No.

Date

はじめに

数学における実験と観察について

実験と観察である以上、物理的方法と化学的方法があるはずだということで、それが何かも考えてきたが今だにわかりません。おもに数表づくりと数値分析をしています。

G先生の理科1の授業

地球の内部がどうなっているのかを知るには？

1. 穴を掘る。（直接たしかめる）
2. 地球の内部から出てくるものを調べる。（火山の噴出物など）〔化学的方法〕
3. 地震によって発生するS波とP波の伝わり方を調べる。〔物理的方法〕

地球化学、地球物理を例としてとりあげ、物理と化学は分野のちがいではなく、対象に対する方法のちがいであるということを、強調されていました。

A

1

N進法における 1/N について

問1　かけ算の表の一部分です。何進法のどの部分か。

(ア) $\begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$　(イ) $\begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 15 & 23 \end{bmatrix}$　(ウ) $\begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 20 & 24 \end{bmatrix}$

問2　1÷7の循環節の長さが1ケタ、2ケタになるのは何進法か。

問3　1÷5の循環節です。何進法か。

(ア) $0.\dot{1}46\dot{3}$

(イ) $0.\dot{1}25\dot{4}$

2

かけ算の表

2進法から10進法までの表を作って下さい。九九とは少しちがいます。

0×0から始まり、10×10=100で終わります。

〔5進法の例〕

	0	1	2	3	4	10
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	10
2	0	2	4	11	13	20
3	0	3	11	14	22	30
4	0	4	13	22	31	40
10	0	10	20	30	40	100

3

数列の規則性は？

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, ……

周期のある数列です。条件（mod）を変化させて周期の長さを調べてみて下さい。

0, 0, 1, □

0, 0, 1 □

0, 0, 1 □

と変化させるとどうでしょうか。

4

わり算

2進法から10進法までの $1/N$ の表をつくって観察してみて下さい。

［6進法での 1÷8の場合］

$$
\begin{array}{rl}
 & 0.\ 0\ 4\ 3 \\
8 \,) & 1 \\
 & -0 \\
\times 6 & 1 \\
 & 6 \\
 & -0 \\
\times 6 & 6 \\
 & 36 \\
 & -32 \\
\times 6 & 4 \\
 & 24 \\
 & -24 \\
 & 0
\end{array}
$$

注意
6進法で8は12と表記しますが、10進法表記の8をそのまま使います。
計算は10進法で行ないます。

0.0 4 3

$$\frac{0}{6}+\frac{4}{6^2}+\frac{3}{6^3}=\frac{24+3}{6^3}=\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$$

5

10進法の1÷7は

$$
\begin{array}{rl}
 & 0.\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7 \\
7 \,) & 1 \\
 & -0 \\
\times 10 & 1 \\
 & 10 \\
 & -7 \\
\times 10 & 3 \\
 & 30 \\
 & -28 \\
\times 10 & 2 \\
 & 20 \\
 & -14 \\
\times 10 & 6 \\
 & 60 \\
 & -56 \\
\times 10 & 4 \\
 & 40 \\
 & -35 \\
\times 10 & 5 \\
 & 50 \\
 & -49 \\
 & 1
\end{array}
$$

あまり 1 → 3 → 2 → 6 → 4 → 5 → 1

$$
\begin{array}{r}
142 \\
+\,857 \\
\hline
999
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.2.6 \\
+\,4.5.1 \\
\hline
7.7.7
\end{array}
$$

あまりに1がでてきたので1に戻る。

6

10進法での $1/N$（Nは1から100）の表つくり

［1÷49 の例（8ケタ電卓を使って）］

1÷49 = 0.0204081

408×49 = 19992　　1000−992 = 8

8÷49 = 0.1632653

265×49 = 12985　　1000−985 = 15

15÷49 = 0.3061224

122×49 = 5978　　1000−978 = 22

22÷49 = 0.4489795

979×49 = 47971　　1000−971 = 29

29÷49 = 0.5918367

836×49 = 40964　　1000−964 = 36

36÷49 = 0.7346938

693×49 = 33957　　1000−957 = 43

43÷49 = 0.877551

755×49 = 36995　　1000−995 = 5

7

5÷49 = 0.1020408

551×49 = 26999　　1000−999 = 1

1÷49 =

$0.\dot{0}20408$　163265　306122
448979　591836　734693
$87755\dot{1}$

1÷49の循環節を使って

$$
\begin{array}{r}
020408 \\
163265 \\
306122 \\
448979 \\
591836 \\
734693 \\
+\ 877551 \\
\hline
3\,142854 \\
142857
\end{array}
$$

No.

Date

M進法での 1/N の循環節の長さ

(BASICプログラム)

[注意 NがMの約数の倍数のときでは使えない。]

```
10 CLEAR
20 PRINT "Mシンホウ"
30 INPUT  M
40 PRINT " 1 /N "
50 INPUT  N
60 L = 0
70 A = M
80 B =  A  MOD  N
90 L = L + 1
100 IF = B = 1 THEN 130 ELSE 110
110 A = B * M
120  GOTO 80
130  PRINT L
140  GOTO 10
```


M進法での 1/N の循環節の長さについて

M=10　N=7

M=10　$N=7^2=49$

M=10　$N=7^3=343$

の循環節の長さは?

M=10　N=17

M=10　N=19

M=10　N=17×19=323

の循環節の長さは?

M=7　N=5

M=7　$N=5^2=25$

M=7　$N=5^3=125$

の循環節の長さは?

M進法での 1/A のあまりの数列

```
10 CLEAR
20 PRINT " Mシンホウ"
30 INPUT  M
40 PRINT " 1 / A "
50 INPUT  A
60  N=0
70  PRINT 1;
80  B = M
90  C = B  MOD A
100  PRINT C;
110  N = N+1
120 IF C=1 THEN 160 ELSE 130
130 IF N > A THEN 160 ELSE 140
140 B = C * M
150 GOTO 90
160 END
```


あまり数列の実験例

[10進法での 1÷7の例]

3. 2. 6. 4. 5. 1. 3. 2

6. 4. 5 ← 1 → 3. 2. 6

4. 5. 1. 3. 2. 6. 4. 5

1. 3. 2. 6. 4. 5. 1

3 2 6 4 5. 1. 3. 2

[10進法での 1÷49の例]

10	2	20	4	40	8
31	16	13	32	26	15
3	30	6	11	12	22
24	44	48	39	47	29
45	9	41	18	33	36
17	23	34	46	19	43
38	37	27	25	5	1

No
Date

B

1

平方根について（8ケタ電卓を使って）

平方根の求め方

$\sqrt{N}$ を求める　（N > 0）

CA

N + 1 ÷ 2 M+　⇐ 初期値aがわかっている時は〔a, M+〕

N ÷ RM M+	同じ数値に
RM ÷ 2 =	なるまで
CM M+	くり返す。

この方法の原理は

$$A > \frac{A+B}{2} > \sqrt{A \cdot B} > \frac{2 \cdot A \cdot B}{A+B} > B$$

を利用した反復法です。

電卓は RM/CM　M+/CA　M-/C のボタンが独立しているものを使用して下さい。

2

立方根の求め方

$\sqrt[3]{N}$ を求める　（N > 0）

CA

N + 2 ÷ 3 M+　⇐ 初期値aがわかっている時は〔a, M+〕

N ÷ RM ÷ RM ÷ 2 M+	同じ数値に
RM ÷ 1.5 =	なるまで
CM M+	くり返す。

5乗根の場合を作ってみて下さい。

数値の確かめ方は同じ数を何度もかけ合わせる

× × = = = = ……

を利用します。

3

8ケタ以上の数値を知りたい時の方法

$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.4142135$ とします。

1.414 がわかっている数とします。

CA	0
1.414 × × M+	1.999396
2 − RM =	0.000604
÷2 ÷ 1.414 =	0.0002135

Aをわかっている数値とし、Bをわかっていない数値とすると

$$(A+B)^2 - A^2 = 2AB + B^2$$

$$\frac{2AB + B^2}{2A} = B + \frac{B^2}{2A}$$

Bの数値にちかい数値を求めることができます。

4

紙とえんぴつを用意して下さい。

14142135

を2つに分けます。

$a = 14140000$　$b = 2135$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

を使います。

1414 × × = 1999396 (0000 0000)

1414 × 2135 × 2 = 6037780 (0000)

2135 × × = 4558225

```
  1999396 0000 0000
       6037780 0000
+           4558225
-------------------
  1999999 8235 8225
```

```
  200 0000 0000 0000
- 199 9999 8235 8225
--------------------
           1764 1775
```

1764 1775
÷ 14142135
÷ 2 =
0.6237309

$\sqrt{2}$ は、
1.4142135 6237309
とすることができましたが、
数値のさいごの 0.9. については少し不安があります。

$B+\dfrac{B^2}{2A}$ の $\dfrac{B^2}{2A}$ の部分です。

$\dfrac{B^2}{2A}$ のだいたいの大きさは、

$B \fallingdotseq 6.2\times10^{-8}$

$2A \fallingdotseq 2.8$

$\dfrac{B^2}{2A} \fallingdotseq \dfrac{3.8\times10^{-15}}{2.8} \fallingdotseq 1.4\times10^{-15}$ となるので

0.9. の正しいことがわかります。
ただし電卓そのもののもつ計算誤差には注意する必要があります。
（有効ケタ数をこえる場合は、切りすてられる。）

$\sqrt{25+a}$ の表を作って観察してみてください。

26 = 25+1		25.1 = 25+0.1	
27 = 25+2		25.2 = 25+0.2	
28 = 25+3		25.3 = 25+0.3	

初期値 a_1 は 5 で始めて下さい。

25より少し大きい数の平方根の数値の表
（数値は8ケタ電卓と筆算による）

26	5.0 99 0 19 5
27	5.1 96 1 5 24
28	5.2 91 5 0 26
25.1	5.00 999 00 1 995 013
25.2	5.01 996 015 920 445
25.3	5.02 991 053 598 371

