Université Paul Valéry

Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

Fonctions de 2 et 3 variables

Administration **É**conomique et **S**ociale

Mathématiques

XA100M

1 Définitions

Une fonction à 2 variables est un objet qui à tout couple de nombres réels (x, y) associe **au plus** un nombre réel. Si f est une telle fonction, on note

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Si f associe un nombre à (x, y), on note $f(x, y)$ ce nombre. On dit qu'on peut **évaluer** f en (x, y) et $f(x, y)$ est la **valeur** de f en (x, y).

Une fonction à 3 variables est un objet qui à tout triplet de nombres réels (x, y, z) associe **au plus** un nombre réel. Si f est une telle fonction, on note

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Si f associe un nombre à (x, y, z), on note $f(x, y, z)$ ce nombre. On dit qu'on peut **évaluer** f en (x, y, z) et $f(x, y, z)$ est la **valeur** de f en (x, y, z).

Si f est une fonction (à 2 ou 3 variables), l'ensemble des valeurs en lesquelles on peut évaluer f est le **domaine de définition** de f. On note $D(f)$.

Exemple

Soit

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{1}{x-y}. \end{array}$$

C'est une fonction à 2 variables qu'on peut évaluer en tous les couples (x, y) tels que $x - y \neq 0$. Ainsi

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x \neq y\}.$$

On a

$$f(2,3) = \frac{1}{2-3} = -1.$$

Exemple

Soit

$$\begin{array}{ccccc} g & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{yz}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

C'est une fonction à 3 variables qu'on peut évaluer en tous les couples (x, y, z). Ainsi

$$D(g) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

On a

$$g(2,3,1) = \frac{3\times 1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad g(0,32,12) = 0.$$

2 Extremums sous contrainte : méthode de substitution

2.1 Extremums sous contrainte

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

une fonction de deux variables et

$$\begin{array}{rccc} c & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & c(x,y) \end{array}$$

une deuxième fonction de deux variables.

Chercher le **maximum de f sous la contrainte** $c(x,y)=0$ c'est chercher, parmi tous les couples (x,y) de $D(f)$ tels que $c(x,y)=0$, celui pour lequel $f(x,y)$ est maximum.

Un couple (x_0, y_0) de $D(f)$ est un maximum sous la contrainte $c(x, y) = 0$ si

☞ $c(x_0, y_0) = 0$;

☞ pour tout couple (x, y) de $D(f)$ tel que $c(x, y) = 0$, on a

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

STOP Une fonction peut ne pas avoir de maximum sous contrainte.

Chercher le **minimum de f sous la contrainte** $c(x, y) = 0$ c'est chercher, parmi tous les couples (x, y) de $D(f)$ tels que $c(x, y) = 0$, celui pour lequel $f(x, y)$ est minimum.

Un couple (x_0, y_0) de $D(f)$ est un minimum sous la contrainte $c(x, y) = 0$ si

☞ $c(x_0, y_0) = 0$;

☞ pour tout couple (x, y) de $D(f)$ tel que $c(x, y) = 0$, on a

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

STOP Une fonction peut ne pas avoir de minimum sous contrainte.

2.2 Méthode par substitution

Objectif : chercher les extremums d'une fonction de deux variables f sous la contrainte c.

Limite de la méthode : pas toujours réalisable.

Mise en œuvre : dans la contrainte $c(x, y) = 0$, exprimer

1. la variable x en fonction de y : on obtient $x = h(y)$
2. ou la variable y en fonction de x : on obtient $y = h(x)$.

Dans les deux cas, h est une fonction de **une** variable. Les valeurs $f(x, y)$ deviennent alors

1. soit $g(y) = f\left(h(y), y\right)$ dans le premier cas ;
2. soit $g(x) = f\left(x, h(x)\right)$ dans le second cas.

Il faut alors chercher les extremums de la fonction g qui est une fonction d'une variable (*cf.* TD 4 de méthodologie).

