トロピカル幾何学入門

石川 剛郎（いしかわ ごうお, Go-o Ishikawa）
北海道大学大学院理学研究院数学部門

東北大学「２１世紀 COE 物質階層融合科学の構築」
春の学校：ランダムから可積分へ
スケール変換によるパターン形成
２００７年１月の講義録
（２００７年３月末日作成）

トロピカル幾何学は，一言で言えば，区分的に線形な幾何学的対象を扱う科学と言える．トロピカル幾何学では，代数幾何において多様体が通常の演算，加減乗除によって記述されるのと異なり，いわゆる「トロピカル演算」によって記述される図形を扱う．トロピカル幾何学では,「加法」を２数の最大値をとるという演算に置き換え,「乗法」を通常の加法に置き換える．ここで,「トロピカル」とは，計算機科学でこの種の演算に関して使われていた用語[1]である．トロピカル幾何は，超離散可積分系の解析において本質的な役割を果たす [40][10][31]．また，トーリック幾何，アメーバ，やミラー対称性などと関連して，トロピカル幾何は古典的な幾何学における未解決問題を解くための強力な手段となる [17][25][3]．さらに，代数力学系 [4][6]，ランダム曲面（ダイマーモデル）[15][16]，計算系統学 [36] など，広汎な分野で，まざまな観点から重要性を増してきている．

この講演では，トロピカル幾何学の基本的な考え方を具体例を通してわかりやすく解説する[2].

1 トロピカル演算

トロピカル半環 (tropical semi-ring) あるいは**マックス・プラス代数** (Max-Plus algebra) とは，実数の全体 $\mathbb{R}$ に次の演算を入れたもののことである：

$$\text{“}\, x+y \,\text{”} := \max\{x,y\}, \quad \text{“}\, x\cdot y \,\text{”} := x+y, \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

（通常の演算と区別するために，トロピカル演算には “$\cdots$” を付けた.）トロピカル半環を $\mathbb{R}_{\max}$ と表すこともある．トロピカル半環は可換半環となる[3]．たとえば,

$$\text{“}\, (x+y)+z \,\text{”} = \max\{x,y,z\} = \text{“}\, x+(y+z) \,\text{”}$$

$$\text{“}\, (x+y)z \,\text{”} = \max\{x,y\}+z = \max\{x+z, y+z\} = \text{“}\, xz+yz \,\text{”}$$

などが成り立つ．また，0 がトロピカル乗法の単位元である．トロピカル加法の零元は $\mathbb{R}$ 内には存在しない.

さらに，トロピカル半環は，べき等 (idempotent) [4]である：“ $x+x$ ” $= x, (x\in\mathbb{R})$ が成り立つ.

例 1.1 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対し，“ $(0x_1+1x_2+1)(0x_1+(-1)x_2+0)$ ” = “ $0x_1^2+(-1)x_1x_2+0x_1+1x_1x_2+0x_2^2+1x_2+1x_1+0x_2+1$ ” = “ $0x_1^2+1x_1x_2+0x_2^2+1x_1+1x_2+1$ ”

[1]ブラジル（サンパウロ）の計算機学者 Imre Simon に敬意を表して名付けられたと言われている．ちなみに，南回帰線 (the Tropic of Capricorn, 南緯 ２３ °２７ ′) がサンパウロを丁度通っている.

[2] この講義録の最後の部分に，講演で扱った演習問題とその解答例を載せた.

[3]半環とは，可換な加法，乗法が結合律と分配律を満たす代数系のことである．たとえば，加法の零元や逆元の存在については要請しない．可換半環とは積が可換であること.

[4] トロピカル川柳１：トロピカル，イチたすイチがイチになり.

2　脱量子化

トロピカル半環は，通常の演算の「脱量子化 (de-quantization)」と考えられる（Maslov **の脱量子化**）．いま，$h > 0$ を決めるごとに，対応

$$h \log : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto h \log u, \quad e^{\frac{x}{h}} \hookleftarrow x$$

を介して，$\mathbb{R}_{>0}$ 上の通常の加法・乗法が，$\mathbb{R}$ 上に誘導される：

$$x +_h y := h \log \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{\frac{y}{h}} \right), \quad x \times_h y := h \log \left(e^{\frac{x}{h}} \cdot e^{\frac{y}{h}} \right) = x + y,$$

$(x, y \in \mathbb{R})$ とおく．加法だけが h に依存して決まっている．

このとき，$m = \max\{x, y\}$ とおくと，

$$h \log \left(e^{\frac{m}{h}} \right) \ \leq \ x +_h y \ \leq \ h \log \left(2e^{\frac{m}{h}} \right)$$

なので，不等式

$$m \ \leq \ x +_h y \ \leq \ m + h \log 2$$

が成り立つ．

正数 h を Planck 定数と見立てて，$h \to +0$ の極限をとると，

$$\lim_{h \to +0} x +_h y \ = \ \max\{x, y\} \ = \ \text{“} \ x + y \ \text{”}$$

が成立する．

$h > 0$ のとき，$(\mathbb{R}, +_h, \times_h)$ は，すべて，$(\mathbb{R}_{>0}, +, \cdot)$ と同型であり，その $h \to +0$ での極限がトロピカル半環になる．

$h > 0$ を小さくしていく，ということは zoom out する（拡大率を小さくする）ということである[5]

トロピカル半環の場合は，割り算（トロピカル割り算）もできる：

$$\text{“} \ \frac{x}{y} \ \text{”} \ = \ \text{“} \ xy^{-1} \text{”} \ := \ x - y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(トロピカル乗法の逆元が存在する．トロピカル割り算は，$x \div_h y := h \log \left(e^{\frac{x}{h}} e^{-\frac{y}{h}} \right) = x - y$ から得られる．)

なお，トロピカル半環（マックス・プラス代数）を，$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ として考える場合もある．この場合，

$$\text{“} \ x + (-\infty) \ \text{”} = \text{“} \ (-\infty) + x \ \text{”} = x, \quad \text{“} \ x(-\infty) \ \text{”} = \text{“} \ (-\infty)x \ \text{”} = -\infty$$

$(x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ と定める．すると，$-\infty$ がトロピカル零元となる．

3　トロピカル超曲面

トロピカル単項式 (tropical monomial) とは

$$\text{“} \ c x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \ \text{”} := j_1 x_1 + \cdots + j_n x_n + c,$$

[5] $t = e^{\frac{1}{h}}$ とおくと，$h \log u = \log_t u$ となるので，$h \to +0$ の極限は，対数の底 t を $t \to +\infty$ とした極限であるとも言える．また，統計力学における自由エネルギー $F = -kT \log \left(\sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \right)$（ただし，$k$ は Boltzmann 定数，T は絶対温度）に対して，極限 $\lim_{T \to +0} F = -\max_n\{-E_n\} = \min_n\{E_n\}$ を考えると，低温極限にトロピカル演算が顔を出しているとも言える．トロピカル川柳２．低温がトロピカルとはこれいかに．

$(j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R})$ の形の式である．そして，**トロピカル多項式** (tropical polynomial) とは，

$$\begin{aligned} F &= \text{“} \sum_{j\in A} c_j x^j \text{”} = \text{“} \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in A} c_{j_1,\dots,j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \text{”} \\ &= \max\{c_j + j_1x_1 + \cdots + j_nx_n \mid j \in A\} = \max\{c_j + j\cdot x \mid j \in A\}. \end{aligned}$$

$(c_j \in \mathbb{R}.\ A \subset \mathbb{N}^n$ は有限集合）の形の式である．F は，区分的に線形で下に凸な関数を表す．ここで，異なる多項式であっても同じ関数を表すこともある[6]．

A が「直角単体」$\{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n \mid j_1 + j_2 + \cdots + j_n \le d\}$ に含まれるとき，F をトロピカル d 次多項式とよぶ．

