Università degli Studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienze Teoriche e Applicate

Architettura degli elaboratori

Il Livello Logico-Digitale:

Metodo di Karnaugh

Marco Taini - Dipartimento di Scienze Teoriche e Applicate
marco.tarini@uninsubria.it

Un'ottimizzazione ricorrente

- Consideriamo due «mintermini» (addendi di una SP, moltiplic di una PS) che condividono TUTTE LE VARIABILI ECCETTO UNA
  - es:
    A B /C + A /B /C (condividono A e /C, ma non B)
  - Allora, ottimizzazione:

    A B /C + A /B /C = A /C (B + /B) = A /C 1= A /C

  - (1° mettiamo in evidenza i termini in comune, 2° il resto si annulla!)
- Generalizzando:
  F(X1, X2, …, Xn) Y + F(X1, X2, …, Xn) /Y =
  F(X1, X2, …, Xn) (Y + /Y) = F(X1, X2, …, Xn)
- Chiamiamo tali min-termini «adiacenti»
  - (la variabile che *non* condividono, necessariamente, appare in mintermine naturale, e nell'altro negata)

Un’ottimizzazione ricorrente

- Va ancora meglio quando **QUATTRO** min-termini diversi condividono TUTTE LE VARIABILI ECCETTO **DUE** !
  - es:
    A /B C + A /B /C + /A /B C + /A /B /C (/B condiviso, ma non A e C)
  - Allora, ottimizzazione:

    A /B C + A /B /C + /A /B C + /A /B /C =
    /B (A C + A /C + /A C + /A /C) =
    =
    …
    =
    /B

    Fa 1! (sempre vero)
    Sono tutte le quattro combinazione possibili di A e C: esattamente una è sempre verificata.
    Dim:
    A C + A /C + /A C + /A /C =
    = A (/C + C) + /A (C + /C)
    = A 1 + /A 1
    = A + /A = 1

Generalizzando

- In una funzione booleana a ***k*** variabili…
- Quando **2^*n*** min-termini condividono tutte le variabili eccetto ***n***:
  - 1) si mettono in evidenza le ***k – n*** variabili condivise
  - 2) il resto diventa una costante e scompare
  - 3) rimane un solo min-termine con le ***k – n*** variabili condivise

- Es: con una funzione a ***k*** = 4 variabili
  - **2** min-termini condividono **3** variabili (tutto eccetto 1 var)
    → diventano un solo mintermine a 3 variabili
  - **4** min-termini condividono **2** variabili (tutto eccetto 2 vars)
    → diventano un solo mintermine a 2 variabili
  - **8** min-termini condividono **1** variabile (tutto eccetto 3 vars)
    → diventano un solo min-termine a 1 variabile

- Più sono, più si semplifica!!!

Mappe di Karnaugh

- Idea: *redisporre le righe della tabella di veritá in modo che l'adiacenza (logica) corrisponda all'adiacenza (fisica)*
  - scopo: rendere facile trovare i gruppi di min-termini «che condividono tutte le var eccetto N»
- Queste tabelle di verità redisposte opportunamente si chiamano Mappe di Karnaugh
  - dal loro ideatore → → →

- Così potremo fare direttamente:

Funz. boolana come Tavola di verità (riscritta come Mappa di Karnaugh) → **Espressione booleana** già molto ottimizzata

Nota:

- L'adiacenza fisica non è rispettata se scriviamo le tabelle nel modo banale…
  - cioè come abbiamo fatto fin'ora →
  - Ogni riga riguarda una configurazione di bit anche molto diversa dalla riga precedente
  - Qui: in rosso i bit di input che cambiano valore rispetto alla riga precedente

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Mappe di Karnaugh **per due variabili**

Tab di veritá

a	b	F(a,b)
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Mappa di Karnaugh

a	b	F(a,b)
0	0	**0**
0	1	**0**
1	1	**1**
1	0	**0**

Sambio due righe!

