Esercizi di Elettrotecnica

Ing. Carlo Forestiere
carlo.forestiere@unina.it

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009-2010

Dipartimento di Ingegneria Elettrica
Università degli studi di Napoli Federico II

Esercizio 1

Trovare le correnti in tutti i rami del circuito presentato in figura, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e i concetti di resistenza equivalente e di partitore di corrente.

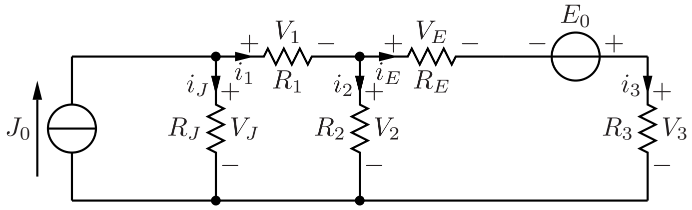

Figura 1: Circuito complessivo

$$J_0 = 1A,\ R_J = 200\Omega,$$
$$E_0 = 100V,\ R_E = 10\Omega,$$
$$R_1 = 50\Omega,\ R_2 = 100\Omega,\ R_3 = 90\Omega$$

In virtù della linearità delle LKT, LKC e delle caratteristiche dei bipoli coinvolti la soluzione del circuito proposto può essere ricavata sommando le soluzioni associate ai due circuiti di figg. 2 e 3.

Circuito associato al forzamento in corrente.

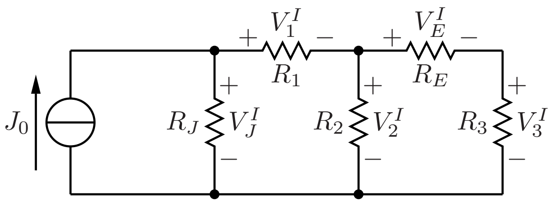

Figura 2: Circuito associato al forzamento in corrente

Nel circuito di fig. 2 si può risalire alle correnti nei vari rami a partire da J_0 applicando la formula del partitore di corrente:

$$I_J^I = \frac{\{R_1 + [R_2 // (R_3 + R_E)]\}}{R_J + \{R1 + [R_2 // (R_3 + R_E)]\}} J_0 \tag{1}$$

$$I_1^I = \frac{R_J}{R_J + \{R_1 + [R_2 // (R_3 + R_E)]\}} J_0 \tag{2}$$

Nota la corrente in R_1 ed applicando nuovamente la formula del partitore è possibile calcolare le correnti che circolano in R_2 e nella serie $R_3 + R_E$:

$$I_2^I = \frac{R_3 + R_E}{R_2 + R_3 + R_E} I_1^I \tag{3}$$

$$I_3^I = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_E} I_1^I \tag{4}$$

I valori numerici delle correnti del circuito di fig. 2 sono riportati nella tabella 1.

$I_J^I[A]$	$I_1^I[A]$	$I_2^I[A]$	$I_3^I[A]$
0.33	0.67	0.33	0.33

Tabella 1: Risultati forzamento in corrente.

Circuito associato al forzamento in tensione.

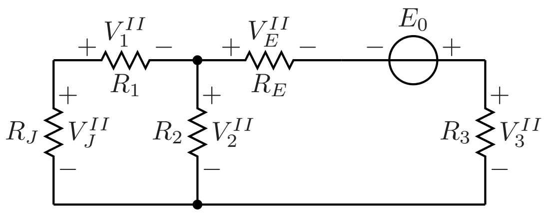

Figura 3: Circuito associato al forzamento in tensione

Si calcola ora, per il circuito di fig. 3, la resistenza vista ai morsetti del generatore di tensione,

$$R_{eq} = R_3 + R_E + (R_1 + R_J)\,//R_2 \tag{5}$$

da cui sarà possibile ricavare la corrente circolante nel ramo del generatore.

$$I_3^{II} = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R_3 + R_E + (R_1 + R_J)\,//R_2} \tag{6}$$

. Si applica, dunque, la formula del partitore di corrente alla corrente del ramo del generatore, ovvero

$$I_2^{II} = -\frac{R_1 + R_J}{R_1 + R_J + R_2} I_3 \tag{7}$$

$$I_1^{II} = \frac{R_2}{R_1 + R_J + R_2} I_3 \tag{8}$$

. I risultati numerici relativi al circuito di fig. 3 sono riassunti nella tabella 2.

Tabella 2: Risultati forzamento in tensione.

$I_J^{II}[A]$	$I_1^{II}[A]$	$I_2^{II}[A]$	$I_3^{II}[A]$
-0.167	0.167	-0.4166	0.583

Sovrapposizione dei risultati.

Le correnti del circuito complessivo si ottengono sovrapponendo linearmente le correnti calcolate per i circuiti in figg. 2 e 3, ossia in formule

$$\begin{cases} I_J = & I_J^I + I_J^{II} \\ I_1 = & I_1^I + I_1^{II} \\ I_2 = & I_2^I + I_2^{II} \\ I_3 = & I_3^I + I_3^{II} \end{cases} \tag{9}$$

. Combinando i risultati della Tab. 1 e Tab. 2 si ottengono i risultati del circuito proposto, sintetizzati nella tabella che segue.

Tabella 3: Risultati circuito proposto

$I_J[A]$	$I_1[A]$	$I_2[A]$	$I_3[A]$
0.167	0.837	-0.086	0.916

Esercizio 2

Utilizzando il teorema del generatore equivalente di Thevenin calcolare la potenza dissipata nel resistore R_2 del circuito di fig. 1. Si ricorra, inoltre, ai concetti di partitore di tensione, di corrente e di resistenza equivalente.

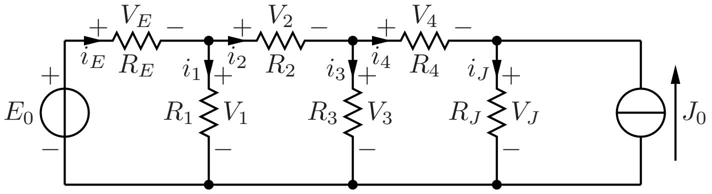

Figura 1: Circuito Complessivo

$$\mathbf{J = 2A},\ \mathbf{R_J = 100\Omega}$$
$$\mathbf{E = 200V},\ \mathbf{R_E = 10\Omega}$$
$$\mathbf{R_1 = 10\Omega},\ \mathbf{R_2 = 42.5\Omega},\ \mathbf{R_3 = 50\Omega}\ \mathbf{R_4 = 50\Omega}$$

Soluzione proposta

Il circuito di cui si vuole determinare l'equivalente secondo Thevenin è rappresentato in fig. 2.

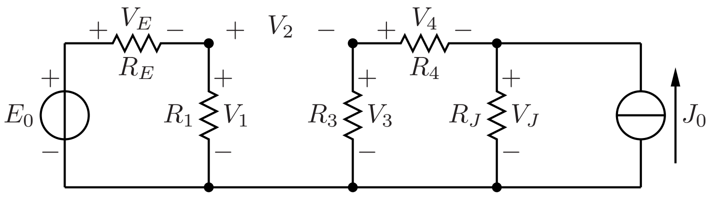

Figura 2: Circuito per il calcolo di V_{eq}

Calcolo della resistenza equivalente.

La resistenza equivalente si ottiene cortocircuitando i generatori di tensione ed aprendo quelli di corrente. La rete ottenuta a partire da questa definizione è mostrata in fig. 3. Il calcolo della resistenza equivalente è immediato:

$$R_{eq} = R_E//R_1 + R_3//(R_4 + R_J) = 5 + 37.5 = 42.5\Omega \tag{1}$$

Calcolo tensione a vuoto.

La tensione a vuoto del generatore equivalente secondo Thevenin è data da:

$$V_{eq} = V_2 = V_1 - V_3 \tag{2}$$

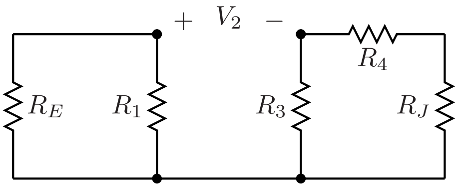

Figura 3: Circuito per il calcolo della resistenza equivalente.

