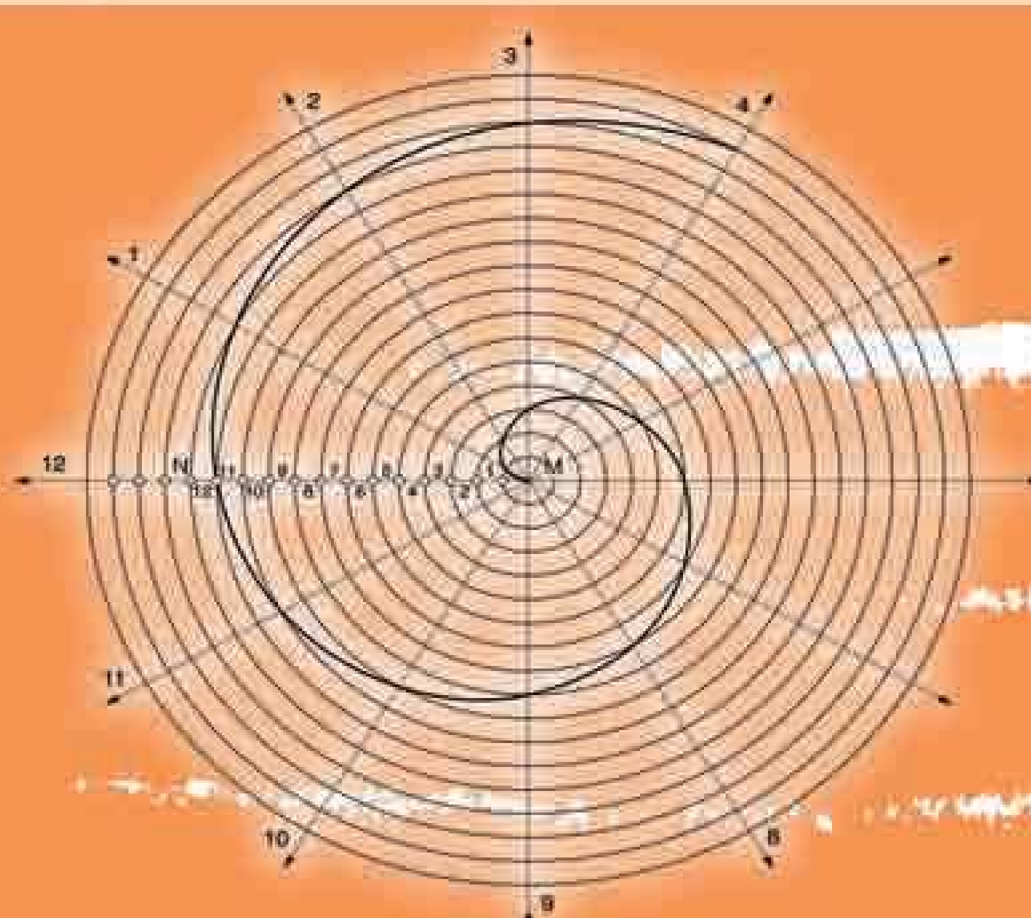
06

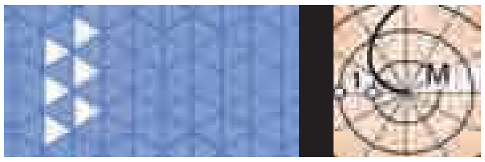
Curvas geométricas



En la actualidad, una parte importante de los objetos que se fabrican están realizados bajo algún tipo de forma curva geométrica.

Si prestamos atención a nuestro entorno, nos damos cuenta de que en muchos de los objetos que nos rodean están presentes las curvas técnicas y las curvas cónicas. Por ejemplo, desde la forma de parábola que algunos ojos de puente tienen, hasta la forma de ovalo u ovoide con que se han diseñado ciertas cucharas.

La naturaleza también contribuye a crear este tipo de formas; los meandros de algunos ríos, o el viento al modelar las arenas de los desiertos dan testimonio de este tipo de figuras geométricas.



6.1. Curvas geométricas

Se define a una línea como **curva geométrica** cuando se aparta constantemente de la dirección recta sin formar ángulos, y la trayectoria de los puntos que la forman es continua y, además, cumple una determinada norma.

