関孝和、人と業績

竹之内　脩

1　関孝和

関孝和は、1640 頃生まれ。1708 年没。

内山七兵衛永明次男。関家に養子として入る。

どのような仕事をしていたのか、ほとんどわかっていない。1685 年頃の甲府藩での検地帳にその名が残っている。1705 年致仕、そのときの役職は、西城御納戸組頭で、廩米 300 俵であった。

関の家は、1735 年、養子に迎えた新七の不行跡により、お取りつぶしとなる。

関孝和は、まことに稀代の天才といってよいであろう。

西欧の数学では、古くからの伝統があった。2000 年以上昔のエウクレイデス、アルキメデス、アポロニウスから、新時代の幕を開けた 17 世紀はじめのガリレイ、ケプラー、デカルト、そしてニュートン、ライプニッツと続けて営々と築かれてきた数学。それに対し、関の時代の日本の数学は、中国から伝えられた二三の算書、それらと僅かに三平方の定理を使った計算くらいで、算者の数は少なくはなかったようであるが、程度は高くなかった。そのような状況の中から、以下に紹介するような展開をみるのである。まさに偉業である。

エウクレイデスの『原論』。これを見て、これがエウクレイデスが一人で作ったと思う人はおるまい。それ以前の人たちの営々辛苦の作品の結集と思うであろう。一方、関の作品は、正に当代の誰もがなしえなかった境地のものばかりである。

関は、どのような境遇にあって、その研究を進展させることができたのであろうか。研究に没頭できるような環境にあったのか。どのようにして、あれだけの業績をあげ得たのか。瞠目の他はない。

関の業績とみなされるものは、『関孝和全集』（大阪教育図書 、1974 年） が刊行されている。これには、出版された書物、門人の手になる筆写した稿本、没後出版された書物など 27 編、その他が編集されている。以下、その中の主要なものについて、解説しよう。必ずしも成立年代順ではない。

2　括要算法

関の死後、門人たちが集まって、先生の業績を顕彰する書物の刊行を企画した。そしてできたのが『括要算法』元、亨、利、貞 の 4 巻 (1712) である。

関の高弟として著名なのは建部賢弘であるが、建部は、関の数学の集大成を作るために、関と兄の建部賢明(かたあきら)とともに 1685 頃から『大成算経』（予めは『算法大成』）の著作にかかわっており、この『括要算法』の編集には関与していない。『括要算法』は、大高由昌が校訂し、それを荒木村英が検閲したと書かれている。

2.1　巻元

この巻では、朶積術(だせきじゅつ)が扱われている。朶積術とは、自然数の累乗の和を表す多項式

$$s_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

を求める術である。

関は、この結果を次の表の形で与えている。

	$\rlap{1}0$											
空	12	$\rlap{1}0$										
5/66 を取り加える	66	11	$\rlap{1}0$									
空	220	55	10	$\rlap{1}0$								
1/30 を取り減ずる	495	165	45	9	$\rlap{1}0$							
空	792	330	120	36	8	$\rlap{1}0$						
1/42 を取り加える	924	462	210	84	28	7	$\rlap{1}0$					
空	792	462	252	126	56	21	6	$\rlap{1}0$				
1/30 を取り減ずる	495	330	210	126	70	35	15	5	$\rlap{1}0$			
空	220	165	120	84	56	35	20	10	4	$\rlap{1}0$		
1/6 を取り加える	66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	$\rlap{1}0$	
1/2 を取り加える	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
全	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	十乗	九乗	八乗	七乗	六乗	五乗	四乗	三乗	立	平	圭	基数
原法	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	

$\rlap{1}0$ は、1 の上に 0 を重ね書きしたもの。そこは本来 1 だが、そこを 0 にするとの意

この表は、2 項係数の表をもとにしている。この表の意味は、次の通りである。

まず、表の下の　圭、平、立、三乗、$\cdots$　は、本来、圭朶、平方朶、立方朶、三乗方朶、$\cdots$　と書くべきところであるが、省略がされている。基数というのはどういうことか、不明である。

