

1 Minimizzazione di espressioni logiche con le proprietà dell'algebra di Boole

1.1 Esercizi con soluzione

Esercizio 1.1 - Data la seguente funzione F:

$$F = a'bcd + abcd + ab'cd + a'bc'd$$

1. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato.

(Ad esempio, Proprietà Associativa oppure $(AB)C=A(BC)$)

SOLUZIONE

1. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$F = a'bd(c + c') + abcd + ab'cd \quad (\text{per distributiva})$$

$$F = a'bd(c + c') + acd(b + b') \quad (\text{per distributiva})$$

$$F = a'bd + acd(b + b') \quad (\text{per inverso})$$

$$F = a'bd + acd \quad (\text{per inverso})$$

■

Esercizio 1.2 - Data la seguente funzione F:

$$F = a'b'c'd' + a'b'c'd + a'b'cd' + abc'd' + ab'c'd' + abcd' + ab'cd'$$

1. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato.

(Ad esempio, Proprietà Associativa oppure $(AB)C=A(BC)$)

SOLUZIONE

1. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$\begin{aligned}
 F &= a'b'c'd' + a'b'c'd' + a'b'c'd + a'b'cd' + abc'd' + ab'c'd' + \\
 &\quad abcd' + ab'cd' && \text{(per idempotenza)} \\
 F &= (a'b'c'd' + ab'c'd') + (a'b'c'd' + a'b'c'd) + (a'b'cd' + ab'cd') + \\
 &\quad +(abc'd' + abcd') && \text{(per associativa)} \\
 F &= (a' + a)b'c'd' + (d' + d)a'b'c' + (a' + a)b'cd' + (c' + c)abd' && \text{(per distributiva)} \\
 F &= b'c'd' + a'b'c' + b'cd' + abd' && \text{(pr. inverso)} \\
 F &= (c' + c)b'd' + a'b'c' + abd' && \text{(per distributiva)} \\
 F &= b'd' + a'b'c' + abd' && \text{(per inverso)} \\
 F &= (b' + ab)d' + a'b'c' && \text{(per distributiva)} \\
 F &= (b' + a)d' + a'b'c' && \text{(per } a'b + a = b + a) \\
 F &= b'd' + a'b'c' + ad' && \text{(per distributiva)}
 \end{aligned}$$

■

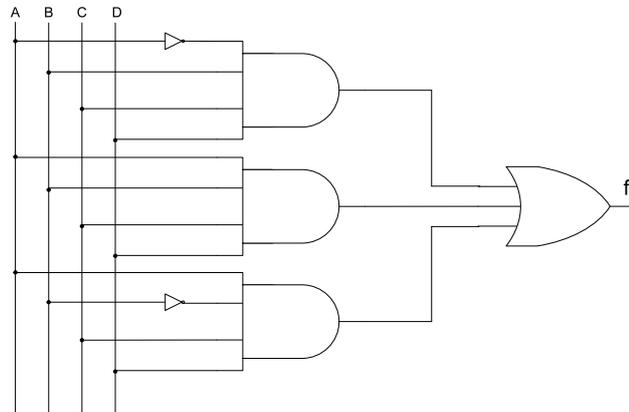
Esercizio 1.3 - Data la seguente funzione F:

$$F = a'bcd + abcd + ab'cd$$

1. Disegnare il circuito corrispondente.
2. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato. (Ad esempio, Proprietà Associativa oppure $(AB)C=A(BC)$):

SOLUZIONE

1. Il circuito corrispondente è:



2. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$\begin{aligned}
 F &= a'bcd + abcd + ab'cd + abcd && \text{(per idempotenza)} \\
 F &= (a + a')bcd + ab'cd + abcd && \text{(per distributiva)} \\
 F &= (a + a')bcd + acd(b + b') && \text{(per distributiva)} \\
 F &= bcd + acd(b + b') && \text{(per inverso)} \\
 F &= bcd + acd && \text{(per inverso)}
 \end{aligned}$$

■

Esercizio 1.4 - Data la seguente funzione F:

$$F_{(a,b,c)} = a'b'c' + a'b'c + a'bc' + ab'c'$$

- Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato.
(Ad esempio, Proprietà Associativa oppure $(AB)C=A(BC)$)