トロピカル多項式 $F = \text{“} \sum_{j\in A} c_j x^j \text{”}$ の定める “零点集合” あるいは**トロピカル超曲面** (tropical hypersurface) が，

$$Y_F := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid F \text{ is not a linear function in a neighborhood of } \boldsymbol{x}\},$$

(non-linear locus あるいは corner locus) により定義される．言い換えると，２つ以上の項に対応する線形関数 $c_j + j \cdot x$ が最大値をとるような点の軌跡である．したがって，

補題 3.1 トロピカル多項式 $F = \text{“} \sum_{j\in A} c_j x^j \text{”}$ の定めるトロピカル超曲面 Y_F は，

$$Y_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_k + k\cdot x \le \max_{j\ne k}(c_j + j\cdot x),\ k \in A\}$$

と表される．

トロピカル d 次多項式の定めるトロピカル超曲面を d 次トロピカル超曲面とよぶ．$n = 2$ のときは，超曲面を「曲線」とよぶ．

例 3.2 (脱量子化とトロピカル超曲面) 第一象限 $(\mathbb{R}_{>0})^2$ における関数のグラフ $v = 1 + u^2$ を考え，対数写像 $\log : (\mathbb{R}_{>0})^2 \to \mathbb{R}^2$, $\log(u, v) = (x, y) = (\log u, \log v), (h > 0)$ により，$\mathbb{R}^2$ 上の図形に変換する（「対数方眼紙」の使用）．$u = e^x, v = e^y$ とおくと，$e^y = 1 + (e^{2x})^2$ より，曲線 $y = \log(1 + e^{2x})$ が得られる．これは折れ線 $y = 0 (x \le 0), y = 2x (0 \le x)$ にかなり近い．この折れ線は，$y = \max\{0, 2x\} = \text{“} 0 + x^2 \text{”}$ のグラフである．実際，$h \to +0$ のとき，曲線 $y = h\log(1 + e^{\frac{2x}{h}})$ は，$y = \text{“} 0 + x^2 \text{”}$ に近づく（ハイパーリンク図１）．

図１のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/trop1.pdf`

方程式 $1 + u^2 = mu, (m > 1)$ の $(\mathbb{R}_{>0})^2$ での解は，$\mathbb{R}^2$ での曲線 $y = \log(1 + e^{2x})$ と $v = mu$ に対応する曲線，つまり，$y = a + x = \text{“} ax \text{”}$，ただし，$a = \log m > 0$, の交点に対応する．これは，トロピカル多項式 $F = \text{“} 0 + x^2 + ax \text{”}$ の non-linear locus と関係付けられる．

注意 3.3 （トロピカル多項式の量子化）$F(x) = \text{“} \sum_{j\in A} c_j x^j \text{”}$ の量子化を考える．$\mathbb{R}^n$ 上で，$+_h, \times_h$ に関する多項式 $(\sum_{j\in A} c_j x^j)_h$ （ただし，和と積を $+_h, \times_h$ で考えたもの）については，$(\mathbb{R}_{>0})^n$ における多項式 $\sum_{j\in A} a_j z^j$ が対応する．ただし，$c_j = h \log a_j, x = h \log z$ である．いま，$h \log = \log_t$ とおくと，$a_j = t^{c_j}, z = t^x$ であって，多項式 $f(t) = \sum_{j\in A} t^{c_j} z^j$ が対応する．これは，後に述べる「パッチワーク」（係数をコントロールして，思い通りの零点集合を定める方法）と関係する．

[6] たとえば，“ $1x^2 + 1x + 1$ ” = “ $1x^2 + 1$ ”．

注意 3.4 non-linear locus によって「トロピカル零点集合」を定義することは，次のようにも動機付けられる．たとえば，“２次方程式”

$$“\ ax^2 + bx + c = 0\ ”$$

は，∞ が加法の零元なので，$\max\{2x+a, x+b, c\} = -\infty$ と解釈できる．これは，“ ax^2+bx+c ” のグラフの $\mathbb{R}^2$ 内での「トロピカル閉包」を考えると，曲がり角のところで下に延びる線が付け加わるのでその曲がり角のところが「トロピカル零点」と考えるのが自然である．また，F の「トロピカル零点集合」は，“ $\frac{0}{F}$ ” = “ F^{-1} ” $= -$“ F ” が「正則」にならない，特に局所的に下に凸にならない点の軌跡である，とも考えることができる．

例 3.5 トロピカル代数方程式．１変数１次式 $F(x) =$ “ $ax + b$ ” $= \max\{a + x, b\}$ の “零点” は $x = b - a =$ “ $\frac{b}{a}$ ” で表される．

例 3.6 トロピカル直線 (tropical line)．2 変数 1 次トロピカル多項式

$$F(x_1, x_2) = “\ ax_1 + bx_2 + c\ ” = \max\{x_1 + a, x_2 + b, c\}$$

の定める「トロピカル直線」 $V_F \subset \mathbb{R}^2$ は，１点からそれぞれ北東，西，南に延びる３本の半直線から成る．たとえば，$F =$ “ $0x_1 + 0x_2 + 0$ ” の場合は，ハイパーリンク図２左のようになる：

図２のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/trop1.pdf`

命題 3.7 $\mathbb{R}^2$ の２点 P, Q に対し，P, Q を通るトロピカル直線が存在する．P, Q がジェネリックなら P, Q を通るトロピカル直線は一意的である．任意のトロピカル直線 ℓ, m には，交点が存在する．ℓ, m がジェネリックならば，交点は唯一である．

古典的な定理のトロピカル世界でのアナロジーが成立する：

定理 3.8 （**トロピカル** Bézout-Bernstein **定理**）$\mathbb{R}^2$ 上のジェネリック[7]な d 次トロピカル曲線と r 次トロピカル曲線は dr 個の交点を持つ．

例 3.9 トロピカル平面 (tropical plane)．3 変数 1 次トロピカル多項式

$$F(x_1, x_2, x_3) = “\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d\ ” = \max\{x_1 + a, x_2 + b, x_3 + c, d\}$$

の定める「トロピカル平面」 $V_F \subset \mathbb{R}^3$ は，１点からから延びる６個の面から成る．たとえば，$F =$ “ $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0 = \max\{x_1, x_2, x_3, 0\}$ の場合は，ハイパーリンク図３のようになる：

図３ のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/trop1.pdf`

[7] トロピカル・ジェネリシティー

トロピカル多項式の概念は，トロピカル Laurent 多項式に一般化される．**トロピカル Laurent 多項式**は，負べきも許して，有限集合 $A \subset \mathbb{Z}^n$ について，やはり，

$$\begin{aligned} F &= \text{“}\ \textstyle\sum_{j\in A} c_j x^j\ \text{”} = \text{“}\ \textstyle\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in A}\ c_{j_1,\dots,j_n} x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}\ \text{”} \\ &:= \max_{j\in A}\{c_j + j_1x_1 + \cdots + j_nx_n\}. \end{aligned}$$

で定義される．トロピカル Laurent 多項式 $F = \text{“}\ \sum_{j\in A} c_j x^j\ \text{”}$ に対し，$A \subset \mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{R}^n$ での凸包（A を含む最小の凸集合）

$$\Delta = \Delta_F := \text{convex hull}\, A$$

を F の Newton **多面体**と言う．

注意 3.10 $A \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ を有限集合，$v : A \to \mathbb{R}$ を実数値関数とする．このとき，v の**離散 Legendre 変換** $L_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が，

$$L_v(x) := \max_{j\in A}(j\cdot x - v(j))$$

で定義される．トロピカルの言葉で言えば，

$$L_v(x) = \text{“}\ \sum_{j\in A}(-v(j))x^j\ \text{”}$$

と表される．したがって，トロピカル多項式は,「整数点有限集合上の実数値関数の離散 Legendre 変換」であると捉えられる．トロピカル多項式 $F = \text{“}\ \sum_{j\in A} c_j x^j\ \text{”}$ は，関数 $v(j) := -c_j$ の Legendre 変換である．