（ア）（イ）（ウ）（エ）（オ）

$\sqrt{26}$ は

```
  5
  0.1
- 0.001
  0.00002
- 0.0000005
-------------
  5.0990195
```

$\sqrt{27}$ は

```
  5
  0.2
- 0.004
  0.00016
- 0.0000080
  0.0000004
-------------
  5.1961524
```

No.
Date

$\sqrt{28}$ は

$$\begin{array}{r} 5 \\ 0.3 \\ -0.009 \\ 0.00054 \\ -0.0000374 \\ \hline 5.2015026 \end{array}$$

のように分解することができます。

$\sqrt{25+a}$ を $\sqrt{5^2+a}$ として数値を分析してみます。

(ア) について

$\sqrt{26}$ 0.1 = 1 ÷ 10

$\sqrt{27}$ 0.2 = 2 ÷ 10

$\sqrt{28}$ 0.3 = 3 ÷ 10

となります。

なぜ $\sqrt{25+a}$ の数値を使ったのかの理由
→は、÷10 にあります。

5 × 2 = 10 となり、

10 進法では位どりとして表われます。

$\sqrt{A^2+a} \fallingdotseq A + \frac{a}{2A}$

は古くから知られています。

$7^2 + 1 = 2 \times 5^2$ を使って

$\sqrt{2} \fallingdotseq \{7 + (1 \div 2 \div 7)\} \div 5$ を計算すると?

(イ) について

$\sqrt{26}$ −0.001 = $-1^2 \div 10^3$

$\sqrt{27}$ −0.004 = $-2^2 \div 10^3$

$\sqrt{28}$ −0.009 = $-3^2 \div 10^3$

(ウ) について

$\sqrt{26}$ 0.00002 = $2 \times 1^3 \div 10^5$

$\sqrt{27}$ 0.00016 = $2 \times 2^3 \div 10^5$

$\sqrt{28}$ 0.00054 = $2 \times 3^3 \div 10^5$

(エ) について

$\sqrt{26}$ −0.0000005 = $-5 \times 1^4 \div 10^7$

$\sqrt{27}$ −0.0000080 = $-5 \times 2^4 \div 10^7$

$\sqrt{28}$ は

$-5 \times 3^4 \div 10^7$

= −0.0000405

と予想することができます。

(オ) を使って、

$\sqrt{25.01}$ の 0 1 3 より、13より少し大きい
14 を予想する。

$\sqrt{26}$ $14 \times 1^5 \div 10^9$

$\sqrt{27}$ $14 \times 2^5 \div 10^9$

$\sqrt{28}$ $14 \times 3^5 \div 10^9$

0.000000014
0.000000448
0.000003402

$$\begin{array}{lr} \sqrt{28} & 0.00054 \\ & -0.0000405 \\ & 0.000003402 \\ \hline & 0.000502902 \end{array}$$

50 26

502 まで一致しました。

これまでの実験と観察を式の形にしてみます。

$$\sqrt{A^2+a} = A + \frac{a}{2A} - \frac{a^2}{(2A)^3} + \frac{2a^3}{(2A)^5} - \frac{5a^4}{(2A)^7} + \frac{14a^5}{(2A)^9} - \cdots$$

となります。

$A=1$ とすると

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \frac{5a^4}{128} + \frac{7a^5}{256} - \cdots$$

となります。

$\sqrt{2}$ の数値を使った実験

$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.4142135$

① 1.414 がわかっている場合

CA 1.414 × × M+

2 − RM ÷ 2 ÷ 1.414 =

② 1.41 が わかっている場合

CA 1.41 × × M+

2 − RM ÷ 2 ÷ 1.41 =

CM M+ × × =

÷ 2 ÷ 1.41 M− RM

とすることで

0.0002135

0.0042135

とすることができます。

1.4 が わかっている 場合は、

② の方法を使っても

0.0142129 となり

$\sqrt{2}$ 1.4142135 とくらべて

0.0000006 だけ小さくなります。

CA 1.4 × × M+

2 − RM ÷ 2 ÷ 1.4

= 0.0142857

の数値を使って

0.0000006 を作るためには、

0.0142857

× × = = 0.0000029

÷2÷1.4÷1.4 0.0000007

かなり近づきました。

この実験を代数を使って表現します。

$\sqrt{2} = a + b$ とし、a はすでに わかっている数値とします。

$(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$

b を求めたいので

$(2ab+b^2)/2a = b + b^2/2a$

$b^2/2a$ が大きすぎるので

次に $b^2/2a$ を引けばよいが b が わからないので $b \fallingdotseq (2ab+b^2)/2a$

として計算しました。

1.4 の場合は

$(2-1.4^2)/(2\times1.4) = B$ とすると

$1.4 + B - B^2/(2\times1.4) + B^3/(2\times1.4\times1.4)$

と見ることができます。

No.
Date

17

bを$(2ab+b^2)/2a$とおきかえたので

$(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$

$(2ab+b^2)/2a = b + b^2/2a$

$(2ab+b^2)^2/(2a)^2 \cdot 2a = (2ab+b^2)^2/8a^3$

$= (4a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)/8a^3$

$= b^2/2a + b^3/2a^2 + b^4/8a^3$

$(2ab+b^2)^3/(2a)^3 \cdot 2a^2 = (2ab+b^2)^3/16a^5$

$= (8a^3b^3 + 12a^2b^4 + 6ab^5 + b^6)/16a^5$

$3b^4/4a^3 - b^4/8a^3 = 5b^4/8a^3$

$N - a^2 = B$ とすると

$a + B/2a - B^2/8a^3 + B^3/16a^5 - 5B^4/128a^7$

$\underline{b} = (2ab+b^2)/2a$ とすると

$a + \underline{b} - \underline{b}^2/2a + 2\underline{b}^3/(2a)^2 - 5\underline{b}^4/(2a)^3$

18

別の形で表現すると

$\sqrt{N} = a+b$ aをわかっている数値とする。

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a^2+2ab+b^2) - a^2 = 2ab + b^2$

$(2ab+b^2)/2a = b + b^2/2a$ —①

$b \fallingdotseq (2ab+b^2)/2a$ を利用する。

$(2ab+b^2)^2/(2a)^2 \cdot 2a$

$= (4a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)/8a^3$

$= b^2/2a + b^3/2a^2 + b^4/8a^3$ —②

$(2ab+b^2)^3/(2a^2)^3 \cdot 2a^2$

$= (8a^3b^3 + 12a^2b^4 + 6ab^5 + b^6)/16a^5$

$= b^3/2a^2 + 3b^4/4a^3 + 3b^5/8a^4 + b^6/16a^5$ —③

$3b^4/4a^3 - b^4/8a^3 = 5b^4/8a^3$ —④

19

① $b + b^2/2a$

② $-(b^2/2a + b^3/2a^2 + b^4/8a^3)$

③ $(b^3/2a^2 + 3b^4/4a^3 +$

④ $-(5b^4/8a^3 +$

$+$

$b + 0 + 0 + 0 +$

という形になります。

bを$(2ab+b^2)/2a$とする計算誤差を
次々とうち消して、誤差を小さくしてゆくと
見ることができます。

20

立方根の場合について

$(a+b)^3 - a^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(3a^2b+3ab^2+b^3)/3a^2 = b + b^2/a + b^3/3a^2$

$(3a^2b+3ab^2+b^3)^2/(3a^2)^2 \cdot a$

$= (9a^4b^2 + 18a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6)$
$/ 9a^5$

$= b^2/a + 2b^3/a^2 + 5b^4/3a^3 + 2b^5/3a^4$
$+ b^6/9a^5$

$2b^3/a^2 - b^3/3a^2 = 5b^3/3a^2$

$N - a^3 = B$ とすると

$a + B/3a^2 - B^2/9a^5 + 5B^3/81a^8$

$\underline{b} = (3a^2b+3ab^2+b^3)/3a^2$ とすると

$a + \underline{b} - \underline{b}^2/a + 5\underline{b}^3/3a^2$

No.

