ALGUNOS EJEMPLOS DE PARADOJAS

Marta Macho Stadler (*)

Etimológicamente "paradoja" *significa* "contrario a la opinión"*, esto es,* "contrario a la opinión recibida y común"*. Cicerón decía que lo que los griegos llaman paradoja* "lo llamamos nosotros cosas que maravillan"*. La paradoja maravilla porque propone algo que parece asombroso que pueda ser tal como se dice que es. A veces se usa* "paradoja" *como equivalente a* "antinomia"*; más propiamente se estima que las antinomias son una clase especial de paradojas, a saber, las que engendran contradicciones no obstante haberse usado para defender las formas de razonamiento aceptadas como válidas.*

Diccionario de Filosofía abreviado, José Ferrater Mora, Edhasa, 1990.

Históricamente, las paradojas están asociadas con crisis en el pensamiento y con avances revolucionarios. En este artículo, se dan algunos ejemplos de paradojas, que, en mayor o menor medida, están relacionados con la Matemática. La lista es pequeña, pero espero que la elección de los ejemplos sea lo suficientemente *buena* como para provocar la curiosidad de los lectores...

1. PARADOJAS VISUALES

1.1 Figuras ambiguas

Una figura se llama *ambigua*, cuando puede interpretarse de diferentes maneras. Veamos algunos ejemplos.

Figura 1: *Las visiones del Quijote,* por Octavio Ocampo

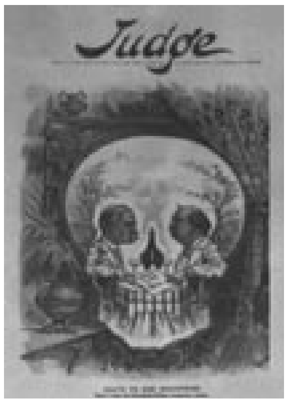


Figura 2: *Muerte a las grandes industrias,* cartel reivindicativo

(*) Profesora de la Universidad del País Vasco. Euskal Herriko Unibertsitatea.

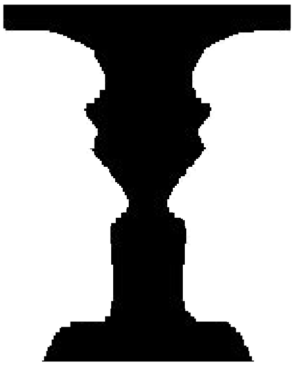


Figura 3: *¿Caras o copas?*, inversión de figuras de E. Rubin

Figura 4: *¿Mujer joven o vieja bruja?*, inversión de figuras de E.G. Boring

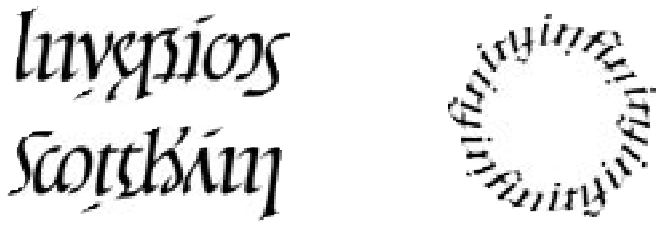


Figura 5: inversión de figuras de Scott Kim

Combinación de figuras ambiguas, caligrafía y juegos de palabras para crear ambigüedad visual a la vez que verbal.

1.2 Ilusiones ópticas

Una *ilusión visual* es una experiencia óptica que parece contradecir la realidad. Veamos algunos ejemplos.

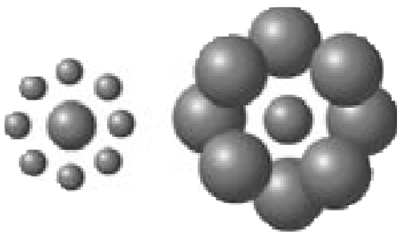


Figura 6: *¿Cuál de los círculos centrales es mayor?*, ilusión de Titchener y Delboeuf