Inoltre il circuito privato della resistenza R_2 e rappresentato in Fig. 2 è costituito da due parti non comunicanti che possono essere risolte indipendentemente. Per calcolare la tensione V_1 si ricorre al partitore di tensione:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_E} E_0 = 100V \tag{3}$$

Al contrario, la tensione che insiste su R_3 richiede l'applicazione del partitore di corrente

$$I_3 = \frac{R_J}{R_J + R_4 + R_3} J_0 = 1A \tag{4}$$

e della caratteristica del resistore R_3

$$V_3 = R_3 I_3 = \frac{R_3 R_J}{R_J + R_4 + R_3} J_0 = 50V \tag{5}$$

Tenendo conto delle eqq. 3 e 5, la tensione a vuoto, espressa dall'eq. 2 assumerà la seguente espressione:

$$V_{eq} = V_2 = V_1 - V_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_E} E_0 - \frac{R_3 R_J}{R_J + R_4 + R_3} J_0 = 50V \tag{6}$$

Circuito equivalente secondo Thevenin

Il circuito equivalente secondo Thevenin è raffigurato in figura 4.

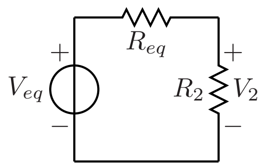

Figura 4: Circuito equivalente secondo Thevenin.

La tensione che insiste sul resistore R_2 si calcola applicando la formula del partitore:

$$V_2 = \frac{R_2}{R_{eq} + R_2} V_{eq} = 25V \tag{7}$$

dove i valori di V_{eq} e di R_{eq} sono dati dalle eqq. 1 e 6. Infine la potenza dissipata su R_2 vale:

$$P = \frac{V_2^2}{R_2} = 14.7W \tag{8}$$

Esercizio 3

Trovare le tensione che insiste sul condensatore a regime, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e i concetti di resistenza equivalente e di partitore di corrente.

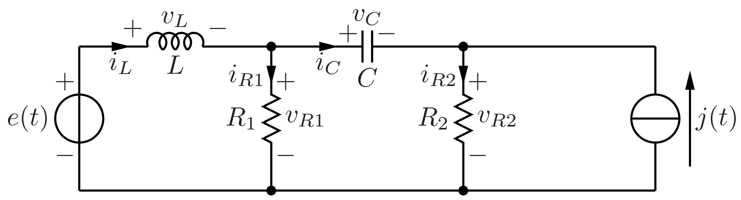

Figura 1: Circuito complessivo esercizio 3

$$e(t) = E_0 \sin(\omega t + \phi_E),\ E_0 = 10V,\ \phi_E = \frac{\pi}{3}$$
$$j(t) = J_0 \cos(\omega t + \phi_J),\ J_0 = 2A,\ \phi_J = \frac{\pi}{6}$$
$$R_1 = 50\Omega,\ R_2 = 50\Omega,\ C = 10\mu F\ L = 1mH$$
$$\omega = 10krad/s$$

Passaggio al dominio trasformato

I forzamenti nel dominio trasformato sono:

- $\bar{E} = E_0 \exp\left[j\left(\phi_E - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 8.66 - 5.0j$,
- $\bar{I} = J_0 \exp(j\phi_J) = 1.73 + 1.0j$

Le impedenze associate al condensatore e all'induttore sono rispettivamente:

- $\dot{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = -10j$,
- $\dot{Z}_L = j\omega L = 10j$

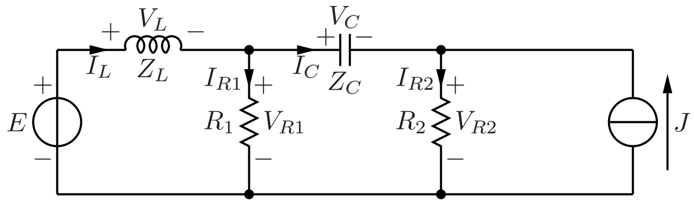

Figura 2: Circuito trasformato

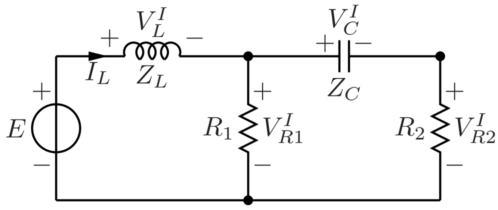

Figura 3: Circuito associato al forzamento in tensione

Circuito associato al forzamento in tensione

L'impedenza equivalente vista ai morsetti del generatore di tensione sarà dunque:

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_L + R_1//\dot{Z}_C + R_2 = \dot{Z}_L + \frac{R_1(\dot{Z}_C + R_2)}{R_1 + R_2 + \dot{Z}_C} = 25.25 + 7.52j \tag{1}$$

È dunque possibile calcolare la corrente del ramo del generatore:

$$\bar{I}_E^I = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{eq}} = 0.261 - 0.276j \tag{2}$$

La corrente nel condensatore si ottiene applicando le regole del partitore:

$$\bar{I}_C^I = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \dot{Z}_C}\bar{I}_E^I = 0.1428 - 0.1236j \tag{3}$$

A partire dalla definizione di impedenza del condensatore si calcola infine la tensione che cade su di esso.

$$\bar{V}_C^I = \dot{Z}_C\bar{I}_C^I = \frac{\dot{Z}_C R_1}{R_1 + R_2 + \dot{Z}_C}\bar{I}_E^I = -1.236 - 1.4277j \tag{4}$$

Circuito associato al forzamento in corrente

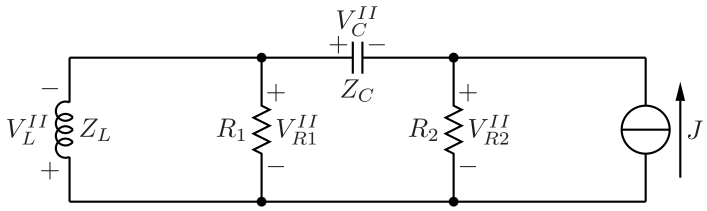

Figura 4: Circuito associato al forzamento in corrente

La corrente che circola nel condensatore è

$$\bar{I}_C^{II} = -\frac{R_2}{\dot{Z}_C + R_1//\dot{Z}_L + R_2}\bar{J} = -1.6607 - 0.9752j \tag{5}$$

Da cui si ottiene la tensione che insiste sul condensatore:

$$\bar{V}_C^{II} = \dot{Z}_C\bar{I}_C^{II} = -\frac{\dot{Z}_C R_2}{\dot{Z}_C + R_1//\dot{Z}_L + R_2}\bar{J} = -9.7526 + 16.606i \tag{6}$$

Sovrapposizione degli effetti e considerazioni conclusive

Sovrapponendo gli effetti dei due circuiti si ottiene dunque:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_C^I + \bar{V}_C^{II} = -11.0 + 15.18j = 18.73 \exp\left(+2.19j\right) \tag{7}$$

Ritorniamo al dominio del tempo antitrasformando:

$$v_C(t) = Re\left\{\bar{V}_C \exp\left(j\omega t\right)\right\} \tag{8}$$

$$v_C(t) = Re\left\{18.73 \exp(j\left(\omega t + 2.19\right))\right\} = 18.73 \cos(\omega t + 2.19) \tag{9}$$

Esercizio 4

Calcolare la potenza complessa $\hat{P}$, attiva P, reattiva Q assorbita a regime dalla serie di L_2 e R_2, utilizzando, per la soluzione del circuito, il teorema di Norton.

