# 関孝和の数学
# 『括要算法』刊行 300 年を記念して

小川束
四日市大学／関孝和数学研究所



## はじめに

江戸時代を代表する数学者，関孝和（?–1708）の遺著『括要算法』が刊行されたのは今からちょうど 300 年前の 1712 年のことでした．明治元年（1868）から今年まで 144 年，『括要算法』刊行から明治元年までが 156 年ですから，明治元年から今日までの年記を明治元年から逆に遡った頃のことです．

『括要算法』はエイトケン加速を利用した円周率計算と，いわゆるベルヌーイ数が記されている点で貴重な書物です．関孝和の円周率計算は東アジアの数学において初めての加速計算で，その結果 18 桁の円周率が得られました．また関によるベルヌーイ数の発見は自然数のべき乗の和を求める過程で得られたもので，奇しくもそれはベルヌーイ自身の発見の過程と同じでした．ベルヌーイによるベルヌーイ数もまたその遺著である *Ars Conjectandi*（1713）に記されている点も不思議な一致と言えましょう．

このような画期的な内容を含む『括要算法』の刊行 300 年を記念した市民講演会が東京理科大学で開催された日本数学会年会の前日（2012 年 3 月 25 日）に企画され，わたしが関孝和の数学について紹介させていただくことになりました．本稿はその講演の内容をまとめ，加筆したものです．

講演の機会を作ってくださった日本数学会理事の真島秀行先生に感謝いたします．また本講演は東京理科大学生涯学習センターの特別講演でもあり，関係者の皆様には当日準備などでいろいろお手伝いいただきました．この場を借りて改めてお礼申し上げます．

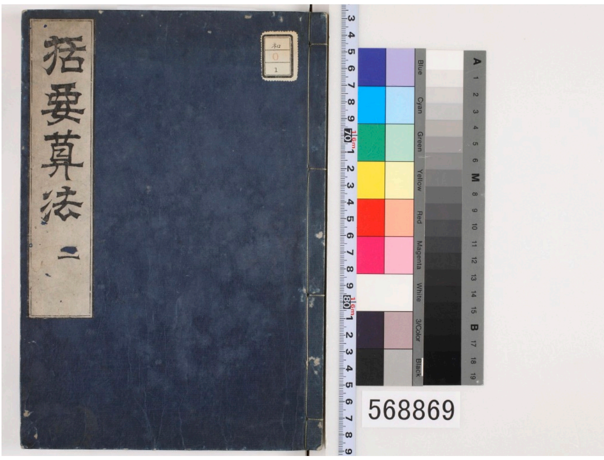


図 1　『括要算法』（京都大学数学教室蔵）表紙

## 1　日本数学史の概要

本題に入る前に関孝和が登場するまでの日本の数学についてごく簡単にまとめておきましょう．

まず江戸時代よりも前の，つまり 16 世紀以前の日本では，奈良時代の中国数学の移入がもっとも大きなできごとでした．数学に関する最も古い記録は『日本書紀』孝徳天皇の 646 年の大化の改新の詔で，その中に「強幹聡敏にして書算に工なる者を主政（まつりごとひと）・主帳（ふみひと）とせよ」とあります．「しっかりして俊敏で，書と算に巧みな者を主政・主帳（郡司の 4 等，5 等の役人）とせよ」というような意味です．また 718 年の養老律令には算博士 2 名，算生 30 名を置くことが定められ，13 歳から 16 歳までの者を学生として採用するとあります．そして数学の教科書として『孫子』，『五曹』，『九章』など 9 種類が指定されています．これらの本はすべて古代中国の書物です．このように数学は中国から移入した諸制度の一つとして日本に入ってきて，班田収授などに際して計算を担当する役人が用いました．

加減乗除の計算はその後も必要とされ，平安，鎌倉時代の文献には荘園の経営，金の貸借に関する計算が記された多くの文書が残されています．

これはいずれも四則計算で，いわゆる数学が発展した形跡は見られません．この状況が一変したのは 17 世紀に入る頃です．この頃，明の程大位の『算法統宗』（1592 頃）と元の朱世傑の『算学啓蒙』（1299）が日本に舶来し，日本人は前者からは珠算法を，後者からは一変数の方程式を立てて問題を解く方法（天元術，開方術）を学びました．これら二つの書物が江戸時代の数学を離陸させる最大のエネルギー源となりました．

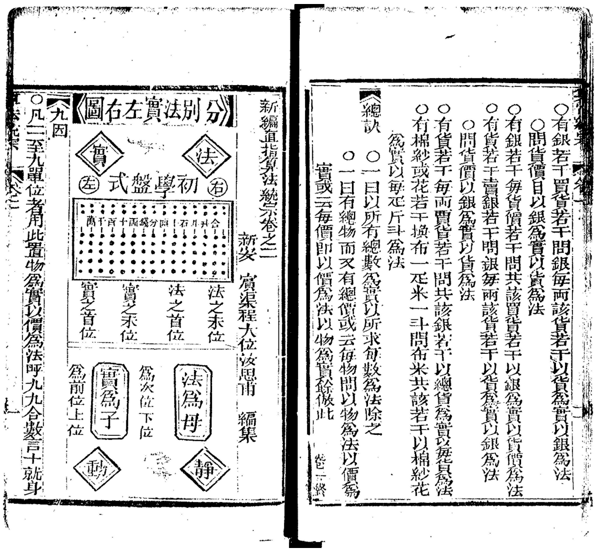

図 2　『算法統宗』（東北大学蔵）そろばんの図

図 3　『算学啓蒙』（京都大学数学教室蔵）冒頭の序文

17 世紀は中国数学の摂取に続いて，日本の数学が自立した時期でもありました．この時期，日本人による算書がいくつも著されましたが，その中で最も重要な書物は何と言っても吉田光由の『塵劫記』（1627）と関孝和の『発微算法』（1674）です．