SOLUZIONE

1. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$\begin{aligned}
 F &= a'b'c' + a'b'c + ab'c' + a'b'c' + a'bc' + a'b'c' && \text{(per idempotenza)} \\
 F &= a'b'(c' + c) + b'c'(a + a') + a'c'(b + b') && \text{(per distributiva)} \\
 F &= a'b' + b'c' + a'c' && \text{(per inverso)}
 \end{aligned}$$

■

Esercizio 1.5 - Data la seguente tabella della verità di F:

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Ricavare l'espressione logica SOMMA DI PRODOTTI (prima forma canonica)
2. Utilizzando le proprietà e i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare l'espressione di F, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure l'espressione della proprietà o del teorema utilizzato.
(Ad esempio, Proprietà Associativa oppure $(AB)C=A(BC)$)

SOLUZIONE

1. La prima forma canonica di F è:

$$F = a'b'c + a'bc' + a'bc + abc$$

2. Applicando le proprietà dell'algebra di Boole si ottiene:

$$\begin{aligned}
 F &= a'b'c + a'bc + a'bc' + a'bc + abc + a'bc && \text{(per idempotenza)} \\
 F &= a'c(b' + b) + a'b(c' + c) + bc(a' + a) && \text{(per distributiva)} \\
 F &= a'c1 + a'b1 + bc1 && \text{(per inverso)} \\
 F &= a'c + a'b + bc && \text{(per elemento neutro)}
 \end{aligned}$$

■

Esercizio 1.6 - Data la seguente tabella della verità della funzione F a due uscite:

A	B	C	f1	f2
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

1. A partire dalla tabella delle verità, ricavare l'espressione logica SOMMA DI PRODOTTI (prima forma canonica)

SOLUZIONE

1. La prima forma canonica di F è:

$$f1 = a'b'c' + a'b'c + a'bc' + ab'c'$$

$$f2 = a'b'c + a'bc' + ab'c' + abc$$

■

Proprietà dell'algebra di Boole

- **Commutativa:** $a+b=b+a$ $a*b=b*a$
- **Associativa:** $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a*b)*c=a*(b*c)$
- **Idempotenza:** $(a+a)=a$ $(a*a)=a$
- **Assorbimento:** $a+(a*b)=a$ $a*(a+b)=a$
- **Distributiva:** $a*(b+c)=a*b+a*c$ $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$
- **Min e max:** $a*0=0$ $a+1=1$
- **Elem.to neutro:** $a+0=a$ $a*1=a$
- **Complemento:** $a*(!a)=0$ $a+(!a)=1$
- **De Morgan:** $!(a+b)=!a*!b$ $!(a*b)=!a+!b$

Funzioni logiche

- Una variabile può essere definita come funzione di altre variabili:
 $w=f(x,y,z)$
- Si dicono *funzioni logiche elementari* le funzioni:
 $z=x*y$ (funzione AND)
 $z=x+y$ (funzione OR)
 $y=!x$ (funzione NOT)
- Quante sono le possibili funzioni in 2 variabili ?

Minimizzazione delle funzioni logiche

- Ad una funzione descritta tramite tabella di verità possono essere associate più espressioni algebriche. Quale scegliere ?
- Vista l'equivalenza con i circuiti, conviene scegliere l'espressione corrispondente al circuito a minimo costo (\rightarrow **minimizzazione**)
- Il costo può esprimersi in base a:
 - numero di porte
 - numero di ingressi
 - eterogeneità delle porte

Minimizzazione delle funzioni logiche

- I metodi per la minimizzazione si basano sulle proprietà dell'algebra di Boole.

Esempio:

$$f = !x!yz + !xy!z + x!y!z + x!yz + xy!z + xyz$$

$$x!y!z + x!yz = x!y(!z + z) = x!y$$

$$xy!z + xyz = xy(!z + z) = xy$$

$$x!yz + xyz = xz(!y + y) = xz$$

$$x!y!z + xy!z = x!z(!y + y) = x!z$$

$$!x!yz + x!yz = !yz(!x + x) = !yz$$

$$!xy!z + xy!z = y!z(!x + x) = y!z$$

Forma minima:

$$f = x + !yz + y!z$$