トロピカル Laurent 多項式 F に対しても，局所的に線形でない点の軌跡として，トロピカル超曲面 $Y_F \subset \mathbb{R}^n$ が定義される．$n = 2$ の場合，Y_F は，区分的に線形な曲線となる．

例 3.11 たとえば，$F = \text{“}\ 0x_1^{-1} + 0x_2 + 0\ \text{”}$ の場合の図はハイパーリンク図 2 右のようになる：

図 2 のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/trop1.pdf`

補題 3.1 もまったく同様に成立する．
また，一般に次が成り立つ．

定理 3.12 （**トロピカル Bézout-Bernstein 定理**）Newton 多面体 Δ と Δ' をもつジェネリックなトロピカル曲線の交点の個数は，

$$\mathrm{Area}(\Delta + \Delta') - \mathrm{Area}(\Delta) - \mathrm{Area}(\Delta')$$

で得られる[8]．

注意 3.13 ここで，多面体の和[9]は，$\Delta + \Delta' := \{j + j' \in \mathbb{R}^n \mid j \in \Delta, j' \in \Delta'\}$ で定義される．Area は面積である．

[8] Δ たちが内点を持たない場合でも成りたつ．
[9] Minkowski 和と呼ばれる．

Newton 多面体は,「次数」の概念を一般化したものと考えられる．たとえば，d 次トロピカル曲線と r 次トロピカル曲線については，交点の個数はジェネリックに $\frac{1}{2}(d+r)^2 - \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}r^2 = dr$ となる．

例 3.14 ハイパーリンク図４のような Δ, Δ' について，$\Delta + \Delta'$ の面積は $2 + 1 + \frac{1}{2}$ であり，$\mathrm{Area}(\Delta + \Delta') - \mathrm{Area}(\Delta) - \mathrm{Area}(\Delta') = 2$ である．実際，この場合，交点が２点であることは見やすい（ハイパーリンク図４）．

図４のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/trop2.pdf`

注意 3.15 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ におけるトロピカル曲線も研究されている [27].

4 Newton 多面体とその細分

トロピカル多項式 $F =$ “ $\sum_{j \in A} c_j x^j$ ” に対して，関数 $c : A \to \mathbb{R}$ を $c(j) := c_j$ で定める[10]．関数 c に対して,

$$\sqcap(c) := \text{convex hull } \{(j, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid j \in A, y \leqq c(j)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

（関数 c の「棒グラフ」の凸包）とおく．また，$\Delta = \text{convex hull } A \subset \mathbb{R}^n$ とおくと，$\sqcap(c)$ のコンパクト面の和集合 $\widetilde{\Delta}$ は，射影 $\pi : \widetilde{\Delta} \to \mathbb{R}^n$, $\pi(j, y) := j$ により Δ の上に１対１に射影される．したがって，$\widetilde{\Delta}$ から Δ の多面体分割が誘導される．**関数 c から誘導される Δ の分割**とよぶ．この分割は格子的細分 (lattice subdivision) あるいは整細分 (integral subdivision) である．つまり，分割の各面の頂点がすべて整数点である．また，関数 c から定まる $\widetilde{\Delta}$ は，$\widetilde{\Delta}$ をグラフにもつ上に凸な関数 $\bar{c} : \Delta \to \mathbb{R}$ を定める．

トロピカル多項式 F は，また，トロピカル超曲面 Y_F を定める．Y_F は $(n-1)$ 次元多面複体 (polyhedral complex) の構造をもつ．ここで，多面複体とは，多面的胞体 (polyhedral cell) [11]からなる胞複体 (cell complex) のことである．また，i-次元のセルの境界が $(i-1)$-次元の和集合となる（正則条件）．

さらに Y_F の最高次元のセルには「重み」と呼ばれる正の整数値が与えられる．実際，$(n-1)$-セル I では，丁度２つの線形関数 $c_j + j \cdot x$, $c_k + k \cdot x$ が競合する．すると，整数ベクトル $k - j$ は I と直交する．実際 $c_j + j \cdot x = c_k + k \cdot x$ から，$(k-j)x + (c_k - c_j) = 0$ が I を含む超平面の方程式を与える．このとき，一意的に正の整数 w_I と原始的 (primitive) [12] 整数ベクトル n_I があって，$k - j = w_I n_I$ と表示できる．ここで，逆向きの $j - k$ をとれば，n_I が $-n_I$ に変わるだけで，w_I は決まる．また，$\pm n_I$ は，I のプリミティブ直交ベクトルとして，I だけから得られる．

次のことは明らかに成り立つ．

補題 4.1 トロピカル超曲面 $Y = Y_F$ の各 $(n-2)$-セル C とそれに隣接する $(n-1)$-セル $I_1, I_2, \ldots, I_m$ について，C の co-orientation （C の法平面の向き）を指定し，それに応じてプリ

[10] $v(j) = -c_j$ とおいて，関数 v に関して述べる方が Legendre 変換との関係では，より自然であるが，ここでは，マイナスの符号を付けない．これらの言い換えは容易である．

[11] $\mathbb{R}^n$ の有限個数のアフィン線形関数 $\ell_1(x), \ldots, \ell_m(x)$ とアフィン部分空間 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ により，$\{x \in W \mid \ell_1(x) \geqq 0, \ldots, \ell_m(x) \geqq 0\}$ と表される部分集合である．

[12] $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\frac{1}{m} n_I \in \mathbb{Z}^n$ ならば，$m = 1$.

ミティブ直交ベクトルを選んだとき，**バランス条件** (balanced condition)

$$w_{I_1}n_{I_1} + w_{I_2}n_{I_2} + \cdots + w_{I_m}n_{I_m} = 0$$

を満たす.

したがって，トロピカル超曲面 Y は，$(n-1)$-次元重み付き有理[13]多面複体で正則条件とバランス条件をみたすことがわかる.

例 4.2 $F =$ “ $0x_1 + 0x_2 + 0$ ” について，Y_F の 1-セルを反時計回りに並べた I_1, I_2, I_3 について，$w(I_1) = 1, n_{I_1} = (-1, 1), w(I_2) = 1, n_{I_2} = (0, -1), w(I_3) = 1, n_{I_3} = (1, 0)$ となり，バランス条件

$$(-1, 1) + (0, -1) + (1, 0) = (0, 0)$$

が成り立つ（ハイパーリンク図５）.

図５のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/trop2.pdf`

トロピカル多項式の係数の次のような変形（基本変形）によって，トロピカル超曲面は不変である：
(1) c を $c' : A \to \mathbb{R}, c'(j) = c(j) + \mathrm{const.}$ に変える.
(2) $A' = A + j_0, j_0 \in \mathbb{Z}^n$ に変え，$c' : A' \to \mathbb{R}\ c'(j + j_0) = c(j)$ に変える.
(3) convex hull $A' = \Delta$ で，$\overline{c'} = \overline{c}$ となる関数 $c' : A' \to \mathbb{R}$ に変える.

トロピカル多項式から上のように定まる，２つのデータ（Newton 多面体の細分と重み付きトロピカル超曲面）は，次のような基本的な関係をもつ.

