Second degré : Résumé de cours et méthodes

1 Définitions :

DÉFINITION

On appelle trinôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a,b et c réels avec $a \neq 0$).

Remarque : Par abus de langage, l'expression $ax^2 + bx + c$ est aussi appelée trinôme du second degré.

DÉFINITION

On appelle racine du trinôme f, tout réel qui annule f.

Exemple : 1 est une racine du trinôme $2x^2 + 3x - 5$, car $2(1)^2 + 3(1) - 5 = 0$.

Remarque : Chercher les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$, revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

2 Factorisation, racines et signe du trinôme :

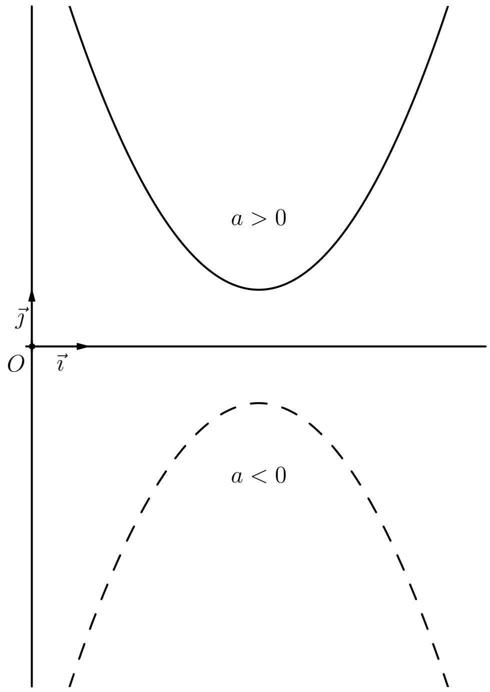
DÉFINITION

On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

2-1 Si $\Delta < 0$:

Racines : Pas de racines réelles.
Factorisation : Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.
Signe : $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a.

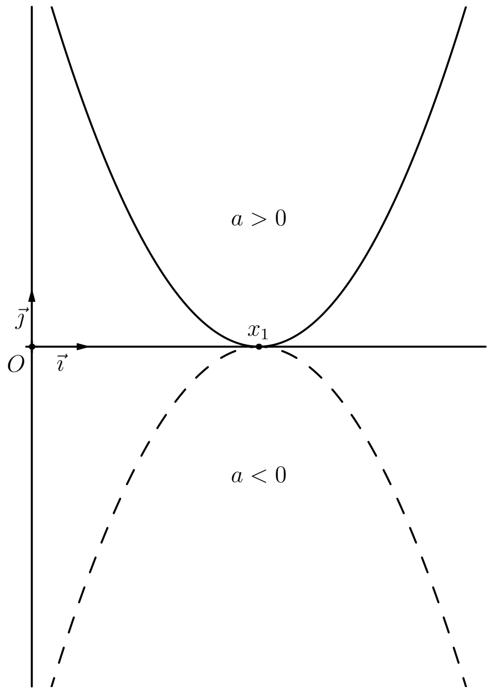
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a



2-2 Si $\Delta = 0$:

Racines : Une racine réelle dite "double" : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
Factorisation : Pour tout x, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$.
Signe : ax^2+bx+c est toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$.

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

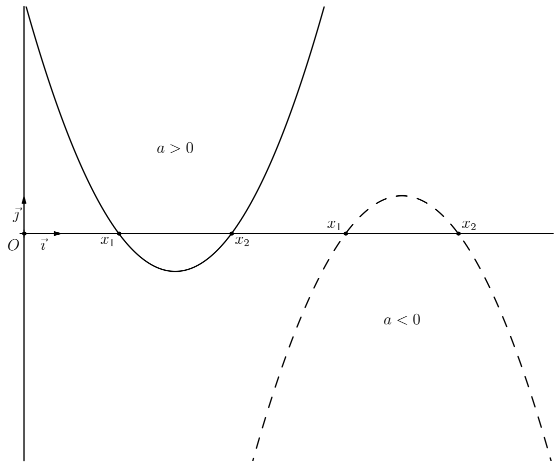


2-3 Si $\Delta > 0$:

Racines : Deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation : Pour tout x, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
Signe : ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines.

(on suppose que $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	



3 Exemples de résolution d'équations et d'inéquations du second degré

3-1 Equations du second degré

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2+2x-3=0$:
(Par rapport aux formules, on a ici : $a=1$, $b=2$ et $c=-3$).
Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(1)(-3)=16$.
Le discriminant est strictement positif, donc le trinôme admet deux racines réelles qui sont en fait les solutions de l'équation :
Calcul des solutions :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2-4}{2}=-3$ $\qquad x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2+4}{2}=1$. L'ensemble solution est donc $S=\{-3;1\}$.