Date

21

平方根でためした方法を立方根でもためしてみました。

$(a+b)^3-a^3=3a^2b+3ab^2+b^3$

$(3a^2b+3ab^2+b^3)/3a^2$ とすることで

bに近い

$b+b^2/a+b^3/3a^2$

を求めることができます。

$$
\begin{array}{l}
b+b^2/a+b^3/3a^2 \\
-\left(b^2/a+2b^3/a^2+5b^4/3a^3+\right. \\
+\qquad 5b^3/3a^2\quad+ \\
\hline
b+0+0+
\end{array}
$$

C 1

$\sqrt{2}$ の近似分数の表を使って

$\sqrt{2}$ の近似分数の表の作成

$$A>\frac{A+B}{2}>\sqrt{A\cdot B}>\frac{2\cdot A\cdot B}{A+B}>B$$

の関係式を利用した反復法

$2=2\times1$　$A_1=2$　$B_1=1$ とする。

$\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$　　$\frac{4}{3}$

$\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}$　　$\frac{24}{17}$

$\frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2}=\frac{577}{408}$　　$\frac{816}{577}$

$\frac{\frac{577}{408}+\frac{816}{577}}{2}=\frac{665857}{470832}$　　$\frac{941664}{665857}$

2

$\sqrt{2}$ の近似分数の表（その1）

$3/2$　　$4/3$

$17/12$　　$24/17$

$577/408$　　$816/577$

$665857/470832$　　$941664/665857$

分子をMとし分母をNとして

$M^2+A=2\cdot N^2$ として評価すると

$3^2+A=2\cdot2^2$　　$4^2+A=2\cdot3^2$

$17^2+A=2\cdot12^2$　　$24^2+A=2\cdot17^2$

$577^2+A=2\cdot408^2$　　$816^2+A=2\cdot577^2$

$665857^2+A=2\cdot470832$　　$941664^2+A=2\cdot665857^2$

$A=-1$　　$A=2$

3

$\sqrt{2}$ の近似分数の表（その1）を使った実験

$A=-1$　$A=2$ の分子．分母を横に加えてみる。

$3+4=7$

$2+3=5$　　$7/5$

$17+24=41$

$12+17=29$　　$41/29$

$577+816=1393$

$408+577=985$　　$1393/985$

$665857+941664=1607521$

$470832+665857=1073689$

$7^2+A=2\cdot5^2$　　$1607521/1073689$

$41^2+A=2\cdot29^2$

$1393^2+A=2\cdot985^2$

$1607521^2+A=2\cdot1073689^2$　　$A=1$

No. Date

4

$\sqrt{2}$ の近似分数の表（その2）

$4/3 \quad 3/2 \quad 7/5$

$24/17 \quad 17/12 \quad 41/29$

$816/577 \quad 577/408 \quad 1393/985$

$941664/665857 \quad 665857/470832 \quad 1607521/1073689$

$A=2 \quad A=-1 \quad A=1$

5

ユークリッド互除法を利用した連分数

$577/408$ の数値を利用して

$577 = 408 + 169$

$408 = 169 \times 2 + 70$

$169 = 70 \times 2 + 29$

$70 = 29 \times 2 + 12$

$29 = 12 \times 2 + 5$

$12 = 5 \times 2 + 2$

$5 = 2 \times 2 + 1$

$$\frac{577}{408} = 1 + \frac{169}{408}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{408}{169}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{70}{169}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{169}{70}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{29}{70}}}$$

$$\frac{577}{408} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2}$$

6

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{2}{5} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

$$1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{5}{12} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

$$1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{12}{29} = 1 + \frac{29}{70} = \frac{99}{70}$$

$$1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{29}{70} = 1 + \frac{70}{169} = \frac{239}{169}$$

$$1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{70}{169} = 1 + \frac{169}{408} = \frac{577}{408}$$

$3/2 \quad 7/5$

$17/12 \quad 41/29$

$99/70 \quad 239/169$

$577/408$

$A=-1 \quad A=1$

7

$\sqrt{2}$ の近似分数の表（その3）

$4/3 \quad 3/2 \quad 7/5$

$24/17 \quad 17/12 \quad 41/29$

$140/99 \quad 99/70 \quad 239/169$

$816/577 \quad 577/408 \quad 1393/985$

$A=2 \quad A=-1 \quad A=1$

√2 の近似分数の表(その3)の分子・分母のたての関係を調べてみる。

分子について

$A=2 \quad 140\times 6-24=816$

$A=-1 \quad 99\times 6-17=577$

$A=1 \quad 239\times 6-41=1393$

分母について

$A=2 \quad 99\times 6-17=577$

$A=-1 \quad 70\times 6-12=408$

$A=1 \quad 169\times 6-29=985$

分子・分母のたての規則性は

$a_{n+2}=6\cdot a_{n+1}-a_n$

$a_{n+2}=K\cdot a_{n+1}-a_n$

$\sqrt{2}$ の場合 $K=6$

と表わすこととする。

$\sqrt{2}$ の近似分数の表(その4)

0/1	1/0	1/1
4/3	3/2	7/5
24/17	17/12	41/29
140/99	99/70	239/169
816/577	577/408	1393/985
4756/3363	3363/2378	8119/5741
27720/19601	19601/13860	47321/33461
161564/114243	114243/80782	275807/195025
941664/665857	665857/470832	1607521/1136689
A=2	A=−1	A=1

$\sqrt{2}$ の近似分数の表(その2) $A=-1$ の数値を使った実験

$$\frac{3}{2}-\frac{17}{12}=\frac{1}{12}=\frac{1}{2\times 3\times 2}$$

$$\frac{17}{12}-\frac{577}{408}=\frac{1}{408}=\frac{1}{2\times 17\times 12}$$

$$\frac{577}{408}-\frac{665857}{470832}=\frac{1}{470832}=\frac{1}{2\times 577\times 408}$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3\times 2}=\frac{17}{12}$$

$$\frac{17}{12}-\frac{1}{2\times 17\times 12}=\frac{577}{408}$$

$$\frac{577}{408}-\frac{1}{2\times 577\times 408}=\frac{665857}{470832}$$

$\sqrt{2}$ の近似分数の表(その2) $A=1$ の数値を使った実験

$$\frac{7}{5}+\frac{1}{2\times 7\times 5}=\frac{7}{5}+\frac{1}{70}=\frac{99}{70}$$

$$\frac{41}{29}+\frac{1}{2\times 41\times 29}=\frac{41}{29}+\frac{1}{2378}=\frac{3363}{2378}$$

$$\frac{1393}{985}+\frac{1}{2\times 1393\times 985}=\frac{1393}{985}+\frac{1}{2744210}=\frac{3880899}{2744210}$$

No.

Date

$\sqrt{2}$ の近似分数の表（その4）で場所をさがす。

n			
1	1/1		
2	3/2	→ 17/12	(2 → 4)
3	7/5	→ 99/70	(3 → 6)
4	17/12	→ 577/408	(4 → 8)
5	41/29	3363/2378	(5 → 10)
6	99/70		
7	239/169		
8	577/408	→ 665857/470832	(8 → 16)
9	1393/985	→ 3880899/2744210	(9 → 18)
10	3363/2378		
11	8119/5741		
12	19601/13860		
13	47321/33461		

実験の結果

平方根の近似分数 M/N について

$M^2 + A = B \cdot N^2$ であれば

$\sqrt{B} \fallingdotseq \frac{M}{N} + \frac{A}{2 \cdot M N}$ とすることができる。

これを使って

$M^2 + A = B \cdot N^2$

$B = \frac{M^2 + A}{N^2}$

$\sqrt{B} = \frac{\sqrt{M^2 + A}}{N}$

$\sqrt{M^2 + A} \fallingdotseq M + \frac{A}{2M}$ とすると、

$\sqrt{B} \fallingdotseq \frac{M}{N} + \frac{A}{2 \cdot M \cdot N}$

これにより、

$\sqrt{M^2 + A} \fallingdotseq M + \frac{A}{2M}$ をたしかめることができる。

$\sqrt{2}$ の近似分数の表（その4）を利用した

実験と観察

右上の部分の観察

	M	N
1/1	/	/
7/5	6 + 1	6 − 1
41/29	6×(6+1)−1	6×(6−1)−1

M	N
/	/
k + 1	k − 1
k(k+1)−1	k(k−1)−1

kを変化させるとどうなるのか。

$K = 5$

M	N
1	1
6	4
29	19
139	91
666	436
3191	2089
15289	10009
73254	47956

$\left(\frac{73254}{47956}\right)^2$

$= 2.3333332$

$\fallingdotseq 7/3$

$K = 4$

M	N
1	1
5	3
19	11
71	41
265	153
989	571
3691	2131
13775	7953
51409	29681

$\left(\frac{51409}{29681}\right)^2$

$= 2.9999999$

$\fallingdotseq 3$

No.

Date

K = 3

M	N
1	1
4	2
11	5
29	13
76	34
199	89
521	233
1364	610
3571	1597
9349	4189

$\left(\frac{9349}{4189}\right)^2$

$= 4.9999996$

$\fallingdotseq 5$

K = 2

M	N
1	1
3	1
5	1
7	1
9	1
11	1

奇数 数列

K = 7

M	N
1	1
8	6
55	41
377	281
2584	1926
17711	13201

$\left(\frac{17711}{13201}\right)^2$

$= 1.7999997$

$\fallingdotseq 9/5$

K = 8

M	N
1	1
9	7
71	55
559	433
4401	3409
34649	26839

$\left(\frac{34649}{26839}\right)^2$

$= 1.6666665$

$\fallingdotseq 5/3$

K = 9

M	N
1	1
10	8
89	71
791	631
7030	5608
62479	49841

$\left(\frac{62479}{49841}\right)^2$

$= 1.5714289$

$\fallingdotseq 11/7$

実験の結果

$(M/N)^2 = X$ とする

K	X	k+2 / k-2
2	—	—
3	5	5 / 1
4	3	6 / 2
5	7/3	7 / 3
6	2	8 / 4
7	9/5	9 / 5
8	5/3	10 / 6
9	11/7	11 / 7

$X = \frac{K+2}{K-2}$ の変形

$$X(K-2) = K+2$$
$$XK - 2X = K+2$$
$$XK - K = 2X + 2$$
$$K(X-1) = 2X + 2$$
$$K = \frac{2X+2}{X-1}$$
$$K = \frac{2(X-1)+2+2}{X-1}$$
$$K = \frac{2(X-1)+4}{X-1}$$
$$K = 2 + \frac{4}{X-1}$$

$M^2 + A = B \cdot N^2$ による評価

$K=6$	$B=2$	$A=1$
$K=5$	$B=7/3$	$A=4/3$
$K=4$	$B=3$	$A=2$
$K=3$	$B=5$	$A=4$

$K=4$ $B=3$

$265^2 + A = 3 \cdot 153^2$ $A=2$

$3691^2 + A = 3 \cdot 2131^2$ $A=2$

$K=3$ $B=5$

$521^2 + A = 5 \cdot 233^2$ $A=4$

$3571^2 + A = 5 \cdot 1597^2$ $A=4$

$A = B - 1$ と予想できる。

Aを小さくするためには、Bを1に近づける必要がある。

$\sqrt{7}$ について (その1)