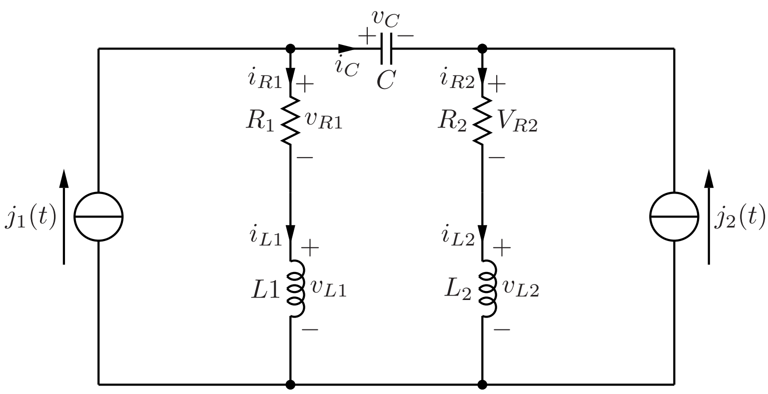

Figura 5: Circuito associato al forzamento in corrente

$$j_1(t) = J_1 \cos(4t),\ j_2(t) = J_2 \cos(4t - 2/3\pi),\ J_1 = 4A,\ J_2 = 2A$$
$$R_1 = R_2 = 2\Omega,\ L_1 = L_2 = 1H,\ C = 2F.$$

Passaggio al dominio trasformato

I forzamenti nel dominio trasformato sono:

- $\bar{J}_1 = J_1 = 4,$
- $\bar{J}_2 = J_2 \exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right) = -0.5(1+\sqrt{3}j)J_2 = -(1+\sqrt{3}j)$

Le impedenze associate al condensatore e all'induttore sono rispettivamente:

- $\dot{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = -0.125j,$
- $\dot{Z}_{L1} = \dot{Z}_{L2} = j\omega L = 4j$

Calcolo Impedenza Equivalente

$$\dot{Z}_{eq} = R_1 + \dot{Z}_{L1} + \dot{Z}_C = 2 + 3.875j \tag{1}$$

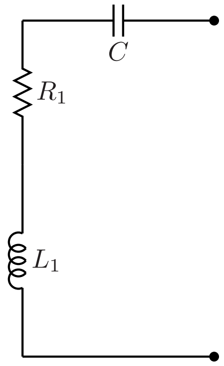

Figura 6: Circuito per il calcolo di $\dot{Z}_{eq}$

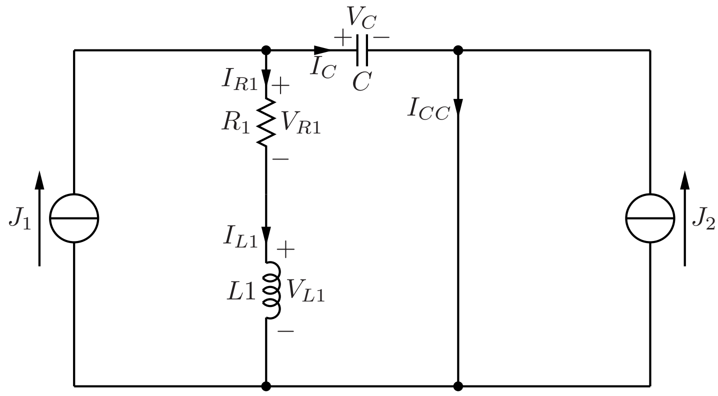

Figura 7: Circuito per il calcolo di $\bar{I}_{cc}$

Calcolo Corrente di Corto Circuito

Per il calcolo di I_{cc} si applichi il principio di sovrapposizione degli effetti: Considerando attiva la causa $\bar{J}_1$ e aprendo il generatore $\bar{J}_2$ si ottiene:

$$\bar{I}_{cc}^{I} = \frac{R_1 + \dot{Z}_L}{R_1 + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C}\bar{J}_1 = \frac{2+4j}{2+3.875j}J_1 = 4.10 + 0.0526j \tag{2}$$

Considerando al contrario attiva la causa $\bar{J}_2$ e aprendo il generatore $\bar{J}_1$ si ottiene:

$$\bar{I}_{cc}^{II} = J_2 = -(1.0 + 1.732j) \tag{3}$$

La corrente di corto circuito complessiva è, dunque

$$\bar{I}_{cc} = \bar{I}_{cc}^{I} + \bar{I}_{cc}^{II} = 3.10 - 1.68j \tag{4}$$

Circuito Equivalente secondo Norton

$$\bar{I}_{R2} = \frac{\dot{Z}_{eq}}{\dot{Z}_{L2} + R_2 + \dot{Z}_{eq}}\bar{I}_{cc} = 1.526 - 0.839j \tag{5}$$

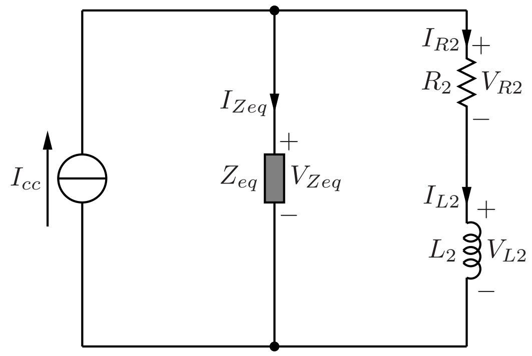

Figura 8: Circuito equivalente secondo Norton

la tensione che insiste sulla serie di L_2 e R_2 si ottiene immediatamente:

$$\bar{V}_{(R2+L2)} = \left(\dot{Z}_{L2} + R_2\right) \bar{I}_{I_{R2}} = 6.41 + 4.42j \tag{6}$$

La potenza apparente si calcola come:

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = 3.03 + 6.06j \tag{7}$$

La potenza attiva si ottiene come:

$$P = Re\left(\hat{P}\right) = 3.03W \tag{8}$$

Al contrario la potenza reattiva si ottiene:

$$Q = Im\left(\hat{P}\right) = 6.06\text{VAr} \tag{9}$$

Esercizio 5

Calcolare il lavoro fatto sull'induttore L di figura 1 nell'intervallo $[t_0, t_1]$.

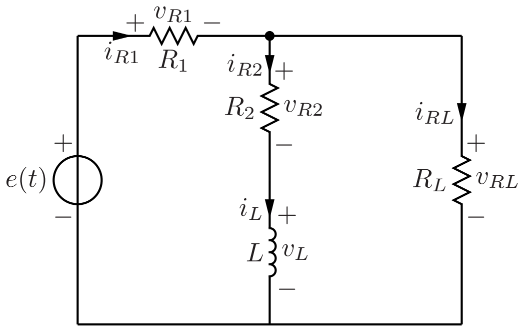

Figura 1: Circuito completo esercizio 5

$$
\begin{gathered}
e(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi),\ \omega = 100 rad/s,\ E_0 = 100\sqrt{2}V,\ \phi = \frac{\pi}{4} \\
R_1 = 100\Omega,\ R_2 = 100\Omega,\ R_L = 100\Omega, \\
L = 1H,\ i_L(t_0) = 1.8A, \\
t_0 = 0,\ t_1 = 20\pi ms
\end{gathered}
$$

Si scrivano le equazioni che regolano il funzionamento del circuito. Si parta dalle LKT:

$$
\begin{cases} e(t) & = & v_{R1} + v_{R2} + v_L \\ v_{R2} + v_L & = & v_{RL} \end{cases} \tag{1}
$$

si consideri poi la LKC:

$$
i_{R1} = i_L + i_{RL} \tag{2}
$$

ed infine le caratteristiche dei bipoli:

$$
\begin{cases} v_{R1} & = & R_1 i_{R1} \\ v_{R2} & = & R_2 i_L \\ v_{RL} & = & R_3 i_{RL} \\ v_L & = & L\frac{di_L}{dt} \end{cases} \tag{3}
$$

Combinando le eqq. (1), (2) e (3) si ottiene la tensione che insiste sull'induttore:

$$
v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -(R_1//R_L + R_2)i_L + \frac{R_L}{R_1 + R_L}e(t) \tag{4}
$$

La soluzione dell'equazione differenziale (4) per linearità si ottiene come somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata $i_{L,0}(t)$ fornita in (5) e di una soluzione particolare della completa $i_{p,0}(t)$.

$$
i_{L,0} = k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{5}
$$

ove è stata introdotta la costante di tempo τ:

$$\tau = \frac{L}{R_1//R_L + R_2} \tag{6}$$

Una soluzione particolare è, ad esempio, la soluzione di regime ottenuta col metodo fasoriale, il cui calcolo è condotto nella sezione seguente.