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$:
(Par rapport aux formules, on a ici : $a=2$, $b=-2\sqrt{2}$ et $c=1$).
Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4(2)(1)=4\cdot 2-8=0$.
Le discriminant est nul, donc le trinôme admet une seule racine réelle qui est en fait la solution de l'équation :
Calcul de la solution :
$x_1=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{(-2\sqrt{2})}{2\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. L'ensemble solution est donc $S=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $3x^2+4x+5=0$:
(Par rapport aux formules, on a ici : $a=3$, $b=4$ et $c=5$).
Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4(3)(5)=16-60=-44$.
Le discriminant est strictement négatif, donc le trinôme n'admet aucune racine réelle. L'ensemble solution est donc $S=\emptyset$

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2+4x=0$:
(Par rapport aux formules, on a ici : $a=1$, $b=4$ et $c=0$).
Comme à chaque fois que $b=0$ ou $c=0$, il est inutile d'utiliser le discriminant et les formules associées. Les méthodes traditionnelles vues en Seconde sont plus simples et plus rapides. Ici, il suffit de factoriser par x :
$x^2+4x=0\Leftrightarrow x(x+4)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x+4=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-4$. L'ensemble solution est donc $S=\{-4;0\}$

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $4x^2-1=0$:
(Par rapport aux formules, on a ici : $a=4$, $b=0$ et $c=-1$).
Ici $b=0$, il est donc inutile d'utiliser le discriminant et les formules associées.
$4x^2-1=0\Leftrightarrow 4x^2=1\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$. L'ensemble solution est donc $S=\left\{\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$

3-2 Inéquations du second degré

Méthode générale : on calcule la valeur du discriminant du trinôme associé à l'inéquation. On en déduit le signe du trinôme sur $\mathbb{R}$. On détermine alors l'ensemble solution S, en cherchant les valeurs de x vérifiant l'inéquation.(Pour les bornes, on applique les règles habituelles : les bornes sont toujours ouvertes aux infinis et pour les "doubles-barres", les autres bornes sont ouvertes si l'inéquation est de la forme $\cdots<0$ ou $\cdots>0$ et sont fermées si l'inéquation est de la forme $\cdots\leqslant 0$ ou $\cdots\geqslant 0$.)
Remarque : Si $b=0$ ou $c=0$, il est inutile d'utiliser le discriminant et les formules associées. Les méthodes vues en Seconde sont plus simples et plus rapides : il suffit en général de factoriser et de faire un tableau de signes.

Exemples nécessitant le calcul du discriminant :

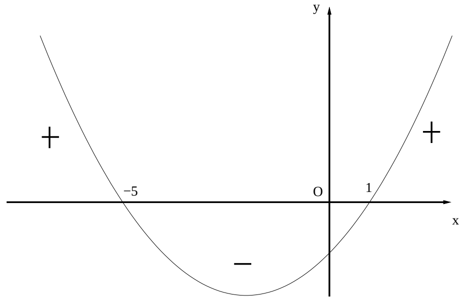
- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2+4x-5\leqslant 0$:
(Par rapport aux formules, on a ici : $a=1$, $b=4$ et $c=-5$).
Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(1)(-5)=36$.
Le discriminant est strictement positif, la règle est donc "signe de a à l'extérieur des racines". Il faut donc commencer par calculer les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{-4-6}{2}=-5 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{-4+6}{2}=1$$

Signe du trinôme sur $\mathbb{R}$: (ici $a=1$ est positif, donc le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur)

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
x^2+4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ensemble solution : les solutions de l'inéquation sont les x pour lesquels x^2+4x-5 est inférieur ou égal à 0. Cela revient à déterminer les x pour lesquels on a le signe $-$ dans le tableau de signe. D'où, $S=[-5;1]$. Ce qui peut se vérifier graphiquement :



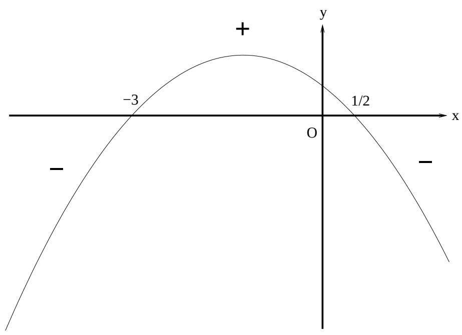
- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-2x^2-5x+3<0$:
(Par rapport aux formules, on a ici : $a=-2$, $b=-5$ et $c=3$).
Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(-2)(3)=49$.
Le discriminant est strictement positif, la règle est donc "signe de a à l'extérieur des racines". Il faut donc commencer par calculer les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2(-2)}=\frac{5-7}{-4}=\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2(-2)}=\frac{5+7}{-4}=-3$$

Signe du trinôme sur $\mathbb{R}$: (ici $a=-2$ est négatif, donc le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur)

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x^2-5x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ensemble solution : les solutions de l'inéquation sont les x pour lesquels $-2x^2-5x+3$ est strictement inférieur à 0. Cela revient à déterminer les x pour lesquels on a le signe $-$ dans le tableau de signe. D'où, $S=]-\infty;-3[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$. Ce qui peut se vérifier graphiquement :



- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-2x^2+5x-4\geqslant 0$:
(Par rapport aux formules, on a ici : $a=-2$, $b=5$ et $c=-4$).
Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=5^2-4(-2)(-4)=-7$.
Le discriminant est strictement négatif, la règle est donc "toujours du signe de a" , c'est à dire toujours négatif car $a=-2$.