吉田光由は勘合貿易や朱印船貿易で巨利を貯えた吉田・角倉一族の出で，最初毛利重能に師事しましたが，その後遠縁の角倉素庵につき『算法統宗』を学び，それを元にして『塵劫記』を著しました．京都嵯峨の吉田・角倉一族はもともと中国との関係が深く，『算法統宗』など

図 4　『塵劫記』（京都大学数学教室蔵）俵の数を計算する問題

の算書も手に入れることができたのでしょう．『塵劫記』は珠算を用いた日用計算を身につけることを目標としていて，そのレベルと内容が当時の需要によく適合したため世に歓迎されました．『塵劫記』の全体の構成は冒頭に珠算法の要点がまとめられ，その後は日常に範を取った応用問題になっています．これらの応用問題は俵の積み上げ，米の売買，両替，利息計算など，世の中で人々が当面する問題の本質をよく切り取っていた点ですぐれた教科書でした．『塵劫記』はその後，版を重ね，また「塵劫記」を冠した類書も 200 種以上刊行され，江戸時代を代表する算書となりました．

ところで『塵劫記』の序文は天龍寺の僧，玄光が書いています．これは吉田家と天龍寺の深い関係を示すものです．実際，室町幕府の足利尊氏が後醍醐天皇の菩提を弔うために天龍寺を造営するとき，資金不足を補うために元へ商船（天龍寺船）を派遣しましたが，ここにも吉田家は関係していたと言われます．のちに吉田家の関係者が天龍寺の管主にもなっています．『塵劫記』の序文には「塵劫記」という書名がこの玄光の命名であることが記されています．

『塵劫記』の成功を受けて，それを模した算書が刊行されるようになりましたが，その中には粗悪なものがあったようで，吉田はそれに憤慨して，1641 年に遺題（答えなしの問題）12 問を付した『塵劫記』を刊行しました．これは算書を著そうとする者への一種の警告でしたが，問題が提出されればそれを解く者が現れるのが数学の常で，これらの問題を実際に解いて出版する者が現れました．さらにこれらの著者は自らも遺題を残し，ここに遺題承継の伝統が生じました．これは吉田自身がおそらく予想していなかった数学の展開でしたが，江戸時代の数学の驚異的な発展の契機となる状況でした．

このような遺題承継の中でもっとも注目に値するのは沢口一之の『古今算法記』（1671）の遺題です．沢口の提出した遺題はもやは中国伝来の天元術（数値係数の一変数の方程式を立て

図 5　『発微算法』(『発微算法演段諺解』(京都大学数学教室蔵) に採録されたもの) 遺題への解答の冒頭部分

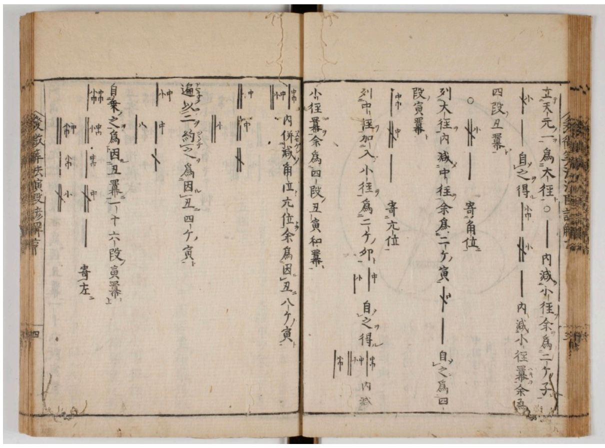

図 6　『発微算法演段諺解』(京都大学数学教室蔵) 傍書法による図 6 の解答の解説

る方法) では到底解くことが不可能なほど複雑なものでした．沢口の遺題は複数の未知数を立てて，連立高次方程式を解くことによって初めて解が得られる類いの問題でした．江戸時代の数学はここに至り，大きな壁に直面したと言えましょう．ところがそれもわずか 3 年ほどの内に解決されることとなりました．それを解決したのが他ならぬ関孝和です．関孝和は『古今算法記』の遺題を解いて 1674 年に『発微算法』を刊行しました．この本は解の満たすべき方程式を漢文で記述しただけで，これだけでは到底理解することはできません．それは当時も同様で――関はただ当時の算書の書き方に倣って『発微算法』を書いただけでしたが――批判を受けることとなりました．関の弟子であった建部賢明，賢弘，賢之三兄弟はそこで師の解の詳

細を述べた『発微算法演段諺解』(1785）を著しました．そこには（文字係数の）整式を表記する方法とともに,『古今算法記』の遺題を連立高次方程式に帰着し，さらに余分な未知数を消去する過程が詳細に述べられていました．ここに至って江戸時代の数学のパラダイムが確立し，それは明治を迎えるまで確固として揺らぎませんでした．この点で関孝和はまさに江戸時代の数学の開祖といって良い存在です．