Exemple

On considère la fonction

$$f(x,y) = 2xy$$

de domaine de définition $D(f) = \mathbb{R}$ et la contrainte

$$c(x,y) = 2x + 3y - 6.$$

Les couples (x,y) tels que $c(x,y) = 0$ sont ceux tels que

$$y = 2 - \frac{2}{3}x.$$

Ainsi, les couples vérifiant $c(x,y) = 0$ sont transformés par f en

$$f(x,y) = f\left(x, 2 - \frac{2}{3}x\right) = 2x\left(2 - \frac{2}{3}x\right)$$

et on doit étudier les extremums de

$$g(x) = 2x\left(2 - \frac{2}{3}x\right).$$

On calcule
$$g'(x) = -\frac{8}{3}x + 4.$$

Ainsi $g'(x) > 0$ pour $x < \dfrac{3}{2}$ et $g'(x) < 0$ pour $x > \dfrac{3}{2}$ et g a un maximum atteint en $x = \dfrac{3}{2}$. On a alors
$$y = 2 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1.$$

Sous la contrainte $2x + 3y - 6 = 0$, la fonction $f(x, y) = 2xy$ admet un maximum, ce maximum est atteint en $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ et vaut
$$f\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 3.$$

La fonction $f(x, y) = 2xy$ n'a pas de minimum sous la contrainte $2x + 3y - 6 = 0$.

3 Dérivées partielles premières et deuxièmes

3.1 Dérivées partielles premières des fonctions à deux variables

Soit

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

une fonction à 2 variables.

On dit que f admet une **dérivée première par rapport à x en** (x,y) si, la dérivée de la fonction

$$\begin{array}{rcccc} f_y & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

existe en x. On note

$$\begin{array}{rcccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & f'_y(x,y). \end{array}$$

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on dérive f par rapport à la variable x en considérant y comme un nombre constant.

On dit que f admet une **dérivée première par rapport à y en** (x, y) si, la dérivée de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_x & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & y & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

existe en y. On note

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial y} & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & f'_x(x, y). \end{array}$$

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on dérive f par rapport à la variable y en considérant x comme un nombre constant.

Exemple

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & x^2\sqrt{y}+y. \end{array}$$

On a

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon\, y\geq 0\}\,.$$

Si y est constant, la dérivée de $x^2\sqrt{y}+y$ par rapport à x est $2x\sqrt{y}$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sqrt{y}.$$

La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $D(f)$.

Si x est constant, la dérivée de $x^2\sqrt{y}+y$ par rapport à y est $x^2\frac{1}{2\sqrt{y}}+1$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2\frac{1}{2\sqrt{y}}+1.$$

La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x sur

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon y > 0\} \neq D(f).$$

3.2 Dérivées partielles deuxièmes des fonctions à deux variables

Les dérivées partielles premières étant des fonctions de deux variables, on peut éventuellement les dériver de nouveau par rapport à la première ou deuxième variable.

On note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

la dérivée partielle première par rapport à x de la dérivée partielle première par rapport à x de f. On l'appelle **dérivée partielle deuxième de f par rapport à** x.

On note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

la dérivée partielle première par rapport à x de la dérivée partielle première par rapport à y de f. On l'appelle **dérivée partielle deuxième de f par rapport à** (x, y).

On note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

la dérivée partielle première par rapport à y de la dérivée partielle première par rapport à x de f. On l'appelle **dérivée partielle deuxième de f par rapport à** (y, x).

On note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

la dérivée partielle première par rapport à y de la dérivée partielle première par rapport à y de f. On l'appelle **dérivée partielle deuxième de f par rapport à** y.

3.3 Dérivées partielles premières des fonctions à trois variables

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$$

une fonction à 3 variables.

On dit que f admet une **dérivée première par rapport à** x **en** (x,y,z) si, la dérivée de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_{y,z} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$$

existe en x. On note

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \longmapsto & f'_{y,z}(x, y, z). \end{array}$$

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on dérive f par rapport à la variable x en considérant y et z comme des nombres constants.

De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est la fonction de trois variables obtenue en dérivant f par rapport à y après avoir supposé x et z constants.

De même $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ est la fonction de trois variables obtenue en dérivant f par rapport à z après avoir supposé x et y constants.

3.4 Dérivées partielles deuxièmes des fonctions à trois variables

Si a est l'une des lettres x, y et z,

si b est l'une des lettres x, y et z,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)$$

est la dérivée partielle première par rapport à a de la dérivée partielle première de f par rapport à b. On l'appelle dérivée partielle deuxième de f par rapport à (a, b).