命題 4.3 (Mikhalkin [26]) $Y \subset \mathbb{R}^n$ を $(n-1)$-次元重み付き有理正則多面複体でバランス条件をみたすとする．このとき，あるトロピカル多項式 $F =$ “ $\sum_{j\in A} c_j x^j$ ” が存在し，$Y = Y_F$ となる．さらに，F の Newton 多面体 $\Delta = \text{convex hull } A$ と，その整細分が，$\mathbb{Z}^n$ の平行移動を除いて定まる．Δ の細分の k-セル Δ_k に対して，Y の $(n-k)$-セル C_{n-k} が対応し隣接関係を保つ．また，関数 $c : A \to \mathbb{R}$ が基本変形を除いて定まる.

5　パッチワークとトロピカル

一旦，トロピカルの世界から離れて，複素係数 Laurent 多項式

$$f = f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{j\in A} b_j z^j = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{Z}^n} b_{j_1,\ldots,j_n} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n} \in \mathbb{C}[z_1^{\pm1}, z_2^{\pm1}, \ldots, z_n^{\pm1}]$$

を考える．ここで，$A \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ は有限集合であり，$b_j \in \mathbb{C}^\times$ と仮定する.
f に対して，複素トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ におけるトーリック代数超曲面

$$Z = Z_f := \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n \mid f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0\} \subset (\mathbb{C}^\times)^n$$

が定まる．ここで，$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ である.

[13] 各多面的胞体を定義するアフィン線形関数たち $\ell_1(x), \ldots, \ell_m(x)$ の１次の係数が正数にとれること．ただし，アフィン線形関数の定数項は実数でよい.

さらに，関数 $v : A \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，Laurent 多項式 $f = \sum_{j\in A} b_j z^j$ から，$t > 0$ をパラメータにもつ Laurent 多項式の族

$$f_t = f_t^v(z) := \sum_{j\in A} b_j t^{-v(j)} z^j$$

が定まる．これを f から v により作られたパッチワーク多項式 (patchworking polynomial) と呼ぶ．$f_1 = f$ である．

代数超曲面 $Z_{f_t} \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ が定まる．v が定値関数のとき，$Z_{f_t} = Z_f$ であり，一般に，Z_{f_t} は，v の値によりコントロールされた変化をする[14].

写像 $\mathrm{Log} : (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$\mathrm{Log}(z_1, \ldots, z_n) := (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$$

で定める[15].

正数 t に対して，写像 $\mathrm{Log}_t : (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{R}^n$ を，

$$\mathrm{Log}_t(z_1, \ldots, z_n) := (\log_t|z_1|, \ldots, \log_t|z_n|)$$

で定義する．$h = \dfrac{1}{\log t}$ とすると，$\mathrm{Log}_t = h\mathrm{Log}$ (Log と h 倍の合成）である．任意の $z \in (\mathbb{C}^\times)^n$ に対して, (非一様に）$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Log}_t(z) = 0$ となる．

f の v による**トロピカル化**を

$$f^v_{\mathrm{trop}}(x) := \text{“} \sum_{j\in A} (-v(j)) x^j \text{”} = \max_{j\in A}(j \cdot x - v(j))$$

（v の Legendre 変換）とおく．

このとき，v によってコントロールされた零点集合 Z_{f_t} の Log による像（次節の意味のアメーバ）は，脱量子化の極限でトロピカル超曲面に収束する：

定理 5.1 Hausdorff 距離[16] に関して，

$$\lim_{t\to\infty} \text{Hausdorff-d}(\mathrm{Log}_t(Z_{f_t}), Y_{f^v_{\mathrm{trop}}}) = 0$$

が成り立つ.

略証：$z \in Z_{f_t}$ すなわち $\sum_{j\in A} b_j t^{-v(j)} z^j = 0$ とすると，

$$|b_k t^{-v(k)} z^k| \le |\sum_{j\ne k} b_j t^{-v(j)} z^j| \le \sum_{j\ne k} |b_j t^{-v(j)} z^j|$$

を得る．$\log_t$ で変換すると，

$$\log_t|b_k| - v(k) + k \cdot \mathrm{Log}_t|z| \le \max_{j\ne k}(\log_t|b_j| - v(j) + j \cdot \mathrm{Log}_t|z|) + \log_t N$$

を得る．ここで，$N + 1 = \#(A)$ である．ここで，$t \to \infty$ の極限をとればよい． □

[14] パッチワーク多項式は，Viro により実代数多様体のトポロジーの研究に使われた．トロピカル川柳３：継ぎはぎのパッチワークがトロピカル.

[15] 複素トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ には，実トーラス $(S^1)^n$ が成分ごとのかけ算で作用している．Log は，このトーラス作用に関する「モーメント写像」と考えることができる．一般に，整数点を頂点にもち内点が空でない凸多面体 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ について，モーメント写像 $\mu_\Delta : (\mathbb{C}^\times)^n \to \Delta$ が $\mu_\Delta(z) := \dfrac{\sum_{j\in\Delta\cap\mathbb{Z}^n} |z^j| j}{\sum_{j\in\Delta\cap\mathbb{Z}^n} |z^j|}$ で定義される．このとき，微分同相写像 $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Int}\Delta$ が $\psi(x) := \dfrac{\sum_{j\in\Delta\cap\mathbb{Z}^n} e^{j\cdot x} j}{\sum_{j\in\Delta\cap\mathbb{Z}^n} e^{j\cdot x}}$ で定まり，$\mu_\Delta = \psi \circ \mathrm{Log} : (\mathbb{C}^\times)^n \to \Delta$ が成立する.

[16] $\mathbb{R}^n$ の点 x と空でない閉集合 Y に対して，$d(x, Y) := \inf_{y\in Y} d(x, y)$ （d は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 距離）とおき，空でない閉集合 X, Y に対して，$\text{Hausdorff-d}(X, Y) := \max\{\sup_{x\in X} d(x, Y), \sup_{y\in Y} d(y, X)\}$ とおく．$\text{Hausdorff-d}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ が成立する.

6　アメーバとトロピカル

複素トーラス内の代数超曲面 $Z = Z_f$ の**アメーバ** (Amoeba) を

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_f := \mathrm{Log}(Z_f) \subset \mathbb{R}^n,$$

で定義する[17].

例 6.1 $n = 2$.
(1) $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + 1$. $Z_f = \{z_1 + z_2 + 1 = 0\} \subset (\mathbb{C}^\times)^2$.
(2) $g(z_1, z_2) = z_1^3 + z_2^3 - 6z_1z_2 + 1$. $Z_g = \{z_1^3 + z_2^3 - 6z_1z_2 + 1 = 0\} \subset (\mathbb{C}^\times)^2$.
このとき，アメーバはそれぞれハイパーリンク図６，図６’のようになる：

図６のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropF.pdf`

図６’のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropG.pdf`

図のように，アメーバは，いくつかの無限に延びる触手 (tentacle) といくつかの穴 (vacuole) を持つ.

Laurent 多項式 $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} b_j z^j$ の Newton **多面体** (polytope, polyhedron) は

$$\Delta = \Delta_f := \text{convex hull}\{j \in \mathbb{Z}^n \mid b_j \neq 0\}$$

で定義される.（$\{j \in \mathbb{Z}^n \mid b_j \neq 0\}$ を含む最小の凸集合）.

定理 6.2 (Forsberg, Passare, Tsikh [7]) アメーバの補集合 $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ の連結成分の個数は，Newton 多面体 Δ_f 内の整数点の個数以下である.

実際，Ronkin **関数**

$$N_f(x) := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \log|f(z)| \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n}$$

は，$\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ 上の各連結成分上で線形であり，$\mathrm{grad}N_f : \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f \to \Delta \cap \mathbb{Z}^n$ となり，$\mathrm{grad}N_f$ が $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ の連結成分を分離する [7].

さらにアメーバはトロピカル超曲面と関係する：

定理 6.3 アメーバ $\mathcal{A}_f$ は，あるトロピカル超曲面を変位レトラクトに持つ.

