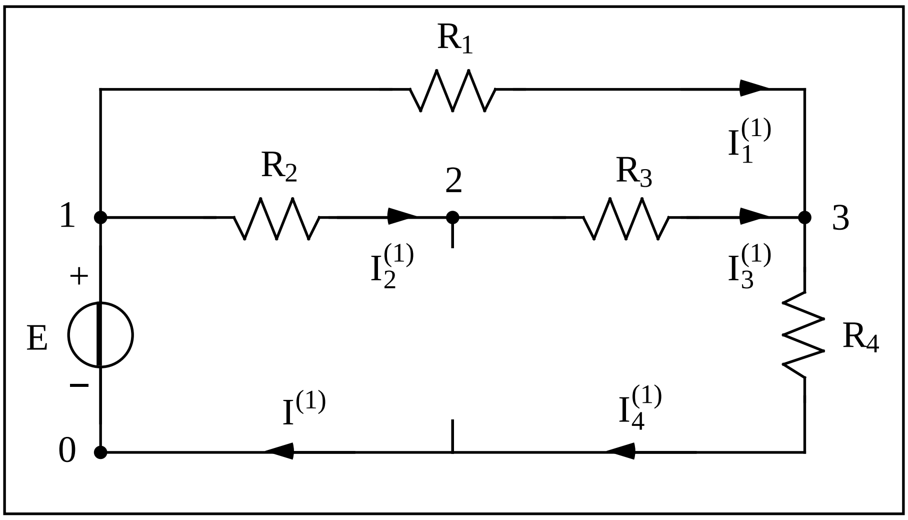
Esercizio P-8

Adoperando la sovrapposizione degli effetti, risolvere la rete mostrata in figura.



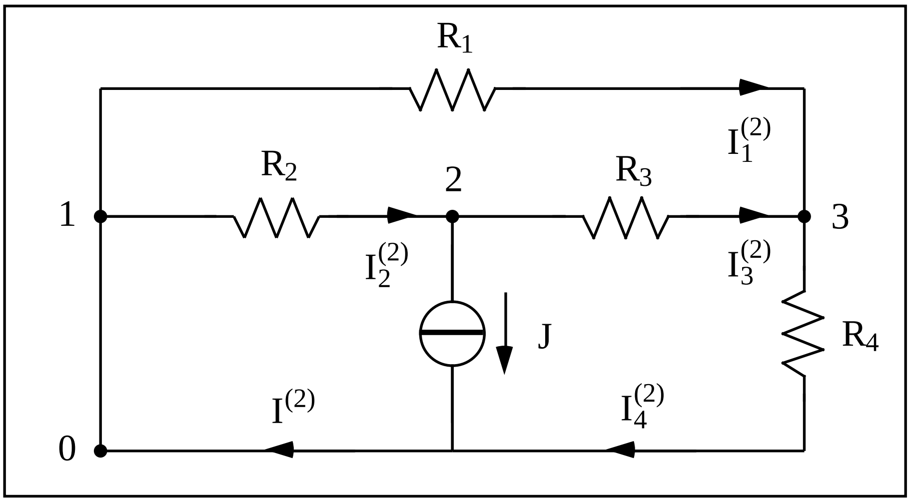
Dati: $E = 80$, $J = 32$, $R_1 = 10$, $R_2 = 5$, $R_3 = 5$, $R_4 = 3$.

Per determinare le correnti in tutti i rami del circuito adoperando la sovrapposizione degli effetti, si procede considerando i due generatori agenti uno per volta e valutandone gli effetti. Si indicheranno rispettivamente con un apice (1) e (2) le grandezze dovute al generatore di forza elettromotrice ed al generatore di corrente.