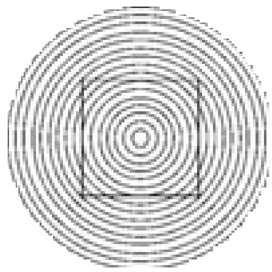


Figura 7: *¿Es un cuadrado?*, ilusión del cuadrado distorsionado

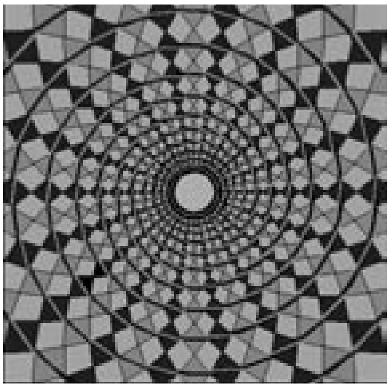


Figura 8: *¿Son circunferencias o espirales?*, ilusión de las cuerdas de Frazier

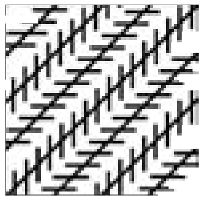


Figura 9: *¿Son realmente paralelas?*, ilusión de la líneas paralelas de Zölner

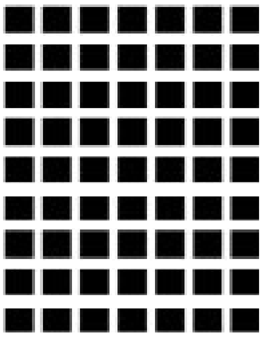


Figura 10: *¿Ves los puntos grises?*, ilusión del enrejado por contraste de colores

1.3 Desapariciones geométricas

Las pérdidas aparentes de superficie ofrecen un ejemplo de desaparición geométrica. En el primer rectángulo de la figura aparecen 65 cuadrados (5 por 13). Si se recorta este rectángulo siguiendo las líneas marcadas y, con los trozos se reconstruye un cuadrado como se indica, al calcular el área de la nueva figura, es de 8 unidades por 8, es decir, hay sólo 64 cuadrados. ¿Dónde ha quedado el que falta? La aparente pérdida de superficie es debida al reajuste de los trozos. De hecho, en la última figura, los bordes no coinciden exactamente, sino que forman un pequeño paralelogramo, casi imperceptible, y no un cuadrado perfecto. Esto sería evidente si la figura fuera más grande y estuviera construida con sumo cuidado. Las sorpresas de este tipo se llaman *paradojas de Hooper*.

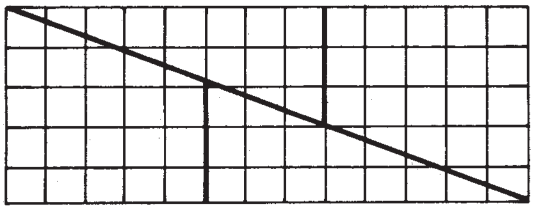


Figura 11

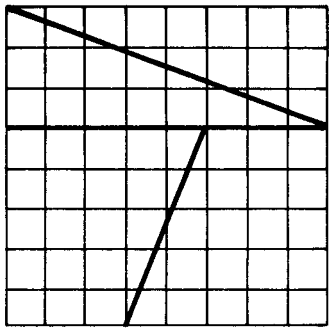


Figura 12

Desde un punto de vista más teórico, debe notarse que las desapariciones de superficie hacen intervenir, en muchas ocasiones, segmentos de recta cuyas longitudes forman una *serie de Fibonacci*, es decir, una sucesión en la que cada término es la suma de los dos precedentes: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,... En nuestro ejemplo, las figuras tienen lados de 5, 8 y 13 unidades, formando así una serie de Fibonacci. Y una de las propiedades fundamentales de esta serie es que, si uno de los números que la constituye se eleva al cuadrado, este número será igual al producto de los dos números situados delante y detrás de él, más o menos una unidad. Así 8 x 8 = 64 y 5 x 13 = 65.

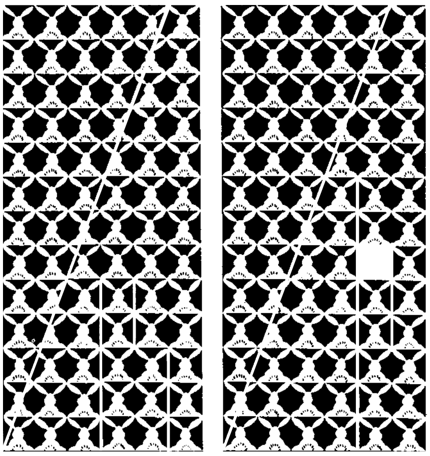


Figura 13

Hoy en día, el matemático y mago P. Curry ha combinado las desapariciones de línea y superficie para realizar su famosa *paradoja del conejo*.