実際，トロピカル多項式 S を $S =$ “ $\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} c_j x^j$ ” と定める．ただし，$\mathrm{grad}N_f(x) = j$ となる $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ が存在するとき $c_j := N_f(x) - j \cdot x$ （x の取り方によらない定数）とおき，そのような j のみに関するトロピカル和をとる．このとき，Y_S は，アメーバ $\mathcal{A}_f$ の変位レトラクトとなる．このトロピカル超曲面をアメーバ $\mathcal{A}_f$ の**背骨** (spine) とよぶ.

[17] Gelfand-Kapranov-Zelevinsky による超幾何関数の理論 [9] において導入された.

7　非 Archimedes 的アメーバ

トーリック幾何やアメーバとトロピカル幾何の関係は，非 Archimedes 的アメーバを考えると，よりはっきりする．

実べき Puiseux-Laurent **級数**とは,

$$a = a(s) = \sum_{p \in I} \alpha_p s^p$$

の形の形式的べき級数である．(s を変数とする 1 変数の形式的 Puiseux-Laurent 級数で実数べきも許したもの)．ただし，$\alpha_p \in \mathbb{C}^\times$ であり，a の**台** (support) $I = I_a \subset \mathbb{R}$ は，整列集合 (well-ordered set) [18]とする．$\mathbb{K}$ をそのような級数（と 0）の全体とする．$\mathbb{K}$ は代数的閉体となる[19]．

さて，$\mathbb{K}$ 上の付値 (valuation) $\mathrm{val} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を

$$\mathrm{val}(a) := \min I_a \in \mathbb{R},\ (a \in \mathbb{K}^\times), \quad \mathrm{val}(0) = \infty,$$

で定める[20]．I_a は整列集合なので, 最小元が存在することに注意する．そして, $\mathbb{K}$ 上に**非** Archimedes **的ノルム**（あるいは**指数付値**ともよぶ）を

$$\|a\| := e^{-\mathrm{val}(a)} \quad (a \in \mathbb{K}^\times), \qquad \|0\| = 0,$$

で定める．非 Archimedes 的というのは，不等式

$$\|a+b\| \ \le\ \max\{\|a\|, \|b\|\} \ =\ \text{“}\ \|a\| + \|b\|\ \text{”}$$

(“**トロピカル三角不等式**”）が成り立つことを意味する[21]．

さて，この非 Archimedes 的ノルムを使って，写像

$$\mathrm{Log} : (\mathbb{K}^\times)^n \to \mathbb{R}^n$$

が

$$\mathrm{Log}(a_1, \ldots, a_n) := (\log \|a_1\|, \ldots, \log \|a_n\|) = (-\mathrm{val}(a_1), \ldots, -\mathrm{val}(a_n))$$

で定まる．

$\mathbb{K}$-上の Laurent 多項式 $\boldsymbol{f}(z) = \sum_j a_j z^j \in \mathbb{K}[z, z^{-1}] = \mathbb{K}[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}]$ に対し，複素数の場合と同様に，$\mathbb{K}$-トーラス $(\mathbb{K}^\times)^n$ の代数的超曲面が

$$Z_{\boldsymbol{f}} := \{\boldsymbol{z} \in (\mathbb{K}^\times)^n \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 0\} \subset (\mathbb{K}^\times)^n$$

と定まるが，この Log による像

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\boldsymbol{f}) := \mathrm{Log}(Z_{\boldsymbol{f}}) \subset \mathbb{R}^n$$

を**非** Archimedes **的アメーバ** (non-Archimedean amoeba) とよぶ．

---

[18] 空でない任意の部分集合が最小元を持つ．

[19] たとえば，$a(t), b(t) = \sum_{q \in I_b} b\beta_q t^q$ について，積を $a(t)b(t) = \sum_r \left(\sum_{r=p+q, p \in I_a, q \in I_b} \alpha_p \beta_q\right) t^r$ と定めるが，各 r について，$\{p \in I_a \mid \exists q \in I_b, r = p+q\}$ は，空でない任意の部分集合に最大元と最小元が存在するような集合，つまり，有限集合となる．したがって，$\sum_{r=p+q, p \in I_a, q \in I_b} \alpha_p \beta_q$ は有限和である．$I_{a+b} \subseteq I_a \cup I_b, I_{ab} \subseteq I_a + I_b$ が成り立つ．ただし，$I_0 := \emptyset$ とおく．また，たとえば，$\mathbb{K}$ 上の代数方程式 $x^2 - s^p = 0$ は，解 $x = s^{\frac{p}{2}}$ を持つ．代数方程式 $(1 - s^p)x - 1 = 0, (p < 0)$ の解は，$x = -s^{-p} - s^{-2p} - s^{-3p} - \cdots \in K$，代数方程式 $x^2 - x = s^{-1}$ は，解 $x(t) = s^{-1} + s^{-1/2} + s^{-1/4} + \cdots \in \mathbb{K}$ を持つ．

[20] $\mathrm{val}(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0, \mathrm{val}(ab) = \mathrm{val}(a) + \mathrm{val}(b), \mathrm{val}(a+b) \ge \min\{\mathrm{val}(a), \mathrm{val}(b)\}$ を満たす．

[21] 何回たしても大きくならない．

また，ただし，$\mathbb{K}$ 上の Laurent 多項式 $\boldsymbol{f}(z) = \sum_{j\in A} a_j z^j \in \mathbb{K}[z, z^{-1}], a_j \in \mathbb{K}^\times$ に対し，トロピカル Laurent 多項式を

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}}(x) := \text{“} \sum_{j\in A} \log \|a_j\| x^j \text{”} = \text{“} \sum_{j\in A} (-\mathrm{val}(a_j)) x^j \text{”} = \max_{j\in A}(j \cdot x - \mathrm{val}(a_j))$$

で定める．($\boldsymbol{f}$ の**トロピカル化** (tropicalization))．

このとき，次が成り立つ．

定理 7.1 (Kapranov) 非 Archimedes 的アメーバはトロピカル超曲面である：

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{f}} = Y_{\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}}}$$

が成立する．

略証：$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (\mathbb{K}^\times)^n, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 0$ とする．$\sum_{j\in A} a_j z^j = 0$ なので，各 $k \in A$ について，$a_k z^k = \sum_{j\neq k}(-a_j z^j)$ である．非 Archimedes 的ノルムについて，

$$\|a_k\|\|z\|^k = \|a_k z^k\| \leq \max_{j\neq k} \|a_j z^j\| = \max_{j\neq k} \|a_j\|\|z\|^j$$

が成り立つ．対数をとると，

$$-\mathrm{val}(a_k) - k \cdot \mathrm{val}(z) \leq \max_{j\neq k}(-\mathrm{val}(a_j) - j \cdot \mathrm{val}(z))$$

を得る．$\mathrm{Log}_{\mathbb{K}}(z) = -\mathrm{val}(z)$ に注意すると，

$$-\mathrm{val}(a_k) + k \cdot \mathrm{Log}_{\mathbb{K}}(z) \leq \max_{j\neq k}(-\mathrm{val}(a_j) + j \cdot \mathrm{Log}_{\mathbb{K}}(z))$$

これは，$x = \mathrm{Log}(z)$ が，トロピカル Laurent 多項式 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}} = \text{“} \sum_{j\in A}(-\mathrm{val}(a_j))x^j \text{”}$ の定めるトロピカル超曲面 $Y_{\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}}}$ に含まれることを示している．また，逆に $x \in Y_{\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}}}$ とする．$a_i := s^{-x_i} \in \mathbb{K}^\times$ とおくと，$\mathrm{Log}(a_1\tilde{z}_1, \ldots, a_n\tilde{z}_n) = \mathrm{Log}(\tilde{z}) + x$ となる．さらに，$\mathrm{Log}(\tilde{z}) = 0$ となる $z \in Z_{\boldsymbol{f}}$ を（$\mathbb{K}$ が代数的閉体であることを使って）見つけることができる [4]． □