$X = 7/9$ とし、あとで分子を3倍する。

$$K = 2 + \frac{4}{7/9 - 1} = 2 + \frac{36}{-2} = 2 - 18 = -16$$

M	N	3M	N
1	1	3	1
−15	−17	−45	−17
239	271	717	271
−3809	−4319	−11427	−4319
60705	68833	182115	68833

$239^2 + A = 7/9 \times 271^2$ $A = -0.223 \fallingdotseq -2/9$

$(60705/68833)^2 = 0.7777777 \fallingdotseq -7/9$

$717^2 + A = 7 \times 271^2$ $A = -2$

$(182115/68833)^2 = 6.9999999 \fallingdotseq 7$

$\sqrt{7}$ について (その2)

$8^2 - 1 = 7 \times 3^2$ より

$X = \frac{7 \times 3^2}{8^2} = \frac{63}{64}$ とする

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{63}{64} - 1} = 2 + \frac{256}{-1} = -254$$

$$\sqrt{7} \fallingdotseq \frac{(-254+1)\times 8}{(-254-1)\times 3} = \frac{2024}{765}$$

$2024^2 + A = 7 \times 765^2$ $A = -1$

$$X = \frac{7 \times 765^2}{2024^2} = \frac{4096575}{4096576}$$

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{4096575}{4096576} - 1} = 2 + \frac{16386304}{-1}$$
$$= -16386302$$

$$\sqrt{7} \fallingdotseq \frac{(-16386302+1)\times 2024}{(-16386302-1)\times 765}$$
$$= \frac{33165873224}{12535521795}$$

No.

Date

8ケタ電卓で8ケタをこえる計算となるので

$$1638\ 6301 \times 2024$$

$$1638\ 6303 \times 765$$

$$\begin{array}{r} 3315\ 312\ 0000 \\ +\quad 1\ 275\ 3224 \\ \hline 3316\ 587\ 3224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1253\ 0700\ 0000 \\ +\quad 482\ 1795 \\ \hline 1253\ 552\ 1795 \end{array}$$

$\sqrt{7} \fallingdotseq \dfrac{33165873224}{12535521795}$ の誤差は

P.13参照

$A = -1$ より

$$\frac{1}{2 \times 3.316 \times 10^{10} \times 1.253 \times 10^{10}}$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{8.309 \times 10^{20}} \fallingdotseq 1.203 \times 10^{-21}$$

約 1.203×10^{-21} だけ大きくなる。

$\sqrt{2}$ について

$3^2 - 1 = 2 \times 2^2$ より

$X = \dfrac{2 \times 2^2}{3^2} = \dfrac{8}{9}$ とする

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{8}{9} - 1} = 2 + \frac{36}{-1} = -34$$

$$\sqrt{2} \fallingdotseq \frac{(-34+1) \times 3}{(-34-1) \times 2} = \frac{99}{70}$$

$$X = \frac{2 \times 70^2}{99^2} = \frac{9800}{9801}$$

$$K = 2 + \frac{1}{\frac{9800}{9801} - 1} = 2 + \frac{39204}{-1}$$

$$= -39202$$

$$\sqrt{2} \fallingdotseq \frac{(-39202+1) \times 99}{(-39202-1) \times 70} = \frac{3880899}{2744210}$$

P.12の表より

$3/2 \to n=2 \quad 99/70 \to n=6 \quad \dfrac{3880899}{2744210} \to n=18$

$\sqrt{X} \fallingdotseq \dfrac{k+1}{k-1}$ に

$k = 2 + \dfrac{4}{x-1}$ を代入すると

$$\sqrt{X} \fallingdotseq \frac{2 + \frac{4}{x-1} + 1}{2 + \frac{4}{x-1} - 1}$$

$$= \frac{3 + \frac{4}{x-1}}{1 + \frac{4}{x-1}}$$

$$= \frac{3(x-1)+4}{(x-1)+4} = \frac{3x+1}{x+3}$$

$\sqrt{X} \fallingdotseq \dfrac{3x+1}{x+3}$ 　$x=1$ の時に等号は成立する。

これは $X=1$ の近くにおいて成立する近似関数と見ることができる。

$X^{\frac{1}{N}}$ の場合は?

$\dfrac{A\,x + B}{B\,x + A}$ として実験をした結果

$X^{\frac{1}{N}}$ の 1 近くの近似式は

$$\frac{(N+1)X + (N-1)}{(N-1)X + (N+1)}$$

$\sqrt[2.3]{1.05}$ は

$$\frac{(2.3+1) \times 1.05 + (2.3-1)}{(2.3-1) \times 1.05 + (2.3+1)}$$

$$\frac{4.765}{4.665} = 1.0214362$$

真数は 1.021439712

1

立方根の求め方について

ニュートン・ラフソン法について

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}$$

$$f(x) = x^3 - a$$

$$a_{k+1} = a_k - \frac{a_k^3 - a}{3a_k^2} = \frac{2a_k^3 + a}{3a_k^2}$$

CA　a_1　M+

[× × = = × 2 + a
÷3 ÷MR ÷MR =
CM M+]

$$\frac{2a_k^3 + a}{3a_k^2} = \frac{2}{3}a_k + \frac{a}{3a_k^2}$$

とすることができるが、メモリーが2ついる。

2

ヘロン式 ニュートン反復法について

CA
N + 2 ÷ 3 M+

[N ÷ RM ÷ RM ÷ 2 M+
RM × 2 ÷ 3 =
CM M+]

$$a_0 = N \times 1 \times 1 = N$$

$$a_1 = \frac{N+2}{3}$$

$$a_2 = \left\{ \frac{N+2}{3} + \frac{N \cdot 3^2}{2 \cdot (N+2)^2} \right\} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{N+2}{3} + \frac{N \cdot 3^2}{3 \cdot (N+2)^2}$$

$$= \frac{2}{3}a_1 + \frac{N}{3 \cdot a_1^2}$$

ニュートン・ラフソン法の
$\frac{2}{3}a_k + \frac{a}{3a_k^2}$ と一致する。

3

この方法の原理は平均である。

N = N × 1 × 1 より出発し

$a_1 = \frac{N+2}{3}$ とする。

次に $b_1 = \frac{N}{a_1^2}$ として求め、

$N = a_1 \times a_1 \times b_1$ とし、

$a_2 = \frac{a_1 + a_1 + b_1}{3}$ とする。

実際は、
メモリーが 1 つで
メモリーには a_1 が
表示には b_1 なので
b_1 を $\frac{1}{2}$ 倍し、a_1 に加え、
全体を2倍してから、3で割るという
操作を必要とする。

4

[a_2 を作る場合に、a_1 と b_1 の比重を変えた場合の収束の速さのちがいの実験]

CA
N + 2 ÷ 3 M+

[N ÷ RM ÷ RM
÷ M M+ RM × M ÷ (M+1) =
CM M+]

Mを変化させてみました。

N = 10
M = 1

①	4	⑥	2.162842
②	2.3125	⑦	2.1502799
③	2.091239	⑧	2.1565241
④	2.1889259	⑨	2.1533929
⑤	2.138	⑩	2.1549563

No.

Date

⑪ 2.154174 ⑮ 2.1544184

⑫ 2.154565 ⑯ 2.1544428

⑬ 2.1543695 ⑰ 2.1544308

⑭ 2.1544672 ⑱ 2.1544367

⑲ $2.1544336^3 = 9.9999847$

⑳ $2.1544352^3 = 10.000007$

㉑ $2.1544344^3 = 9.9999957$

㉒ $2.1544348^3 = 10.000001$

㉓ $2.1544346^3 = 9.9999986$

㉔ $2.1544347^3 = 9.9999999$

㉕ $2.1544346^3 = 9.9999986$

$(10+2) \div 3 = 4$ ですから

[　　] を 22 回 くり返すことで

$\sqrt[3]{10} \fallingdotseq 2.1544346$

を求めることができました。

M＝2 の場合 とくらべてみます。

N＝10　M＝2

① 4

② 2.875

③ 2.3199432

④ 2.1659615

⑤ 2.1544958

⑥ 2.1544346

⑦ 2.1544346

[　　] を 5 回 くり返すことで

$\sqrt[3]{10} \fallingdotseq 2.1544346$

を求めることができました。

Mをもっと変化させるために

ポケットコンピューターで BASICプログラムを

作りました。

```
10  CLEAR
20  PRINT "CUR N"
30  INPUT N
40  INPUT M
50  T = 0
60  P = (N+2) / 3
70  Q = N / (P^2)/M
80  R = (P+Q)*M / (M+1)
90  T = T + 1
100 IF ABS (P-R) < 10^(-10)
    GOTO 120
110 P=R : GOTO 70
```



```
120 PRINT T
130 GOTO 10
```

日本語に訳すと、

10 すべての変数を解除する。

20 CUR N を表示する。(CURは立方根)

30 N を 入力 する。

40 M を 入力 する。

50 T を 0 とする。

60 $(N+2) \div 3$ を P とする。

70 $N \div (P^2 \cdot M)$ を Q とする。

80 $(P+Q) \times M \div (M+1)$ を R とする。

90 T に 1 を加えて、新たな T とする。

100 もし次の条件を満足させるのなら、120へ行きなさい。(P－R)の絶対値が $10^{-10} = 0.0000000001$ より小さい場合。

No

Date

9

110　Pの値をRにおきかえる。
　　70へ行く。
120　Tを表示する。
130　10へ行く。

100番の条件を満足するまで
　Tの数を1つづつふやしながら
　70—110を何度でもくり返します。
これが、コンピューターのすごさであるし、
またプログラミングのおもしろさでもあります。