El primer rectángulo de 6 unidades sobre 13 comprende 78 casetas, cada una de las cuales contiene la silueta de un conejo. Si se corta este rectángulo según las líneas indicadas, se obtiene, una vez redispuesto un nuevo rectángulo, de 6 por 13 pero sólo con 77 conejos y una caseta vacía... ¿Dónde ha quedado el conejo que falta?

1.4 Anamorfosis

Los embajadores (Londres, 1533) es ciertamente la obra más célebre de Holbein el joven. Representa a dos diplomáticos, en segundo plano, colocados delante de un tapiz. Entre los dos hombres, diversos objetos, símbolos del poder (laico y eclesiástico) y de conocimiento científico (relojes solares, un globo terráqueo, instrumentos de navegación y de astronomía, libros...). Pero, en primer plano, en el centro, un objeto enigmático e igualmente representado: se trata de un cráneo estirado, cuya forma no se aparece delante del espectador más que si éste adopta un cierto punto de vista con respecto al cuadro. La técnica empleada por Holbein para producir este efecto es la de la *anamorfosis:* es un caso particular de perspectiva geométrica, que construye una imagen proyectada sobre un plano oblicuo, de tal manera que queda ininteligible o simula una imagen bien diferente, si no se mira desde el punto de vista excéntrico adoptado para la proyección. La imagen toma su dimensión y libra su secreto cuando uno se coloca en el lado lateral del cuadro para mirarlo oblicuamente. Entonces se ve una calavera deformada proyectando una sombra sobre el embaldosado del suelo, y que parecería pertenecer a la realidad de estos dos embajadores. Como detalle curioso, el apellido Holbein significa “hueso (Bein) hueco (hohl)”.

Figura 14: *Los embajadores*, por Holbein el joven

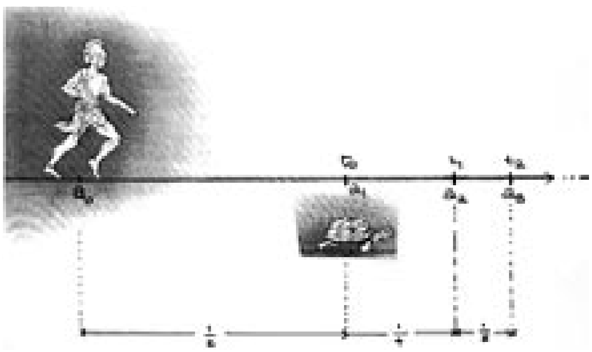
La escena representada por el pintor está datada con gran precisión: 11 de abril de 1533. Poco tiempo antes, Enrique VIII solicitaba al papa Clemente VII anular su matrimonio con Catalina de Aragón, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El Papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca esposar en secreto a Ana Bolena el 25 de enero. A principios de abril, el arzobispo de Canterbury, Thomas Cranmer, anula él mismo el matrimonio precedente y declara a Ana Bolena reina de Inglaterra. El hecho no tenía precedentes, y se envío una embajada francesa para intentar una reconciliación con el Papa. El cuadro de Holbein representa a los dos miembros de esta embajada: Jean de Dintevile (1504-1555), a izquierda, ropa corta, poseedor del poder político) y Georges de Selve (1508-1541, a la derecha, ropa larga, depositario del poder religioso).

2. PARADOJAS DEL INFINITO: DOS PARADOJAS DE ZENÓN

La escuela eleática de filósofos fue fundada por el pensador, filósofo y poeta Xenofánes (nacido en 570 A.C.), y su principal enseñanza era que el universo es singular, eterno e incambiable: *El todo es uno*. De acuerdo con esta idea, las apariencias de multiplicidad, cambio y moción son meras ilusiones.

Ninguno de los escritos de Zenón, perteneciente a esta escuela, ha sobrevivido; se conocen sus ideas a través de los textos de Platón, Aristóteles, Simplicio y Proclus. Las paradojas de Zenón son el foco en la relación de lo discreto con lo continuo. De los aproximadamente 40 argumentos atribuidos a Zenón, vamos a destacar dos relacionados con la moción: "Aquiles y la tortuga" y "la flecha".

2.1 Aquiles y la tortuga (Aristóteles, *Physics*, 239b, 15-18)



Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga, el héroe permite una cierta ventaja al "lentísimo" animal. La prueba asombrosa de Zenón es que Aquiles no puede nunca alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: cada vez que el perseguidor llega a un lugar donde ha estado la perseguida, la tortuga se adelanta un poco...

