PRINCIPI BASILARI DI ELETTROTECNICA

Prerequisiti

- ***Impiego di Multipli e Sottomultipli nelle equazioni***
- ***Equazioni lineari di primo grado e capacità di ricavare le formule inverse***
- ***nozioni base di fisica***

La Tensione, la Corrente e la Potenza

- ***Unità di Misura***
  - Tensione (V): si misura in Volt [V]
  - Corrente (I) : si misura in Ampere [A]
  - Energia (W) : si misura in Joule [J]
  - Quantità di carica (Q) : si misura in Coulomb [C]
  - Potenza: si misura in Watt [W]
  - Tempo: si misura in secondi [s]

- ***definizione di Tensione***

La tensione (V), o differenza di potenziale (ΔV) *è "la quantità di energia che viene ceduta dalla carica unitaria nel passare da un punto a potenziale maggiore ad un punto a potenziale minore"*

→ V = W/Q **[V = J/C]**

Esempi: energia del libro che faccio cadere da una certa altezza ed energia di una singola pagina; lavoro che compiono 1000l di acqua cadendo in una condotta forzata, ed energia di un singolo litro nelle medesime condizioni.

- ***definizione di Corrente***

L'intensità di Corrente elettrica (I) è la quantità di cariche elettriche che attraversano nell'unità di tempo ogni sezione del circuito elettrico

→ I = Q/t [A = C/s]

- ***definizione di Potenza***

La potenza si definisce come il lavoro compiuto nell'unità di tempo, ossia come l'energia fornita (o assorbita) nell'unità di tempo.

→ P = W/t [W = J/s]

Esempi per capire in cosa differiscono Potenza ed Energia (es. fornello elettrico piccolo e grande, Ferrari e Cinquecento…)

- ***la Potenza elettrica***

dalle tre definizioni appena fornite è possibile ricavare una formula che esprime la Potenza (P) in funzione della Tensione (V) e della Corrente (I)

X casa: ricavare la formula di cui sopra

→ P = V * I [W = V * A]

? Cosa significa fisicamente? Spiegare in maniera intuitiva come sommando l'energia di ogni carica che passa da un polo all'altro nell'unità di tempo si ottiene appunto una potenza

La Resistenza – La legge di Ohm ed i suoi effetti sulla Potenza

- *definizione di resistenza*

Un elettrone passando da un polo all'altro della batteria cede una certa energia. Questa energia può trasformasi in lavoro meccanico, ad esempio tramite l'induzione magnetica, o in calore (la luce stessa può essere considerata una forma di calore ad alte frequenze…). Tale calore viene fuori dal fatto che gli elettroni spostandosi lungo il conduttore urtano con le particelle di cui il conduttore è formato.

Questi urti hanno 2 effetti:

- rallentano il passaggio degli elettroni
- sottraggono energia ai singoli elettroni

- *resistenza di un conduttore*

→ **$R = \rho\ (l/S)$**

→ **$\rho_t = \rho_0\ (1 + \alpha\ T)$**

- v. pag 14 par 1-3

- *Legge di Ohm*

Abbiamo detto che la resistenza rallenta il passaggio degli elettroni. Ciò vuol dire che, a parità di tensione, più è alta la resistenza del conduttore minore sarà la quantità di elettroni che lo attraversa in un secondo. In altri termini più è grande la resistenza (R) minore sarà la corrente (I).

In termini matematici si dice che "la corrente è inversamente proporzionale alla tensione"

→ **$I = V/R$** **$[A = V/\Omega]$** **"legge di Ohm"**

Es. del tubo che piego per fare resistenza all'acqua, più lo piego meno acqua passa.

X esercizio: ricavare le formule inverse

- v. pag. 15 par. 4

- ***La Potenza in funzione della Resistenza***

Dalle due formule viste: **P = V * I** e **I = V/R** si ricavano le seguenti due relazioni:

→ $\mathbf{P = V^2/R}$

→ $\mathbf{P = R * I^2}$

X esercizio: ricavare le due formule appena scritte.

La prima relazione ($\mathbf{P = V^2/R}$) esprime sinteticamente il fatto che più è grande la resistenza che un carico offre al passaggio della corrente minore sarà la Potenza che esso eroga.

? Sarà quindi maggiore la resistenza (R) di una lampadina da 40 W o quella di una stufa da 1500 W ?

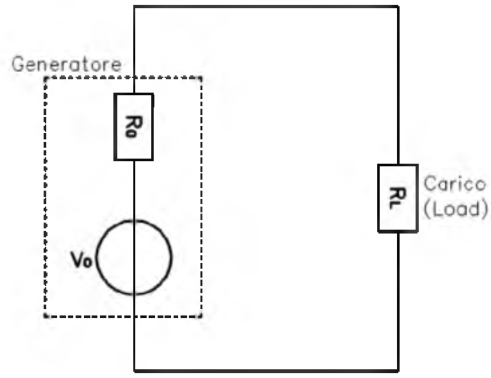
La seconda relazione ($\mathbf{P = R * I^2}$) esprime invece le perdite per effetto Joule in un conduttore percorso da una data corrente. Fissata la resistenza, più corrente vi passa, più potenza ottengo. Si dice che la potenza è *direttamente proporzionale al quadrato della* corrente.