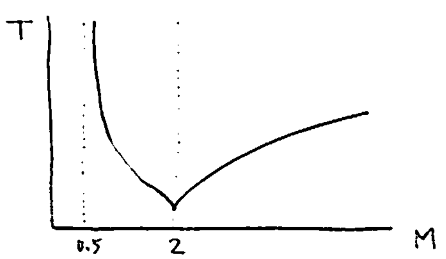
10

N=10としたときのデーター

M	T	M	T
0.58	214	2	7
0.59	190	2.05	9
0.6	170	2.1	10
0.7	84	2.25	12
0.8	52	2.5	15
0.9	41	3	20
1	33	3.5	24
1.5	15	4	29
1.75	12	4.5	33
1.9	10	5	36
1.95	9	5.5	40
2	7	6	44
		6.5	48
		7	52

11

グラフ用紙を使って表にしました。
このようになりました。

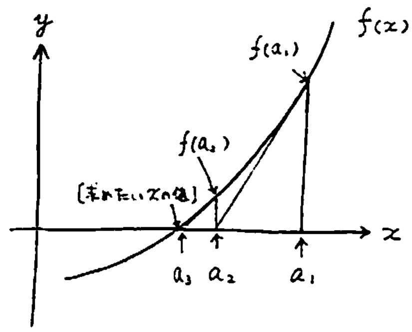


2の時にTの値が一番小さくなり、
0.5に近づくにつれTの値が急増します。

$\sqrt[3]{N}$ を求める方法として
$M=2$ とすることが最良で
あることがわかりました。

12

ニュートン・ラフソン法の原理



$f(x)$ と x 軸との交点を求めたい。
初期値 a_1 を決める。
$f(a_1)$ の接線を求め x 軸との交点を
a_2 とする。
$f(a_2)$ の接線を求め x 軸との交点を
a_3 とする。
以下これをくり返すことで a_k は $f(x)$ と x 軸の交点に近づく。接線を求めるには微分を使います。

No.
Date

13

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}$$

$$f(x) = x^3 - a$$

$$a_{k+1} = a_k - \frac{a_k^3 - a}{3a_k^2}$$

の説明

a_1 を a_2 にするためには，

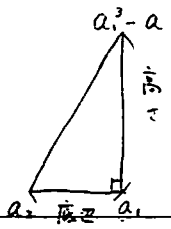
a_1 の時の $f(x) = x^3 - a$ の値を求める．

$f(x) = x^3 - a$ の a_1 の時の傾きは

微分を使い

$f'(x) = 3x^2$ より

$3a_1^2$ として求めることができる。



$$傾き = \frac{高さ}{底辺}$$

$$3a_1^2 = \frac{a_1^3 - a}{a_1 - a_2}$$

14

$$3a_1^2 = \frac{a_1^3 - a}{a_1 - a_2}$$

$$a_1 - a_2 = \frac{a_1^3 - a}{3a_1^2}$$

$$-a_2 = -a_1 + \frac{a_1^3 - a}{3a_1^2}$$

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1^3 - a}{3a_1^2}$$

a_k を使って表わすと

$$a_{k+1} = a_k - \frac{a_k^3 - a}{3a_k^2}$$

$$= \frac{2a_k^3 + a}{3a_k^2}$$

$$= \frac{2}{3}a_k + \frac{a}{3a_k^2}$$

15

初期値 a_1 の求め方

$\sqrt[3]{N}$ $(N > 0)$ について

$$a_1 = \frac{N+2}{3}$$

とするのがもっとも簡単ですが

もっとよい方法について考えてみます。

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 - a^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\frac{3a^2b + 3ab^2 + b^3}{3a^2} = b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2}$$

これを使って

$N = a^3 + b$ という形において，

$a_1 = a + \dfrac{b}{3a^2}$ とします。

16

$\sqrt[3]{10}$ の場合

$$10 = 2^3 + 2$$

$$a_1 = 2 + \frac{2}{3 \cdot 2^2} = 2 + \frac{1}{6} = 2.1666\cdots$$

$\sqrt[3]{13}$ の場合

$$13 = 2^3 + 5$$

$$a_1 = 2 + \frac{5}{3 \cdot 2^2} = 2 + \frac{5}{12} = 2.4166\cdots$$

となります。

区間 a，b において，

もっと良い a_1 の求め方は二宮市三さんの1970年にアメリカの専門雑誌に発表された「平方根をニュートン法で計算するときの初期値の最良の取り方に関する論文」の立方根への応用だと思います。

D　1

M乗数の数列の和を求める

［1からNまでの和（N=10　N=100）の数値を使って］

数値の作り方

$\sum_{k=1}^{N} k^M$ を求めるBASICプログラム

（CASIO FX-890P）

```
10  CLEAR
20  INPUT "N=";N
30  INPUT "M=";M
40  R=0
50  FOR I=1 TO N STEP 1
60  J=I^M
70  R=R+J
80  NEXT I
90  PRINT R
100 END
```

2

M=1の場合

N=10 は 55

N=100 は 5050

N=1000 は 500500

55	5050	500500
50+5	5000+50	500000+500
$\frac{1}{2}\times 100$	$\frac{1}{2}\times 10000$	$\frac{1}{2}\times 1000000$
$\frac{1}{2}\times 10$	$\frac{1}{2}\times 100$	$\frac{1}{2}\times 1000$
N=10	N=100	N=1000
$\frac{1}{2}N^2$	$\frac{1}{2}N^2$	$\frac{1}{2}N^2$
$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{2}N$

1からNまでの和は $\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{2}N$

3

M=2の場合

N=10 は 385

N=100 は 338350

N=1000 は 333833500

$1000=10^3$ だから 3ケタずつ区切りをつける。

333,833,500

$\frac{333}{1000}$ に近い分数を考える → $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r} 333\ 833\ 500 \\ -\ 333\ 333\ 333.333 \\ \hline 500\ 166.666 \end{array} \qquad \frac{1}{3}\times 1000^3$$

$\frac{500}{1000}$ を約分すると $\frac{1}{2}$　　$\frac{1}{2}\times 1000^2$

$$\begin{array}{r} 500\ 166.666 \\ -\ 500\ 000 \\ \hline 166.666 \end{array}$$

4

$$\frac{166\frac{2}{3}}{1000}=\frac{166\times 3+2}{3000}=\frac{498+2}{3000}=\frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{r} 166.666 \\ -\ 166.666 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \frac{1}{6}\times 1000$$

N=1000の場合

$\frac{1}{3}\times 1000^3+\frac{1}{2}\times 1000^2+\frac{1}{6}\times 1000$

1からNまでの和は

$\frac{1}{3}N^2+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{6}N$

No.

Date

M = 3 の場合

N = 10 は 3025

N = 100 は 25502500

$100 = 10^2$ だから 2ケタずつ区切りをつける。

$$
\begin{array}{r}
25,50,25,00 \\
-\ 25\ 00\ 00\ 00 \\
\hline
50,25,00 \\
-\ 50\ 00\ 00 \\
\hline
25,00 \\
-\ 25\ 00 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} \times 100^4 \\
\frac{50}{100} = \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} \times 100^3 \\
\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} \times 100^2
\end{array}
$$

1からNまでの和は

$$\frac{1}{4}N^4 + \frac{1}{2}N^3 + \frac{1}{4}N^2$$

M = 4 の場合

N = 10 は 25333

N = 100 は 2050333330

$100 = 10^2$ だから2ケタずつ区切ると

$$
\begin{array}{r}
20,50,33,33,30 \\
-\ 20\ 00\ 00\ 00\ 00 \\
\hline
50,33,33,30 \\
-\ 50\ 00\ 00\ 00 \\
\hline
33,33,30 \\
-\ 33\ 33\ 33.333 \\
\hline
-\ 3.333 \\
3.333 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\frac{20}{100} = \frac{1}{5} \\
\frac{1}{5} \times 100^5 \\
\frac{50}{100} = \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} \times 100^4 \\
\frac{33\frac{1}{3}}{100} = \frac{99+1}{300} = \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} \times 100^3 \\
\frac{-3\frac{1}{3}}{100} = -\frac{1}{30} \\
-\frac{1}{30} \times 100
\end{array}
$$

1からNまでの和は

$$\frac{1}{5}N^5 + \frac{1}{2}N^4 + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{30}N$$

M = 5 の場合

N = 10 は 220825

N = 100 は $1.717083325 \times 10^{11}$

N = 1000 は $1.671670833 \times 10^{17}$

有効ケタ数 10ケタをこえると指数表示になります。

2,2,0,8,2,5

17,17,08,33,25,・・

167,167,08 33 ・・・・・・

これまでの結果を整理します。－たての規則性は?

M = 1 $\quad \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N$

M = 2 $\quad \frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N$

M = 3 $\quad \frac{1}{4}N^4 + \frac{1}{2}N^3 + \frac{1}{4}N^2$

M = 4 $\quad \frac{1}{5}N^5 + \frac{1}{2}N^4 + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{30}N$

最終項の係数を予想する方法

n^2 の例.