圭の欄は、縦に、下から見て 1, 2, 0 で、これは、$n^2,\ 2n,\ 0$ を示している。そして、左に、n^2 は全部、$2n$ は $\dfrac{1}{2}$ を取り加える、とあるので、$\dfrac{1}{2}\times 2n$ を加える。したがってここは、n^2+n を作ることになる。そして、下に原法 2 とあるので、これを 2 で割るのである。これが $1+2+3+\cdots+n$ の答で、それが、$\dfrac{1}{2}(n^2+n)$ ということを示している。(法というのは、割る数、すなわち除数のことである。)

同様に、次の平の縦の欄は、1, 3, 3, 0 であるから、これは順に $n^3,\ 3n^2,\ 3n, 0$ を示し、左に、全、$\dfrac{1}{2}$ を取り加える、$\dfrac{1}{6}$ を取り加える、空　と指示されているので、$n^3+\dfrac{1}{2}\times 3n^2+\dfrac{1}{6}\times 3n$ とし、これを下の原法 3 で割って、$\dfrac{1}{3}\left(n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n\right)$

これが、$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ の答である。以下、同様に用いられる。

ただし、三乗、四乗等の場合、何乗というのは、同じ数を何回掛けるという意味なので、例えば a の三乗は和算では、$a\times a\times a\times a$ で今日の語では a の 4 乗 a^4 となる。a の四乗は a^5 の意味である。したがって、上の表は、$s_{11}(n)$ までが述べられていることになる。それから先はどうなるのかということ、また関がどのようにしてこの表を作ったのかということは、参考文献の第 3 章を見ていただきたい。

この表で、左に書いてある数

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{6},\quad 0,\quad -\frac{1}{30},\quad 0,\quad \frac{1}{42},\quad 0,\quad -\frac{1}{30},\quad 0,\quad \frac{5}{66},\quad 0$$

は、重要な数で、ベルヌイ数と呼ばれているものである。

ヤコブ・ベルヌイ Jakob Bernoulli は、その死後出版の Ars Conjectandi (1715) において、次の式を与えている。

$$\begin{aligned} s_p(n) &= \frac{1}{p+1}n^{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\frac{p}{2}B_1n^{p-1} \\ &- \frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_2n^{p-3}+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}B_3n^{p-5}-\cdots \end{aligned}$$

関の与えたものは、これを書き下した形になっている。

ここで $B_1,\ B_2,\ B_3,\ \cdots$ が、ベルヌイ数と呼ばれているものであるが、関のほうがベルヌイより早いのだから、これは、関－ベルヌイ数と呼ぶべきである、などと書いている書物もある。しかし、その数学における重要性からいって、残念ながら、関は一歩、引かざるをえない。

2.2　巻亨

巻亨では、はじめ諸約之法として一般の整数問題を扱い、後の部分では、翦管(せんかん)術が扱われている。

翦管術

中国の古典孫子算経 (400 年頃、著者不明) に、

> 今、物がある。その総数はわからない。
>
> その数を 3 ずつ数えると 2 余り、5 ずつ数えると 3 余り、7 ずつ数えると 2 余るとき、物の数はいくつか。
>
> 答 23。
>
> 術に曰く、3 ずつ数えた余り 2 に対しては 140 を置き、5 ずつ数えた余り 3 に対しては 63 を置き、7 ずつ数えた余り 2 に対しては 30 を置く。これを併せると 233 となるが、これから 210 を減ずる。すなわち、3 ずつ数えた余り 1 には 70、5 ずつ数えた余り 1 には 21、7 ずつ数えた余り 1 には 15 を対応させて、答が 106 以上になったら 105 を減ずるのである。

とあり、この計算をヨーロッパでは Chinese remainder theorem といい、日本では「百五減算」、中国では、「孫子定理」といっている。

翦管術とは、これを一般にした算法のことで、

連立 1 次合同式

$$x \equiv r_1 \pmod{m_1}, \quad \cdots, \quad x \equiv r_n \pmod{m_n}$$

の解法のことである。

「翦管術」という名称は、楊輝『続古摘奇算法』(1275) の中で用いられた用語である。

2.3　巻利

この巻では、角術として、正 3 角形から正 20 角形について、1 辺の長さからその内接円、外接円の半径を求める方程式を導いている。その方法は一貫していて、すばらしいものである。