Al tratar de hacer este argumento más explícito, la falacia que surge es la noción equivocada de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo debe sumar toda la eternidad. La solución es, por lo tanto, la cuestión de la convergencia de la serie $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$

2.2 La flecha (Aristóteles, *Physics*, 239b, 5-7):

Supongamos un argumento de Zenón del tipo:

- un intervalo de tiempo se compone de instantes (que son la menor medida e indivisibles),
- en cada instante, una flecha no se mueve.

Si se observa el trayecto de una flecha en período de tiempo infinitamente corto, el movimiento correspondiente a cada observación es nulo. La acumulación de todos estos ceros da aún cero, así que, la flecha ha estado siempre inmóvil. ¡Esto es absurdo!

Una solución consiste en aceptar que la flecha está en reposo en cada instante, pero rechazar que esto implique que la flecha no se mueve: lo que se requiere para que la flecha se mueva, es que esté en diferentes sitios y en distintos momentos. Un instante no es suficientemente grande para que el movimiento tenga lugar, el movimiento es una relación entre objetos, lugares y varios instantes. Un objeto está en reposo en un instante justo cuando permanece en la misma posición en todos los instantes cercanos, y está en movimiento en un instante si "vive" en distintos sitios en instantes cercanos. Así, el anterior argumento es falso: la conclusión de que la flecha está en reposo dice que en cada instante la flecha está en el mismo lugar en instantes cercanos. Una tal información no está contenida en la premisa. Así, la paradoja de la flecha es un ejemplo de una conclusión inaceptable (nada se mueve) a partir de una premisa aceptable (ningún movimiento ocurre "durante" un instante), mediante un razonamiento inaceptable.

La paradoja de la flecha de Zenón es similar al *principio de incertidumbre de Heisenberg:* el físico Heisenberg argumentó que a nivel subatómico, la única manera de medir un sistema es interferir en él; si se necesita medir una cantidad, por ejemplo la posición de un electrón, la velocidad de esta partícula se va a ver inevitablemente afectada. El simple acto de la observación cambia el sistema: se puede estar seguro de la velocidad o de la posición, pero no de ambas cantidades a la vez.

3. PARADOJAS LÓGICAS: LA PARADOJA DE RUSSELL

Dos conjuntos infinitos son *equipotentes* (o tienen el mismo número cardinal), si existe una biyección (aplicación sobreyectiva e inyectiva) del uno sobre el otro. El cardinal de un conjunto es pues la extensión al caso de los conjuntos infinitos del concepto de número finito, y la *equipotencia* es la extensión de la noción de igualdad. No todos los conjuntos infinitos son "de igual tamaño" (pensar, por ejemplo, en los números naturales $\mathbb{N}$ y los números reales $\mathbb{R}$), por consiguiente es posible establecer comparaciones entre ellos.

Teorema de Cantor: *Dado un conjunto C, existe siempre otro de mayor cardinalidad, que es el conjunto de sus partes, $\mathcal{P}(C)$, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de C.*

El lógico Russell, Premio Nobel Literatura en 1950, descubre una contradicción al considerar el teorema de Cantor: el conjunto de todas las cosas U debe tener mayor cardinalidad que cualquier otro, porque todo elemento de un conjunto (y todo conjunto) es una cosa. De allí se sigue que $\mathcal{P}(U)$ debe de estar contenido en *U*, en cuyo caso el cardinal de *U* debía ser mayor o igual, y así el resultado cantoriano debía ser erróneo.

Existía en aquella época un postulado (surgido de la lógica tradicional de corte aristotélico) que implícitamente se venía tomando como base para la teoría de conjuntos, llamado *principio de comprensión* que expresa "dame una propiedad y te daré un conjunto", esto es, dada $P(x)$, existe $\{x : P(x)\}$. Lo que hace Russell es refutarlo, tomando como proposición $P(x) = (x \notin x)$ y deduciendo una contradicción. Al invalidar el principio de la comprensión, la contradicción russeliana echa por tierra lo que se ha llamado teoría *ingenua* de conjuntos.

Las propuestas de solución más importantes a esta paradoja han sido:

- la teoría de tipos de Russell: deben arreglarse todas las sentencias en una jerarquía; es entonces posible referirse a todos los objetos para los que un determinado predicado es cierto sólo si están ambos en el mismo nivel o son del mismo tipo. Así, una expresión de la forma $(x \in x)$ no se considera como válida;

- la axiomatización de Zermelo: se elimina el principio de comprensión. Zermelo incluye de manera destacada el llamado *axioma de elección*. El plan de Zermelo consiste en admitir en la teoría de conjuntos sólo aquellas clases de las que verosímilmente no puedan derivarse contradicciones.