- In rosso i bit che cambiano rispetto alla riga precedente
- NB: la prima riga è preceduta dall'ultima. La mappa «gira»

Mappe di Karnaugh **per due variabili**

- Coppie di righe successive corrispondono sempre a min-termini adiacenti

a	b	F
0	0	**X**
0	1	**X**
1	1	**X**
1	0	**X**

differiscono solo per **b** (condividono **a = 0**)

a	b	F
0	0	**X**
0	1	**X**
1	1	**X**
1	0	**X**

differiscono solo per **a** (condividono **b = 1**)

a	b	F
0	0	**X**
0	1	**X**
1	1	**X**
1	0	**X**

differiscono solo per **b** (condividono **a = 1**)

a	b	F
0	0	**X**
0	1	**X**
1	1	**X**
1	0	**X**

differiscono solo per **a** (condividono **b = 0**)

Mappe di Karnaugh per tre variabili

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

Tabella di verità classica

nota l'ordine

B C \ A	0	1
0 0	**0**	**0**
0 1	**1**	**0**
1 1	**0**	**0**
1 0	**1**	**1**

Mappa di Karnaugh (corrispondente)

Mappe di Karnaugh per tre variabili

- Elementi adiacenti corrispondono sempre a min-termini adiacenti
- Esempi:

B C \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **c** (condividono **a = 0** e **b = 0**)

B C \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **b** (condividono **a = 1** e **c = 1**)

B C \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **a** (condividono **b = 0** e **c = 1**)

B C \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **a** (condividono **b = 1** e **c = 1**)

B C \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **b** (condividono **a = 1** e **c = 0**)

Mappe di Karnaugh per tre variabili

- Gruppi di 2x2 o 1x4 elementi condividono 1 (tutti meno 2) elementi!
- Esempi:

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

condividono **b = 0** (differiscono per **a** e **c**)

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 **1**	X	X
1 **1**	X	X
1 0	X	X

condividono **c = 1** (differiscono per **a** e **b**)

BC \ A	0	1
0 **0**	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 **0**	X	X

condividono **c = 0** (differiscono per **a** e **b**)

BC \ A	**0**	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

condividono **a = 0** (differiscono per **b** e **c**)

BC \ A	0	**1**
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

condividono **a = 1** (differiscono per **b** e **c**)

Mappe di Karnaugh: esempio

- Esempio per la funzione di tre variabili A, B, C
  F(A, B, C) = /A/B/C + /AB/C + A/BC + ABC + AB/C

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1		1	1	1

A/BC e ABC sono mintermini adiacenti
(differiscono solo per B)

Mappe di Karnaugh: esempio

- Esempio per la funzione di tre variabili A, B, C
  F(A, B, C) = /A/B/C + /AB/C + A/BC + ABC + AB/C

Mintermini adiacenti (differiscono per B)

Mintermini adiacenti (differiscono per A)

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1		1	1	1

Mintermini adiacenti (differiscono per B)

Semplificazioni possibili

/A/B/C + /AB/C = /A/C

/AB/C + AB/C = B/C

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1

A/BC + ABC = AC

Per ogni gruppo di mintermini adiacenti c'è una semplificazione possibile

- F(A, B, C) = /A/B/C + /AB/C + A/BC + ABC + AB/C =
  /A/C + B/C + AC

Semplificazioni possibili

Mintermini che differiscono per A e C

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	

/A/BC + /ABC + A/BC + ABC =
/AC (/B + B) + AC (/B + B) =
/AC + AC = (/A + A) C = C

Procedura: passo 1

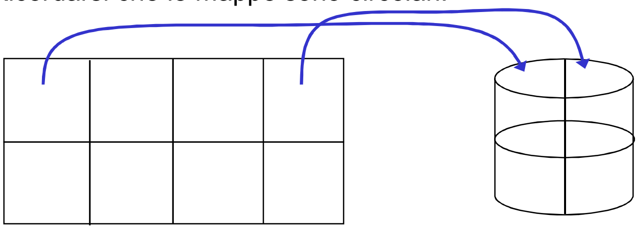
- Riscrivere tabella delle verità data come mappa di Karnaugh

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Procedura: passo 2

- Identificare un insieme di gruppi adiacenti ***di 2^n celle***
  di tutti 1 in modo che tutti gli 1 appartengano ad almeno un gruppo (SP)
- oppure, di tutti 0 in modo che tutti gli 0 siano appartengano… (PS)
- Criteri per trovare i gruppi:
  - I gruppi devono essere rettangolari (o quadrati)
  - Più i gruppi sono grandi e più letterali verranno eliminati
  - Meno gruppi danno luogo a meno termini
  - Lo stesso 1 o 0 può essere incluso in più gruppi
  - Ricordarsi che le mappe sono circolari:



Procedura: passo 2

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Procedura: passo 3

- Ogni gruppo corrisponde a un mintermine contenente solo le variabili che non cambiano.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

- BC + AC + AB

Uso degli zeri

- Si ricava l'espressione in forma di prodotto di somme

Ogni gruppo corrisponde a un mintermine contenente solo le variabili che non cambiano.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

(A+B)(B+C)(A+C)

riprova:

= (AB+B+AC+BC)(A+C) = (B+AC)(A+C)=AB+AC+BC+AC

= AB+AC+BC ← la soluz precedente

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
0 0	X	X	X	X
0 1	X	X	X	X
1 1	X	X	X	X
1 0	X	X	X	X

condividono
B=1 C=1 D=0
differiscono
solo per A

- esempi di gruppi da 2

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
0 0	X	X	X	X
0 1	X	X	X	X
1 1	X	X	X	X
1 0	X	X	X	X

condividono
A=0 B=0
differiscono
per C e D

condividono
B=1 C=1
differiscono
per A e D

condividono
C=0 D=0
differiscono
per A e B

- esempi di gruppi da 4

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

condividono
B=1 D=0
differiscono
per A e C

- altro esempio di gruppo da 4

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

condividono
B=1 D=0
differiscono
per A e C

- altro esempio di gruppo da 4

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

condividono
A=1
differiscono
per B D C

- esempio di gruppo da 8

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

- esempio di gruppo da 8

condividono D=0
differiscono per A B C

Mappe di Karnaugh per quattro variabili
Esempio

AB \ CD	00	01	11	10
00	**1**	**1**	**0**	**1**
01	**1**	**1**	**0**	**0**
11	**0**	**1**	**1**	**0**
10	**1**	**1**	**0**	**1**

Esempio

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	1	1	0	1

/CD

/B/D

ABD

/A/C

F = /A/C + /CD + /B/D + ABD

Limiti del metodo di Karnaugh

- I risultati dell'applicazione del metodo di Karnaugh sono normalmente meglio della semplice derivazione dell'espressione in prima forma normale, ma non sono necessariamente ottimi.
  - Sono sempre e comunque somme di prodotti (o prodotti di somme)
  - E' un vantaggio (semplicitá e velocità della rete risultante)
  - E' uno svantaggio (escludo altre ottimizzazioni logiche)
- Ad es. con Karnough posso dedurre che F = AB+BC
  - F richiede tre porte
- Ma noi sappiamo che F = AB+BC = B (A+C)
  - che richiede due porte

Sfruttamento delle condizioni di indifferenza

- Si possono utilizzare le condizioni di indifferenza per aumentare le dimensioni dei gruppi e/o diminuirne il numero.

A \ BC	00	01	11	10
0	X	0	1	0
1	X	1	1	1

F = BC + A

Mappe di Karnaugh per cinque variabili

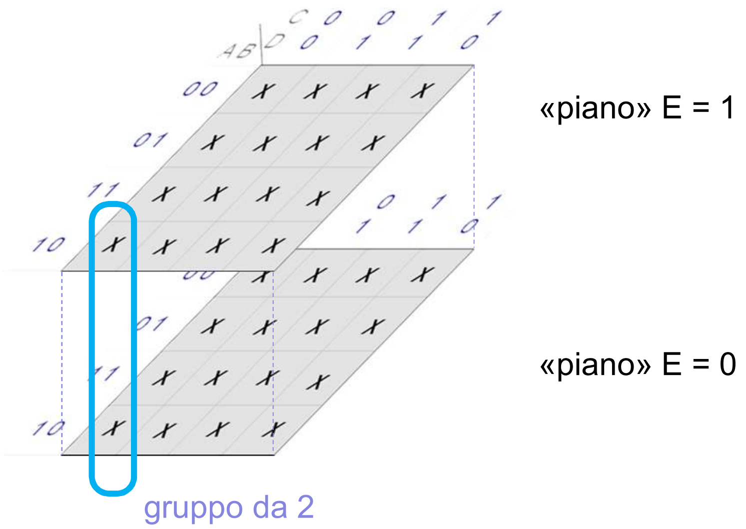
E = 0

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	x	x
01	x	x	x	x
11	x	x	x	x
10	x	x	x	x