?? In base alla formula **R = ρ (l/S)** sappiamo che più un conduttore è lungo,maggiore sarà la sua resistenza elettrica (R) ma, quando andremo in laboratorio vedremo che i "*resistori*" sono tanto più grandi quanto la loro resistenza elettrica (R) è piccola. Perché?

- **Esempi di Perdite Joule lungo una linea di alimentazione, in un generatore, in un carico**

Come già detto maggiore è la resistenza di un conduttore più gli elettroni che lo attraversano saranno soggetti ad urti contro le particelle di cui è costituito. Come detto, ad ogni urto corrisponde una perdita di energia da parte dell'elettrone, questa energia viene dissipata per effetto Joule come calore.

N.B. nel fare gli esercizi si introduce il concetto di resistenza equivalente serie.



- **Concetto di rendimento elettrico:** (v. pag. 24)

→ $$\eta = \frac{P_f}{P_g} = \frac{P_f}{P_f + P_d}$$

Dove:

P_g = V_0 * I è la <u>*potenza generata*</u> (**V_0** è la tensione "*a vuoto*" del generatore)

P_f = V_L * I è la <u>*potenza fornita*</u> al carico (**V_L** è la tensione sul carico)

P_d = R_0 * I^2 è la <u>*potenza dissipata*</u> dalla *resistenza interna del generatore*

Il circuito elettrico: simboli grafici (v. pag. 20 – 21, par 1 – 3)

Resistenza equivalente: serie e parallelo (v. pag. 26 – 28)

Partitore di tensione, derivatore di corrente (v. pag. 26-28)

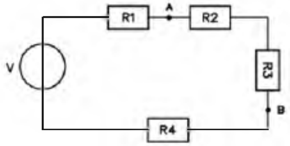
C.d.t.

Come già detto maggiore è la resistenza di un conduttore più gli elettroni che lo attraversano saranno soggetti ad urti contro le particelle di cui è costituito. Come detto, ad ogni urto corrisponde una perdita di energia da parte dell'elettrone. Quindi, dalla definizione di tensione (v. primo paragrafo!) se ne deduce che, diminuendo l'energia potenziale della carica unitaria, diminuisce di conseguenza la Tensione.

Es. di una persona che cade tra i rami di una foresta, ogni piccolo urto sottrae un po' di energia…

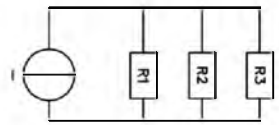
Risoluzione di circuiti semplici

Se le resistenze sono in serie



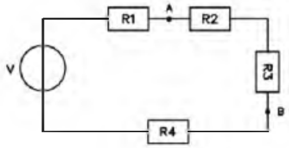
- Le resistenze sono attraversate dalla <u>stessa corrente</u>: **$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I$**
- La somma delle tensioni generate è uguale alla somma delle c.d.t. sulle singole resistenze: **$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V$**
- $P_i = R_i \cdot I^2$ (per esempio: $P_3 = R_3 \cdot I^2$)
- $I = \dfrac{V}{R_{eq(S)}}$
- $R_{eq(S)} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$

Se le resistenze sono in parallelo



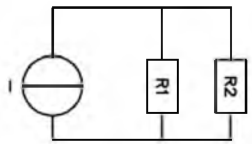
- Le resistenze sono sottoposte alla <u>stessa tensione</u>: **$V_1 = V_2 = V_3 = V$**
- La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti: **$I_1 + I_2 + I_3 = I$**
- $P_i = \dfrac{V^2}{R_i}$ (per esempio: $P_3 = \dfrac{V^2}{R_3}$)
- $V = R_{eq(P)} \cdot I$
- $R_{eq(P)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$

Partitore di tensione



$V_i = V \dfrac{R_i}{\sum_{k=1}^{n} R_k}$ (per es. $V_3 = V \dfrac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$)

Derivatore di corrente



$I_1 = I \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$; $I_2 = I \cdot \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$

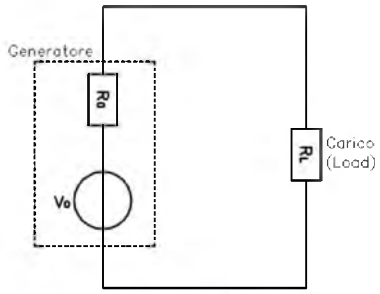
Risoluzione parziale di semplici circuiti:

DATI: R1 = 20M Ω R2 = 10MΩ R3 = 40MΩ

R4 = 2500K Ω R5 = 150K Ω R6 = 16MΩ

(per il circuito A): noti V_0=24V; R_0=250kΩ R_L=1MΩ. Calcolare: V_L e Rendimento

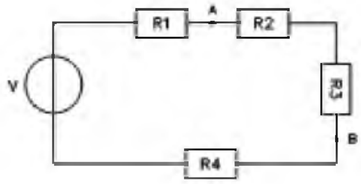
Circuito A



(per il circuito B) nota V=24V. Calcolare:

- V_3 e V_{AB} (applicando il partitore)
- V_3 e V_{AB} (applicando la legge di Ohm)
- P_2

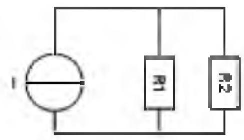
Circuito B



(per il circuito C): nota I=1mA. Calcolare:

- I_2 (applicando il derivatore) e P1

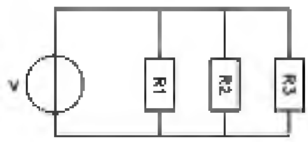
Circuito C



(per il circuito D): nota V=24V. Calcolare:

- P_2

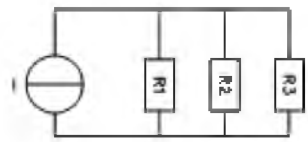
Circuito D



(per il circuito E): nota I=1mA. Calcolare:

- P_2 e I_3

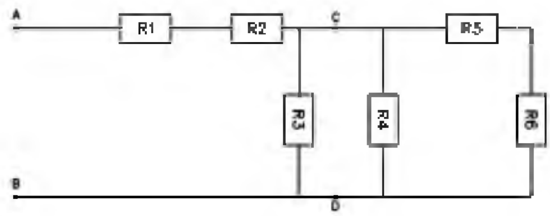
Circuito E



(per il circuito F): calcolare:

- la R_{eq} vista a valle dei morsetti AB
- la R_{eq} vista a valle dei morsetti CD

Circuito F



Esercizi con procedimento a ritroso:

1) dato il circuito A, supponendo di conoscere la tensione ai capi del carico R_L (V_L = 3V), calcolare la tensione di alimentazione V_0
2) dato il circuito B, supponendo di conoscere la tensione ai capi della resistenza R_2 (V2 = 3V), calcolare la tensione di alimentazione V
3) dato il circuito C, supponendo di conoscere la tensione ai capi della resistenza R_2 (V2 = 3V), calcolare la corrente di alimentazione I
4) dato il circuito D, supponendo di conoscere la corrente che attraversa la resistenza R_2 (I_2 = 3mA), calcolare la tensione di alimentazione V e la corrente nelle restanti resistenze
5) dato il circuito E, supponendo di conoscere la tensione ai capi della resistenza R_2 (V2 = 3V), calcolare la corrente di alimentazione I e la potenza totale erogata dal generatore P_g

Risoluzione di reti elettriche lineari

Per rete elettrica s'intende un circuito elettrico con almeno un generatore e resistenze collegate tra loro in modo più o meno complesso.

Risolvere una rete elettrica significa determinare i valori di tutte le correnti (I) circolanti nei vari rami. In tal modo e quindi possibile calcolare poi la tensione tra due punti qualsiasi della rete e la potenza assorbita nei vari rami.

Le reti in corrente continua che stiamo studiando sono anche dette ***"in regime stazionario"*** poiché e grandezze elettriche (tensione e corrente) che le caratterizzano non variano nel tempo.

Un'altra caratteristica molto importante delle reti che stiamo studiando è che sono costituite da ***componenti lineari*** (i resistori). Cosa vuol dire che il resistore è un componente lineare? Vuol dire che la tensione ai suoi capi cresce linearmente all'aumentare della corrente che l'attraversa (V = R x I). Infatti se tracciamo sul piano cartesiano (V-I) l'andamento della tensione al crescere della corrente vedremo che viene fuori una retta. Questa caratteristica si rivelerà molto importante per poter applicare il "principio di sovrapposizione degli effetti" che vedremo tra qualche pagina.

Per la risoluzione delle reti elettriche in regime stazionario esistono diversi metodi:

- **se la rete ha un solo generatore basterà calcolare**: prima la Req vista dal generatore, poi la corrente fornita dal generatore alla rete, e quindi applicando il derivatore di corrente, il partitore, o semplicemente la legge di Ohm andare a calcolare la corrente nei vari rami.
- Se vi sono più generatori, a seconda dei casi, si sceglie di adottare uno dei seguenti metodi: **metodo di Kirchhoff**; metodo di Maxwell; metodo dei potenziali di nodo; teorema di Millman; **metodo della sovrapposizione degli effetti**; teorema di Thevenin e teorema di Norton (questi ultimi tre si usano prevalentemente per la risoluzione parziale, ossia per calcolare ad es. la corrente in un solo ramo)

N.B.: Di tali metodi studieremo a titolo esemplificativo quelli evidenziati in grassetto in quanto ritengo siano didatticamente molto validi per la comprensione dei principi di Kirchhoff, del "principio di sovrapposizione degli effetti" e della legge di Ohm.