江戸時代の数学は関が没した 1708 年以降も多様な発展を続け，ついには明治を迎えて衰退してゆくのですが，その 160 年間ほどの数学の様子は省きます．

## 2　関孝和の伝記

関孝和は江戸時代の数学においては最も重要な数学者ですが，その伝記については確かなことは少ないと言わざるを得ません．関孝和没後 300 年の 2008 年前後を契機として，新たな資料の発見がいくつかあり，若干詳しくわかるようになったとはいえ，依然として伝記としての関孝和の姿は霞がかかった景色を見ているような印象があります．

関孝和の伝記を探る上で中心となる資料は『寛政重脩諸家譜』,『諸家系譜』,『断家譜』など公式の記録に加え,『浄輪寺過去帳』,『江戸幕府日記』，さらには『甲府分限帳』,『甲府御館記』などがあります．現在もっとも確実と思われることをいくつか列挙してみると次のようになります．

- 1692　江戸詰めの甲府藩士として賄頭
- 1684～85，98　検地に関連する業務をする
- 1701　勘定役となる
- 1702　新井白石の俸禄書き換え書類に署名する
- 1704　甲府藩主徳川綱重の長男であった綱豊（家宣）が叔父の将軍綱吉の養子となって江戸城西の丸に入ったのに伴い、西丸御納戸組頭となり、御家人となる
- 1706　致仕
- 1708　没

そもそも関孝和の伝記においては生年が明確でない点がもっとも気になる点です．これまで 1642 年生まれとする説が巷間に流布しており，1990 年に京都で開催された ICM90 を記念する切手においても，関の生年は 1642 年となっていました．しかしこれに格段の根拠がある訳ではありません．ちなみに 1642 年はニュートンの生まれた年です．ところが近年,『甲府分限帳』に関孝和に関する記述があることが発見され注目を浴びました．ここには 1701 年に 57 歳であったと書かれています．とすると，関の生年は 1645 年ということになります．この史料は現在，関の生年を示す唯一の記録で貴重なのですが，さらにその記述の信憑性を上げるにはさらなる史料の発見が必要になるでしょう．参考までに『甲府分限帳』の記録を次に記して

おきます.

- 本国常陸養父十郎右衛門実父内山七兵衛
- 弐百五拾俵生国武蔵関新助
- 御役料拾人扶持辛巳（1701）五十七
- 寛文五乙巳年（1665）父十郎右衛門病死同年跡式被仰付御切米高
- 百三拾俵之内百俵被下之小十人組御番被仰付
- 同七丁未年（1667）三人扶持被下之
- 同十庚戌年（1670）御足米拾俵被下之
- 延宝八庚申年（1680）小十人組与頭被仰付御加増九拾俵被下之三人扶持者上ル
- 元禄五壬申年（1692）御賄頭被仰付
- 同十四辛巳年（1701）御勘定頭ニ差添可相勤旨被仰付御加増五拾俵
- 御役料拾人扶持被下之
- 養父十郎右衛門儀慶安四辛卯年御帳面ニ而被為附之
- 病死之節者 小十人組御番相勤申候

もう一つ，関の名前が出てくる史料として『甲府御館記』（1696）から一部を記しておきます.

私共當正月御目見被仰付難有奉存候．為冥加五旬節御目見被仰付候様奉願候．　以上．

四月　　　　　　御菓子屋　主水

　　　　　　　　同　　　　織江

矢守助十郎様

関　　新助様

これは出入りの菓子屋の主水と織江が「正月に殿様にお目見えさせていただいたが，五月にもお目見えを願いたい」という願い状で，その宛名に関新助（関孝和のこと）の名が見えます．この頃，関は食料や日用品の供給を管理する賄頭でしたから，このような出入りの菓子屋の取り次ぎなどは職務としてまさにありそうなことです．このように関の生活ぶりが目に浮かぶような史料の発見が近年なされたことは画期的なことでした．とはいえ，われわれがもっとも関心がある関の数学に関する史料はほとんど発見されていないのが現状です.

## 3 関孝和の著作

関孝和の著作は印刷されて刊行された二つの著作,『発微算法』（1674）と『括要算法』（1712）を除くといずれも筆写された写本です．関の自筆の稿本は確認されていません．今，関の数学

著作として疑義のないものを列挙すると次のようになります．

- 『発微算法』（1674）
- 『括要算法』（1712）
- 『解隠題之法』（1685）
- 『解伏題之法』（1685）
- 『開方飜変之法』（1685）
- 『題術辨義之法』（1685）
- 『病題明致之法』（1685）
- 『算脱之法・験符之法』（1683）
- 『方陣之法・円攅之法』（1683）

『発微算法』の刊行された 1674 年といえばまだ出仕する前のことであり，一方『括要算法』の刊行された 1712 年は関の没後のことです．したがって関は藩士として出仕して以降，没するまで一冊も著作を刊行しなかったことになります．

それに対して写本として伝わるものはある程度まとまった量が残されています．これらはいずれも『大成算経』に――多少の敷衍あるいは訂正がなされて――収録されていることから，『大成算経』のための原稿であったと仮説することも可能だと思います．関孝和の数学写本群が『〇〇之法』という形で書名が一貫しているのは，建部賢弘の求めに応じて書いた原稿だったからかも知れません．また，これらの写本に付されている日付が 1683 年，1685 年に集中しているのもそれを裏付けているように思えます．

『大成算経』は 1683 年に建部賢弘を首領として，関孝和，建部賢明の 3 名で編集を始めた一大著作で，1695 年頃 12 巻にまとめられ一旦『算法大成』と号されました．その後，建部賢弘は仕事が忙しくなり，また関は「老年の上，爾歳病患に逼られて考検熟思すること能わず」（『建部氏伝記』）状態となったため，賢明が 1701 年より 10 年間を費やして 1711 年，全 20 巻とし，これを『大成算経』と号しました．編纂を初めてより 28 年を経てようやく完成をしたわけですが，このとき関はすでに没しておりました．