Exemple

Soit

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{x+y^2+\sqrt{z}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x+y^2-\sqrt{y}}{2(x+y^2+\sqrt{z})^2\sqrt{z}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{x+y^2-2\sqrt{y}-\sqrt{z}}{2(x+y^2+\sqrt{z})^3\sqrt{z}}$$

4 Extremums sous contrainte : méthode de Lagrange

On cherche les extremums de la fonction de deux variables f sous la contrainte c.

Objectif : chercher les extremums d'une fonction de deux variables f sous la contrainte c.

Limite de la méthode : cette méthode ne fournit que des **candidats**. Elle donne une liste de couples (x_0, y_0) et s'il existe un extremum, il doit être dans cette liste.

Cas particulier : si la liste des candidats est vide, il n'y a pas d'extremum.

Mise en œuvre : à partir de la fonction f et de la contrainte c on construit une fonction de trois variables

$$g(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda c(x, y).$$

On calcule les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda}.$$

La liste des candidats est l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Exemple

On cherche les extremums de

$$f(x, y) = 4\sqrt{xy}$$

sous la contrainte

$$c(x, y) = x + y - 6 = 0.$$

La fonction associée est

$$g(x, y, \lambda) = 4\sqrt{xy} + \lambda(x + y - 6).$$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \lambda, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \lambda, \qquad \frac{\partial g}{\partial \lambda} = x + y - 6.$$

Les candidats sont donc les solutions de

$$\begin{cases} 2\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \lambda = 0 \\ 2\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \lambda = 0 \\ x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

L'équation
$$2\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \lambda = 0$$
donne
$$y = \frac{\lambda^2}{4}x.$$
L'équation
$$2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \lambda = 0$$
donne alors
$$-\frac{4}{\lambda} + \lambda = 0$$
donc $-4 + \lambda^2 = 0$ puis $\lambda = -2$ ou $\lambda = 2$.

L'équation $x + y - 6 = 0$ devient alors

$$x + \frac{\lambda^2}{4} x - 6 = 0$$

puis

$$2x - 6 = 0.$$

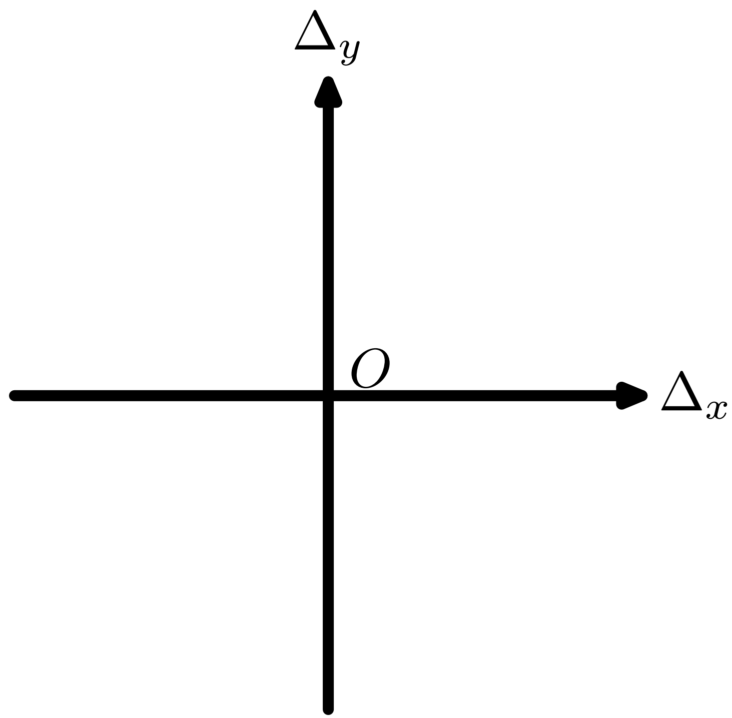
On a alors $x = 3$. Mais, $y = \dfrac{\lambda^2}{4} x$ donc $y = 3$.