Definizioni utili:

una rete elettrica è composta da ***"rami"*** o "lati", ***"nodi"*** e ***"maglie"*** (vedi pag 35)

Principi di Kirchhoff

(vedi pag. 35 e 36)

Metodo di Kirchhoff

(vedi pagina 38 e 42. Inoltre segui con attenzione la traccia dell'esercizio proposto a pagina seguente in quanto riassume schematicamente come va applicato i metodo)

Esercizi da risolvere col metodo di Kirchhoff

DATI:

V1 = 24 V	V2 = 12 V
V3 = 9 V	R1 = 200 Ω
R2 = 100 Ω	R3 = 400 Ω
R4 = 400 Ω	R5 = 50 Ω
R6 = 50 Ω	R7 = 100 Ω

PER OGNUNO DEI CIRCUITI PROPOSTI:

a. individuare i *nodi* sul disegno, elencarli, ed indicarne il numero *n*

b. individuare i *rami* sul disegno, elencarli, ed indicarne il numero *r*

c. individuare sul disegno una corrente per ogni ramo imponendogli un verso arbitrario e assegnandogli un nome

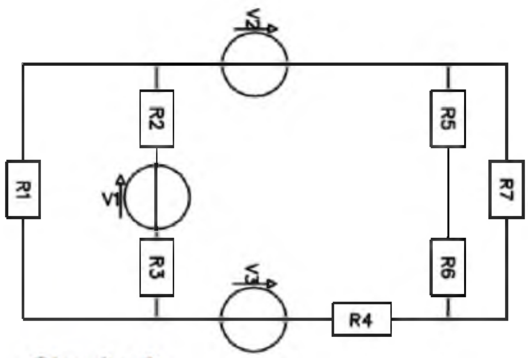
d. scrivere le *n-1* equazioni ai nodi utilizzando il 1° Principio di Kirchhoff ($\sum_{nodo} I_i = 0$)

e. scrivere le m_i equazioni alle maglie utilizzando il 2° Principio di Kirchhoff ($\sum_{maglia} R_i \cdot I_i = \sum_{maglia} E_i$)

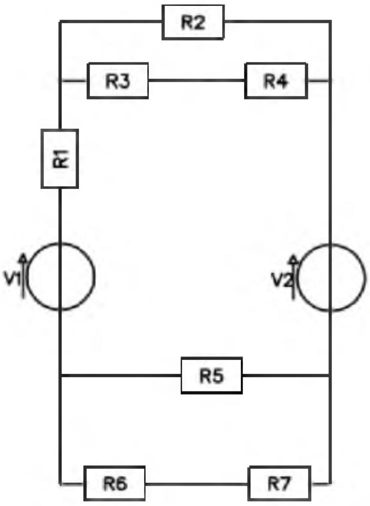
   N.B. Percorrere, per convenzione, tutte le maglie in verso orario

f. Impostare un sistema per ricavare il valore delle correnti incognite e scrivere le relative matrici dei coefficienti e dei termini noti

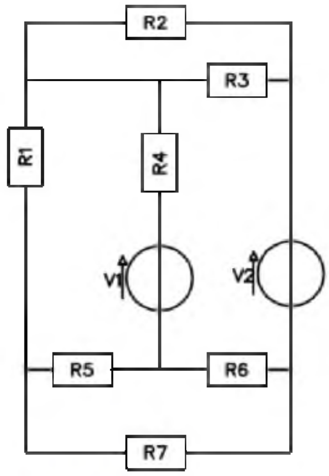
g. Risolvere il sistema con uno dei metodi noti (N.B. per i sistemi con più di 3 incognite la risoluzione è "facoltativa", per gli altri va svolta. Per la risoluzione dei sistemi consultare i "richiami di matematica" riportati in Appendice e/o chiedere al proprio docente di Matematica))