Soluzione di regime

Si associno alle grandezze del circuito i loro corrispondenti nel dominio dei fasori, cioè

$$\bar{E} = E_0\,(0.707 + 0.707j) = 100 + 100j \tag{7}$$
$$\dot{Z}_L = 100j \tag{8}$$

detta Z_{eq} è l'impedenza vista ai morsetti del generatore

$$\dot{Z}_{eq} = R_1 + (R_2 + Z_L)//R_L = 160 + 20j \tag{9}$$

La corrente nell'induttore sarà:

$$\bar{I}_L = \frac{R_L}{R_L + R_2 + Z_L}\frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{eq}} = 0.39 + 0.08j = 0.4\exp(0.2j) \tag{10}$$

Ritornando nel dominio del tempo otterremo la soluzione di regime:

$$i_{L,p}(t) = 0.4\cos(\omega t + 0.2) \tag{11}$$

Soluzione completa e calcolo del lavoro

Sommando le soluzioni fornite dalle eqq. (5) e (11) si perviene alla soluzione generale dell'equazione completa:

$$i_L = k\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 0.4\cos(\omega t + 0.2) \tag{12}$$

La costante k si determina imponendo la condizione iniziale $i_L(0) = 1.8A$:

$$k = 1.4A \tag{13}$$

L'evoluzione della corrente nell'induttore segue la seguente legge:

$$i_L(t) = 1.4\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 0.4\cos(\omega t + 0.2) \tag{14}$$

Il lavoro fatto sull'induttore è dato da:

$$W(\Delta t) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}Li_L^2(t) = \frac{L}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{k^2\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) + \right.$$

$$
\begin{aligned}
+ &\quad A^2\cos^2(\omega t+\phi) + 2kA\cos(\omega t+\phi)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\Bigg\} dt \\
= &\quad \frac{L}{2}\left[-\frac{k\tau}{2}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) + \frac{A^2}{4\omega}\left[2\left(\omega t+\phi\right) + sin\left(2\left(\omega t+\phi\right)\right)\right]\right. \\
- &\quad \left.\frac{2kA\tau}{1+\omega^2\tau^2}\left(\cos\left(\omega t+\phi\right)\ -\omega\tau\sin\left(\omega t+\phi\right)\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

Determinare l'andamento temporale della tensione $v_c(t)$ che insiste ai capi del condensatore C per $t > 0$.

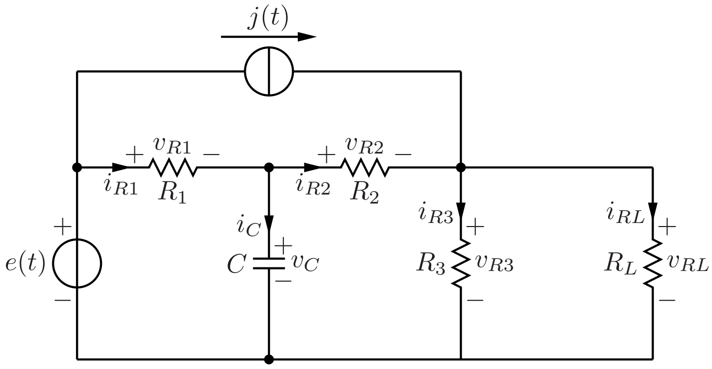

Figura 1: Circuito completo esercizio 6

$$j(t) = J_0 = 3A$$
$$e(t) = E_0 \cos(\omega t),\ \omega = 100rad/s,\ E_0 = 100V,$$
$$R_1 = 25\Omega,\ R_2 = 25\Omega,\ R_3 = 50\Omega,\ R_L = 50\Omega,$$
$$C = 0.2mF,\ v_C(0) = 0$$

Si scrivano le LKT:

$$\begin{cases} e(t) = v_{R1} + v_C \\ v_C = v_{R2} + v_{R3} \end{cases} \tag{1}$$

le LKC

$$\begin{cases} i_{R1} = i_C + i_2 \\ i_{R2} + j(t) = i_{R3//RL} \end{cases} \tag{2}$$

e le si accoppino con le caratteristiche dei bipoli:

$$\begin{cases} i_c = C\frac{dv_c}{dt} \\ i_{Req} = \frac{v_{Req}}{R_{eq}} \\ i_{R1} = \frac{v_{R1}}{R_1} \end{cases} \tag{3}$$

Combinando le eqq. (1), (2) e (3) si ottiene la corrente che fluisce nel condensatore:

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{R_1//\left(R_2 + R_3//R_L\right)} + \frac{R_3//R_L}{R_2 + R_3//R_L} j(t) + \frac{e(t)}{R_1} \tag{4}$$

La soluzione dell'equazione differenziale per linearità si ottiene come somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata $v_{c,0}$, riportata in (5), e di una soluzione particolare della completa $v_{c,p}$.

$$v_{c,0} = k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{5}$$

ove la costante di tempo τ è:

$$\tau = CR_1//\left(R_2 + R_3//R_L\right) \tag{6}$$

La soluzione di regime è certamente una soluzione particolare del nostro circuito. Per determinarla si applichi la sovrapposizione degli effetti.

Circuito di regime associato al forzamento in tensione

La rete associata al forzamento in tensione, ottenuta aprendo il generatore di corrente, è riportata in figura 2. Si associno alle grandezze del circuito i loro

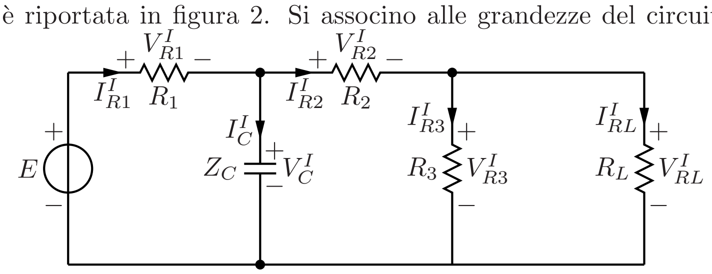

Figura 2: Circuito associato al forzamento sinusoidale in tensione

corrispondenti nel dominio dei fasori.

$$\bar{E} = E_0 \tag{7}$$
$$\dot{Z}_c = -50j \tag{8}$$

Si semplifichi la rete considerando la serie tra R_2 e il parallelo tra R_3 ed R_L come riportato in fig. 3.

$$R_{eq} = R_2 + R_3//R_L = 50\Omega \tag{9}$$

La tensione che insiste sul condensatore si calcola applicando la formula del partitore:

$$\bar{V}_c = \frac{\dot{Z}_c//R_{eq}}{\dot{Z}_c//R_{eq} + R_1}\bar{E} = 60 - 20j \tag{10}$$

ove

$$\dot{Z}_c//R_{eq} = \frac{\dot{Z}_c R_{eq}}{\dot{Z}_c + R_{eq}} = 25 - 25j \tag{11}$$

antitrasformando la $\bar{V}_c$ si ottiene la soluzione particolare cercata:

$$v^I_{cp}(t) = Re\left\{\bar{V}_c \exp\left(j\omega t\right)\right\} = 60\cos\omega t + 20\sin\omega t \tag{12}$$

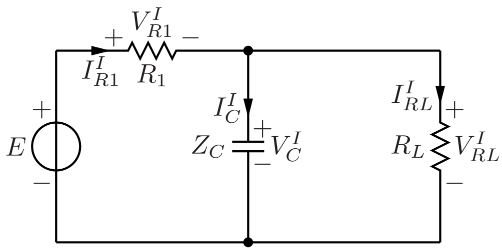

Figura 3: Circuito semplificato associato al forzamento in tensione

Circuito di regime associato al forzamento in corrente

Cortocircuitando il generatore di tensione si ottiene il circuito di figura 4. Si scrivano le LKT: La corrente in R_2 ed R_3 si ottiene a partire da un partitore di