『大成算経』の冒頭の珠算法に関する記述は日本で初めて珠算を体系的に論じた部分で，その後は「三要」と呼ぶ数学思想を披瀝し，さらに日用術から円周率などの求積を経て，問題の分類論を展開する構成となっています．このような構成の『大成算経』は当時の数学書一般とは異質な算書ですが，それにも関わらず 20 種以上の写本が現存しています．

現在東京大学に儒者の榊原霞洲によって写本された暦算書群が収蔵されています．これらは南葵文庫旧蔵のもので，逆三角関数のテイラー展開を記したことで有名な建部賢弘の『建部先生綴術真本』（内題は不休建部先生綴術）もその一つです．近年の研究でこれらの中に，『大成算経』の首編総括を除くすべての巻が，完全に同じでありませんが，存在することががわかりました．榊原霞洲は建部賢弘とともに徳川吉宗に重用されていて，いわば同僚でした．この榊

原霞洲による写本群は建部賢弘に最も近いものと考えられ，これらが『大成算経』の原稿であった可能性もあります．

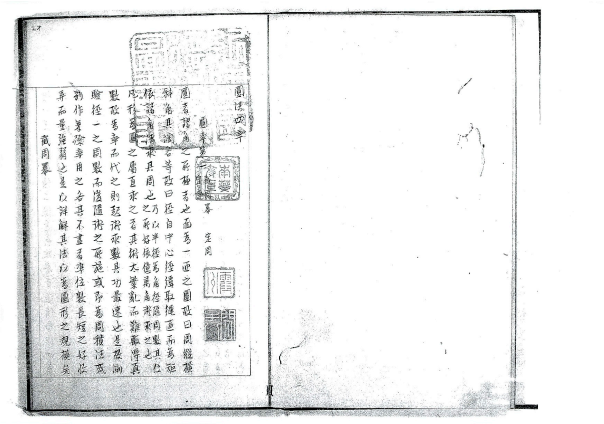

図 7　『大成算経』（東京大学蔵）霞洲による円法四率の冒頭部分

ところで現在刊行されている平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編『関孝和全集』（大阪教育図書，1974）には算書が 16 編が収録されていますが，これは最大限広く見たときの関の著作というべきで，逆に厳密にその著作の信憑性を検討すると，現在関の著作として確信できるのは上に列挙した 9 編となりましょう．

また『関孝和全集』は暦算に関する著作を収録していますが，関が著したかどうかはまだこれからの研究課題でしょう．

# 4　関孝和の数学

関孝和は江戸時代の数学のパラダイムを決定づけた数学者ですが，同時に江戸時代を通じて最大の数学者でもありました．以下，その数学の特徴をまとめておきます．

## 4.1　パラダイムの確立と未知数消去の理論

関はすでに述べたように『古今算法記』の遺題を解くためにそれまでの数値係数に替わって文字係数を記述する方法を考案し，それによって問題を連立高次方程式の解法に帰着しました．この文字係数は実は中国の『算学啓蒙』にも一部ありましたが，中国ではそれがいわゆる整式として問題解法に積極的に用いられることはありませんでした．関がその記述を参考にしたかどうかはわかりませんが，いずれにせよ関は文字係数を最大限，積極的に利用しました．その方法は建部賢弘の『発微算法演段諺解』に詳述されていて，その記法は概ね明治まで踏襲

されました．中国伝来の数値係数を並べる「天元術」の表記に文字を傍書する方法は後に傍書法とよばれ，また傍書法によって方程式を立てる方法は後に「點竄術」と呼ばれました．ところで，江戸時代にはいわゆる整式の加減乗は自在になされましたが，除算はあまり見られません．因数分解をした例もありますが，因数分解によって方程式の解が分離されるというような視点は希薄でした．

このように複数の未知数を導入して，問題を連立高次方程式に帰着するということは，とりもなおさず未知数消去の理論の確立を要請するものです．事実，関は『発微算法』において，たとえば，二つの未知数が $x^2=\varphi(y)$，$f(x,y)=0$ という関係を満たす場合，後式において $x^2$ を $\varphi(y)$ に置き換え $A(y)+B(y)x=0$ とし，これから $A(y)^2-B(y)^2\varphi(y)=0$ として $x$ を消去しました．また，二つの未知数が $x^3=\varphi(y)$，$f(x,y)=0$ を満たす場合も同様に，後式において $x^3$ を $\varphi(y)$ に置き換え $A(y)+B(y)x+C(y)x^2=0$ とし，これから，$A(y)^3+B(y)^3x^3+R^3x^6-3A(y)B(y)C(y)x^3=0$ を得て $x$ を消去しました．『発微算法』ではこの消去法が多用されています．しかし関はこれに留まらず，他の方法も試行錯誤しています．その結果，今日の行列式（を展開した形）を得ました（『解伏題之法』）．それはたとえば

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3=0,\quad A'+B'x+C'x^2+D'x^3=0$$