SI la fonction f admet un extremum sous la contrainte c, cet extremum est atteint en $(3, 3)$ et vaut

$$f(3, 3) = 12.$$

5 Représentation graphique des fonctions à deux variables

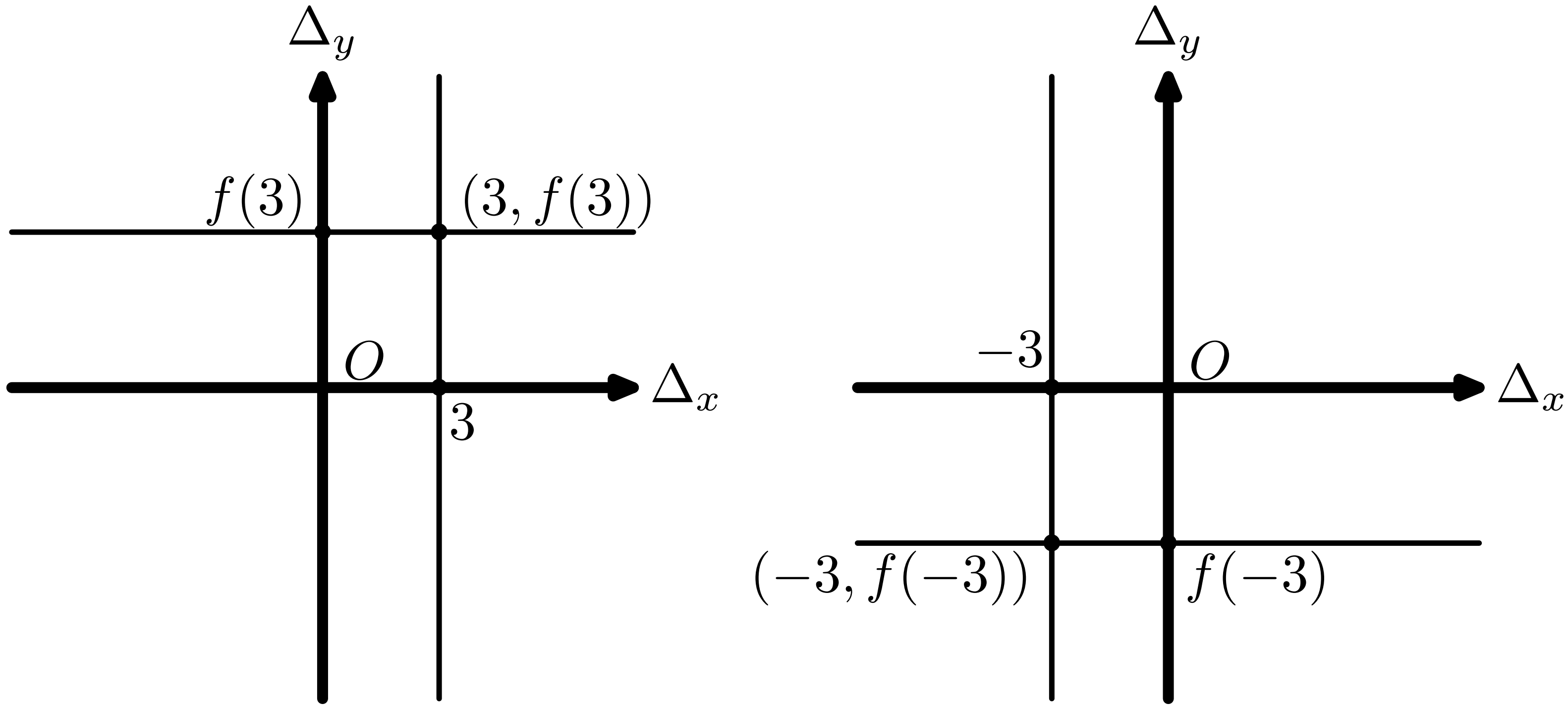
⏮ Pour représenter graphiquement une fonction de une variable, on peut procéder ainsi : on choisit deux axes gradués Δ_x et Δ_y qui forment un angle droit.


Δ_y
O
Δ_x

Pour tracer le point représentatif de $(x, f(x))$,

1. On repère x sur l'axe Δ_x en le plaçant à distance x de O
   - en mesurant de gauche à droite si $x \geq 0$
   - en mesurant de droite à gauche si $x < 0$
2. On repère $f(x)$ sur l'axe Δ_y en le plaçant à distance $f(x)$ de O
   - en mesurant de bas en haut si $f(x) \geq 0$
   - en mesurant de haut en bas si $f(x) < 0$
3. On trace une droite parallèle à Δ_y passant par le point repéré sur Δ_x
4. On trace une droite parallèle à Δ_x passant par le point repéré sur Δ_y
5. Le point représentatif de $(x, f(x))$ est le point à l'intersection des deux droites tracées précédemment.