La causa de estas *paradojas de clases* radica en la definición de un objeto en términos de una clase que contiene como elemento al objeto que se está definiendo. Tales definiciones se llaman *impredicativas*, y aparecen de manera especial en la teoría de conjuntos. Como hace observar Zermelo en 1908, este tipo de definición se utiliza también para definir el extremo superior de un conjunto acotado de números reales y otros conceptos del Análisis. Así pues, el Análisis contiene paradojas de este tipo.

4. PARADOJAS SEMÁNTICAS: LA PARADOJA DEL MENTIROSO

Fijémonos en la siguiente sentencia:

L: Lo que estoy diciendo ahora es falso.

Si *L* es verdad, es falsa, y si es falsa, es verdad. ¿Es esto paradójico? Tenemos dos afirmaciones condicionales:

(1) si *L* es verdad, entonces es falsa;
(2) si *L* es falsa, entonces es verdad.

Asumiendo que cuando algo es falso no es verdad, y que todo lo que es verdad no es falso, (1) y (2) quedan:

(1*) si *L* es cierta, entonces es no cierta;
(2*) si *L* es falsa, entonces es no falsa.

Existe un principio de razonamiento llamado *consequentia mirabilis:* el principio dice que si algo implica su propia negación, se puede inferir su negación. Ambas (1*) y (2*) dan argumentos para este principio. La sentencia (1*) nos asegura que *L* es cierto, implica su negación;

luego el principio nos lleva a inferir que *L* es no cierto. Y (2*), de manera exactamente paralela, no lleva a inferir que *L* no es falso. Así que un razonamiento estándar nos garantiza que *L* es no cierto y no falso. Luego *L* no es cierto ni es falso. ¿Es esto paradójico?

No, excepto si se admite un *principio de bivalencia*, un principio que dice, de manera esquemática, que toda sentencia es cierta o falsa.

¿Es todo principio de bivalencia cierto? Las preguntas se expresan en sentencias, pero no toda pregunta es o bien cierta o bien falsa. Supongamos entonces que restringimos el principio únicamente a sentencias declarativas... aún hay contraejemplos: consideremos la sentencia

S: Has dejado de fumar.

Si tú nunca has fumado, *S* es ciertamente no cierta, pero decir que es falsa sugiere que sigues fumando... El principio de bivalencia se alcanza debido a la creencia de que toda representación no defectuosa de como las cosas están en el mundo, debe ser o bien correcta o incorrecta, verdadera o falsa.

Una solución a esta paradoja es la famosa *jerarquía de Tarski:* de acuerdo con Tarski, el concepto ordinario de *verdad* es incoherente y debe ser rechazado y reemplazado por una serie de "conceptos de verdad", jerárquicamente ordenados, y cada uno expresado en un lenguaje diferente de cada lenguaje que evoluciona de manera natural.

Mucha gente ha pedido una solución menos radical, una respuesta que preserve más de nuestro pensamiento y lenguaje ordinario. Una de esta respuestas, se basa en la anterior noción de Tarski, pero afirma que esta jerarquía está de hecho implícita en nuestro actual uso de *verdad*, y los defectos son una mera apariencia.

5. PARADOJAS DE LA VAGUEDAD: LAS PARADOJAS TIPO SORITES

En griego, *sorites* significa "montón" o "pila". Las paradojas *tipo sorites* son una clase de argumentos paradójicos, que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados envueltos. Se trata de una serie de puzzles atribuidos al lógico Eubulides de Mileto, que incluyen:

- *el hombre con capucha:* dices que conoces a tu hermano, este hombre con la cabeza cubierta es tu hermano, y no le conoces...

- *el hombre calvo:* ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?, ¿y a un hombre con dos pelos en la cabeza?, ¿y si tiene tres?

- un grano de arena no es un montón; si un grano de arena no es un montón, tampoco dos granos de arena son un montón... si 9.999 granos de arena no son un montón, tampoco lo son 10.000 granos. Por lo tanto, 10.000 granos de arena no son un montón.