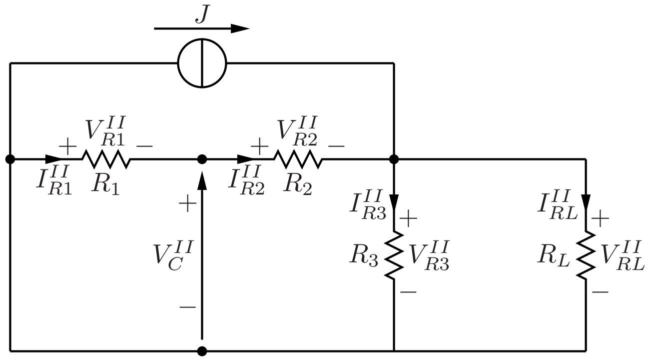

Figura 4: Circuito per il calcolo della soluzione di regime

corrente:

$$i_{R2}^{II} = -\frac{R_3//R_L}{R_1 + R_2 + R_3//R_L} j(t) = -0.5A \tag{13}$$

$$i_{R3}^{II} = \frac{R_L}{R_3 + R_L} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3//R_L} j(t) = 0.5A \tag{14}$$

Si calcola ora la tensione $v_{c,p}^{II}$:

$$v_{c,p}^{II} = v_{R2} + v_{R3} = R_2 i_{R2} + R_3 i_{R3} = 12.5V \tag{15}$$

Sovrapposizione degli effetti e considerazioni conclusive

La soluzione di regime complessiva ai capi del condensatore è

$$v_{c,p} = v_{c,p}^I + v_{c,p}^{II} = 12.5 + 60\cos\omega t + 20\sin\omega t \tag{16}$$

Imponendo infine la condizione iniziale $v_c(0) = 0$ si ottiene:

$$k = -72.5V \tag{17}$$

La tensione che insiste sul condensatore presenta in conclusione il seguente andamento temporale:

$$v_c(t) = 12.5 - 72.5 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 60\cos\omega t + 20\sin\omega t \tag{18}$$

Esercizio 7

Il circuito in figura 1 è a riposo fino all'istante $t = 0$ in cui si chiude l'interruttore. Determinare l'evoluzione della tensione ai capi del condensatore per $t > 0$.

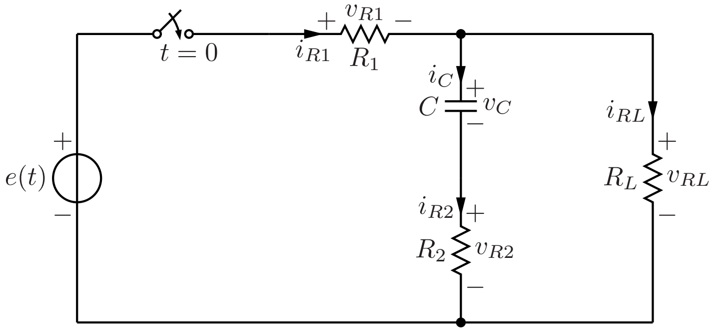

Figura 1: Circuito completo esercizio 7

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t),\ \omega = 1rad/s,\ E_0 = 100V,$$
$$R_1 = 4\Omega,\ R_2 = 4\Omega,\ R_L = 4\Omega,$$
$$C = 1F$$

Analisi del Circuito resistivo associato

Il *circuito resistivo associato*, mostrato in fig. 2, si ottiene sostituendo al condensatore un generatore indipendente di tensione $v_C(t)$. Per la stesura della equazione di stato del circuito occorre determinare la corrente $i_C(t)$

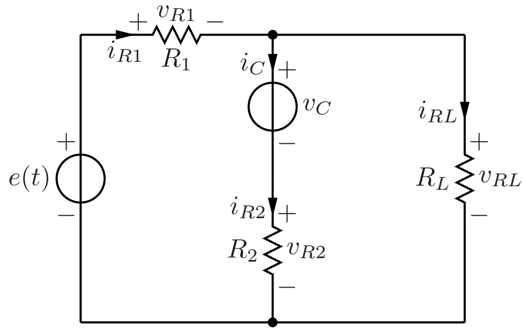

Figura 2: Circuito resistivo associato

Applicando la sovrapposizione degli effetti ai 2 generatori presenti si ha: [1]

$$i_C(t) = i_C^I(t) + i_C^{II}(t) = \frac{R_L}{R_2 + R_L} \frac{e(t)}{R_1 + R_2//R_L} + \frac{v_C(t)}{R_1//R_L + R_2} \tag{1}$$

[1] nel seguito si farà riferimento a $e(t)$ e $v_C(t)$ come causa I e causa II rispettivamente.

Combinando la eq (1) con la caratteristica del condensatore si ottiene:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{R_L}{R_2 + R_L}\frac{e(t)}{R_1 + R_2//R_L} - \frac{v_C(t)}{R_1//R_L + R_2} \tag{2}$$

ovvero

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{e(t)}{\tau} - \frac{v_C(t)}{C(R_1//R_L + R_2)} \tag{3}$$

$$\tau = \frac{C(R_2 + R_L)(R_1 + R_2//R_L)}{R_L} = 12\, s \tag{4}$$

La soluzione della completa si ottiene come somma dell'integrale generale della omogenea associata e di una soluzione particolare della completa. L'integrale generale dell'omogenea è immediata:

$$v_{C,O}(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{5}$$

Un integrale particolare è, ad esempio la soluzione di regime.

Analisi del circuito di regime per t > 0

Passando nel dominio dei fasori si ha:

$$\bar{E} = 100 \tag{6}$$

$$\dot{Z}_C = -j \tag{7}$$

La tensione ai capi del condensatore è dunque:

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{E}}{R_1 + (Z_C + R_2)//R_L}\frac{R_L}{R_2 + R_L + Z_C} = 8.1 + 1.35j = 8.21\exp(0.165j) \tag{8}$$

da cui antitrasformando si ottiene:

$$v_{C,p}(t) = 8.21\cos(\omega t + 0.165) \tag{9}$$

Determinazione delle costanti

La soluzione generale è dunque:

$$v_C(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 8.21\cos(\omega t + 0.165) \tag{10}$$

Imponendo la condizione iniziale si ha:

$$v_C(0) = A + 8.21\cos(0.165) = 0 \tag{11}$$

da cui si ha:

$$A = 8.1\, V \tag{12}$$

Esercizio 8

Verificare la conservazione delle potenze nel circuito in figura 1, adoperando il *metodo delle correnti di maglia*.

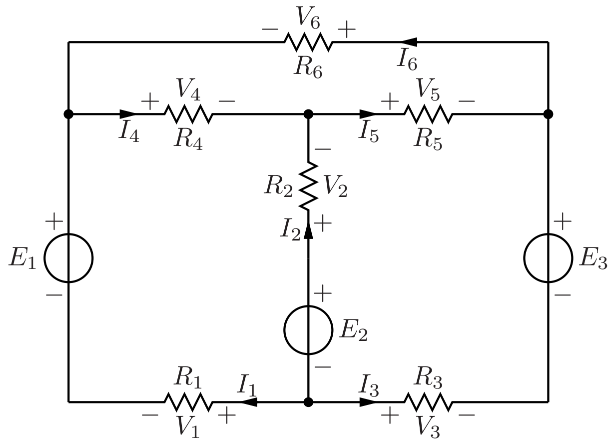

Figura 1: Circuito completo esercizio 8

$$E_1 = 460V,\ E_2 = 230V,\ E_3 = 115V$$
$$R_1 = 8\Omega,\ R_2 = 4\Omega,\ R_4 = 2\Omega,\ R_5 = 6\Omega,\ R_6 = 12\Omega$$

Si fissino le tre correnti di maglia:

- J_1 circola in senso orario nella maglia costituita dai bipoli $\{E_1, R_4, R_2, E_2, R_1\}$
- J_2 circola in senso orario nella maglia costituita dai bipoli $\{R_5, E_3, R_3, E_2, R_1\}$
- J_3 circola in senso orario nella maglia costituita dai bipoli $\{R_6, R_5, R_4\}$

Si consideri il legame tra le correnti di lato e le correnti fittizie di maglia:

$$\begin{cases} I_1 &= J_1 \\ I_2 &= J_2 - J_1 \\ I_3 &= -J_2 \\ I_4 &= J_1 - J_3 \\ I_5 &= J_2 - J_3 \\ I_6 &= -J_3 \end{cases} \tag{1}$$