1^2 から 10^2 までの和の表を使って

n^2 (A)	和 (B)	順序 (C)	D
1	1	1	1
4	5	2	2
9	14	3	3
16	30	4	2
25	55	5	1
36	91	6	6
49	140	7	1
64	204	8	2
81	285	9	3
100	385	10	2

Dは Bが C の倍数になるための

もっとも 小さい数

Dについて

n　1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2
最小公倍数は〔2〕

n^2　1, 2, 3, 2, 1, 6, 1, 2, 3, 2
最小公倍数は〔6〕

n^3　1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2
〔2〕

n^4　1, 2, 3, 2, 5, 6, 1, 2, 3, 10
〔30〕

n^6　1, 2, 3, 2, 1, 6, 7, 2, 3, 2
〔42〕

n^2, n^4 n^6 の場合は使えます。

$n^2 \rightarrow 6 \rightarrow 1/6$

$n^4 \rightarrow 30 \rightarrow -1/30$

$n^6 \rightarrow 42 \rightarrow$

M=5 N=100 の数値を使って

$$
\begin{array}{rl}
\underline{17}\,\underline{17}\,\underline{08}\,\underline{33}\,\underline{25}\,\underline{\cdot\cdot} & \\
-\ 16\ 66\ 66\ 66\ 66\ 66.666 & 1/6 \\
\hline
\underline{50}\,\underline{41}\,\underline{66}\,\underline{5^{(8)}}\,\underline{\cdot\cdot} & \\
-\ 50\ 00\ 00\ 00\ 00 & 1/2 \\
\hline
\underline{41}\,\underline{66}\,\underline{5^{(8)}}\,\underline{\cdot\cdot} & \\
-\ 41\ 66\ 66\ 66.666 & 5/12 \\
\hline
\underline{\cdot^{-(8)}}\,\underline{\cdot\cdot} &
\end{array}
$$

$$\frac{41\frac{2}{3}}{100} = \frac{41\times3+2}{100} = \frac{125}{300} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{12} = 0.41666666$$

M=5 N=10 の数値を使って

$$
\begin{array}{r}
\underline{2}\,\underline{2}\,\underline{0}\,\underline{8}\,\underline{2}\,\underline{5} \\
-\ 166666.666 \\
\hline
\underline{5}\,\underline{4}\,\underline{1}\,\underline{5}\,\underline{8}.333 \\
-\ 50000 \\
\hline
4158.333 \\
-\ 4166.666 \\
\hline
-\ \underline{8}.333 \\
8.333 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$-\frac{8\frac{1}{3}}{100} = -\frac{25}{300} = -\frac{1}{12}$$

1からNまでの和は

$$\frac{1}{6}N^6 + \frac{1}{2}N^5 + \frac{5}{12}N^4 - \frac{1}{12}N^2$$

第3項の規則性は

$1/6 \rightarrow 1/4 \rightarrow 1/3 \rightarrow 5/12 \rightarrow$

$2/12 \rightarrow 3/12 \rightarrow 4/12 \rightarrow 5/12 \rightarrow$

〔1から10までの和の
素因数分解の数値を使って〕

M=1 の場合

(N)			
1	1		
2	3	3	3 = N+1
3	6	2・3	3 = N
4	10	2・5	5 = N+1
5	15	3・5	5 = N
6	21	3・7	7 = N+1

N ・ (N+1)

1 × 2 = 2

N=1 のとき 1 だから

$$\frac{1}{2}\cdot N\cdot(N+1)$$

No.

Date

13

M = 2 の場合

(N)				
1	1	1		
2	4	5	5	5 = 2N+1
3	9	14	2·7	7 = 2N+1
4	16	30	2·3·5	5 = N+1
5	25	55	5·11	5 = N 11 = 2N+1
6	36	91	7·13	7 = N+1 13 = 2N+1
7	49	140	2^2·5·7	7 = N
8	64	204	2^2·3·17	17 = 2N+1
9	81	285	3·5·19	19 = 2N+1
10	100	385	5·7·11	11 = N+1

N · (N+1) · (2N+1)

1 × 2 × 3 = 6

$$\frac{1}{6} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$$

14

M = 5 の場合

(N)			
1	1	1	
2	32	33	3·11
3	243	276	2^2·3·23
4	1024	1300	2^2·5^2·13
5	3125	4425	3·5^2·59
6	7776	12201	3·7^2·83
7	16807	29008	2^4·7^2·37
8	32768	61776	2^4·3^3·11·13
9	59049	120825	3^3·5^2·179
10	100000	220825	5^2·11^2·73

15

(N)		
1	1	
2	3·11	3 = N+1
3	2^2·3·23	3 = N 2^2 = 4 = N+1
4	2^2·5^2·13	5^2 = $(N+1)^2$
5	3·5^2·59	5^2 = N^2
6	3·7^2·83	7^2 = $(N+1)^2$
7	2^4·7^2·37	7^2 = N^2
8	2^4·3^3·11·13	
9	3^3·5^2·179	
10	5^2·11^2·73	11^2 = $(N+1)^2$

N^2 · $(N+1)^2$

の要素のあることがわかる。

16

N^2 · $(N+1)^2$

2　3·11　　2·2　　3·3
　3
　　2×2×3 = 12

3　2^2·3·23　　3·3　　4·4
　2^2·3　　3　　4
　　3×4 = 12

4　2^2·5^2·13　　4·4　　5·5
　2^2·5^2　　4　　5·5
　　12 ÷ 4 = 3

5　3·5^2·59　　5·5　　6·6
　3·5^2　　5·5　　3
　　2×6 = 12

6　3·7^2·83　　6·6　　7·7
　3·7^2　　3　　7·7
　　2×6 = 12

7　2^4·7^2·37　　7·7　　8·8
　2^4·7^2　　7·7　　8·2
　　12 ÷ 4 = 3

8　2^4·3^3·11·13　　8·8　　9·9
　2^4·3^3　　8 2　　9 3
　　4 × 3 = 12

9　3^3·5^2·179　　9·9　　10·10
　3^3·5^2　　9 3　　5 5
　　3 × 2 × 2 = 12

10　5^2·11^2·73　　10·10　　11·11
　5^2·11^2　　5 5　　11 11
　　2×2 = 4　　12 ÷ 9 = 3

No.

Date

No 17

2	11	11
3	23	23
4	13×3	39
5	59	59
6	83	83
7	37×3	111
8	11×13	143
9	179	179
10	73×3	219

$N=10$ 219 を得って

$(2N^2+2N-1)$ を予想する。

$N=2$ $2\times4+2\times2-1=8+4-1=11$

$\frac{1}{12}\cdot N^2\cdot(N+1)^2\cdot(2N^2+2N-1)$

No 18

$M=1$

$\frac{1}{2}\cdot N\cdot(N+1)$

$M=2$

$\frac{1}{6}\cdot N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)$

$M=3$

$\frac{1}{4}\cdot N^2\cdot(N+1)^2$

$M=4$

$M=5$

$\frac{1}{12}\cdot N^2\cdot(N+1)^2\,(2N^2+2N-1)$

$M=6$

M乗数の数列の和を求める
階差0項数列を使って

階差を使って

① 階差とは

M=1 の場合

0 1 3 6 10 15 21
(0) 1 2 3 4 5 6
(1) 1 1 1 1 1
(0) 0 0 0 0

M=2 の場合

0 1 5 14 30 55 91
(0) 1 4 9 16 25 36
(1) 3 5 7 9 11
(2) 2 2 2 2
(0) 0 0 0

M=3 の場合

0 1 9 36 100 225 441
(0) 1 8 27 64 125 216
(1) 7 19 37 61 91
(6) 12 18 24 30
(6) 6 6 6
(0) 0 0

一番左の数字の列を階差0項数列という

N, N^2, N^3 の和の場合

( )の数字は N, N^2, N^3 の場合

② 階差0項数列の規則性

1 　 N

1 1 　 ΣN
(×1) (×2)
1 2 　 N^2

1 3 2 　 ΣN^2
(×1) (×2) (×3)
1 6 6 　 N^3

1 7 12 6 　 ΣN^3
(×1) (×2) (×3) (×4)
1 14 36 24 　 N^4

1 15 50 60 24 　 ΣN^4
(×1) (×2) (×3) (×4) (×5)
1 30 150 240 120 　 N^5

1 31 180 390 360 120 　 ΣN^5
(×1) (×2) (×3) (×4) (×5) (×6)
1 62 540 1560 1800 720 　 N^6

③ 階差0項数列の変化の規則性は

N	0 1 0
$2N$	0 2 0
$3N$	0 3 0
N^2	0 1 2 0
N^2+N	0 2 2 0
N^2+2N	0 3 2 0
N^2+3N	0 4 2 0
$2N^2$	0 2 4 0
$2N^2+N$	0 3 4 0
$2N^2+2N$	0 4 4 0
N^3	0 1 6 6 0
$N+1$	1 1 0
N^2+1	1 1 2 0
N^3+1	1 1 6 6 0

④ 階差0項数列の使い方

$M=2$ の場合

$$
\begin{array}{l|rrrr}
 & 0 & 1 & 3 & 2 \\
N^3(1,6,6)\times\frac{1}{3} & - & \frac{1}{3} & 2 & 2 \\
\hline
 & & \frac{2}{3} & 1 & \\
N^2(1,2)\times\frac{1}{2} & - & \frac{1}{2} & 1 & \\
\hline
 & & \frac{1}{6} & & \\
N(1)\times\frac{1}{6} & - & \frac{1}{6} & & \\
\hline
 & & 0 & &
\end{array}
$$

N^2 の和は $\frac{1}{3}N^3+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{6}N$

右から数をとりつくす。

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 3 & 2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{定数} & N & N^2 & N^3
\end{array}
$$
に対応

$M=3$ の場合

$$
\begin{array}{l|rrrrr}
 & 0 & 1 & 7 & 12 & 6 \\
N^4(1,14,36,24)\times\frac{1}{4} & - & \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 9 & 6 \\
\hline
 & & \frac{3}{4} & \frac{7}{2} & 3 & \\
N^3(1,6,6)\times\frac{1}{2} & - & \frac{1}{2} & 3 & 3 & \\
\hline
 & & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & \\
N^2(1,2)\times\frac{1}{4} & - & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