いま，$0 < s << 1$ に対して，$\boldsymbol{f}_s \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ が定義される．$Z_s = Z_{f_s} \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ とおく．このとき，

命題 7.2

$$\lim_{s\to+0} \mathrm{Log}(Z_s) = Y_{\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}}}$$

が成立する．

注意 7.3 （パッチワークと非 Archimedes アメーバの関係）パッチワーク多項式 $f_t = \sum_j b_j t^{-v(j)} z^j$ を $s = t^{-1}$ とおき，$\mathbb{K}$ 上の Laurent 多項式とみなす．$\boldsymbol{f} = \sum_j a_j z^j$ ただし，$a_j = b_j t^{-v(j)} = b_j s^{v(j)}$ とする．このとき，$\boldsymbol{f}$ のトロピカル化は，$\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}} = \text{“} \sum_j(-v(j))x^j \text{”}$ となり，v の Legendre 変換となる．このとき，

$$\lim_{s\to+0}\{\boldsymbol{f}_s = 0\} = Y_{\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}}}$$

が成立する．

注意 7.4 トロピカル演算は，全単射

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

（とある種の極限）から得られた．これは，全単射

$$\mathrm{Log} : (\mathbb{R}_{>0})^n \to \mathbb{R}^n$$

を誘導する．いま，埋め込み $i : (\mathbb{R}_{>0})^n \to (\mathbb{C}^\times)^n$ と，

$$j(r_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \ldots, r_n e^{\sqrt{-1}\theta_n}) = (e^{\sqrt{-1}\theta_1} s^{-\log r_1}, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} s^{-\log r_n})$$

により定まる埋め込み，$j : (\mathbb{C}^\times)^n \to (K^\times)^n$ について，

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}_{>0})^n & \xrightarrow{\mathrm{Log}} & \mathbb{R}^n \\
i \downarrow & & || \\
(\mathbb{C}^\times)^n & \xrightarrow{\mathrm{Log}} & \mathbb{R}^n \\
j \downarrow & & || \\
(\mathbb{K}^\times)^n & \xrightarrow{\mathrm{Log}} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

が可換となる．

$\varphi : \mathbb{K}^\times \to \mathbb{C}^\times$ と $\psi : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_{>0}$ が

$$\varphi(a) := e^{\text{-val}(a) + \sqrt{-1}\arg(a_{\mathrm{val}(a)})}, \psi(z) := |z|$$

で定まり，$\varphi^n \circ j = \mathrm{id}_{(\mathbb{C}^\times)^n}$, $\psi^n \circ i = \mathrm{id}_{(\mathbb{R}_{>0})^n}$ が成り立ち，

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{K}^\times)^n & \xrightarrow{\mathrm{Log}} & \mathbb{R}^n \\
\varphi^n \downarrow & & || \\
(\mathbb{C}^\times)^n & \xrightarrow{\mathrm{Log}} & \mathbb{R}^n \\
\psi^n \downarrow & & || \\
(\mathbb{R}^\times)^n & \xrightarrow{\mathrm{Log}} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

が可換となる．この図式と関連付けて,「複素トロピカル曲線」が定義されている ([27]).

8 Gromov-Witten 不変量とトロピカル

トロピカル幾何学を応用して，シンプレクティック位相幾何における Gromov-Witten 不変量を計算できることは Kontsevich により示唆された ([20])．Mikhalkin によりその計算が実行された．

$g \geqq 0$ と $\mathbb{R}^2$ の凸多角形 Δ を固定し，$s = \#(\partial\Delta \cap \mathbb{Z}^2)$ とおく．そして $N(g, \Delta)$ を種数 g で Newton 多角形 Δ を持ち，与えられたジェネリックな $s + g - 1$ 個の $(\mathbb{C}^\times)^2$ の点を通る代数曲線の個数とする.（ジェネリックであれば，点の取り方によらず個数が決まる）．ここで，種数は，幾何種数を意味する．代数曲線 $C \subset \mathbb{C}P^2$ の既約分解 $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m$ について，正規化 $\widetilde{C_j} \to C_j$ をとり，

$$g(C) := g(\widetilde{C_1}) + g(\widetilde{C_2}) + \cdots + g(\widetilde{C_m}) + 1 - m$$

と定める．

一方，種数 g で Newton 多角形 Δ を持ち，与えられたジェネリックな $s+g-1$ 個の $\mathbb{R}^2$ の点を通るトロピカル曲線の個数を $N^{\mathrm{irr}}_{\mathrm{trop}}(g,\Delta)$ とおく．ただし，トロピカル曲線の１次 Betti 数[22]を**種数**と呼ぶ.

定理 8.1 ([24][27])

$$N^{\mathrm{irr}}(g,\Delta)=N^{\mathrm{irr}}_{\mathrm{trop}}(g,\Delta)$$

が成り立つ.

また，$N^{\mathrm{irr}}_{\mathrm{trop}}(g,\Delta)$ の具体的な計算法も与えられている ([24][27][33]) [23].

9　トロピカル特異点論

トロピカル特異点論と呼ぶべきものはまだないが，そのための基礎的な考察をいくつか記しておく.

$\mathbb{R}^n$ 内のトロピカル超曲面のクラスは，アフィン変換

$$\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},$$

ただし，$A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}),\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ で不変である．つまり，$Y_F\subset\mathbb{R}^n$ がトロピカル超曲面ならば $\sigma(Y_F)=Y_G$ もトロピカル超曲面である．実際，$F=\max_{j\in A}\{c_j+jx\}$ のとき，$G=\max_{j\in A}\{c_j+jb+(A^*j)x\}$ である．このようなアフィン変換を**格子アフィン変換** (lattice affine transformation) とよぶ．また，$A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ の場合は，**有理アフィン変換** (rational affine transformation) とよぶ.

一般に，**トロピカル微分同型写像** (tropical diffeomorphism) とは，同相写像 $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ であって，整多面体[24]による有限分割 $\mathbb{R}^n=\cup_i P_i$ があって，$\sigma|_{P_i}$ が格子アフィン変換の制限になるものである．また，格子アフィン変換を有理アフィン変換で考えたものを，**トロピカル同相写像** (tropical homeomorphism) とよぶことにする[25]

まず，$n=2$ の場合のトロピカル曲線 $Y_F,F=\max_{j\in A}\{c_j+jx\}$ に限る．点 $x_0\in Y_F$ が**分枝点** (branch point) とは，３つ以上の辺に隣接しているときにいう．分岐点は，Newton 多角形 Δ_F の F に対する双対凸格子細分 (§4参照) の小多角形に対応する．分枝点 $x_0\in Y_F$ が**単体的** (simplicial) とは，$x_0\in Y_F$ が丁度３つの辺に隣接していて，その辺の重み (weight) がすべて 1 のときにいう．これは，双対多角形が最小の（面積 $\frac{1}{2}$ の）格子３角形であることである．単体的でない分枝点を**特異点** (singular point) と呼ぶ．(singular = non-simplicial).

一般次元の場合，$x_0\in Y_F$ が i-次元セルの点であるとき，$(n-i)$-次元 polytope が対応するが，それが，単体であり，頂点以外に整数点をもたない場合に**非特異** (non-singular) と呼ぶ事にする.