の場合，まず $x^3$ を消去して

$$P_1+Q_1x+R_1x^2=0$$

の形にします．これを $x$ 倍した式と最初の 2 式から再び $x^3$ を消去することができて，

$$P_2+Q_2x+R_2x^2=0$$

の形を得ます．これをまた $x$ 倍した式と最初の 2 式から再び $x^3$ を消去することができ，

$$P_3+Q_3x+R_3x^2=0$$

の形を得ます．ここで第 1 の式に $Q_2R_3$，$-R_2P_3$，第 2 の式に $Q_3R_1$，$-R_3Q_1$，第 3 の式に $Q_1R_2$，$-Q_2R_1$ を乗じて得られる 6 個の式を加えると $x$ が消去されます．こうして得られた式はちょうど係数行列の行列式を展開した式になります．関は最初にこの行列式を展開した式を得て，それから「斜乗」ということを生かして，これをさらに次数の大きい場合にも適用しようとしました．この場合，4 次以上になると，ただ斜乗するだけでは項数が足りないので，あらかじめ行（または列）を一定の方法で交換したいくつかの行列を用意して，それらを斜乗した結果をすべて加える方法を考案しました．その方法が 4 次の場合に成功したので，関はすべてが解決したと思ったようですが，5 次以上の場合，このような斜乗では正しい結論が得られません．そこで『大成算経』ではこの方法は述べられていません．ちなみに，行（または列）による行列の展開公式は井関知辰による『算法発揮』（1690）に書かれています．この本は行列式の展開公式を述べた世界で最初の刊本となりました．

### 4.2　数学の抽象化，方程式論

江戸時代の数学が概ね具体的な問題の解法に終始していたのに対し，関孝和は常に問題の抽象化ということを念頭に置いていたように思います．その端的な例が関の方程式論です．当時，方程式が一旦得られると，あとは開方術と呼ばれる組立除法による変数変換を繰り返して解の近似値を求めるだけでした．もちろんこの方法では解が一つ求まるだけです．これに対して関は方程式の解をすべて求めるにはどうしたら良いかということを考えました．つまり，関の関心は方程式そのものへ移ったのです．このように方程式自身を数学的対象として意識したのは関が初めてででした．この点に関の非凡さが現れています．関は方程式の係数の変化と解の変化について議論をしています．今日ではあまり意識されない問題ですが，関はそのような観点からも方程式を考察しています．一般に数学者がどのような主題を中心として考察するかは，多分に歴史的文脈の中で決定されるものです．それは今日でも意識的であるか無意識的であるかを問わず同じかも知れません．関の時代には具体的な問題において問題中の数値が変化したときに解がどうなるかという問題意識があり，関においてはそれが方程式の係数と解の問題に抽象化されたと考えられます．

### 4.3　数学の一般化と証明としての帰納的推論

一般に江戸時代の証明方法としては帰納的推論が一般でした．関はたとえば，自然数の冪和の公式，上に述べた行列式の計算，あるいは魔方陣の研究において帰納的な推論を研究の方法としました．この場合，関は一定の法則が現れるまで計算を繰り返し，それから一般の場合を推測しました．今日的な意味ではこれは「推論」にすぎず，何も証明したことにはならないわけですが，江戸時代にはこれは十分証明といえるものでした．実際，当時は現代ほど証明に厳密性を求めず，お互いにそれで納得できれば良いのでした．行列式の計算のように後にその誤りがわかっても，証明方法の不備が問題にされることはありませんでした．ときに「江戸時代の数学には証明がなかった」と言われますが，それは「今日的な意味での厳密な証明はなかった」と理解すべきで，そもそも証明（に類するもの）がない所で数学が展開されることはあり得ません．

### 4.4　加速計算

多様な関の業績の中で，具体的な求積における加速計算は特質に値するものですから，ここで少しそれを述べておきます．ここで加速計算というのは，収束する数列が与えられたとき，これにある操作を施して，その収束を早くする方法のことです．関は円周率や円弧長や球の体積を求めるときにこの加速計算を行ないました．これは東アジア数学において最も早い時期の

加速計算です（ヨーロッパでは 1621 年にスネルが *Cyclometricus* が加速計算を実行しています）．ここでは円周率について簡単に述べておきます．まず円周の長さを内接する正 $2^n$ 角形の周長で近似することはすでに村松茂清が『算俎』（1663）で行なっていました．村松は内接正 4 角形の周長から内接正 $2^{15}$ 角形の周長まで丹念に計算して，最終的に $3.1415926\cdots$ を得ました．これに対して関は内接正 $2^{17}$ 角形までの周長を計算して，さらにその最後の三つの値（今それを $s_{15}$，$s_{16}$，$s_{17}$ としましょう）を利用して

$$s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15})(s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})}$$

によって，円周率 $3.141592653589\cdots$ を求めました．これは今日のエイトケンの $\Delta^2$ 法に匹敵する計算ですが，関がどのようにしてこれを着想したのかについては必ずしも明確ではありません．ただ松永良弼の『起源解』という本には $s_{15}$，$s_{16}$，$s_{17}$ は近似的に

$$s_{15} = \alpha, \quad s_{16} = \alpha + \alpha\rho, \quad s_{17} = \alpha + \alpha\rho + \alpha\rho^2$$

と近似的に見なすことができるから，$s_2$，$s_3$，$s_4$，$\cdots$ の極限値は

$$\alpha + \alpha\rho + \alpha\rho^2 + \cdots = \frac{\alpha}{1-\rho}$$

であると記されています．これによれば，関が何らかの無限級数の和を利用したことは確かなところでしょう（関が勉強したとされる『楊輝算法』にもヒントとなる計算が見られます）．この計算が当時「増約術」と呼ばれていたこともそれを傍証するものです．関のこの加速計算は弟子の建部賢弘よって繰り返し利用されて，42 桁の円周率の計算へと引き継がれます．