2.4　巻貞

この巻は、最も著名なものである。

円周率を求める術

まず、円に内接する正多角形の周の長さをもとに、円周率の近似値をつくる。

これは、中国の『九章算術』において扱われ、3.1416 という値が得られている。日本では江戸時代 3.16 というのが普通に用いられていたが、これの由来は明らかでない。関の時代、1670 年頃、何が正確な値かということが問題にされていたようである。

日本で、円に内接する正多角形の周から円周率の近似値を求めようとしたはじめは、村松茂清『算俎』(1663) である。彼は、四角形からはじめて、2^3, 2^4 と次々に角数を倍にしてゆき、2^{15} まで計算した。

関は、この計算を 2^{17} 角形までについて行う。

$$
\begin{aligned}
32768\text{ 角の周を } a &= 3.14159264877698567 08\text{弱} \\
65536\text{ 角の周を } b &= 3.14159265238659135 71\text{強} \\
131072\text{ 角の周を } c &= 3.14159265328899277 59\text{弱}
\end{aligned}
$$

として　$b + \dfrac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$　を計算し、3.14159265359 微弱を得て、これを定周とした。

このような計算法は、今日では加速法として、数値計算では、常識的となっているものである。このような計算法をこの時代に作り出していることは、まことに素晴らしいことである。

零約術　円周率の近似分数　$\dfrac{22}{7}$,　$\dfrac{355}{113}$　の解明

関は、

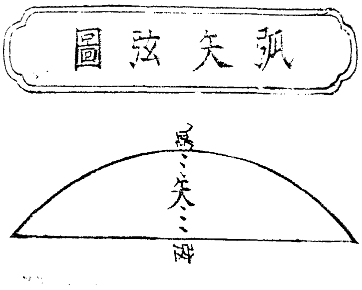
$$\frac{3}{1},\quad \frac{7}{2},\quad \frac{10}{3},\quad \frac{13}{4},\quad \frac{16}{5},\quad \frac{19}{6},\quad \frac{22}{7},\quad \cdots$$

と順につくっていき、$\dfrac{355}{113}$　に至って、

> 「これは定周に比してわずかな違いがあるが、定周は使うとき長くてわずらわしいので、これを今後定率として用いる。」

といって、その後の展開では、円周率として、この分数を使って記述している。

求弧術



関は、右図に示したように一つの円弧に対し、その両端を結ぶ弦と、弧の中点と弦の中点を結ぶ線分、これを矢という、の長さを与えて、この弧の長さ、弧背という、を求める式を作っている。

これには、関より以前、今村知商が竪亥録 (1639) の中で与えた式があるが、これは粗雑に過ぎ、使用に耐えるものではなかった。　関は、直径 1 の円で、矢の長さが　0.1, 0.2 ,0.3, 0.4, 0.45　のとき正確な値を与えるような式を作っている。しかし、その方法は煩雑で、得られた式も、分数計算を伴う複雑なものであった。これは、後年、建部賢弘が『綴術算径』(1722) の中で、任意の矢の長さに対して精密な値を与える式を級数の形で作り、そのあと、それを継ぐ研究が円理として和算の伝統的な研究対象になった。

求立円

これは、球の体積を求める計算を示したものである。球をその一つの直径に垂直に、50 等分、100 等分、200 等分してスライスし、それを円錐台の和として体積の近似和を求め、円周率を求めるときに使った加速計算で値を求めている。

2.5　括要算法にみられる諸術の成立について

以上は、概略、『括要算法』の内容を述べたものであるが、関の研究がこの順でなされたとは考えられない。

関は求立円積術において、自然数の 2 乗の和の公式を使えば簡単にすむ計算を、スライスした部分の体積を一つずつ計算して、それを加えている。すなわち巻元の朶積術は、まだこのときには作っていなかったと考えられる。

1670 年頃、算者の間では、円周率のこと、正多角形のことなどが話題にされていたと考えられる。そのことは、池田昌意が 1674 年に著した『数学乗除往来』に、次の諸問を遺題として挙げていることから知られる。

1. 今、弧形がある。只云う、矢若干。問う、積幾何ぞ。
   円の率は、周 355 尺、径 113 尺を用う。
2. 今、五角形がある。只云う、面若干。問う、積幾何ぞ。
   並びに、七角形、および九角形の積を問う。