すべてのトロピカル超曲面は，同じ Newton 多面体をもち特異点のないトロピカル超曲面で近似できる[26]

例 9.1 （升形分岐）$F=$“ $0+0x_1+0x_2+0x_1x_2$ ” $=\max\{0,x_1,x_2,x_1+x_2\}$ (四つ角) は，非特異な変形 $F_\lambda=$“ $\lambda+0x_1+0x_2+0x_1x_2$ ” $=\max\{\lambda,x_1,x_2,x_1+x_2\},(\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq0)$ を持つ．トロ

---

[22] 正確には，グラフからの “parametrization ” を考えて，そのグラフの１次 Betti 数

[23] トロピカル川柳４：不変量 トロピカルで数え上げ.

[24] 線形項が整数係数の１次アフィン関数で定義される半空間の有限個の共通部分

[25] 関連して，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-（可積分）構造，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-（可積分）構造が定義される．たとえば，$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n/\sim$ ただし，$x\sim y\Leftrightarrow\exists a\in\mathbb{R}$, “$ay$” $=a(1,\ldots,1)+y=x$ (トロピカル射影空間) や通常の射影空間 $\mathbb{R}P^n$ 実トーリック多様体は，可積分な $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-構造をもつ.

[26] 凹関数 $\bar{c}:\Delta_F\cap\mathbb{Z}^n\to\mathbb{R}$ を少しだけ摂動するだけで，特異点をなくすことができる.

ピカル曲線 $Y_F, Y_{F_\lambda}(\lambda > 0, \lambda < 0)$ と Newton 多角形 $\Delta_F, \Delta_{F_\lambda}(\lambda > 0, \lambda < 0)$ の細分は，ハイパーリンク図７のようになる．

図７のある URL：

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/trop3.pdf

正方形の Newton 多角形の，対角線による細分で得られる分岐である．

さて，$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を格子凸体 (lattice polytope) とする．$\Delta \cap \mathbb{Z}^n = S$ とおく．$\{c : S \to \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^s, s = |S|$ に同値関係を次のように定める：$c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow c_1$ と c_2 が Δ に同じ細分を与える．

$$\Sigma := \{c \in \mathbb{R}^s \mid c \text{ は} \Delta \text{の minimal simplicial subdivision を与えない.}\}$$

とおく．

命題 9.2 $\mathbb{R}^s \backslash \Sigma$ は，open polyhedron の disjoint union ($K(\pi, 0)$ 空間) となる．各 open polyhedron は，１つの同値類からなる．

通常の実平面曲線の特異点の位相的分類のトロピカル類似が成立する：

命題 9.3 $\mathbb{R}^2$ のトロピカル曲線の特異点のトロピカル同相類は，その分岐の個数のみに依る．

Proof: いま，簡単のために，$x_0 = 0$ とし，Y_F の中で，半直線 $\ell_1 : x = tv_1, (t > 0), \dots, \ell_r : x = tv_r, (t > 0)$ が 0 に隣接しているとする．ここで，$v_1, \dots, v_r$ は成分が整数であるようなベクトルである．0 が非分岐点である場合も含むように，$r \geq 2$ としておく．同様に，別のトロピカル曲線 Y_G の中で，半直線 $\ell_1 : x = tv'_1, (t > 0), \dots, \ell_r : x = tv'_r, (t > 0)$ が 0 に隣接しているとする．また，$v'_1, \dots, v'_r$ は成分が整数であるようなベクトルとする．このとき，トロピカル同相写像 σ があって，順番を適当に選べば，$\sigma(v_i) = v'_i$ とできる．したがって，$\sigma(Y_F) = Y_G$ となる． □

一般に，トロピカル特異点のトロピカル同相類は，双対凸体の，いわゆる「組み合わせ型」（境界複体の組み合わせ型）[5] と関係する．

トロピカル特異点論は，非アルキメデス代数多様体の，Log-写像に関する特異点論と言えるが，通常の特異点論との関係，類似と相違点，トロピカル特異点固有の現象など，研究すべきことは多い．

10 超離散化とトロピカル

これについては，この春の学校での辻本さんの講義録と，[40][31][10] などの文献を参考のこと[27]．トーリック多様体上の可積分系の超離散化とトロピカル幾何がなぜ関連するのか，その深い理由を解明することも大変興味深い問題であり，今後の課題である．

[27] トロピカル川柳５：超離散したいときにはトロピカル．

トロピカル幾何学入門・演習問題集

● **演習問題１**.
$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \leq x_1 +_h x_2 +_h \cdots +_h x_N \leq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} + h \log N$ を示せ.

● **演習問題２**.
トロピカル２次方程式 “$x^2 + ax + b = 0$ ” の解の公式を求めよ．また，トロピカル n 次方程式の解の公式を求めよ.

● **演習問題３**.
“ $(0x_1 + 1x_2 + 1)(0x_1 + (-1)x_2 + 0)$ ” = “ $0x_1^2 + 1x_1x_2 + 0x_2^2 + 1x_1 + 1x_2 + 1$ ” を確認せよ.

● **演習問題４**.
トロピカル多項式 $E(x) =$ “ $1x_1 + 0x_2^2 + 0$ ” の定める $\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル曲線 Y_E を図示せよ．また，Y_E についてバランス条件を確かめよ.

● **演習問題５**：
$\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル２次多項式 $F(x) =$ “ $0x_1^2 + 1x_1x_2 + 0x_2^2 + 1x_1 + 1x_2 + 1$ ” の定めるトロピカル曲線を図示せよ．また，$F(x)$ の Newton 多角形 Δ_F と $F(x)$ から定まる Δ_F の細分を図示せよ.

● **演習問題６**：
$\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル２次多項式 $G(x) =$ “ $0x_1^2 + 1x_1x_2 + 0x_2^2 + 1x_1 + 1x_2 + 1 \cdot \varepsilon$ ” $(\varepsilon > 0)$ の定めるトロピカル曲線を図示せよ．また，$G(x)$ の Newton 多角形 Δ_G と $G(x)$ から定まる Δ_G の細分を図示せよ.

● **演習問題７**：
$\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル３次多項式 $H(x) =$ “ $0x_1^3 + 0x_2^3 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 0$ ” の定めるトロピカル曲線を図示せよ．また，$H(x)$ の Newton 多角形 Δ_H と $H(x)$ から定まる Δ_H の細分を図示せよ.

● **演習問題８**：
$\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル Laurent 多項式 $I(x) =$ “ $0x_1 + 0x_2 + 0x_1x_2^{-1} + 0x_1^{-1}x_2 + 0x_1^{-1}x_2^{-1} + 1$ ” の定めるトロピカル曲線を図示せよ．また，$I(x)$ の Newton 多角形 Δ_I と $I(x)$ から定まる Δ_I の細分を図示せよ.

● **演習問題９**：
$(\mathbb{C}^\times)^2$ の代数曲線 $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + 1 = 0$ のアメーバ $\mathcal{A}_f \subset \mathbb{R}^2$ の概略図を描け.

● **演習問題１０**：
$\mathbb{K} = \{a(s) = \sum_{p \in I} a_p s^p \mid I = I_a \subset \mathbb{R}$ well-ordered set, $a_p \in \mathbb{C}^\times\} \cup \{0\}$ を１変数 s に関する収束 Puiseux-Laurent 級数のなす代数閉体とする．$\mathbb{K}^2$ 上の Laurent 多項式 $\boldsymbol{f} = z_1^3 + z_2^3 - 6s^{-\frac{1}{2}}z_1z_2 + 1$ に対応する $\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル多項式 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{trop}}$（トロピカル化）を書け．また，$\boldsymbol{f}$ の非 Archimedes アメーバ $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{f}) \subset \mathbb{R}^2$ を求めよ.

解答は最終ページにある[28].

[28] トロピカル川柳６：(東北大での春の学校にちなんで) うとうとと春にひらめくトロピカル．目がトロ〜ン頭が光るトロピカル．輝ける杜の都でトロピカル．以上，失礼しました.

参考文献

[1] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis,* Grund. math. Wiss., **261**, Springer-Verlag Berlin, (1984).