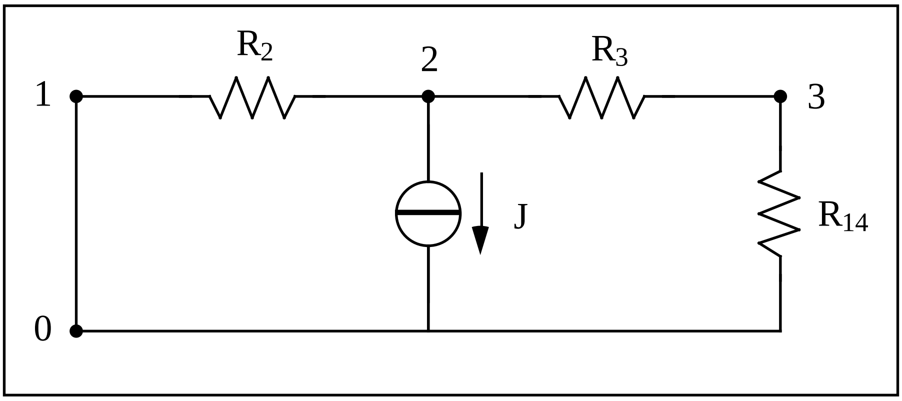
Si trova immediatamente per la *prima* configurazione:

$$I^{(1)} = 10 \,, \qquad I_1^{(1)} = I_2^{(1)} = I_3^{(1)} = 5 \,, \qquad I_4^{(1)} = 10 \,.$$



Per risolvere la *seconda* configurazione si può osservare che i resistori R_1 e R_4 sono sottoposti alla stessa differenza di potenziale e, pertanto, ai soli fini del calcolo della tensione ai capi del generatore, si può considerare la rete semplificata che segue, in cui si è posto

$$R_{14} = R_1 \,||\, R_4 = \frac{R_1\, R_4}{R_1 + R_4} = \frac{30}{13} \,.$$



Si noti che la tensione tra i nodi 2 e 0 è immediatamente calcolabile:

$$V_{20}^{(2)} = - \frac{R_2 \left(R_{14} + R_3\right)}{R_2 + R_{14} + R_3} \, J = - 95 \,.$$

Tornando alla configurazione originaria, si ha:

$$I_2^{(2)} = - \frac{V_{20}^{(2)}}{R_2} = 19 \,.$$

La LKC al nodo 2 porge, inoltre:

$$I_3^{(2)} = I_2^{(2)} - J = - 13 .$$

Inoltre, dato che

$$V_{13}^{(2)} = R_2\, I_2^{(2)} + R_3\, I_3^{(2)} = 30 ,$$

si possono ricavare le altre correnti:

$$I_1^{(2)} = \frac{V_{13}^{(2)}}{R_1} = 3 , \qquad I_4^{(2)} = I_1^{(2)} + I_3^{(2)} = - 10 , \qquad I^{(2)} = J + I_4^{(2)} = 22 .$$

In definitiva, sovrapponendo i due contributi, risulta:

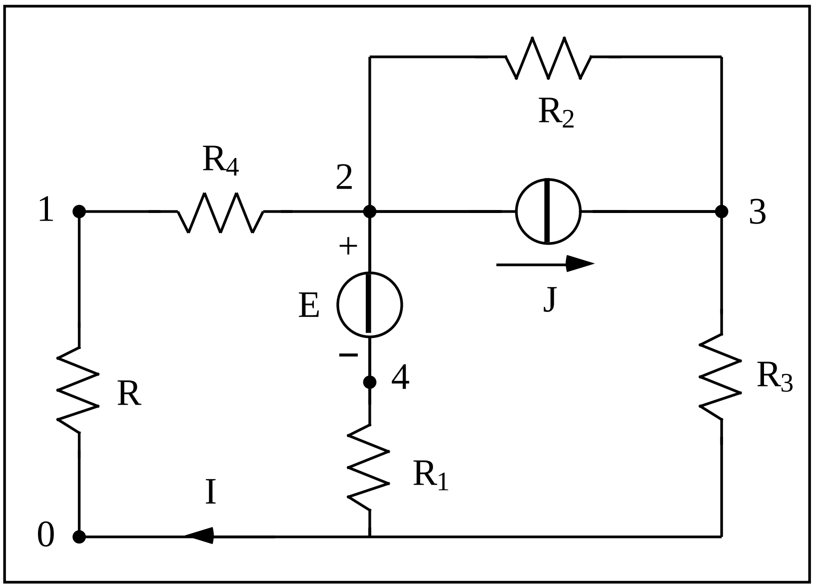
$$\begin{cases} I = I^{(1)} + I^{(2)} = 32 , \\ I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} = 8 , \\ I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)} = 24 , \\ I_3 = I_3^{(1)} + I_3^{(2)} = - 8 , \\ I_4 = I_4^{(1)} + I_4^{(2)} = 0 . \end{cases}$$

Adoperando il listato Spice, si verifichi che il nodo 3 (della rete originaria, ovviamente) è a potenziale nullo.

```
Esercizio P-8.1
*Codifica Spice
VE   1   0   80
R1   1   3   10
R2   1   2   5
R3   2   3   5
R4   3   0   3
IJ   2   0   32
.END
```

Esercizio da svolgere

Adoperando la sovrapposizione degli effetti, determinare la corrente I per la rete mostrata in figura.