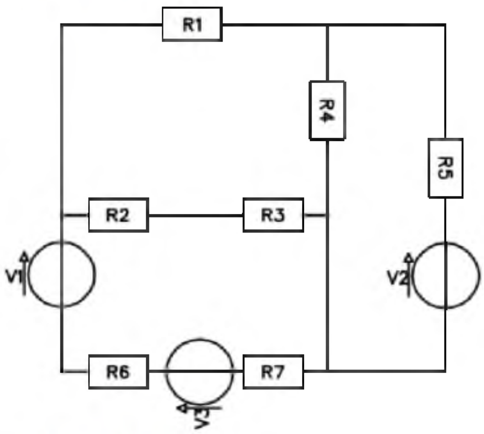
Circuito 2



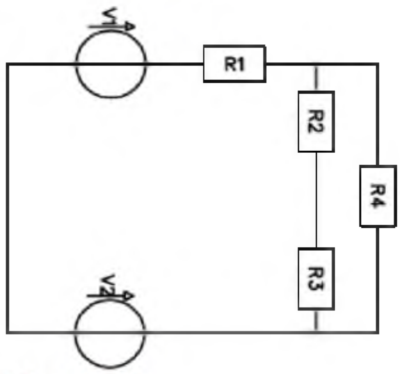
Circuito 1



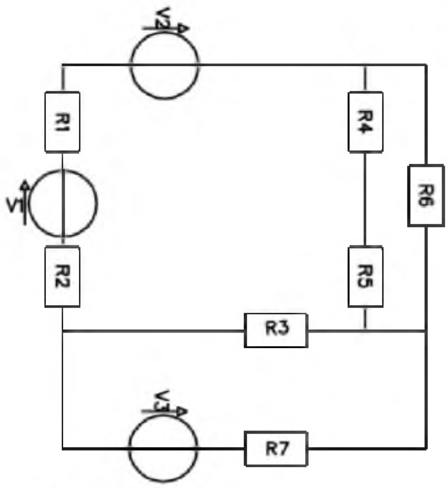
Circuito 3



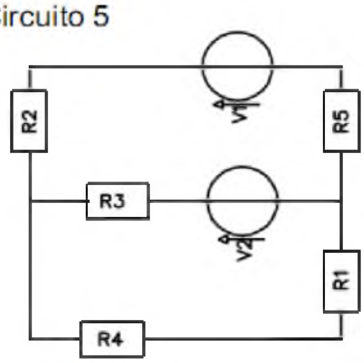
Circuito 5



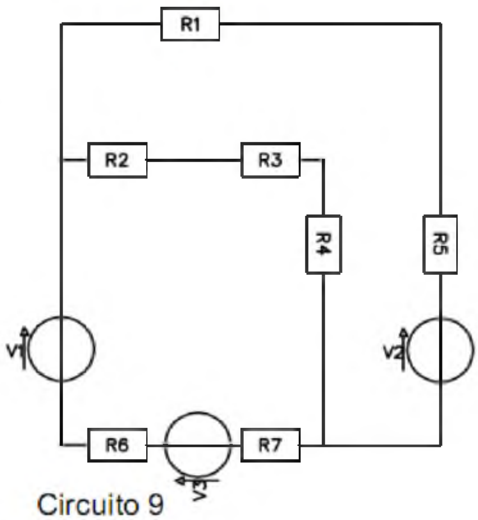
Circuito 6



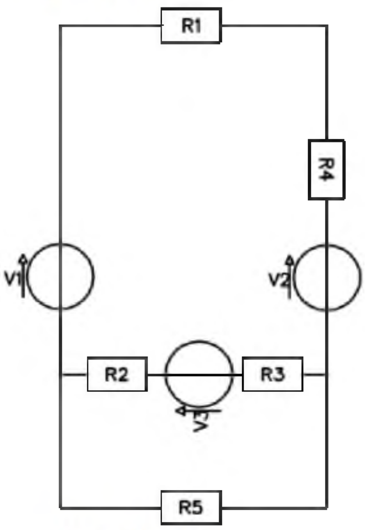
Circuito 4



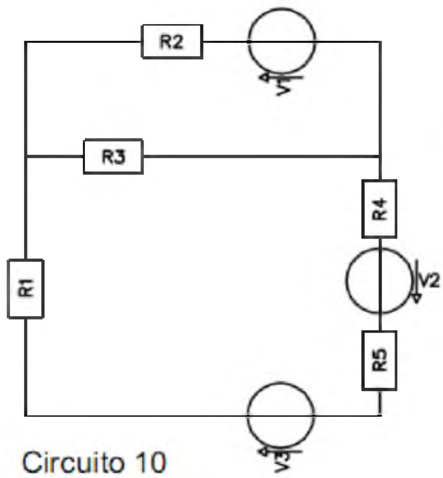
Circuito 8



Circuito 9



Circuito 7



Circuito 10

ESERCIZI sulla risoluzione completa di reti con un solo generatore

DATI:

V = 24 V V1 = 24 V V2 = 12 V V3 = 9 V

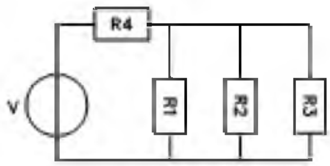
R1 = 20M Ω R2 = 10M Ω

R3 = 40M Ω R4 = 40M Ω

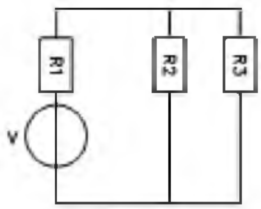
R5 = 5M Ω R6 = 5MΩ

PER OGNUNO DEGLI ESERCIZI PROPOSTI CALCOLARE:

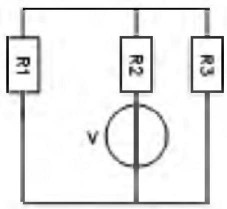
- il valore della corrente che circola in ogni resistore
- il valore della tensione ai capi di ogni resistore
- il valore della potenza assorbita da ogni resistore



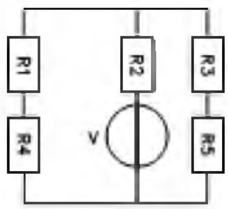
Circuito A



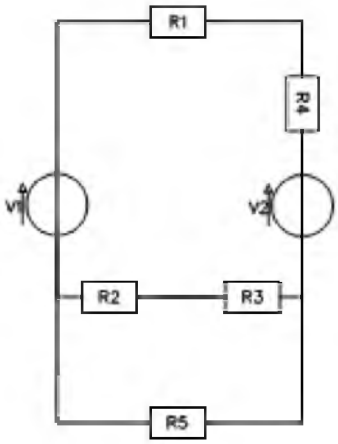
Circuito B



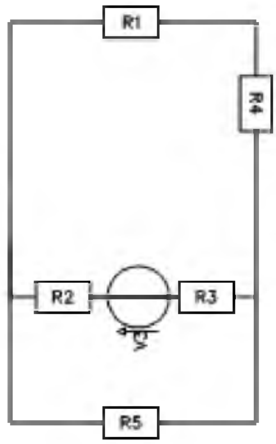
Circuito C



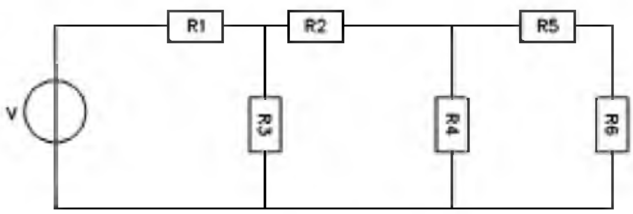
Circuito D



Circuito E



Circuito F



Circuito G

Metodo della sovrapposizione degli effetti

Il "principio di sovrapposizione degli effetti" si può applicare solo ai sistemi lineari ed afferma che: *se più azioni agiscono contemporaneamente su un sistema, questo subisce un effetto complessivo che si può considerare come la somma degli effetti che si avrebbero se si applicassero singolarmente le azioni.*

Come sappiamo dalla legge di Ohm la relazione tra tensione e corrente ai capi di una rete resistiva è lineare in quanto se raddoppio la tensione ai suoi capi raddoppia anche la corrente, se la tensione triplica triplicherà anche la corrente. Se traccio il diagramma Cartesiano della corrente I rispetto alla tensione V *ottengo una retta,* da cui il nome *"lineare".*

??? E la relazione tra la tensione ai suoi capi e la potenza assorbita? Può essere definita anch'essa lineare?

Applichiamo ora il Principio di sovrapposizione degli effetti, su enunciato, ad una rete elettrica. Se considero che i generatori sono le *azioni* che agiscono sul sistema, e le correnti che circolano gli *effetti*, posso dire che ***la corrente totale che circola in ogni ramo è la somma della corrente che ogni singolo generatore vi farebbe circolare.***

Quindi per la risoluzione di una qualsiasi rete elettrica, si considera operante un generatore per volta (cortocircuitando i restanti generatori di tensione ed aprendo quelli di corrente), e si calcola alla fine l'effetto risultante dalla somma degli effetti di tutti i generatori.

ESEMPIO: Se usando solo il generatore V1 in un dato ramo circolano 3A, e usando solo il generatore V2 nello stesso ramo circolano 4A, usandoli contemporaneamente in quel ramo circoleranno 7A, ossia la somma degli effetti dei due generatori.

(vedi anche pag. 45 del libro e l'esercizio 1 a pag. 50)

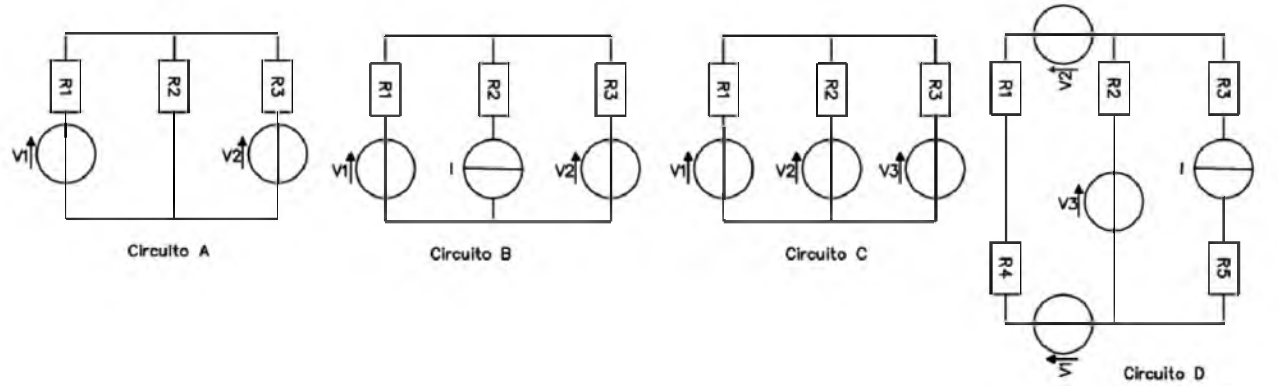
Esercizi da risolvere col metodo di sovrapposizione degli effetti