[2] A.D. Bruno, *Power Geometry in Algebraic and Differential Equations,* North-Holland Math. Library **57**, Elsevier, (2000).

[3] J. Draisma, *A tropical approach to secant dimensions,* arXiv:math.AG/0605345, (2006).

[4] M. Einsiedler, M. Kapranov, D. Lind, *Non-Archimedean amoebas and tropical varieties,* arXiv: math.AG/0408311 v2 2005/1/22.

[5] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Math., **168**, Springer-Verlag, New York, (1996).

[6] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras,* arXiv: math.RT/0311493. (v.2 2004).

[7] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas,* Advances in Math., 151 (2000), 45–70.

[8] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties,* Annals of Math. Studies, **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, (1993).

[9] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants,* (Mathematics : Theory and Applications). Springer Verlag ; ISBN: 0817636609 ; (1996/07/10).

[10] 広田 良吾, 高橋 大輔「差分と超離散」共立出版; ISBN: 4320017293 ; (2003).

[11] T. Kajiwara, *Tropical hypersurfaces and degeneration of projective toric varieties,* Preprint.

[12] T. Kajiwara, *Tropical toric varieties,* Preprint.

[13] 梶原 健「トロピカル幾何と代数幾何」日本数学会年会，代数分科会特別講演 (２００７年３月)，埼玉大学理学部.

[14] E. Katz, *A tropical toolkit,* arXiv:math.AG/0610878, (2006).

[15] R. Kenyon, A. Okounkov, *What is ... a dimer ?,* Notice Amer. Math. Soc., **52-3** (2005), 342–343.

[16] R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield, *Dimers and amoebae,* Ann. of Math., **163-3** (2006), 1019–1056.

[17] A.N. Kirillov, 前野俊昭「素晴らしきアメーバたち」数学 **58–2** (2006), 151–164.

[18] A.N. Kirillov, N. Liskova, *Introduction to tropical combinatorics,* in Physics and combinatorics 2000, World Scientific (2001), pp.82–150.

[19] V.N. Kolokoltsov, *Idempotency structures in optimization,* Journal Math. Sci., **104–1** (2001), 847–880.

[20] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Homological mirror symmetry and torus fibrations,* Symplectic geometry and mirror symmetry, World Sci. Publ., (2001), 203–263.

[21] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Affine structure and non-archmedean analytic spaces,* arXiv: math.AG/0406564 v1 2004/6/28.

[22] G.L. Litvinov, V.P. Maslov (ed.), *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics,* Contemporary Mathematics, **377** (2005), ISBN 0-8218-3538-6.

[23] G. Mikhalkin, *Real algebraic curves, moment map and amoebas,* Ann. of Math., 151 (2000), 309–326.

[24] G. Mikhalkin, *Counting curves via lattice paths in polygons,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336–8** (2003), 629–634.

[25] G. Mikhalkin, *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry,* arXiv: math.AG/0403015. Different Faces of Geometry, International Mathematical Series,Vol.3(Donaldson, Simon; Eliashberg,Yakov; Gromov, Mikhael(Eds.)) (2004), 257–300.

[26] G. Mikhalkin, *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces,* Topology **43–5** (2004), 1035–1065.

[27] G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in* $\mathbb{R}^2$*,* arXiv: math.AG/0312530. Journal of Amer. Math. Soc., **18** (2005), 313–377.

[28] G. Mikhalkin, *Tropical geometry and its application,* arXiv:math.AG/0601041, (2006). Proceedings of the ICM 2006, Madrid.

[29] G. Mikhalkin, I. Zharkov, *Tropical curves, their Jacobians and theta functions,* arXiv:math.AG/0612267, (2006).

[30] 室田一雄「離散凸解析」共立叢書 現代数学の潮流，共立出版，(2001).

[31] 中村佳正 編，辻本 諭，西成 活裕，佐々 成正，松木平 淳太，梶原 健司，中村 佳正，永井 敦，渡邊 芳英 著「可積分系の応用数理」裳華房， ISBN 4-7853-1520-2, (2000).

[32] T. Nishinou, B. Siebert, *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves,* Duke Math. J., **135–1** (2006), 1–51.

[33] 西納 武男「トロピカル幾何と数え上げ幾何」日本数学会年会，幾何分科会特別講演 (２００７年３月)，埼玉大学理学部.

[34] 小田忠雄「凸体と代数幾何学」紀伊国屋書店 (1985).

[35] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties,* Ergeb. Math., Springer-Verlag Berlin, (1988).

[36] L. Pachter, B. Sturmfels, *The mathematics of phylogenomics,* arXiv: math.ST/0409132.

[37] M. Passare, H. Rullgard, *Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope,* Duke Math. J. **121 − 3** (2004), 481–507.

[38] J.-E. Pin, *Tropical semirings, Idempotency,* Publ. Newton Inst., **11**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1998), 50–69.

[39] J. Richter-Geber, B. Sturmfels, T. Theobald, *First steps in tropical geometry,* arXiv: math.AG/0306366. in [22], 289–317.

[40] 薩摩順吉「物理と数学の２重らせん」パリティ・ブックス，丸善，ISBN 4-621-07354. (2004).

[41] E. Shustin, *Patchworking singular algebraic curves, non-Archimedean amoebas and enumerative geometry,* arXiv math.AG/0211278.

[42] D. Speyer, B. B. Sturmfels, *The tropical Grassmanian,* arXiv: math.AG/0304218.

[43] D. Speyer, B. B. Sturmfels, *The tropical Mathematics,* arXiv: math.CO/0408099.

[44] B. Sturmfels, *Solving Systems of Polynomial Equations,* Regional Conference Series in Mathematics, No. 97, Amer. Math. Soc., (2002). ISBN: 0-8218-3251-4 の９章 (pp. 119–131).

[45] O. Viro, *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper,* European Congress Math., **1** Progress in Math., **201**, Birkhäuser, Basel, (2001), pp. 135–146.

演習問題解答例

演習問題１． $m = \max\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ とおくと，
$m = h \log\left(e^{\frac{m}{h}}\right) \le h \log\left(e^{\frac{x_1}{h}} + e^{\frac{x_2}{h}} + \cdots + e^{\frac{x_N}{h}}\right) = x_1 +_h x_2 +_h \cdots +_h x_N \le h \log\left(N e^{\frac{m}{h}}\right) = m + h \log N.$

演習問題２． トロピカル２次方程式 "$x^2 + ax + b = 0$" の解の公式：$\max\{2x, x+a, b\}$ の corner locus と考えて，
$x =$ "$\frac{a}{0}$", "$\frac{b}{a}$".
トロピカル n 次方程式 "$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$" の解の公式：$n$ 個の解をもつ場合は，
$x =$ "$\frac{a_1}{a_0}$", "$\frac{a_2}{a_1}$", "$\frac{a_3}{a_2}$", $\dots$, "$\frac{a_n}{a_{n-1}}$". 一般の場合は読者にゆだねる．

演習問題３． 省略.

演習問題４． ハイパーリンク図８
図８のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropA.pdf`

演習問題５． ハイパーリンク図９
図９のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropB.pdf`

演習問題６． ハイパーリンク図１０
図１０のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropC.pdf`

演習問題７． ハイパーリンク図１１
図１１のある URL： `http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropD.pdf`

演習問題８． ハイパーリンク図１２
図１２のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropE.pdf`

演習問題９． ハイパーリンク図１３
図１３のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropF.pdf`

演習問題１０． ハイパーリンク図１４
図１４のある URL：
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical.html`
`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/tropD.pdf`

石川 剛郎（いしかわ ごうお, Go-o Ishikawa）
北海道大学大学院理学研究院数学部門