Signe du trinôme sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-2x^2+5x-4$	$-$

Ensemble solution : les solutions de l'inéquation sont les x pour lesquels $-2x^2+5x-4$ est supérieur ou égal à 0, ce qui est impossible vu le tableau de signe. D'où, $S=\emptyset$.

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2+\sqrt{2}x+1>0$:
  (Par rapport aux formules, on a ici : $a=1$, $b=\sqrt{2}$ et $c=1$).
  Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{2})^2-4(1)(1)=-2$.
  Le discriminant est strictement négatif, la règle est donc "toujours du signe de a", c'est à dire toujours positif car $a=1$.

  Signe du trinôme sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x^2+\sqrt{2}x+1$	$+$

  Ensemble solution : les solutions de l'inéquation sont les x pour lesquels $x^2+\sqrt{2}x+1$ est strictement supérieur à 0, ce qui est toujours le cas vu le tableau de signe. D'où, $S=\mathbb{R}$.

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $4x^2-4\sqrt{3}x+3>0$:
  (Par rapport aux formules, on a ici : $a=4$, $b=-4\sqrt{3}$ et $c=3$).
  Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-4\sqrt{3})^2-4(4)(3)=0$.
  Le discriminant est nul, la règle est donc "toujours du signe de a (c'est à dire toujours positif car $a=4$) et s'annule pour la racine double $x_1=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{(-4\sqrt{3})}{2\cdot 4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ".

  Signe du trinôme sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$4x^2-4\sqrt{3}x+3$		$+$	0	$+$	

  Ensemble solution : les solutions de l'inéquation sont les x pour lesquels $4x^2-4\sqrt{3}x+3$ est strictement supérieur à 0, ce qui est toujours le cas vu le tableau de signe **sauf** pour $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'où, $S=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

4 Relations entre les coefficients et les racines d'un trinôme

PROPRIÉTÉ

> Soit un trinôme ax^2+bx+c ($a\neq 0$) dont le discriminant Δ est strictement positif. Les deux racines x_1 et x_2 sont telles que : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

Application : Cela permet de déterminer rapidement une racine connaissant l'autre, en particulier lorsque le trinôme admet une racine "évidente". Remarque : le fait de trouver une racine implique forcément que le discriminant est supérieur ou égal à 0. Il est donc inutile de le calculer !
Exemple : $x_1=1$ est une racine "évidente" du trinôme $2x^2-5x+3$. On doit donc avoir :
$1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}$. D'où la deuxième racine x_2 est forcément égale à $\dfrac{3}{2}$.

Une conséquence de ces relations entre les coefficients et les racines d'un trinôme est la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

Dire que deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P équivaut à dire qu'ils sont solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré : $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple : Pour déterminer (s'ils existent) deux réels dont la somme S est égale à 6 et dont le produit P est égal à 1, on résoud dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$. On a $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(1) = 32$. Il ya donc deux solutions réelles : $x_1 = \frac{6-\sqrt{32}}{2} = \frac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{6+\sqrt{32}}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$. Les deux réels cherchés sont donc $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$.

5 Equations bicarrées : $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Méthode générale : Pour résoudre ce genre d'équations, on utilise un changement d'inconnue :
En posant $X = x^2$, l'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ est équivalente au système $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

Exemple : Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
On pose $X = x^2$, l'équation est équivalente au système $\begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - 7X + 12 = 0 \end{cases}$
On résoud l'équation du second degré $X^2 - 7X + 12 = 0$:
$\Delta = (-7)^2 - 4(1)(12) = 49 - 48 = 1$, $X_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$, $X_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$
On a donc $X = 3$ ou $X = 4$, ce qui équivaut à $x^2 = 3$ ou $x^2 = 4$.
D'où, $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.
Ainsi, l'ensemble solution est $S = \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 2; -2\right\}$.

6 Equations irrationnelles avec des racines carrées

Méthode générale : On isole la racine carrée et on utilise le fait que **si** $A = B$ **alors** $A^2 = B^2$. On obtient une deuxiéme équation du second degré que l'on résoud. Ensuite, on **vérifie** systématiquement si les solutions de la deuxiéme équation sont bien des solutions de l'équation initiale. (En effet, on ne procéde pas par équivalence mais par implication. La vérification est donc indispensable.)

Exemple : Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sqrt{4x-19} = x - 4$.
$\sqrt{4x-19} = x - 4 \Rightarrow 4x - 19 = (x-4)^2 \Rightarrow 4x - 19 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 0 = x^2 - 8x + 16 - 4x + 19 \Rightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$
Résolution de l'équation du second degré obtenue :
$\Delta = (-12)^2 - 4(1)(35) = 4$, $x_1 = \frac{-(-12)-\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$, $x_2 = \frac{-(-12)+\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{14}{2} = 7$.

Vérification :
$\sqrt{4\cdot 5 - 19} = \sqrt{1} = 1$ existe et est bien égal à $5 - 4$
$\sqrt{4\cdot 7 - 19} = \sqrt{9} = 3$ existe et est bien égal à $7 - 4$.
L'ensemble solution est : $S = \{5; 7\}$.