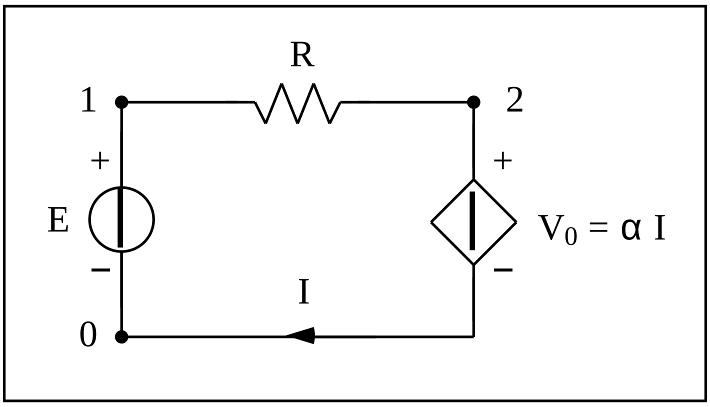
Dati: E = 30, J = 5, R_1 = 10, R_2 = 4, R_3 = 6, R_4 = 10, R = 5.

Risposta: I = - 0.25.

```
Esercizio P-8.2
*Codifica Spice
VE    2    4    30
R1    4    0    10
R2    2    3    4
R3    3    0    6
R4    1    2    10
R0    1    0    5
IJ    2    3    5
.END
```

Esercizio P-9

Si risolva il circuito mostrato in figura, determinando, poi, le potenze assorbite da ciascun bipolo.



Dati: E = 10, R = 5, α = 5.

La legge di Kirchhoff per le tensioni consente di determinare l’unica corrente incognita:

$$E - V_0 = R\,I \quad \rightarrow \quad E - \alpha\,I = R\,I \quad \rightarrow \quad I = \frac{E}{R + \alpha} = 1\ .$$

Per le potenze si ha quindi:

$P_E = E\,I = 10$, (potenza erogata) ;

$P_R = R\,I^2 = 5$, (potenza assorbita) ;

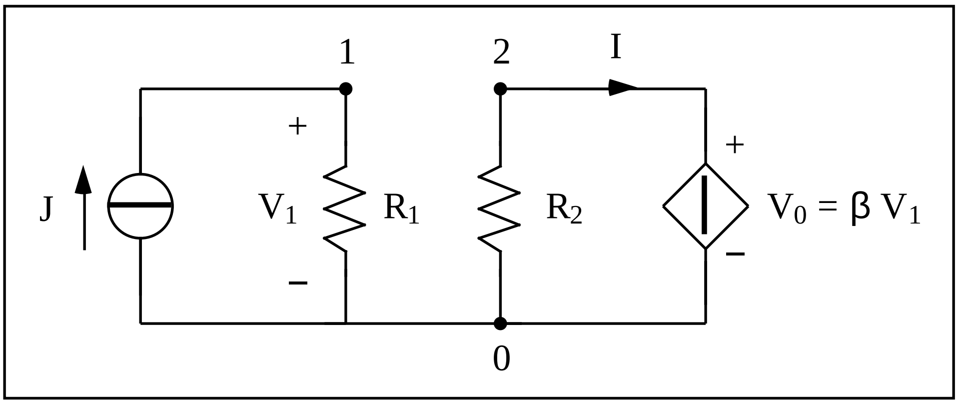
$P_0 = V_0\,I = 5$, (potenza assorbita) .

Vale, dunque, la conservazione delle potenze elettriche.

```
Esercizio P-9.1
*Codifica Spice
VE    1    0    10
R0    1    2    5
H0    2    0    VE    -5
.END
```

Esercizio da svolgere

Si risolva il circuito mostrato in figura, determinando, poi, le potenze assorbite da ciascun bipolo.