3. 今、円の内に図の如く五斜有り。只云う、甲斜、乙斜、丙斜、丁斜、戊斜若干。
問う、円径幾何ぞ。

5. 今、円率有り。或いは径 1、周 3142、或いは周 22 尺、徑 7 尺、
或いは周 355 尺、径 113 尺。問う、此の如きの諸率を求むる術如何と。

これをもとに考えると、巻貞の円に関すること、巻利の正多角形に関することは、1675 年頃に考えたものであろう。巻元の朶積術については、関は、1670 年代の後半では、暦の研究をしていた。中国の授時暦では、朶積術が用いられる。それでこの研究をしたのであろう。

3　発微算法

関孝和が唯一刊行した書物は、『発微算法』(1674) である。これは、沢口一之『古今算法記』(1671) の遺題 15 問に解を与えたものである。この遺題はたいへん難しく、当時の人には歯が立たなかった。関は、この遺題に挑戦して、これを解決したのである。ところが、その解がまた難物で、このように順にやっていくと答が出る、というだけで、どうしてそうなるのかという説明が全くない。このため、「発微算法誤改術」というのを書く人まで現れた。建部賢弘が、後に、1685 年、著した『発微算法演段諺解』によって、はじめて人は関のやり方を理解することとなった。

『発微算法』は、問題の解を与えているだけで、ここに内容を紹介する意味はない。しかし関は、恐らくこの問題の解決のために、数学上、彼の最大の貢献とされる「傍書法」を考案したと考えられている。以下で、傍書法とは何かを見ていくことにするが、算木の置き方、天元術についてまず説明する。

4　解隠題之法

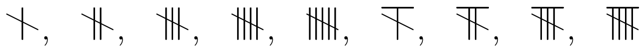
算木　和算では、方程式をたてて解を求める場合、中国で 13 世紀に作られた「天元術」が用いられていた。天元術では、算盤（さんばん）という紙または板の上に、算木 (もしくは算籌（さんちゅう）) という赤または黒の棒 (5 cm 位の四角の棒) を置いて、数を表す。

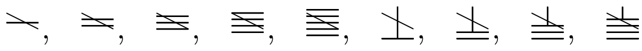
縦置き　〇,　𝍠,　𝍡,　𝍢,　𝍣,　𝍤,　𝍥,　𝍦,　𝍧,　𝍨
横置き　〇,　𝍩,　𝍪,　𝍫,　𝍬,　𝍭,　𝍮,　𝍯,　𝍰,　𝍱

縦置きは奇数桁に、横置きは偶数桁に用いる。

19　は　𝍩𝍨、　2008　は　𝍪〇〇𝍧　の如くである。

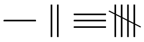
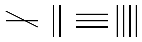
算木では、正の数に対しては赤の棒、負の数に対しては黒の棒を用いた。しかし、紙の上に書くときは、負の数は斜めに線を入れて、

縦置き 

横置き 

とする。

また、桁数の多い数は、どこか一カ所に斜めの線を入れる。例えば、

-1234 は  または 

の如くである。

天元術 は、算木を用いてする代数計算の方法である。

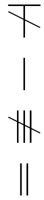
算盤上の実の位置に、まず 太 およびその下の方（法）に天元の位置を定める。太は太極の意味で、天地の根元を示す。昔はその上下の位置にもっと名前をつけていたらしいが、12 世紀頃には天元だけが残った。計算は、この算盤の上に算木を並べて行う。

天元に一を置き、それを未知の元として、それから計算をはじめる。それでこの術を、はじめは天元一術と呼んでいたらしいが、そのうちに単に天元術と呼ぶようになった。

天元の一を立てて、⋯ となす。

というのが、計算のはじめのきまり文句である。これから先には、天元の言葉は現れない。算盤上の位置は、 太 の位置からはじめて、順に実、方 (または法)、廉 (れん、次数が高いときは、第一廉、第二廉、⋯ と増やす)、そして一番下を隅という。これらの位置を級といい、この実級、方級、廉級、隅級のところに算木を並べて数式を表示する。