N^3 の和は $\frac{1}{4}N^4+\frac{1}{2}N^3+\frac{1}{4}N^2$

$M=4$ の場合

$$
\begin{array}{l|rrrrrr}
 & 0 & 1 & 15 & 50 & 60 & 24 \\
N^5(1,30,150,240,120)\times\frac{1}{5} & - & \frac{1}{5} & 6 & 30 & 48 & 24 \\
\hline
 & & \frac{4}{5} & 9 & 20 & 12 & \\
N^4(1,14,36,24)\times\frac{1}{2} & - & \frac{1}{2} & 7 & 18 & 12 & \\
\hline
 & & \frac{3}{10} & 2 & 2 & & \\
N^3(1,6,6)\times\frac{1}{3} & - & \frac{1}{3} & 2 & 2 & & \\
\hline
 & & -\frac{1}{30} & & & & \\
N(1)\times(-\frac{1}{30}) & & \frac{1}{30} & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

$\frac{1}{5}N^5+\frac{1}{2}N^4+\frac{1}{3}N^3-\frac{1}{30}N$

$M=5$ の場合

$$
\begin{array}{l|rrrrrrr}
 & 0. & 1. & 31 & 180 & 390 & 360 & 120 \\
N^6(1,62,540,1560,1800,720)\times\frac{1}{6} & - & \frac{1}{6} & \frac{31}{3} & 90 & 260 & 300 & 120 \\
\hline
 & & \frac{5}{6} & \frac{62}{3} & 90 & 130 & 60 & \\
N^5(1,30,150,240,120)\times\frac{1}{2} & - & \frac{1}{2} & 15 & 75 & 120 & 60 & \\
\hline
 & & \frac{1}{3} & \frac{17}{3} & 15 & 10 & & \\
N^4(1,14,36,24)\times\frac{5}{12} & - & \frac{5}{12} & \frac{35}{6} & 15 & 10 & & \\
\hline
 & & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & & & & \\
N^2(1,2)\times(-\frac{1}{12}) & & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & & & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

$\frac{1}{6}N^6+\frac{1}{2}N^5+\frac{5}{12}N^4-\frac{1}{12}N^2$

多項式の和の形による

数列の分析の例

階差数列の一般式について

K^M の階差数列

M=1 の場合

```
0   1   2   3   4   5        M-1-0
  1   1   1   1   1          M-1-1
    0   0   0   0
```

M-1-0

N

M-1-1

1

M=2 の場合

```
0   1   4   9   16   25      M-2-0
  1   3   5   7   9          M-2-1
    2   2   2   2            M-2-2
      0   0   0
```

M-2-0

N^2

M-2-1

$2N+1$

M-2-2

2

M=3 の場合

```
0   1   8   27   64   125    M-3-0
  1   7   19   37   61       M-3-1
    6   12   18   24         M-3-2
      6    6    6            M-3-3
        0    0
```

M-3-0

N^3

M-3-1

$3N^2+3N+1$

M-3-2

$6N+6$

M-3-3

6

M = 4 の場合

0	1	16	81	256	625	1296	M-4-0
1	15	65	175	369	671		M-4-1
14	50	110	194	302			M-4-2
36	60	84	108				M-4-3
24	24	24					M-4-4
0	0						

M-4-0

N^4

M-4-1

$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$

M-4-2

$12N^2 + 24N + 14$

M-4-3

$24N + 36$

M-4-4

24

M-1-0	N
M-1-1	1
M-2-0	N^2
M-2-1	$2N + 1$
M-2-2	2
M-3-0	N^3
M-3-1	$3N^2 + 3N + 1$
M-3-2	$6N + 6$
M-3-3	6
M-4-0	N^4
M-4-1	$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$
M-4-2	$12N^2 + 24N + 14$
M-4-3	$24N + 36$
M-4-4	24

M-5-0	N^5
M-5-1	$5N^4 + 10N^3 + 10N^2 + 5N + 1$
M-5-2	$20N^3 + 60N^2 + 70N + 30$
M-5-3	$60N^2 + 180N + 150$
M-5-4	$120N + 240$
M-5-5	120
M-6-0	N^6
M-6-1	$6N^5 + 15N^4 + 20N^3 + 15N^2 + 6N + 1$
M-6-2	$30N^4 + 120N^3 + 210N^2 + 180N + 62$
M-6-3	$120N^3 + 540N^2 + 900N + 540$
M-6-4	$360N^2 + 1440N + 1560$
M-6-5	$720N + 1800$
M-6-6	720

階差数列の一般式の規則性

M=4の場合

M-4-0	N^4
M-4-1	$4N^3+6N^2+4N+1$
M-4-2	$12N^2+24N+14$
M-4-3	$24N+36$
M-4-4	24

第1項 M-4-1 は

N^4 $(N+1)^4=N^4+4N^3+6N^2+4N+1$

$4N^3$ $(N+1)^4-N^4=4N^3+6N^2+4N+1$

$12N^2$

$24N$

24

微分をくり返す

4 6 4 1

4×1 6×1 4×1 1×1

6×2 4×6 1×14

4×6 1×36

1×24

1 1 1 1

2 6 14

6 36

24

1 k

2 - 1 k^2

6 - 6 - 1 k^3

24 - 36 - 14 - 1 k^4

の階差0項数列

M=5

5 10 10 5 1

5×1 10×1 10×1 5×1 1×1

10×2 10×6 5×14 1×30

10×6 5×36 1×150

5×24 1×240

1×120

1 k

2 - 1 k^2

6 - 6 - 1 k^3

24 - 36 - 14 - 1 k^4

120 - 240 - 150 - 30 - 1 k^5

の階差0項数列

M=6

6 15 20 15 6 1

6×1 15×1 20×1 15×1 6×1 1×1

15×2 20×6 15×14 6×30 1×62

20×6 15×36 6×150 1×540

15×24 6×240 1×1560

6×120 1×1800

1×720

1

2 - 1

6 - 6 - 1

24 - 36 - 14 - 1

120 - 240 - 150 - 30 - 1

720 - 1800 - 1560 - 540 - 62 - 1

M=7 の場合

1 $\qquad k$

1 1

(×1) (×2)

1 2 $\qquad k^2$

1 3 2

(×1) (×2) (×3)

1 6 6 $\qquad k^3$

1 7 12 6

(×1) (×2) (×3) (×4)

1 14 36 24 $\qquad k^4$

1 15 50 60 24

(×1) (×2) (×3) (×4) (×5)

1 30 150 240 120 $\qquad k^5$

1 31 180 390 360 120

(×1) (×2) (×3) (×4) (×5) (×6)

1 62 540 1560 1800 720 $\qquad k^6$

1 63 602 2100 3360 2520 720

(×1) (×2) (×3) (×4) (×5) (×6) (×7)

1 126 1806 8400 16800 15120 5040 $\qquad k^7$

$$(N+1)^7 = N^7 + 7N^6 + 21N^5 + 35N^4 + 35N^3 + 21N^2 + 7N + 1$$

1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5
1 6 15 20 15 6 1	6
1 7 21 35 35 21 7 1	7

$$(N+1)^7 - N^7$$

$$= 7N^6 + 21N^5 + 35N^4 + 35N^3 + 21N^2 + 7N + 1$$

7. 21. 35 35 21 7. 1

(×7) (×21) (×35) (×35) (×21) (×7) (×1)

1 1 1 1 1 1 1

2 6 14 30 62 126

6 36 150 540 1806

24 240 1560 8400

120 1800 16800

720 15120

5040

N^7 $\qquad$ M-7-0

$7N^6 + 21N^5 + 35N^4 + 35N^3 + 21N^2 + 7N + 1$ $\qquad$ M-7-1

$42N^5 + 210N^4 + 490N^3 + 630N^2 + 434N + 126$ $\qquad$ M-7-2

$210N^4 + 1260N^3 + 3150N^2 + 3780N + 1806$ $\qquad$ M-7-3

$840N^3 + 5040N^2 + 10920N + 8400$ $\qquad$ M-7-4

$2520N^2 + 12600N + 16800$ $\qquad$ M-7-5

$5040N + 15120$ $\qquad$ M-7-6

5040 $\qquad$ M-7-7

階差数列の一般式の使い方と規則性

$2N^2 + 3N + 4$ の場合

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

4 9 18 31 48 69 94 123 156 193

5 9 13 17 21 25 29 33 37

4 4 4 4 4 4 4 4

$2N^2 + 3N + 4$

$4N + 5$

4

$2 + 3 = 5$

$3N^3 + 4N^2 + 5N + 6$

0 1 2 3 1 5 6

6 18 56 138 282 506 828

12 38 82 144 224 322

26 44 62 80 98

18 18 18 18

$3N^3 + 4N^2 + 5N + 6$

$9N^2 + 17N + 12$

$18N + 26$

18

$3 + 4 + 5 = 12$

$9 + 17 = 26$

$3 \times 3 + 4 \times 2 = 17$

$6N^4 + 5N^3 + 4N^2 + 3N + 2$

$24N^3 + 36N^2 + 24N + 6$ M-4-1 ×6

$15N^2 + 15N + 5$ M-3-1 ×5

$8N + 4$ M-2-1 ×4

3 M-1-1 ×3

$24N^3 + 51N^2 + 47N + 18$

0 1 2 3 4

2 20 160 668 1934

18 140 508 1266

122 368 758

246 390

144

$72N^2 + 144N + 84$ M-4-2 ×6

$30N + 30$ M-3-2 ×5

8 M-2-2 ×4

$72N^2 + 174N + 122$

$6N^4 + 5N^3 + 4N^2 + 3N + 2$

$24N^3 + 51N^2 + 47N + 18$

$72N^2 + 174N + 122$

$144N + 246$

144

$6 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 2 = 47$

$24 \times 3 + 51 \times 2 = 174$

$51 - 5 \times 3 = 36$

$36 \div 6 = 6$

M = 8 の階差数列の一般式の表

$8N^7+28N^6+56N^5+70N^4+56N^3+28N^2+8N+1$

$56N^6+336N^5+980N^4+1680N^3+1736N^2+1008N+259$

$336N^5+2520N^4+8400N^3+15120N^2+14448N+5796$

$1680N^4+13440N^3+43680N^2+67200N+40824$

$6720N^3+50400N^2+134400N+126000$

$20160N^2+120960N+191520$

$40320N+141120$

40320

$8\times35+28\times20+56\times10+70\times4=1680$

$8\times21+28\times15+56\times10+70\times6+56\times3$
$=1736$

$8\times35+28\times15+56\times5=980$

1	1	1	1	1	1	1
						定数
	7	6	5	4	3	2
						N
		21	15	10	6	3
						N^2
			35	20	10	4
						N^3
				35	15	5
						N^4