Essendo le LKC automaticamente verificate dalle correnti di maglia, si impongano le LKT:

$$E_1 - R_4 I_4 + R_2 I_2 - E_2 - R_1 I_1 = 0 \tag{2}$$
$$E_2 - R_2 I_2 - R_5 I_5 - E_3 + R_3 I_3 = 0 \tag{3}$$
$$R_6 I_6 + R_5 I_5 + R_4 I_4 = 0 \tag{4}$$

Sostituendo le (13) nelle eqq. (2-4) si ha:

$$\begin{aligned} E_1 - R_4(J_1 - J_3) + R_2(J_2 - J_1) - E_2 - R_1 J_1 &= 0 \quad (5) \\ E_2 - R_2(J_2 - J_1) - R_5(J_2 - J_3) - E_3 - R_3 J_2 &= 0 \quad (6) \\ -R_6 J_3 + R_5(J_2 - J_3) + R_4(J_1 - J_3) &= 0 \quad (7) \end{aligned}$$

Queste equazioni possono essere riassunte nella forma:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4)J_1 - R_2 J_2 - R_4 J_3 &= E_1 - E_2 \quad (8) \\ R_2 J_1 - (R_2 + R_3 + R_5)J_2 + R_5 J_3 &= E_3 - E_2 \quad (9) \\ R_4 J_1 + R_5 R_2 - (R_4 + R_5 + R_6)J_3 &= 0 \quad (10) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici avremo:

$$\begin{pmatrix} 14 & -4 & -2 \\ 4 & -20 & 6 \\ 2 & 6 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230 \\ -115 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Invertendo il sistema lineare si ottiene:

$$\begin{cases} J_1 = 20.5A \\ J_2 = 11.5A \\ J_3 = 5.5A \end{cases} \quad (12)$$

Sostituendo l'eq. (12) nelle eqq. (13) si ottiene:

$$\begin{cases} I_1 = J_1 = 20.5\,A \\ I_2 = J_2 - J_1 = -9\,A \\ I_3 = -J_2 = -11.5\,A \\ I_4 = J_1 - J_3 = 15\,A \\ I_5 = J_2 - J_3 = 6\,A \\ I_6 = -J_3 = -5.5\,A \end{cases} \quad (13)$$

Si valutano le potenze erogate dai generatori:

$$\begin{cases} P_{E1} = E_1 I_1 = 9430\,W \\ P_{E2} = E_2 I_2 = -2070\,W \\ P_{E3} = E_3 I_3 = -1322.5\,W \end{cases} \quad (14)$$

e la loro somma:

$$P_E = P_{E1} + P_{E2} + P_{E3} = 6037\,W \quad (15)$$

Si calcolano, ora le potenze assorbite dai resistori:

$$\begin{cases} P_{R1} = R_1 I_1^2 = 3362\,W \\ P_{R2} = R_2 I_2^2 = 324\,W \\ P_{R3} = R_3 I_3^2 = 1322.5\,W \\ P_{R4} = R_4 I_4^2 = 450\,W \\ P_{R5} = R_5 I_5^2 = 216\,W \\ P_{R6} = R_6 I_6^2 = 363\,W \end{cases} \quad (16)$$

e come previsto dal teorema di conservazione delle potenze la loro potenza assorbita dai resistori eguaglia quella erogata dai generatori, infatti:

$$P_R = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} + P_{R5} + P_{R6} = 6037\,W \tag{17}$$

Esercizio 9

Calcolare la potenza totale assorbita da tutti i resistori del circuito in figura 1, adoperando il *metodo dei potenziali di nodo*.

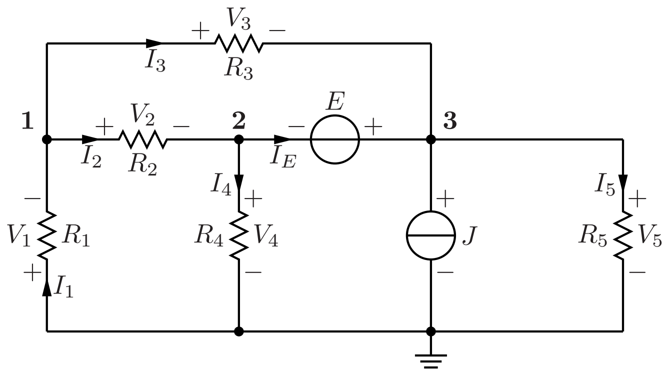

Figura 1: Circuito completo esercizio 9

$$E = 10V,\ J = 10A$$
$$R_1 = 2\Omega,\ R_2 = 10\Omega,\ R_3 = 5\Omega,\ R_4 = 15\Omega,\ R_5 = 5\Omega$$

Si introducano i potenziali E_1, E_2, E_3 per i nodi 1, 2, 3, rispettivamente. Si scrivano dunque le correnti dei vari rami del circuito in termini dei potenziali di nodo.

$$I_1 = -\frac{E_1}{R_1} \tag{1}$$
$$I_2 = \frac{E_1 - E_2}{R_2} \tag{2}$$
$$I_3 = \frac{E_1 - E_3}{R_3} \tag{3}$$
$$I_4 = \frac{E_2}{R_4} \tag{4}$$
$$I_5 = \frac{E_3}{R_5} \tag{5}$$

Essendo le LKT alle maglie automaticamente verificate dai potenziali di nodo restano da imporre le LKC ai nodi.

$$-\frac{E_1}{R_1} = \frac{E_1 - E_2}{R_2} + \frac{E_1 - E_3}{R_3} \tag{6}$$
$$\frac{E_1 - E_2}{R_2} = I_E + \frac{E_2}{R_4} \tag{7}$$

$$I_E + \frac{E_1 - E_3}{R_3} = J_0 + \frac{E_3}{R_5} \tag{8}$$
$$E_3 - E_2 = E_0 \tag{9}$$

Riscrivendo le equazioni si ottiene il seguente sistema lineare:

$$-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) E_1 + \frac{1}{R_2} E_2 + \frac{1}{R_3} E_3 = 0 \tag{10}$$
$$\frac{1}{R_2} E_1 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) E_2 - I_E = 0 \tag{11}$$
$$\frac{1}{R_3} E_1 - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) E_3 + I_E = J_0 \tag{12}$$
$$-E_2 + E_3 = E_0 \tag{13}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene: (mettendo il sistema in forma matriciale)

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.167 & 0 & -1 \\ 0.2 & 0 & -0.4 & 1 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Risolvendo il sistema lineare si ottiene:

$$\begin{cases} E_1 = -8.5V \\ E_2 = -29.2V \\ E_3 = -19.2V \\ I_E = 0.61A \end{cases} \tag{15}$$

La potenza assorbita dalla totalità dei resistori è uguale alla potenze erogata dai generatori; pertanto si ha:

$$P = I_E E_0 - E_3 J_0 = 6.1 + 19.2 = 25.3W \tag{16}$$

Esercizio 10

La rete in figura è in regime stazionario fino a t=0, istante in cui si apre l'interruttore S_1 e si chiude l'interruttore S_2. Calcolare l'evoluzione della tensione $v_{C1}(t)$ per $t > 0$.

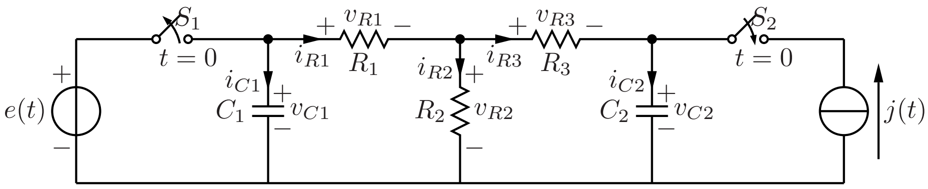

Figura 1: Circuito completo esercizio 10

$$e(t) = E_0,\ E_0 = 100V$$
$$i(t) = J_0 cos\,(\omega t),\ J_0 = 10A,\ \omega = 1rad/s$$
$$R_1 = R_2 = R_3 = R = 2\Omega,$$
$$C_1 = 2C = 6F,\ C_2 = C = 3F,$$

Analisi del circuito di regime per t < 0.