Algunas respuestas a esta paradoja son:

- el acercamiento a un *lenguaje ideal*, cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Frege y Russell);

- la utilización de lógicas multivaluadas (no clásicas), como la lógica difusa o fuzzy de Goguen y Zadeh, que sustituye a la usual (dos-valuada), y que reconoce para un objeto los grados de verdad;

- sencillamente, aceptar la paradoja: ninguna cantidad de granos de arena hace un montón.

6. PARADOJAS DE LA CONFIRMACIÓN: LA PARADOJA DEL CUERVO

C. Hempel, inventor de esta paradoja, afirma: *la existencia de una vaca de color violeta incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.* ¿Por qué? Para responder, establezcamos la ley:

C: Todos los cuervos son negros,

de una manera diferente, pero lógicamente equivalente

C: Todos los objetos no-negros no son cuervos.

Hempel argumenta del modo siguiente: "He encontrado un objeto no-negro: una vaca violeta. Por lo tanto, esto confirma (débilmente) la ley *C: Todos los objetos no-negros no son cuervos. Y así, también confirma la ley equivalente C: Todos los cuervos son negros."*

Es fácil encontrar millones de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema con la paradoja de Hempel es que, observando objetos no-negros se confirma la ley *C: Todos los cuervos son negros*, pero sólo a un nivel *infinitesimal*. La razón por la que el procedimiento parece extraño, es porque la clase de objetos en la tierra que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos, que el grado con en el cual un "no-cuervo" que es no-negro confirma la hipótesis, es despreciable... Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una vaca de color violeta confirma del mismo modo el enunciado *E: Todos los cuervos son blancos...*

7. PARADOJAS DE LA PREDICCIÓN: LA PARADOJA DEL CONDENADO

En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia ante un reo: "Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si ésa será tu última sobre la Tierra".

En la soledad de su celda, el condenado argumenta: "Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado..."

Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad. Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera, por ejemplo el fatídico día 13, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde muere decapitado. La sentencia se cumple literalmente. ¿Dónde ha fallado el razonamiento del prisionero?

Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, ..., que el mes. Un conjunto es diferente, y contiene cualidades distintas, de la mera adición de sus partes. Un conjunto tiene propiedades que sus componentes individuales no tienen: el conjunto *el mes* tiene la cualidad de contener días "sorpresa", característica que no tienen individualmente sus días componentes.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba: "Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca." El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

La comprensión de las características diferenciales de un conjunto con respecto a las de cualquiera de sus componentes lleva a la resolución de esta paradoja. El análisis individual, día por día, por parte del prisionero, es tan irreprochable como el análisis de Zenón, paso por paso, de la carrera de Aquiles. El defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto *(este mes)* las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes *(cada día)*, no advirtiendo que el conjunto mes ha incorporado características, tiene algunas que no poseían aquellas, entre otras, la de contener "días sorpresa".

8. PARADOJAS DEL VOTO: LA PARADOJA DE CONDORCET

Tres votantes V_1, V_2 y V_3 eligen entre tres alternativas A (Alicia), B (Benito), C (Cecilia), como sigue:

$$V_1 = \{A,B,C\}, \qquad V_2 = \{C,A,B\}, \qquad V_3 = \{B,C,A\},$$

A es preferida a B por dos a uno, B preferido a C por dos a uno y C a A por dos a uno también. Una simple comprobación por pares no determina una alternativa preferida entre las tres. Se trata de una situación de *ausencia de ganador*, al existir una *mayoría cíclica*.

El procedimiento de elección más usual es la regla de la *mayoría mayoría simple*, donde cada votante elige un candidato, y el candidato que reciba más de la mitad de los votos es el ganador. Esta regla es válida cuando sólo se tienen dos candidatos, ya que gana el que tiene más votos.

Cuando hay más de dos, puede ser que el candidato con mayor número de votos no tenga la mayoría absoluta de todos los votos emitidos. La solución más frecuente es recurrir a la regla de la pluralidad o *mayoría relativa*, por la que se elige al candidato que queda situado en primer lugar por el mayor número de votantes.

Otra solución es aplicar el *criterio de Condorcet* o de *comparación por parejas*, por el que se elige el candidato que derrota a todos los demás en elecciones entre pares de candidatos, usando la regla de mayoría. Por este método se puede producir una relación no transitiva, la *paradoja de Condorcet,* indicada arriba.

La molestia generada por la posibilidad de mayorías cíclicas está directamente relacionada con la probabilidad de una tal ocurrencia: se puede probar que la probabilidad de una mayoría cíclica se incrementa cuando el número de opciones aumenta, y decrece cuando el número de votantes aumenta.