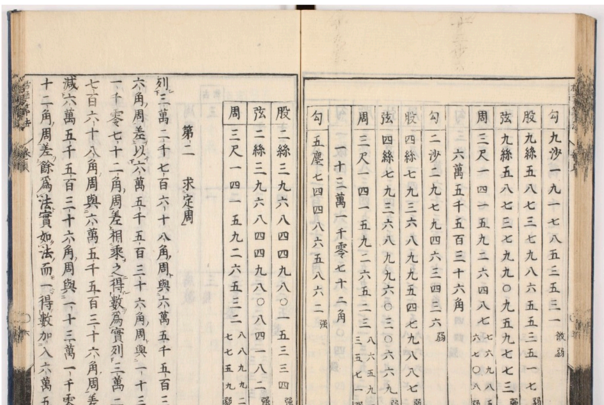

図 8　『括要算法』（京都大学数学教室蔵）漢文で書かれた加速計算

## 5　『括要算法』

2012 年に刊行 300 年を迎えた『括要算法』全 4 巻は関の没後，関孝和の門人であった荒木村英と大高由昌が刊行したものです．第 1 巻（巻元）の冒頭には

関氏孝和先生門弟
　荒木村英
　　大高由昌

とあり，また本書の後刷りである水玉堂版——残存している版の大半は水玉堂版です——では

関氏孝和先生遺編
　荒木村英検閲
　　大高由昌校訂

となっています．荒木村英，大高由昌についてはほどんと知られていません．荒木といえば，摂津を支配した荒木村重（1535–1586）が知られていますが，あるいはその一族かもしれません．それはさておき，荒木村英による跋には「孝和先生の没後残されていた多くの遺文を集めて一書にしようと思ったが，老衰のため叶わずいたのを，門人の大高由昌がその志を承けて『括要算法』を著した」というようなことが書かれています．ここには「著した」とありますが，実際には関による稿本があって，それを大半そのまま収録したと考えられています．『括要算法』の 4 巻（元，亨，利，貞）は順に，『大成算経』の巻 5，6，11，12 巻に含まれていることから，『括要算法』の稿本も『大成算経』のためのものであった可能性があるのです．

さて，『括要算法』全 4 巻の構成は次のようになっています．

巻元　累裁招差法，朶積術
巻亨　諸約之法
巻利　角法
巻貞　求円周率術，求弧術，求立円周積術

第 1 巻（巻元）の累裁招差法は独立変数と従属変数の組 $(x, y)$ の値が $n$ 組与えられたとき，定数項が 0 の $n$ 次多項式でこれらの条件を満たすものを求める方法です．$n$ が 2，3 の場合は当時すでに知られていましたが，関はこれを一般化しました．これらはいずれも郭朱敬の『授時暦経』歩日躔の求盈縮差，歩月離の求遅疾差などを研究の発端としたものだと思われます．累裁招差法はもともと暦算における補間計算法にその端緒をもつものです．つぎの朶積術は冪乗和 $1^p + 2^p + \cdots + n^p$（$p \in \mathbf{N}$）を求める計算です．関は最初に $p$ が小さい場合の公式を実際に求め，それから一般の場合を帰納的に推測しました．その過程で関はいわゆるベルヌーイ

数を得ることとなったわけです．本文を解読すると，関によるベルヌーイ数の定義は

$$\binom{n+1}{1}B_n+\binom{n+1}{2}B_{n-1}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}B_0=n+1$$

によっていることがわかります．つまり関のベルヌーイ数は

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=B_0+B_1x+\frac{B_2}{2}x^2+\cdots$$

によるものです．なお，$p$ が小さい場合の公式を実際に求めるのに，先の累裁招差法が用いられたのはごく自然でしょう．

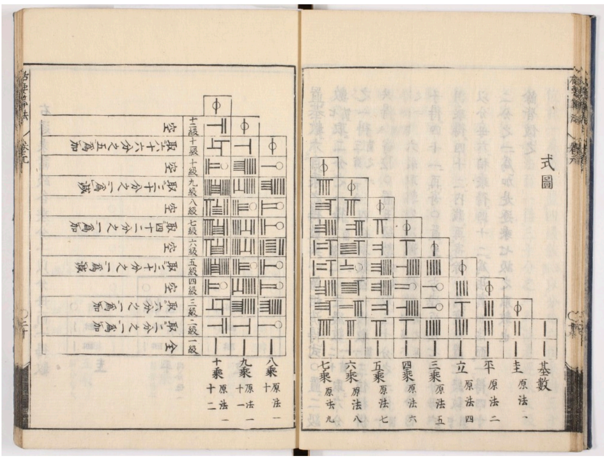

図 9　『括要算法』（京都大学数学教室蔵）ベルヌーイ数が書かれた表

第 2 巻（巻亨）の諸約之法では互約，逐約，斉約，遍約，増約，損約，零約，遍通，剰一術，翦管術と題して種々の計算が述べられます．たとえば，最初の互約というのは二つの自然数が与えられたとき，最小公倍数を変えずにこれらを互いに素な数にする方法です．互約から剰一術までは必ずしも有機的な構成をなしていませんが，これらの中には翦管術の準備と考えるべきものも含まれています．