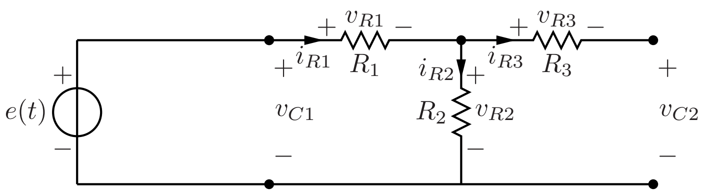

Figura 2: Circuito di regime per $t < 0$

Per la *continuità delle variabili di stato* le condizioni iniziali sui due elementi dinamici, cioè i 2 capacitori C_1 e C_2, sono:

$$v_{C1}(0^-) = v_{C1}(0^+) = E_0 = 100V \tag{1}$$
$$v_{C2}(0^-) = v_{C2}(0^+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_0 = \frac{E_0}{2} = 50V \tag{2}$$

Analisi del Circuito Resistivo Associato

Il *circuito resistivo associato* si ottiene sostituendo ai due condensatori due generatori indipendente di tensione $v_{C1}(t)$ e $v_{C2}(t)$ rispettivamente. Per la stesura delle equazioni di stato del circuito occorre determinare le correnti che scorrono in questi due componenti in termini delle grandezze di stato. Applicando la

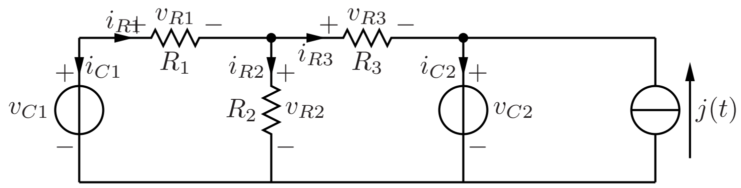

Figura 3: Circuito resistivo associato

sovrapposizione degli effetti ai tre generatori presenti si ottiene (nel seguito si farà riferimento a v_{C1}, v_{C2} e j come causa I, II, III, rispettivamente) :

$$\begin{aligned} i_{C1} = i_{C1}^{I} + i_{C1}^{II} + i_{C1}^{III} &= -\frac{1}{R_1 + R_2//R_3} v_{C1} + \frac{1}{R_1}\frac{R_1//R_2}{R_1//R_2 + R_3} v_{C2} \quad (3) \\ i_{C2} = i_{C2}^{I} + i_{C2}^{II} + i_{C2}^{III} &= \frac{1}{R_3}\frac{R_2//R_3}{R_1 + R_2//R_3} v_{C1} - \frac{1}{R_1//R_2 + R_3} v_{C2} + j \quad (4) \end{aligned}$$

Le equazioni di stato del circuito si ricavano combinando le (3) e (4) con le caratteristiche dei condensatori.

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = i_{C1} = -\frac{1}{R_1 + R_2//R_3} v_{C1} + \frac{1}{R_1}\frac{R_1//R_2}{R_1//R_2 + R_3} v_{C2} \tag{5}$$

$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = i_{C2} = \frac{1}{R_3}\frac{R_2//R_3}{R_1 + R_2//R_3} v_{C1} - \frac{1}{R_1//R_2 + R_3} v_{C2} + j \tag{6}$$

Il sistema di equazioni (5)-(6) può essere messo nella forma:

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = -G_{11} v_{C1} - G_{12} v_{C2} \tag{7}$$

$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = -G_{21} v_{C1} - G_{22} v_{C2} + j \tag{8}$$

ove si è posto:[1]

$$\begin{array}{cc} G_{11} = \frac{1}{R_1 + R_2//R_3} = \frac{2}{3R} & G_{12} = -\frac{1}{R_1}\frac{R_1//R_2}{R_1//R_2 + R_3} = -\frac{1}{3R} \\ G_{21} = -\frac{1}{R_3}\frac{R_2//R_3}{R_1 + R_2//R_3} = -\frac{1}{3R} & G_{22} = \frac{1}{R_1//R_2 + R_3} = \frac{2}{3R} \end{array} \tag{9}$$

Riconduciamo ora il sistema di 2 equazioni differenziali del primo ordine ad una sola equazione differenziale del secondo ordine. A tale scopo si ricavi v_{C2} dalla eq. (5)

$$v_{C2} = -\frac{C_1}{G_{12}}\frac{dv_{C1}}{dt} - \frac{G_{11}}{G_{12}} v_{C1} \tag{10}$$

e lo si sostituisca in (6)

$$\frac{d^2 v_{C1}}{dt^2} + 2\sigma \frac{dv_{C1}}{dt} + \omega_r^2 v_{C1} + \frac{j}{C_1 C_2} = 0 \tag{11}$$

[1] I termini G_{ij} non sono altro che gli elementi di una matrice delle conduttanze G associata ad un 2 porte assumendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte.

dove sono state introdotte le costanti:

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{C_1 G_{22} + C_2 G_{11}}{C_1 C_2} = \frac{1}{2RC} \tag{12}$$

$$\omega_r^2 = \frac{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}}{C_1 C_2} = \frac{1}{6(RC)^2} \tag{13}$$

occorre ora scrivere le condizioni iniziali su v_{C1} e sulla sua derivata. La condizione iniziale su v_{C1} è espressa dalla (1), invece la condizione su $\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0^+}$ si ricava a partire dalla (7) e dalle (1)-(2).

$$\left.\frac{dv_{C1}}{dt}\right|_{0^+} = \frac{-G_{11}v_{C1}(0) - G_{12}v_{C2}(0)}{C_1} = -\frac{E_0}{6RC} = -2.8Vs^{-1} \tag{14}$$

La soluzione generale della completa si determina come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare della completa.
L'equazione caratteristica dell'omogenea associata ammette le seguenti soluzioni (*frequenze naturali*):

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_r^2} = -\frac{1}{6RC}\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) = \begin{cases} -4.7 \cdot 10^{-3} \\ -162 \cdot 10^{-3} \end{cases} s^{-1} \tag{15}$$

dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è:

$$v_{0,C1}(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{16}$$

Per ottenere la soluzione generale della completa occorre conoscere una soluzione particolare del circuito. Una di esse è, ad esempio, la soluzione di regime per $t > 0$.

Analisi del circuito di regime per t > 0.

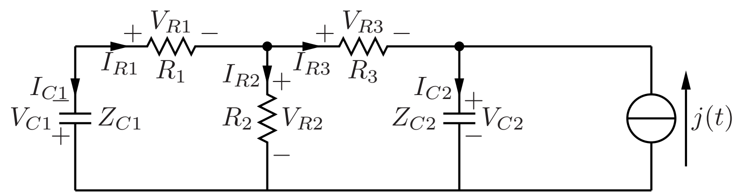

Figura 4: Circuito di regime per $t > 0$

Passando nel dominio dei fasori si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= J_0 = 10 \\ \dot{Z}_{C1} &= -\frac{j}{\omega C_1} = -0.167j \\ \dot{Z}_{C2} &= -\frac{j}{\omega C_2} = -0.333j \end{aligned} \tag{17}$$

Si introducano le impedenze:

$$\begin{array}{rclcl} \dot{Z}_{eq1} & = & \dot{Z}_{C1} + R_1 & = & 2 - 0.167j \\ \dot{Z}_{eq2} & = & \dot{Z}_{eq1}//R_2 + R_3 & = & 3.0 - 0.042j \end{array} \quad (18)$$

Partizionando la corrente $\bar{J}$ e utilizzando la caratteristica del condensatore C1 si ricava la $\bar{V}_{C1}$:

$$\bar{V}_{C1} = \dot{Z}_{C1} \frac{\dot{Z}_{C2}}{\dot{Z}_{eq2} + \dot{Z}_{C2}} \frac{R_2}{\dot{Z}_{eq1} + R_2} \bar{J} = -0.09i - 0.015j = 0.92 \exp(3.31j) \quad (19)$$

Ritornando nel dominio del tempo si ottiene la soluzione di regime per $t > 0$.