E = 1

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	x	x
01	x	x	x	x
11	x	x	x	x
10	x	x	x	x

Mappe di Karnaugh per cinque variabili:
vanno pensate in 3D, come palazzi a 2 piani



Mappe di Karnaugh per cinque variabili

E = 0

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

E = 1

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

gruppo da 2
(condivide A=1 B=0 C=0 D=0,
differisce solo per E)

altro gruppo da 2
(condivide B=1 C=1 D=1 E=1,
differisce solo per A)

Mappe di Karnaugh per cinque variabili

E = 0

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

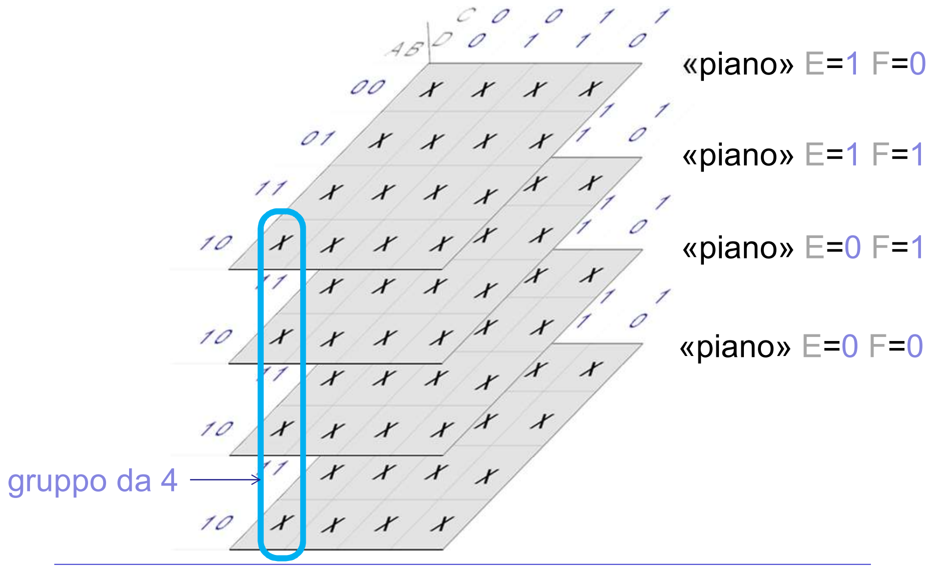
E = 1

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

esempio di gruppo da 8
(condivide B=1 e C=0,
differisce per A, D, E)

altro gruppo da 8
(condivide C=1 E=1,
differisce solo per A, B, D)

Mappe di Karnaugh per sei variabili:
pensarle come palazzi a 4 piani



Architettura degli elaboratori - 103 - Funzioni e circuiti combinatori

Mappe di Karnaugh per sei variabili

AB \ CD	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10
00	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
01	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
11	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	E = 0 F = 0				E = 0 F = 1				E = 1 F = 1				E = 1 F = 0			

esempio di gruppo da 8
(condivide B=1 e D=1, F=1
differisce per A, C, E)

Architettura degli elaboratori - 104 - Funzioni e circuiti combinatori

Mappe di Karnaugh per sei variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	x	x
01	x	x	x	x
11	x	x	x	x
10	x	x	x	x

E = 0
F = 0

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	x	x
01	x	x	x	x
11	x	x	x	x
10	x	x	x	x

E = 0
F = 1

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	x	x
01	x	x	x	x
11	x	x	x	x
10	x	x	x	x

E = 1
F = 1

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	x	x
01	x	x	x	x
11	x	x	x	x
10	x	x	x	x

E = 1
F = 0

esempio di gruppo da 8
(condivide C=1 e D=1, F=0
differisce per A, B, E)
(nota: il “piano terra” (EF = 00) confina con l’ultimo piano (EF = 10))

Reti combinatorie di dimensioni ancora maggiori?

- Come si vede, i metodi di sintesi che stiamo vedendo sono pratici solo quando gli input sono pochi
- Per numero di variabili molto maggiore, la tabella di verità stessa diventa di dimensioni eccessive
  - 2^n == crescita esponenziale!
- Vedremo nella prossima lezione come si affronta il problema della sintesi (e dell’analisi) per reti ben più complesse