Existen dos grupos de curvas geométricas: las denominadas **planas** y las **alabeadas.**

Una curva recibe el nombre de **plana** cuando todos sus puntos están situados en un mismo plano; y curva **alabeada** cuando cuatro de sus puntos no se encuentran en el mismo plano.

Dependiendo de la forma que tengan de generarse, las **curvas planas** se dividen en **curvas técnicas** y **curvas cónicas,** que poseen propiedades específicas y distintas entre sí.

6.2. Curvas técnicas

Las curvas técnicas tienen muchas aplicaciones en la resolución de problemas de dibujo técnico, ya sean éstos provenientes del ámbito del diseño industrial, arquitectónico o gráfico.

Las curvas de este tipo se configuran mediante la unión de arcos de circunferencia que son tangentes entre sí, dando lugar a la formación de figuras planas que pueden ser cerradas: **óvalo, ovoide;** o abiertas: **espirales, evolvente del círculo**, etcétera.

A. Óvalo

Definición

Es una curva plana y cerrada, simétrica respecto a sus dos ejes perpendiculares y formada por cuatro arcos de circunferencia iguales dos a dos.

Construcción de óvalos

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de óvalos más utilizados en dibujo técnico.

Óvalo conociendo el eje menor

1. Se traza la mediatriz del eje menor *CD,* obteniéndose el punto *O*. En la mediatriz está situado el eje mayor del óvalo.

2. Con centro en *O* y radio *OC* se dibuja una circunferencia que corta al eje mayor en los puntos O_1 y O_2; se unen estos puntos con *C* y *D* prolongando dichas rectas.

3. Con radio *CD* y centro en *C* y *D*, respectivamente, se trazan dos arcos que determinan los puntos *P* y *P'*, *Q* y Q', puntos de tangencia entre los arcos que forman el óvalo.

4. Por último, con centro en 0_1 y en 0_2, y radio 0_1P, se trazan los otros dos arcos para unir *P* con *Q*, y P' con *Q';* de este modo queda determinado el óvalo. (Fig. 6.1)

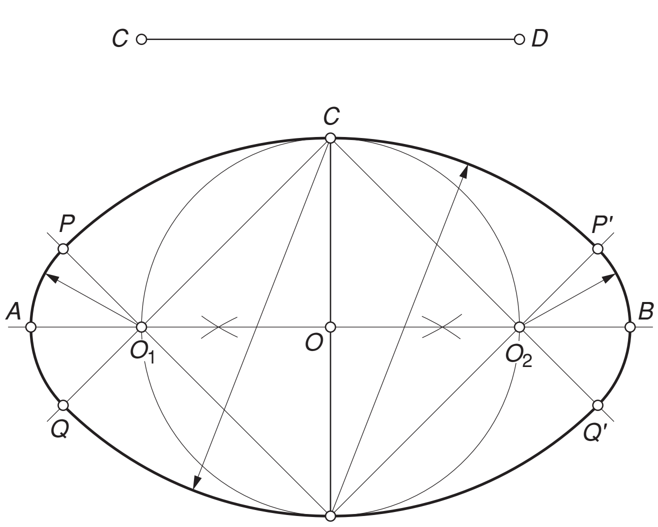


Fig. 6.1. *Óvalo conociendo el eje menor.*

Óvalo conociendo el eje mayor (primer procedimiento)

1. Se divide el eje mayor *AB* en tres partes iguales, determinando así los puntos *O* y O_1. Con centro en estos puntos y radio igual a 1/3 de *AB*, por ejemplo *OA*, se trazan dos circunferencias que se cortan en los puntos O_2 y O_3.

2. Se unen mediante rectas los puntos *O* y O_1 con O_2 y O_3, obteniendo así los cuatro puntos de tangencia: *P* y *P'*, y *Q* y *Q'*.

3. Con centro en O_2 y O_3 respectivamente y radio O_3P, se realizan dos arcos hasta unir los puntos *P* con P' y *Q* con Q'. De este modo queda resuelto el óvalo pedido (Fig. 6.2).