La courbe de f est l'ensemble des points représentatifs de $(x, f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs du domaine de définition de f.

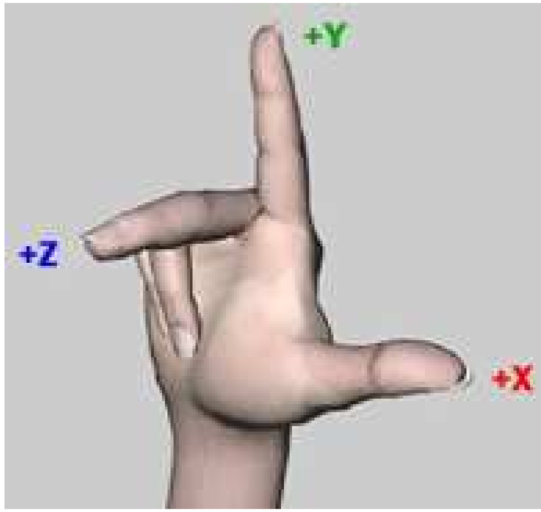


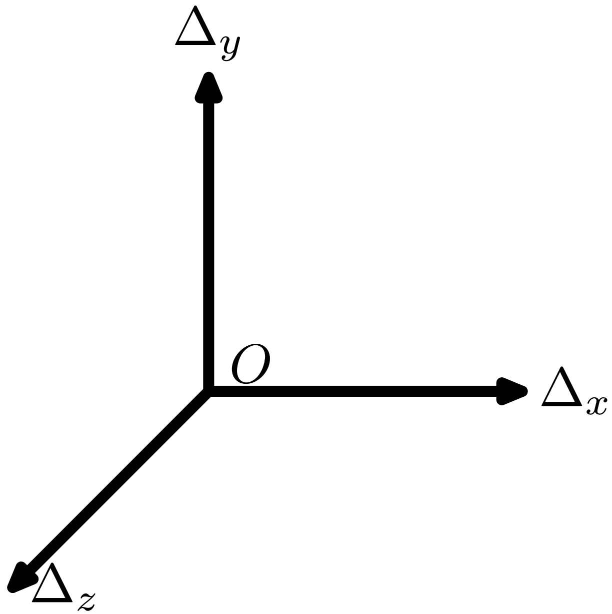
Δ_y
$f(3)$
$(3, f(3))$
O
Δ_x
3
Δ_y
-3
O
Δ_x
$(-3, f(-3))$
$f(-3)$

Pour représenter graphiquement une fonction de deux variables

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

il faut remplacer la feuille par l'espace. On place dans cet espace trois axes Δ_x, Δ_y et Δ_z gradués et tels que chaque axe est orthogonale aux deux autres..