DATI: V1 = 24 V V2 = 12 V V3 = 9 V R1 = 200 Ω

R2 = 100 Ω R3 = 400 Ω R4 = 400 Ω R5 = 50 Ω

PER OGNUNO DEI CIRCUITI PROPOSTI:

a. fissare arbitrariamente i versi delle correnti sui rami della rete
b. scomporre la rete in tanti circuiti in ognuno dei quali è presente un solo generatore (cortocircuitando i restanti generatori di tensione ed aprendo quelli di corrente). Si ottengono quindi tanti circuiti quanti sono i generatori
c. fissare il verso delle "correnti parziali" in ogni singolo circuito basandosi sulla polarità dei generatori
d. calcolare le correnti parziali circolati nella R2 per ognuno dei circuiti parziali
e. Calcolare la corrente che circola nella R2 della rete originaria sommando algebricamente le correnti parziali ottenute. <u>N.B. Nel fare la somma algebrica considero positive le correnti parziali aventi lo stesso verso di quelle fissate arbitrariamente sulla rete originaria e negative quelle aventi verso opposto.</u>
f. Calcolare la potenza assorbita dalla resistenza R2, la tensione ai suoi capi e l'energia che essa dissipa in un'ora.



N.B.: la maggior parte degli esercizi con tre rami possono essere ricondotti ai circuiti di tipo A, B, e C. Si provi per esercizio a trasformare il circuito "D" in un circuito di tipo "B". Una volta fatti questi esercizi si provi a risolvere allo stesso modo le reti a tre rami già affrontate con il metodo di Kirchhoff (circuiti da 6 a 10 pagina 12)

RICHIAMI DI MATEMATICA: Sistema di 3 equazioni a tre incognite:

Metodo di sostituzione

Si tratta di adattare il metodo di sostituzione normalmente impiegato per il sistema di due equazioni a due incognite.

Sceglieremo un'equazione per ricavare una incognita e sostituiremo il suo valore nelle altre due equazioni; in questo modo avremo due equazioni in due incognite e procederemo come già sappiamo fare

ESEMPIO:

Vediamo ora su un esempio come risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$$

Ricavo la **z** dalla prima equazione e sostituisco nella seconda e nella terza (posso ricavare chi mi pare)

$$\begin{cases} z = 6 - x - y \\ 2x + y - (6 - x - y) = 1 \\ 2x - 3y + 6 - x - y = -1 \end{cases}$$

Al posto della prima equazione metto una linea (così non la uso più sino alla fine)

$$\begin{cases} \text{----------------------} \\ 2x + y - 6 + x + y = 1 \\ 2x - 3y + 6 - x - y = -1 \end{cases}$$

Porto i numeri dopo l'uguale e poi sommo

$$\begin{cases} \text{--------------} \\ 3x + 2y = 7 \\ x - 4y = -7 \end{cases}$$

Da notare che ho un sistema di due equazioni in due incognite. Ora ricavo la x dalla terza equazione

$$\begin{cases} \text{--------------} \\ 3x + 2y = 7 \\ x = 4y - 7 \end{cases}$$

sostituisco il valore della x trovato nella seconda equazione

$$\begin{cases} \text{--------------} \\ 3(4y - 7) + 2y = 7 \\ x = 4y - 7 \end{cases}$$

eseguo la moltiplicazione (nella terza equazione metto una linea)

$$\begin{cases} \text{--------------} \\ 12y - 21 + 2y = 7 \\ \text{--------------} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{--------------} \\ 14y = 21 + 7 \\ \text{--------------} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{--------------} \\ 14y = 28 \\ \text{--------------} \end{cases}$$

Divido per 14 prima e dopo l'uguale

$$\begin{cases} \text{--------------} \\ y = 2 \\ \text{--------------} \end{cases}$$

ora riscrivo le equazioni al posto delle linee

$$\begin{cases} z = 6 - x - y \\ y = 2x = 4y - 7 \\ \end{cases}$$

sostituisco ad y il valore trovato

$$\begin{cases} z = 6 - x - 2 \\ y = 2 \\ x = 4(2) - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4 - x \\ y = 2 \\ x = 8 - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4 - x \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

ora sostituisco anche la x nella prima equazione

$$\begin{cases} z = 4 - 1 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ordino ed ottengo il risultato finale

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Si noterà che questo metodo e' piuttosto lungo e noioso e, se non si è attenti a sostituire bene, può portare facilmente ad errori e quindi sarà usato piuttosto raramente: solitamente si preferisce usare il metodo di Cramer

RICHIAMI DI MATEMATICA: Sistema di 3 equazioni a tre incognite:

Metodo di Cramer

Nell' introdurre la regola di Cramer faremo riferimento a un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, risulterà comunque evidente come tale regola si possa applicare negli altri casi.