翦管術とは一次連立合同式を解く方法で，関は『算法統宗』の「物不知総数」を学ぶことによって明確な問題意識を持つようになったと考えられています．関は法が互いに素でない場合も扱っている点が興味深いところです．関が解いているのはたとえば

$$x\equiv 2 \pmod{36},\quad x\equiv 14 \pmod{48}$$

という問題です．なお，法が互いに素でない場合を扱ったのは実は関が初めてではなく，星野実宣の『股勾弦抄』（1672）に

$$x\equiv 5 \pmod{6},\quad x\equiv 7 \pmod{8},\quad x\equiv 5 \pmod{10}$$

という問題が論じられています．ただし星野は解の過程を述べておらず，どのようにしたのかは不明です．これに対して関はその過程を述べていますから，われわれは関がどのように考えたか理解できます．

なお翦管術の直前の剰一術とは一次不定方程式を解く方法のことです．

第 3 巻（巻利）の角法は正多角形の外接円の直径と内接円の直径を求める方法で，正 3 角形から正 20 角形までが順に述べられています．これらの計算の意図するところは未だ詳らかではありませんが，正 3 角形，正方形の場合を一般化することを目標として，具体例を計算したとも考えられます．すなわち，外接円および内接円の直径の満たす方程式の係数を実際にいくつか計算し，それから一般の場合を推測しようとしたのではないでしょうか．本文には正 3 角形から正 20 角形まで順に方程式が述べられ，その数値解が与えられているだけです．もし一般式を求めようとしたのなら，関の計算は未完に終わったといわざるを得ません．ただ，それぞれの計算は必ずしも容易ではなく，関の実力を認めることにやぶさかではありません．

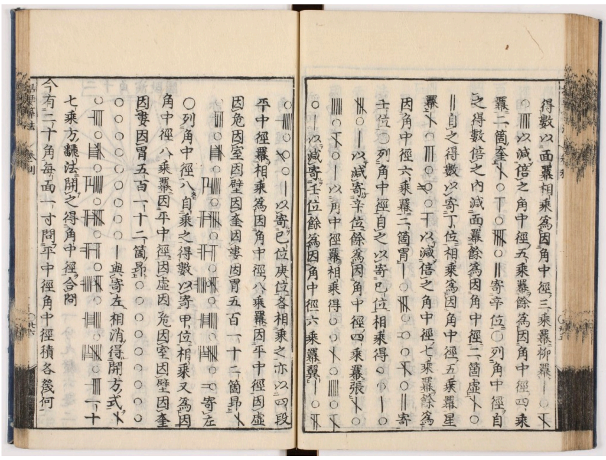

図 10　『括要算法』（京都大学数学教室蔵）正 20 角形の外接円の直径の計算

実はこの問題は正 $n$ 多角形 $A_0A_1\cdots A_{n-1}$ の一辺の長さを $a$，外接円の半径を $r$，対角線 $A_0A_k$ の長さを $a_k$（$1 \leq k \leq n-1$）とすると

$$a_1 = a, \quad {a_2}^2 = 4a^2 - \frac{a^4}{r^2}, \quad a_{k+2} = \frac{a_2}{a}a_{k+1} - a_k \tag{1}$$

となり，特性方程式

$$x^2 - \frac{a_2}{a}x + 1 = 0$$

の解を $\alpha$，$\beta$（$\alpha < \beta$）とすると，

$$a_k = \alpha^{k-1}a_1 + (a_2 - \alpha a_1)\frac{\beta^{k-1} - \alpha^{k-1}}{\beta - \alpha}$$

となって解けるのですが，関はそのことは述べていません．上の漸化式 (1) の最後の式はいわゆるトレミーの定理によってわかるのですが，関はそれを知らなかったのかも知れません．

与えられた正多角形の外接円，内接円の半径を求める問題は百川治兵衛の『諸勘分物』(1622) にその端緒を見い出すことがき，その後，吉田光由の『塵劫記』(1627)，今村知商の『竪亥録』(1639)，磯村吉徳『算法闕疑抄』(1659)，村松茂清（1663）などにも見ることができます．たとえば今村は正 3 角形から正 10 角形までを採り上げており，村松は正 16 角形まで扱っています．このような研究の文脈の中で関はそれを完全に解決しようとしたと思われます．

第 4 巻（巻貞）の求円周率術，求弧術，求立円周積術は文字通り，順に円周の長さ，円弧の長さ，球の体積を求める計算です．求円周率術での加速計算については先に簡単に述べましたが，関はそれにつづいて十進値で得られた円周率を近似分数化して，最終的に 355/113 を得ています．求弧術では円弧の長さを円弧の高さによって表す公式が述べられます．この計算はいわゆるニュートンの補間法に類似したもので，関の計算したものの中で最も膨大かつ精緻なものの一つです．その結果は真の値との誤差が大体 100 万分の 1 程度の精度をもっています．最後の求立円周積術では球を薄く 50 片に輪切りにして，各片を円柱で近似し，その和で球の体積を近似します．そのような計算を 100 片，200 片についても計算して，これら三つの値から加速計算（増約術）によって球の体積を求めました．

ここでは球の体積についてもう少し詳しく述べておきます．今，直径が $d = 10$ の球の半径を $n = 25$ 等分し，この点を通り半径に垂直な平面で輪切りにします．このとき，それぞれの円台を，底面の面積と上面の面積の平均値を底面とし，高さを $d/2n$ の円柱で近似します．この平たい円柱の体積をすべて足し合わせて 2 倍すると，球の第一の近似値

$$v_1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6n^2}\right) d^3$$

が求まります．次に半径を 50 等分して，同様の計算をすると第二の近似値

$$v_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4 \cdot 6n^2}\right) d^3$$

が得られます．さらに次に半径を 100 等分して，同様の計算をすると第三の近似値

$$v_3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{16 \cdot 6n^2}\right) d^3$$