Dati: $J = 5$, $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $\beta = 0.5$.

Risposta: $I = -1.25$.

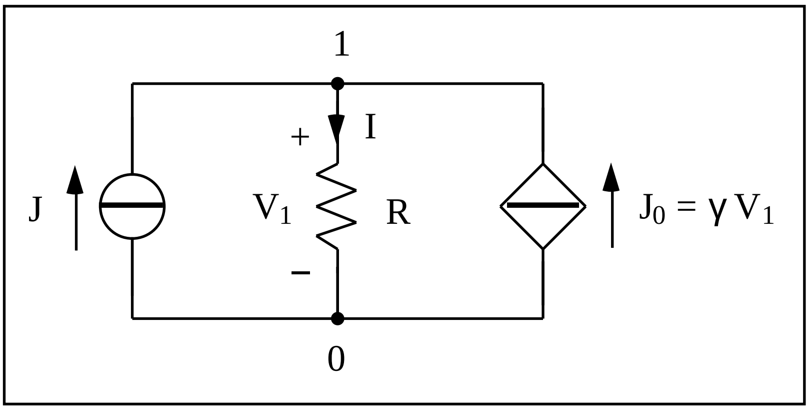
Si controlla facilmente, per mezzo del listato Spice seguente, che i potenziali nei nodi 1 e 2 valgono, rispettivamente:

$V_1 = 10$, $V_2 = 5$.

```
Esercizio P-9.2
*Codifica Spice
IJ    0    1    5
R1    1    0    2
R2    2    0    4
E0    2    0    1    0    0.5
.END
```

Esercizio P-10

Si risolva il circuito mostrato in figura, determinando, poi, le potenze assorbite da ciascun bipolo.



Dati: $J = 4$, $R = 0.2$, $\gamma = 1$.

La legge di Kirchhoff per le correnti consente di scrivere

$$J + J_0 = I \ ,$$

da cui, posto $G = 1/R$, discende immediatamente

$$J + \gamma V_1 = G\, V_1 \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{J}{G - \gamma} = 1 \ .$$

Il bilancio delle potenze è, quindi:

$P_J = J\, V_1 = 4$, (potenza erogata) ;

$P_R = G\, V_1^2 = 5$, (potenza assorbita) ;

$P_0 = J_0\, V_1 = 1$, (potenza erogata) .

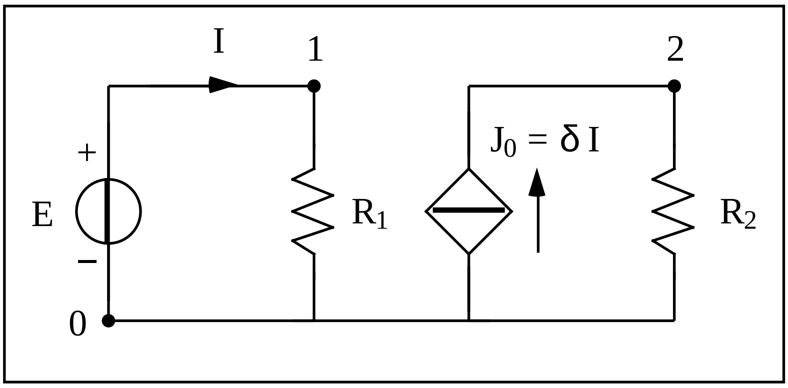
Ancora una volta, si può controllare la conservazione delle potenze elettriche anche in presenza di generatori controllati. Si controllino i risultati riportati per mezzo del listato Spice che segue, che fornisce il potenziale:

$$V_1 = 1 \ .$$

```
Esercizio P-10.1
*Codifica Spice
IJ    0    1    4
R0    1    0    0.2
G0    0    1    1    0    1
.END
```

Esercizio da svolgere

Si risolva il circuito mostrato in figura, determinando, poi, le potenze assorbite da ciascun bipolo.



Dati: $E = 10$, $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $\delta = 0.6$.

Risposta: $I = 5$.

```
Esercizio P-10.2
*Codifica Spice
VE    1    0    10
R1    1    0    2
R2    2    0    4
F0    0    2    VE    -0.6
.END
```