実
方
廉
隅

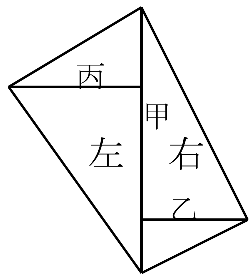


算木で数を表す方法は、すでに示した。そして、これで数式を表す。例えば、左に示したのは、$-6+x-3x^2+2x^3$ を表している。立天元一為 ⋯ というのは、⋯ を未知数 x とする、ということなのである。

関は、『解隠題之法』の中では最初に天元の一の立て方、式の操作、及び得られたで開方式 (方程式のこと) の解を求める方法を説明している。これで実際解をもとめられるのは、数係数の方程式だけであるが、そのような方程式ならば、何次方程式でも扱って計算ができる。実際、角術 (『括要算法』巻利) では、18 次方程式の解を求めている。

しかし、文字係数の方程式は、天元術では扱えない。

そこで、関は、文字係数の方程式を扱う方法を発明した。これは、和算史上、関の最大の貢献とされているものである。それが『解見題之法』の中で示されている。それは、算木の傍らにそれがどのような量であるかを示す文字を添えることである。　一例を示す。



◇ 四不等 (4 辺の長さの異なる四角形) があり、

甲、乙、丙が知られているとき、面積を問う。

甲、乙を相乗。右側の面積の 2 倍を得る。

甲、丙を相乗。左側の面積の 2 倍を得る。

二つの積を相併せ、これを折半して、面積を得る。

|甲乙　　|甲丙

この方法の開発により、代数方程式を自由に扱うことができるようになり、その後の和算の大きな発展が導かれることとなった。

この関の発明になる方法を **傍書法** という。また後の人により、点竄術（てんざんじゅつ）とも呼ばれている。

5　解伏題之法

関の業績として、もう一つ有名なのが「行列式」のことである。この理論は、『解伏題之法』に展開されている。

行列式は、現在われわれは、連立 1 次方程式の解を求める方法として学んでいる。しかし関の理論はそのようなものではなく、ある変数に関するいくつかの代数方程式から、この変数を消去した式を作るというものである。　このような計算は、西欧では、18 世紀後半、Cramer、Bézout などによってなされ、終結式と呼ばれている。

関の与えている表を掲げよう。

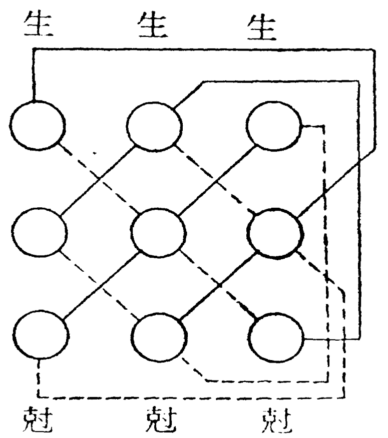
三式	二式	一式
壬	己	丙
辛	戊	乙
庚	丁	甲

これは、同じ天元一の上に立てられた三つの開方式で、これからこの天元一を消去し他の変数の式を作ろうというのである。それによって、甲、乙、丙、丁等に含まれる次の元の開方式が得られることになる。

相壬 乗乙 丁 **生**	相己 乗辛 甲 **生**	相丙 乗戊 庚 **生**
○	○	○
三 辛丁乙	二 辛戊甲	一 庚戊乙
六 庚丁乙	五 辛丁甲	四 庚戊甲

相壬 乗戊 甲 **剋**	相己 乗乙 庚 **剋**	相丙 乗辛 丁 **剋**
○	○	○
二 辛戊甲	一 庚戊乙	三 辛丁乙
四 庚戊甲	六 庚丁乙	五 辛丁甲

関は、これを生剋とよんでいる。そしてさらにこれを計算する方法として、右の斜乗の図を与えている。(実線はプラス、破線はマイナスというが、和算では、左右反対になることを思い出していただきたい。) これは、サラスの方法としてわれわれに馴染み深いものであるが、サラスは 19 世紀前半の人である。



6　その他

関には、楕円や、相貫体などの図形に関する議論もある。 これらは、『七部書』の中の『求積』の中で扱われているが、内容が雑多であり、まとめて関が書いたものというより、関の書いたものを弟子がまとめたものと見られる。 『関孝和全集』には、『大成算経』にまとめられている、とある。

参考文献　竹之内脩『関孝和の数学』、共立出版（2008）