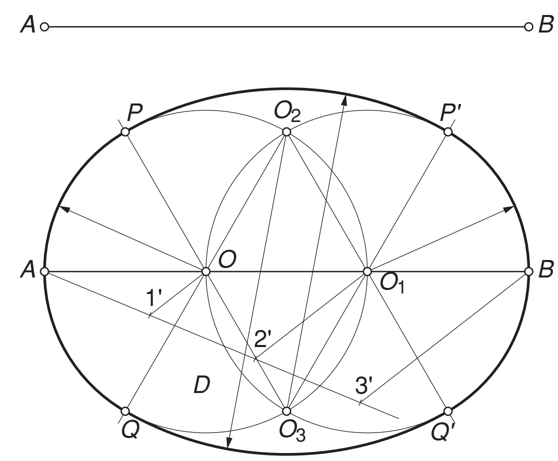


Fig. 6.2. *Óvalo conociendo el eje mayor, primer procedimiento.*

Óvalo conociendo el eje mayor (segundo procedimiento)

1. Se divide el eje mayor *AB* en cuatro partes iguales, obteniendo así los puntos *O* y O_1 que corresponden a los puntos 1 y 3 en el eje dividido. Se trazan dos circunferencias con centro en *O* y O_1, respectivamente, y radio igual a 1/4 de *AB*, es decir, *OA*.

2. Se trazan dos arcos con centro también en *O* y O_1, respectivamente, y radio igual a OO_1.

3. Donde los arcos se cortan se encuentran los puntos O_2 y O_3, centros de los arcos mayores del óvalo. Para hallar los puntos de tangencia se unen los centros O_2 y O_3 con los otros centros *O* y O_1, y a partir de aquí se procede de igual manera que se hizo en el ejercicio anterior (Fig. 6.3).

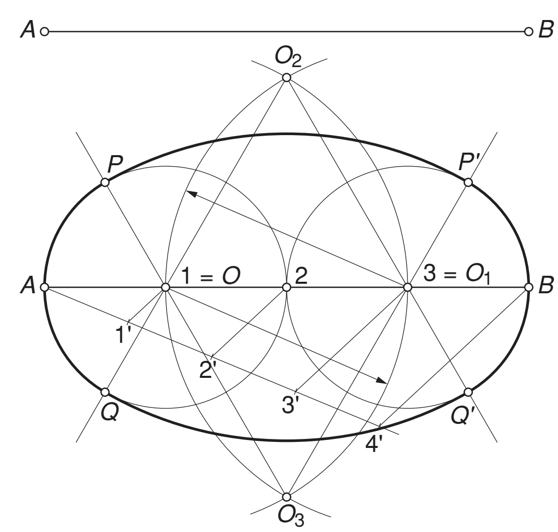


Fig. 6.3. *Óvalo conociendo el eje mayor, segundo método.*

Óvalo óptimo conociendo los dos ejes

1. Se traza un arco de centro en *O* con radio *OA* que corta a la prolongación de *CD*, eje menor, en el punto *P*. Se une *A* con *C*, y se describe un arco de radio *CP* con centro en *C* hasta cortar el segmento *AC* en *V*.

2. Se dibuja la mediatriz de *AV*, que corta la prolongación de *OD* en el punto *M* o dentro del propio segmento, y al semieje mayor en el punto *N*. Se determinan los puntos simétricos de *M* y *N* respecto a los ejes del óvalo, *M'* y *N'*.

3. Se unen los puntos *M* y *M'* con *N* y *N'*, respectivamente, y se trazan los arcos de centro *M'* y *M* con radio *M'D* y *MC*, obteniéndose los puntos *Q* y *Q'* y *P* y *P'*.

4. Por último, se dibujan los arcos de centro *N* y *N'* con radio *NA* y *N'B* hasta los puntos de tangencia anteriormente trazados: *Q* y *Q'*, y *P* y *P'*; de esta manera se consigue construir el óvalo (Fig. 6.4).