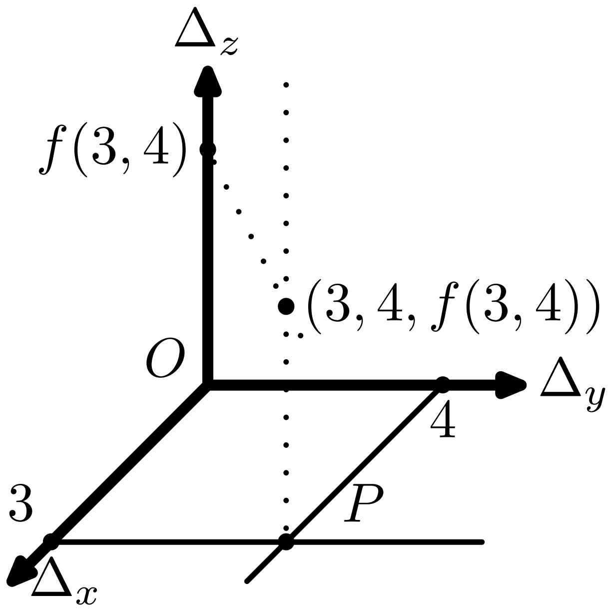


Pour tracer le point représentatif de $(x, y, f(x, y))$,

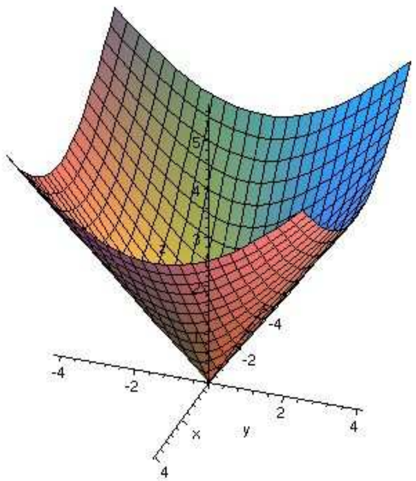
1. On repère x sur l'axe Δ_x en le plaçant à distance x de O
   - en mesurant de gauche à droite si $x \geq 0$
   - en mesurant de droite à gauche si $x < 0$
2. On repère y sur l'axe Δ_y en le plaçant à distance y de O
   - en mesurant de bas en haut si $f(x) \geq 0$
   - en mesurant de haut en bas si $f(x) < 0$
3. On repère $f(x, y)$ sur l'axe Δ_z en le plaçant à distance $f(x, y)$ de O
   - en mesurant d'arrière en avant si $f(x, y) \geq 0$
   - en mesurant d'avant en arrière si $f(x, y) < 0$.
4. On trace une droite parallèle à Δ_y passant par le point repéré sur Δ_x
5. On trace une droite parallèle à Δ_x passant par le point repéré sur Δ_y
6. On trace un point P à l'intersection des deux droites tracées précédemment

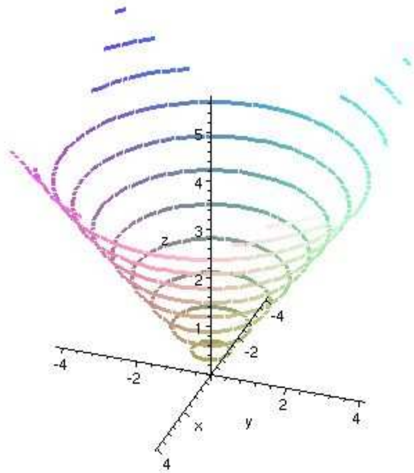
7. On trace la parallèle à Δ_z en ce point
8. On trace la parallèle à OP passant par le point repéré sur Δ_z
9. Le point représentatif de $(x, y, f(x, y))$ est à l'intersection des deux dernières droites tracées.

La courbe de f est l'ensemble des points représentatifs de $(x, y, f(x, y))$ lorsque (x, y) prend toutes les valeurs du domaine de définition de f.



$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$





6 Lignes de niveau

Sur le graphe d'une fonction à deux variables f, le point représentatitf de $(x, y, f(x, y))$ est à **hauteur** $f(x, y)$.

Une **ligne de niveau** de hauteur K de f est l'ensemble des couples (x, y) tels que $f(x, y) = K$.

Exemple : si $f(x, y) = x + y$, la ligne de niveau de hauteur K de f est l'ensemble des (x, y) tels que

$$x + y = K$$

c'est-à-dire

$$y = K - x.$$

Exemple

Si $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et si $K \geq 0$, la ligne de niveau de f de hauteur K est l'ensemble des points (x,y) tels que

$$\sqrt{x^2+y^2} = K$$

c'est-à-dire

$$x^2+y^2 = K.$$

C'est un cercle de rayon K et de centre O.

7 Tangentes

⏮ Si f est une fonction de **une** variable, la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 est une droite d'équation

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Exemple : si $f(x) = 2x^2$, on a $f'(x) = 4x$. Si x_0=1, la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 est

$$y = 2 + (x - 1) \times 4 = 4x - 2.$$

Dans le cas d'une fonction à 2 variables, c'est le **plan tangent** qu'on étudie.

Si f est une fonction à deux variables dont on sait calculer les dérivées premières, l'équation du plan tangent à f au point d'abscisse x_0 et ordonnée y_0 est

$$☞ \qquad z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemple : si $f(x, y) = x^2y^3$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

En le point d'abscisse $x_0 = 1$ et d'ordonnée $y_0 = 2$, on a alors

$$f(1, 2) = 8 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 16 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 12.$$

Ainsi, l'équation du plan tangent est

$$z = 16x + 12y - 32.$$