9. PARADOJAS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD: LA PARADOJA DE BERTRAND

Consideremos una circunferencia (c) y una cuerda [AB] de esta circunferencia trazada al azar. Nos planteamos la siguiente pregunta *¿Cuál es la probabilidad p de que esta cuerda sea más larga que el lado del triángulo equilátero inscrito?*

Vamos a dar aquí tres respuestas *válidas*, que dependen de la forma de abordar el problema: ¿qué significa trazar una cuerda al azar?

- si eligimos A y B al azar sobre (c): como la elección de A se ha hecho al azar sobre (c), entonces B deberá elegirse sobre el arco de circunferencia opuesto, determinado por el lado del triángulo equilátero inscrito. El triángulo determina tres arcos isométricos, y por lo tanto, la respuesta es:

$$p = \frac{1}{3}$$

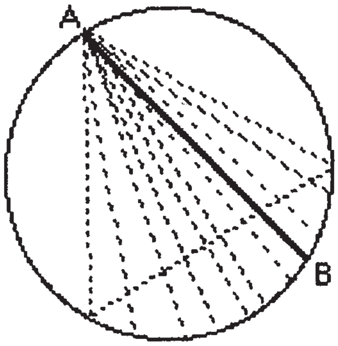


Figura 16

- si se caracteriza [AB] por su distancia d al centro de (c): sobre la figura (que corresponde al caso límite) esta distancia es OB. Si el radio de (c) es r, tenemos en este caso $OB = r\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = r/2$, y por lo tanto la distancia al centro no deberá exceder de $r/2$. Pero, la distancia maximal de una cuerda al centro es r, por lo que la respuesta es:

$$p = \frac{(r/2)}{r} = \frac{1}{2}$$

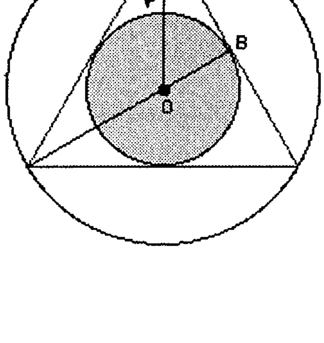


Figura 17

- si se caracteriza la cuerda por la posición de su punto medio: la distancia de la cuerda (separando su mitad del centro de la circunferencia) no debe exceder el radio de la circunferencia inscrita en todos los triángulos equiláteros inscritos en (*c*), que aparece en gris de la figura de debajo. Si *r* es el radio de (*c*), según el cálculo anterior, el radio de la circunferencia pequeña es $r/2$. El centro de la cuerda deberá encontrarse en el círculo gris. Por lo tanto, la probabilidad buscada es la razón entre el área del círculo gris y el área del círculo determinado por (*c*). Así, la respuesta es:

$$p = \frac{(\pi r^2/4)}{(\pi r^2)} = \frac{1}{4}$$

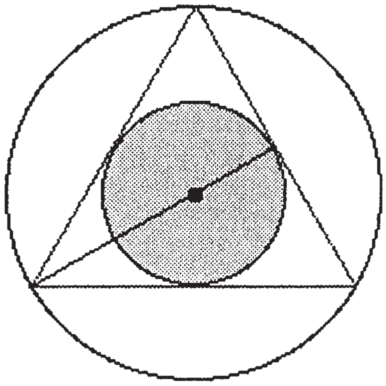


Figura 18

Esta paradoja prueba que es posible la manipulación (¡sin ser conscientes de ello!) de espacios probabilizables, debido a un enunciado demasiado vago.

BIBLIOGRAFÍA

B. Bolzano, "Les paradoxes de l'infini", *Edición póstuma de Fr. Prihonsky*, 1851.

B. Bunch, "Mathematical fallacies and paradoxes", Dover, 1982.

G.W. Erickson and J.A. Fossa, "Dictionary of paradox", *Univ. Press of America*, 1998.

N. Falleta, "Paradoxicon", *Doubleday and Co.*, 1983.

J.A. Faris, "The paradoxes of Zeno", *Avebury Series in Philosophy*, 1996.

A.R. Garciadiego Dantan, "Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos", *Alianza Universidad*, 1992.

R.M. Sainsbury, "Paradoxes", *Cambridge University Press*, 1988.

"These are old fond paradoxes to make fools laugh i' the alehouse",

W. Shakespeare, Othello, Acto 2, Escena 1