パスカルの三角数

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
6 15 20 15 6 1
21 35 35 21 7 1
56 70 56 28 8
126 126 84 36 9
252 210 120 45
462 330 165
792 495
1287

要素の積の形による
数列の分析の例
台形数によって作られる
数列について

パスカルの三角数について

1 (0)
1 1 (0)
1 2 1 (0)
1 3 3 1 (0)
1 4 6 4 1 (0)
1 5 10 10 5 1 (0)
1 6 15 20 15 6 1 (0)
1 7 21 35 35 21 7 1

数字をななめにひろうと

1 1 1 1 1 1 1 1 … 1
1 2 3 4 5 6 7 … N
1 3 6 10 15 21 … $\frac{1}{2}N(N+1)$
1 4 10 20 35 … $\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)$
1 5 15 35 … $\frac{1}{24}N(N+1)(N+2)(N+3)$
1 6 21
1 7
1

$\frac{1}{2} = 1/(1\times 2)$
$\frac{1}{6} = 1/(1\times 2\times 3)$
$\frac{1}{24} = 1/(1\times 2\times 3\times 4)$

階差0項数列を使って

0.1.0 $\rightarrow$ $1\times(1)$ $\rightarrow$ N

0.1.1.0 $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\times(1.2) \rightarrow \frac{1}{2}N^2+\frac{1}{2}N$
$\frac{1}{2}\times(1)$

0.1.2.1.0 $\rightarrow$
0 1 2 1
$-\frac{1}{6}$ 1 1 　　$\frac{1}{6}(1.6.6)$
$\frac{5}{6}$ 1
$-\frac{1}{2}$ 1 　　$\frac{1}{2}(1.2)$
$\frac{2}{6}$ $(\frac{1}{3})$ 　　$\frac{1}{3}(1)$

$\frac{1}{6}N^3+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{3}N = \frac{1}{6}N(N^2+3N+2)$
$= \frac{1}{6}N(N+1)(N+2)$

0.1.3.3.1
$-\frac{1}{24}$ $\frac{14}{24}$ $\frac{36}{24}$ $\frac{24}{24}$ 　　$\frac{1}{24}(1.14.36.24)$
$(\frac{1}{24})(\frac{7}{12})(\frac{3}{2})(1)$
$\frac{23}{24}$ $\frac{29}{12}$ $\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{4}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{6}{4}$ 　　$\frac{1}{4}(1.6.6)$
$(\frac{6}{24})(\frac{18}{12})(\frac{3}{2})$
$\frac{17}{24}$ $\frac{11}{12}$

$\frac{17}{24}$ $\frac{11}{12}$
$-\frac{11}{24}$ $\frac{22}{24}$ 　　$\frac{11}{24}(1.2)$
$\frac{6}{24}$ $(\frac{1}{4})$

$\frac{1}{24}N^4+\frac{1}{4}N^3+\frac{11}{24}N^2+\frac{1}{4}N$

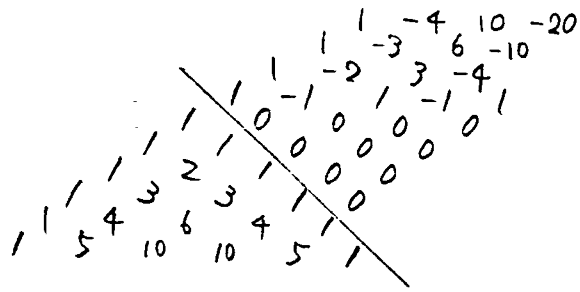
×24
1 6 11 6
1 1 　　×(1.1)
5 5
6 6
1 5 6 　　×(1.2)
1 2
3 6
1 3 　　×(1.3)

$\frac{1}{24}N\cdot(N+1)(N+2)(N+3)$

No.

Date

別の方法（右上に数列をのばす）



−4．−3．−2．−1．0．1．2．3．4

0が1つで1次式　N を含む

10．6．3．1　0　0　1　3　6　10

0が2つで2次式　N=0 N=−1 の時に0になるから

N．(N+1) を含む

N=1 のとき 1×2=2 となるので全体を2で割る

1/2・N・(N+1)

−20　−10　−4　−1．0．0．0．1．4．

0が3つで3次式　N・(N+1)・(N+2)

1×2×3=6 だから

1/6 N・(N+1)・(N+2)

台形数（頂点が 1.2 の場合）

(−1) (2)

(0) 1 2

(0) 1 3 2

(0) 1 4 5 2

(0) 1 5 9 7 2

(0) 1 6 14 16 9 2

1 7 20 30 25 11 2

1 8 27 50 55 36 13 2

1 . 4. 9. 16. 25. 36 N^2

1 . 5 . 14. 30. 55 N^2の和

の数列を作ることができる

$2N - 1$

N^2

$\frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$

どのような規則性があるのか

---

0 . 1. 4. 5. 2

− $\frac{1}{12}$ $\frac{14}{12}$ $(\frac{7}{6})$ $\frac{36}{12}$ (3) $\frac{24}{12}$ (2) $\frac{1}{12}$(1. 14. 36. 24)

$\frac{1}{12}$ $2\frac{5}{6}$ 2

− $\frac{1}{3}$ $(\frac{4}{12})$ $\frac{6}{3}$ (2) $\frac{6}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (1. 6. 6)

$\frac{7}{12}$ $\frac{5}{6}$

− $\frac{5}{12}$ $\frac{10}{12}$ $(\frac{5}{6})$ $\frac{5}{12}$ (1. 2)

$\frac{2}{12}$ $(\frac{1}{6})$ $\frac{1}{6}$ (1)

$$\frac{1}{12}N^4 + \frac{1}{3}N^3 + \frac{5}{12}N^2 + \frac{1}{6}N$$

$$= \frac{1}{12}N(N^3 + 4N^2 + 5N + 2)$$

$$= \frac{1}{12}N(N+1)(N^2 + 3N + 2)$$

$$= \frac{1}{12}N(N+1)(N+1)(N+2)$$

---

0 1 5 9 7 2

$\frac{1}{60}$ $\frac{30}{60}$ $\frac{150}{60}$ $\frac{240}{60}$ $\frac{120}{60}$ $\frac{1}{60}$(1. 30. 150. 240. 120)

− $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}$ 4 2

$\frac{59}{60}$ $4\frac{1}{2}$ $6\frac{1}{2}$ 3

$\frac{1}{8}$ $\frac{14}{8}$ $\frac{36}{8}$ $\frac{24}{8}$ $\frac{1}{8}$(1. 14. 36. 24)

− $\frac{15}{120}$ $1\frac{3}{4}$ $4\frac{1}{2}$ 3

$\frac{103}{120}$ $2\frac{3}{4}$ 2

$\frac{1}{3}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{1}{3}$ (1. 6. 6)

− $\frac{40}{120}$ 2 2

$\frac{63}{120}$ $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{8}$ (1. 2)

− $\frac{45}{120}$ $\frac{3}{4}$

$\frac{18}{120}$

$\frac{3}{20}$ $\frac{3}{20}$ (1)

$$\frac{1}{60}N^5 + \frac{1}{8}N^4 + \frac{1}{3}N^3 + \frac{3}{8}N^2 + \frac{3}{20}N$$

×120

2 15 40 45 18

2 2

13 13 (1. 1)

27 27

18 18

2 13 27 18

2 4

9 18 (1. 2)

9 18

2 9 9

2 6 (1. 3)

3 9 (2. 3)

$$\frac{1}{120}N(N+1)(N+2)(N+3)(2N+3)$$

No.

Date

$2N-1$

N^2

$1/6 \quad N(N+1)(2N+1)$

$1/12 \quad N(N+1)\ (N+1)(N+2)$

$1/120 \quad N(N+1)(N+2)(N+3)(2N+3)$

整理すると

$1/1 \quad (2N-1)$

$1/(1\times2) \quad N(2N+0)$

$1/(1\times2\times3) \quad N\cdot(N+1)(2N+1)$

$1/(1\times2\times3\times4) \quad N\cdot(N+1)(N+2)(2N+2)$

$1/(1\times2\times3\times4\times5) \quad N(N+1)(N+2)(N+3)(2N+3)$

台形数（1.6.6 の場合）

$1/2 \quad (6N^2-6N+2)$

$1/6 \quad N(6N^2+0+0)$

$1/24 \quad N(N+1)(6N^2+6N+0)$

$1/120 \quad N(N+1)(N+2)(6N^2+12N+2)$

$1/720 \quad N(N+1)(N+2)(N+3)(6N^2+18N+6)$

$1/5040 \quad N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(6N^2+24N+12)$

$1/40320 \quad N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(N+5)(6N^2+30N+20)$