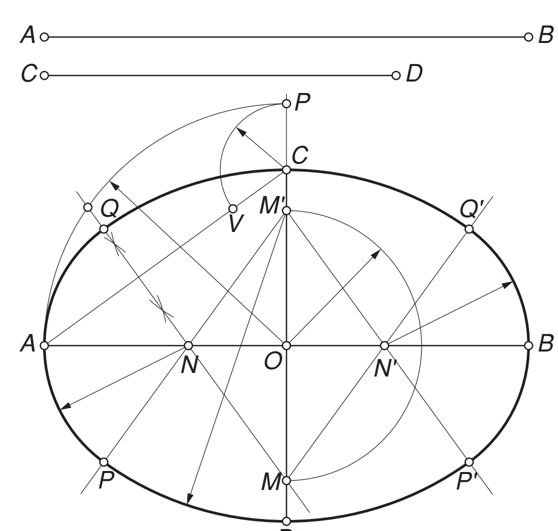


Fig. 6.4. *Óvalo óptimo conociendo los dos ejes.*

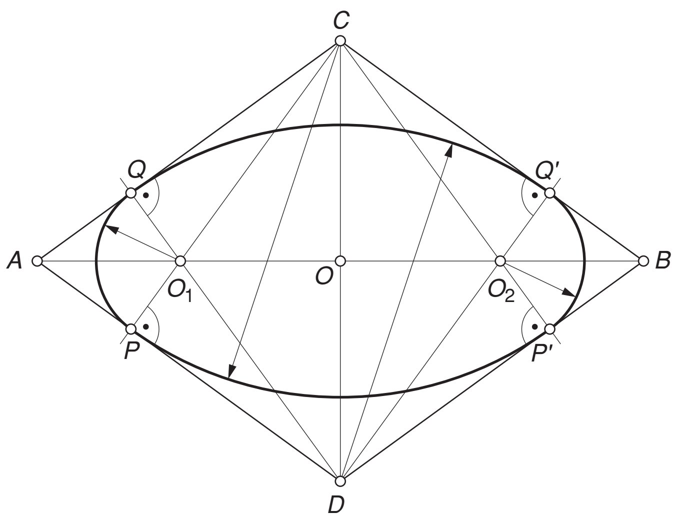


Fig. 6.5. *Óvalo inscrito en un rombo.*

Óvalo inscrito en un rombo.

1. Se parte de un rombo cualquiera *ABCD*. Desde los vértices de los ángulos de mayor valor del rombo, se trazan rectas perpendiculares a los lados opuestos a ellos, que cortan al eje mayor determinando los puntos O_1 y O_2, y a los lados del rombo en *P* y *P'*, y *Q* y *Q'*.
2. Los puntos *C*, *D*, O_1 y O_2 son los centros de los cuatro arcos que forman el óvalo pedido.
3. Con centro en *C* y *D* respectivamente y radio *CP*, se trazan dos arcos hasta unir *P* con *P'*, y *Q* con *Q'*. Del mismo modo, con centro en O_1 y O_2, se trazan dos arcos hasta unir *P* con *Q* y *P'* con *Q'*, terminando así de construir el óvalo (Fig. 6.5).

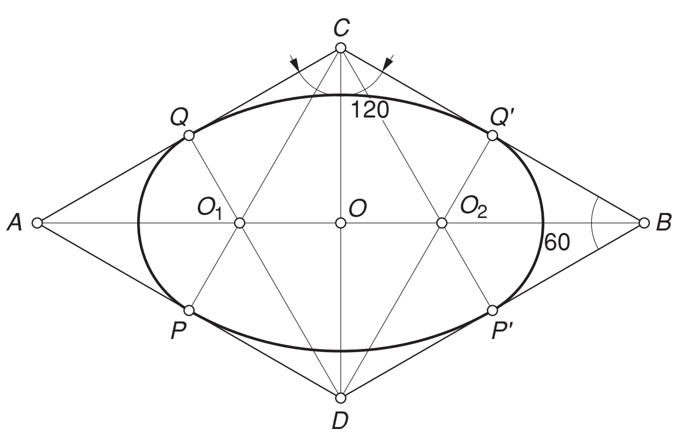


Fig. 6.6. *Óvalo isométrico.*

Óvalo isométrico

En el caso de que los ángulos mayores del rombo donde se ha de inscribir el óvalo valgan 120º, y por tanto los menores 60º, el óvalo inscrito en él se llama **isométrico.** Su construcción se realiza de igual manera que en el caso descrito anteriormente.

La razón de adoptar este nombre viene dada porque esta figura se utiliza en dibujo isométrico para sustituir, de manera aproximada, a la elipse que tenga el mismo valor de ejes que el óvalo (Fig. 6.6).

▶▶ B. Ovoide

▶▶▶ Definición

El **ovoide** es una curva plana y cerrada, simétrica sólo respecto a su eje mayor, y formada por cuatro arcos de circunferencia, de los que dos son iguales y los otros dos son desiguales.