が得られます．関はこのような式による計算はしておらず，具体的に丹念に数値を計算して，$v_1 = 666.4$，$v_2 = 666.6$，$v_3 = 666.65$ を得ています（この値は係数 $\pi/4$ を除いた値です）．そこで先の加速計算をして，

$$v_2 + \frac{(v_2 - v_1)(v_3 - s_2)}{(s_2 - s_1) - (s_3 - s_2)} = 666\frac{2}{3}$$

を得ました．したがって球の体積は円周率を 355/113 として

$$666\frac{2}{3}\cdot\frac{4\cdot 113}{355}=523\frac{203}{339}$$

となります．関はこのあと，

$$523\frac{203}{339}=\frac{177500}{339000}d^3=\frac{355}{678}d^3$$

として，玉法（球の体積の外接立方体の体積に対する比）355/678 を得ています．

ところで，先ほどの $v_1$，$v_2$，$v_3$ の式から加速計算をすると，

$$v_2+\frac{(v_2-v_1)(v_3-s_2)}{(s_2-s_1)-(s_3-s_2)}=\frac{2}{3}d^3$$

となって $n$ の値によらないことがわかります．関がこのことに気づかなかったというのもいささか不思議ですが，気づいたという記録はないのですから，何も言えません．田中由真は『円理俗解』で 100，200，400 等分し，本多利明は『四約術』で 10，100，1000 等分して球の体積を求めています．関もその後の時代の数学者も球の体積に関する限り，式での計算はせずに，数値計算とその観察に基づいて求めたというのが事の真相だったようです．

## 6　関孝和研究の先端

関孝和は江戸時代の数学の確立者であり，しかも江戸時代を代表する数学でもある訳ですから，関孝和の事跡，数学の研究は江戸時代の数学の研究では極めて重要な課題です．

今回，重要なことで話をする機会を逸したことがいくつもあります．それを補いつつ最近の研究の動向を概観すべきかも知れませんが，話題が専門的になりすぎるかも知れません．そこでここでは，最近，関孝和や江戸時代の数学について論文などを発表されている先生方を紹介させていただくことにします（お名前を出すのを忘れてしまって，「わたしの名前がない」と叱られる可能性もありますが，他意はありません）．今回の講演はそのような先生方の多くの研究成果に基づいていています．

数学界で昔から江戸時代の数学に関心を持っておられたのは杉浦光夫先生，竹之内脩先生，小松彦三郎先生，森本光夫先生，上野健爾先生，和田秀男先生などでした．しかし，1997 年に竹之内脩先生が京都大学の数理解析研究所で「数学史の研究」に関する研究集会を始められたのを機に，これまで江戸時代の数学に個人的に関心を持ちながら格段論文を発表してこられなかった（と思われる）以上の先生方に加え，最近では真島秀行先生や長田直樹先生なども精力的に関孝和の研究を始められて，多くの知見が得られました．一方，数学史家では小林龍彦先生や佐藤賢一先生などが厳密な歴史学的手法に基づく研究を続けておられます．

これまで数学者は序文や跋文を読まずに江戸時代の数学を論じ，数学史家は本文を読まずに江戸時代の数学を論ずる感がありました．これはいささか極端ですが，以前のわたしの印象は

そのようなものでした．ところが，最近徐々に互いの方法が理解されつつあるような気がします．これは従来あまり交流がなかった数学者と数学史家の交流が深まりつつあることの成果です．

江戸時代の数学において数学上の発想がどのように生まれ，それがどのように展開したかは重要な課題です．そのために算書において数学がどのように書かれているか正確に読み解かねばなりません．このような研究は数学者の得意とするところでしょう．一方，当時何が知られ，何が知られていなかったかを明らかにして，歴史の文脈で江戸時代の数学者を眺めなければ時代錯誤に陥ることは必定です．たとえば，数学上の発想の嚆矢をどこまで遡るべきかはなかなか難しい問題で，「数学者ならそのくらいは気づいていただろう」などと安易に結論づけることはできません．わたしは最近，何人かの数学者と江戸時代の数学の研究をして，江戸時代の算書を読んで著者に共感できるのは数学者だけだと思うようになりました．その一方でそのような共感は歴史学の方法を無視した独善に陥る危険もはらんでいます．そこで数学者と数学史家の共同作業が大きな意味を持つような気がするのです．

さて「江戸時代の数学」研究史において，現在はおそらく研究の盛んな一時代として記憶に残ると思います．とはいえ，現存の算書は膨大な冊数になり，これを読むのは大変です．まだ誰も読んだ事のない算書もあるに違いありません．現在，研究が精力的に進められていることを申し上げ，また研究が将来，衰退しないように新しい研究者が現れることを心より希求しつつ，今回の話を終わりにしたいと思います．

## 参考文献

上に述べたように本講演は多くの研究者の研究成果に基づいていますが，今回は論文ではなく市民講演ということで，一々それをことわりませんでした．ここにその論文などを引用して公正を期すべきですが，それも省いて，ごく僅かな書物——いかにも僅かな書物——を挙げておきます．研究成果を利用させていただいた方々にその失礼をお詫びするとともに，ご寛恕のほどお願いします．また心よりお礼申し上げます．


- 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一『関孝和論序説』（岩波書店，2008）．
- 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一『関孝和全集』（岩波書店，予定）．
- 佐藤賢一『近世日本数学史——関孝和の実像を求めて』（東京大学出版会，2005）．
- 細井淙『和算思想の特質』（共立社，1941）