- Il sistema deve essere ordinato in modo da avere i termini noti di ogni equazione a destra del segno di uguale e le incognite con lo stesso nome incolonnate

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_3 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \end{cases}$$

x,y,z sono le incognite del sistema

$a_{i,j}$ sono i coefficienti del sistema

b_i sono i termini noti del sistema

- si scrive la matrice A dei coefficienti e si calcola il suo determinante |A| che indicheremo con D

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

- si calcola il determinante D_x della matrice ottenuta dalla precedente sostituendo alla prima colonna, i termini noti del sistema

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

- si calcola il determinante D_y della matrice ottenuta dalla precedente sostituendo alla seconda colonna, i termini noti del sistema

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

- si calcola il determinante D_z della matrice ottenuta dalla precedente sostituendo alla terza colonna, i termini noti del sistema

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

SE **D** E' NON NULLO ALLORA IL SISTEMA E' DETERMINATO e il valore delle incognite e' dato dai seguenti rapporti tra i determinanti calcolati in precedenza:

x = D_x / D

y= D_y / D

z= D_z / D

NOTA BENE: se $D = 0$ il sistema e' indeterminato o impossibile

ESEMPIO:

Risolvere il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite con la regola di Cramer

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + 0y - z = 3 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Si calcolano i tre determinanti **<u>(Vedasi a pagina seguente la regola di Sarrus per il calcolo del determinante)</u>**

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -10 \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Si determinano i valori delle tre incognite:

$$x = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$z = \frac{4}{-2} = -2$$

RICHIAMI DI MATEMATICA: Calcolo del determinante 3x3 con la regola di Sarrus

---

Quando ci limitiamo a sistemi di 3 equazioni in 3 incognite, e se il determinante non ha elementi nulli, conviene utilizzare la regola di Sarrus per calcolarne il valore; la useremo nella forma più semplice

---

consideriamo un determinante del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

riporto accanto al determinante le prime due colonne

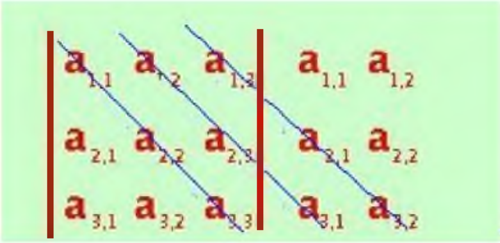
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}$$

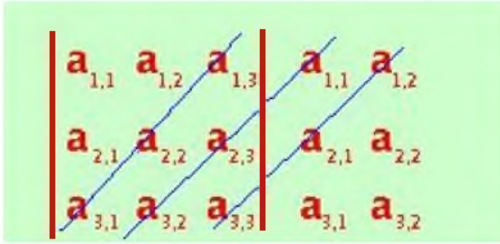
La regola di Sarrus dice che il valore del determinante e' dato da

$D = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3} +$

cioè moltiplico tra loro gli elementi della diagonale principale e tra loro gli elementi delle due diagonali parallele che si sono formate e poi sottraggo il prodotto degli elementi della diagonale secondaria ed anche i prodotti degli elementi per le due diagonali parallele alla secondaria

Per memorizzarlo meglio si può esprimere graficamente in questo modo:





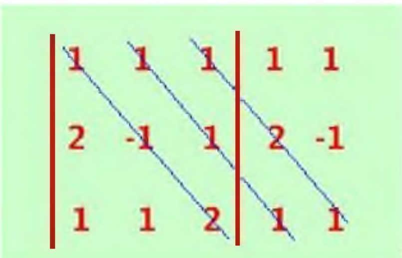
ESEMPIO:

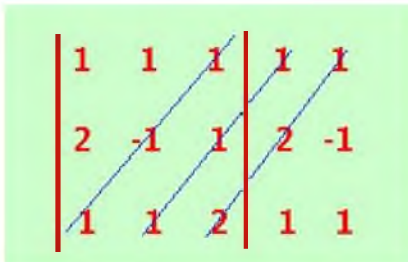
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

riporto accanto al determinante le prime due colonne

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Ora applico la regola di Sarrus





D = 1·(-1)·2 + 1·1·1 + 1·2·1 - 1·(-1)·1 - 1·1·1 - 1·2·2 =

-2 + 1 + 2 + 1 - 1 - 4 **= -3**