$$v_{p,C1}(t) = E_p \cos(\omega t + \phi_p) \quad (20)$$

ove si è posto:

$$\begin{cases} E_p = 0.92V \\ \phi_p = 3.31 \end{cases} \quad (21)$$

Determinazione delle costanti

La soluzione della completa e la sua derivata sono rispettivamente:

$$v_{C1} = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) + E_p \cos(\omega t + \phi_p) \quad (22)$$

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = A_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 i \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) - E_p \omega \sin(\omega t + \phi_p) \quad (23)$$

Imponendo le condizioni iniziali all'istante t=0 si ha:

$$v_C(0) = A_1 + A_2 + E_p \cos(\phi_p) \quad (24)$$

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 - E_p \omega \sin(\phi_p) \quad (25)$$

da cui

$$A_1 = -\frac{\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_0 - \lambda_2 v_C(0) + E_p [\omega \sin(\phi_p) + \lambda_2 \cos(\phi_p)]}{\lambda_2 - \lambda_1} = 85.14V \quad (26)$$

$$A_2 = \frac{\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_0 - \lambda_1 v_C(0) + E_p [\omega \sin(\phi_p) + \lambda_1 \cos(\phi_p)]}{\lambda_2 - \lambda_1} = -19.83V \quad (27)$$

Sostituendo le (26) nella (22) si perviene all'espressiore cercata della tensione sul condensatore:

$$v_{C1} = 85.14 \exp\left(-4.7 \cdot 10^{-3} t\right) - 19.83 \exp\left(-162 \cdot 10^{-3} t\right) + 0.92 \cos(t + 3.31) \quad (28)$$

Esercizio 11

La rete in figura è in regime stazionario fino a t=0, istante in cui si chiude l'interruttore S_1. Calcolare l'evoluzione della tensione $v_C(t)$ per $t > 0$.

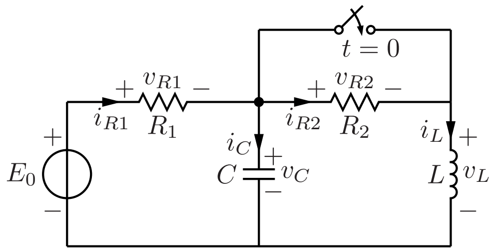

Figura 1: Circuito completo esercizio 11

$$E_0 = 2V$$
$$R_1 = R_2 = R = \tfrac{1}{3}\Omega,$$
$$L = 1mH,\ C = 2mF,$$

Analisi del circuito di regime per t $<$ 0

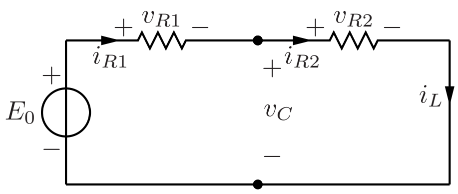

Figura 2: Circuito di regime per $t < 0$

Per la *proprietà di continuità delle variabili di stato* le condizioni iniziali sui due elementi dinamici sono:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_0 = \frac{E_0}{2} = 1V \tag{1}$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{1}{R_1 + R_2} E_0 = \frac{E_0}{2R} = 3A \tag{2}$$

Analisi del Circuito Resistivo Associato

Il circuito resistivo associato si ottiene sostituendo al condensatore un generatore indipendente di tensione $v_C(t)$, all'induttore un generatore indipendente di corrente $i_L(t)$. Si vogliono determinare la corrente che scorre nel condensatore e la tensione che insiste sull'induttore al fine di scrivere le equazioni di stato del

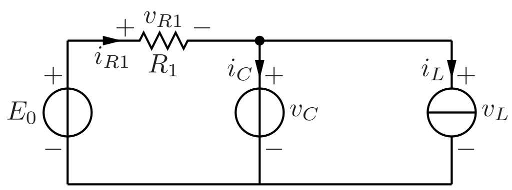

Figura 3: Circuito resistivo associato

circuito. Applicando la *sovrapposizione degli effetti* ai tre generatori presenti si ottiene:

$$
\begin{aligned}
i_C &= i_L^I + i_L^{II} + i_L^{III} = -\frac{1}{R} v_C - i_L + \frac{E}{R} && (3)\\
v_L &= v_L^I + v_L^{II} + v_L^{III} = v_C && (4)
\end{aligned}
$$

Le equazioni di stato del circuito si ricavano combinando le (3) e (4) con le caratteristiche degli elementi dinamici.

$$
\begin{aligned}
C\frac{dv_C}{dt} = i_C &= -\frac{1}{R} v_C - i_L + \frac{E}{R} && (5)\\
L\frac{di_L}{dt} = v_L &= v_C && (6)
\end{aligned}
$$

che possono essere riportate nella forma

$$
\begin{aligned}
C\frac{dv_C}{dt} = i_C &= -h_{11} v_C - h_{12} i_L + \frac{E}{R} && (7)\\
L\frac{di_L}{dt} = v_L &= -h_{21} v_C - h_{22} i_L && (8)
\end{aligned}
$$

ove si è posto[2]:

$$
\begin{array}{cc}
h_{11} = \frac{1}{R} = 3S & h_{12} = 1 \\
h_{21} = -1 & h_{22} = 0\Omega
\end{array} \qquad (9)
$$

Con l'intento di ricondurci, a partire dal sistema di equazioni differenziali (7)-(8), ciascuna delle quali del primo ordine, ad un' unica equazione di ordine due si ricavi i_L dall'equazione (7)

$$
i_L = -\frac{1}{h_{12}} \left(C\frac{dv_c}{dt} + h_{11} v_C - \frac{E}{R} \right) \qquad (10)
$$

e la si sostituisca in (8):

$$
\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\sigma \frac{dv_C}{dt} + \omega_r^2 v_C = 0 \qquad (11)
$$

[2]I termini h_{ij} non sono altro che gli elementi di una matrice ibrida H associata ad un 2 porte assumendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte.

ove si è posto:

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{Lh_{11} + Ch_{22}}{LC} = \frac{1}{2RC} = 0.75 \cdot 10^{-3} ms^{-1} \qquad (12)$$

$$\omega_r^2 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{LC} = \frac{1}{LC} = 0.5 \cdot 10^{-6} s^{-2} \qquad (13)$$

Occorre ora scrivere le condizioni iniziali su v_C e sulla sua derivata. La condizione iniziale su v_C è espressa dalla (1), invece la condizione su $\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0^+}$ si ricava a partire dalla (7) e dalle (1)-(2).
Il problema di *Cauchy* da risolvere è dunque:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\sigma \frac{dv_C}{dt} + \omega_r^2 v_C = 0 \qquad (14)$$

$$v_C(0^+) = \frac{E_0}{2} \qquad (15)$$

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0^+} = 0 \qquad (16)$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata ammette le seguenti soluzioni (*frequenze naturali*):

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_r^2} = (-750 \pm 250) \cdot 10^{-6} s^{-1} = \begin{cases} -1 \cdot 10^{-3} \\ -0.5 \cdot 10^{-3} \end{cases} s^{-1} \qquad (17)$$

la soluzione generale dell'equazione completa che, in questo particolare caso coincide con l'omogenea associata è:

$$v_C(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \qquad (18)$$

Resta da determinare le due costanti reali A_1 ed A_2 imponendo le condizioni iniziali.

Determinazione delle costanti

La soluzione della completa e la sua derivata sono rispettivamente:

$$v_C(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \qquad (19)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = A_1\lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2\lambda_2 \exp(\lambda_2 t) \qquad (20)$$

Imponendo le condizioni iniziali all'istante t=0 si ha:

$$v_C(0) = A_1 + A_2 = \frac{E_0}{2} = 1 \qquad (21)$$

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0 \qquad (22)$$

da cui

$$\begin{cases} A_1 = -1V \\ A_2 = 2V \end{cases} \qquad (23)$$

Sostituendo le (23) nella (24) si perviene all'espressiore cercata della tensione sul condensatore:

$$v_C(t) = -\exp\left(-10^{-3}t\right) + 2\exp\left(-0.5 \cdot 10^{-3}t\right) \tag{24}$$