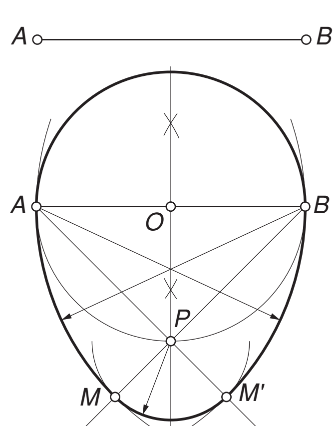


Fig. 6.7. *Ovoide conociendo el eje menor.*

▶▶▶ Construcción de ovoides

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de ovoides más utilizados en dibujo técnico.

Ovoide conociendo el eje menor

1. Se dibuja la mediatriz del eje conocido *AB*, obteniendo el punto *O*. Con centro en *O* y radio *OA*, se traza una circunferencia que corta a la mediatriz en el punto *P*.
2. Se unen los puntos *A* y *B* con *P*, obteniendo las semirectas *r* y *s*. Se trazan dos arcos con radio *AB* y centro en los puntos *A* y *B*, obteniéndose así los puntos *M* y *M'*.
3. Con centro en *P* y radio *PM* o *PM'*, se describe el último arco que configura el ovoide pedido (Fig. 6.7).

Ovoide conociendo el eje mayor

1. Se divide el eje mayor *AB* en seis partes iguales, y por la segunda división se traza una perpendicular al eje. Se hace centro en esa misma división, es decir en la 2, y con radio 2-6, se describe un arco que determina los puntos *P* y Q.

2. Se unen *P* y *Q* con el punto 5, quinta división de AB. Se hace centro en el punto 2 y con radio 2*P* o 2*Q* se dibuja una semicircunferencia, obteniendo sobre el segmento *PQ* los puntos *H* e *I*. Con centro en *P* y *Q*, respectivamente, y radio *PI*, se trazan los arcos que determinan los puntos *M* y *N*.

3. Por último, con centro en el punto 5, y con radio 5*M*, se traza un arco para terminar de construir el ovoide pedido (Fig. 6.8).

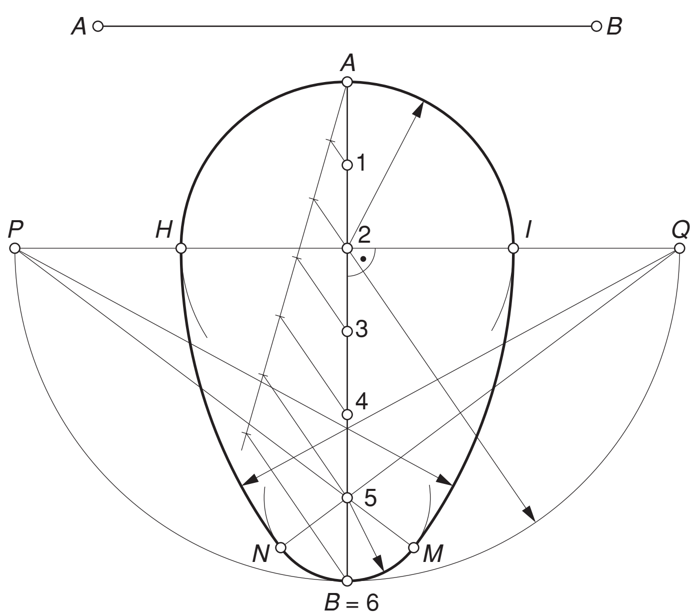


Fig. 6.8. *Ovoide conociendo el eje mayor.*

Ovoide conociendo los dos ejes

1. Se toma el eje menor *CD* y se traza su mediatriz, obteniéndose el punto *O*. Con centro en él y radio *OC*, se dibuja una circunferencia que corta a la mediatriz en los puntos *A* y *J*. Desde *A* y sobre dicha mediatriz, se lleva el valor del eje mayor *AB*, quedando de esta manera situados los ejes del ovoide.

2. Con centro en *J* y radio *JB,* se dibuja una circunferencia. A partir de *C* y sobre *CD* se lleva la magnitud J*B* obteniendo el punto *M*. Se determina la mediatriz de *MJ,* obteniéndose el punto *N* sobre el segmento *OD*.

3. Se halla el simétrico de *N* sobre *CO,* obteniéndose el punto *N′*. Se unen los puntos *N* y *N′* con *J*, determinándose los puntos de tangencia *Q* y *Q′*.

4. Por último, con centro en *N* y *N′* respectivamente, y radio *NC,* se trazan los arcos hasta unir *C* con *Q* y *D* con *Q′, con lo que se* obtiene el ovoide buscado (Fig. 6.9).

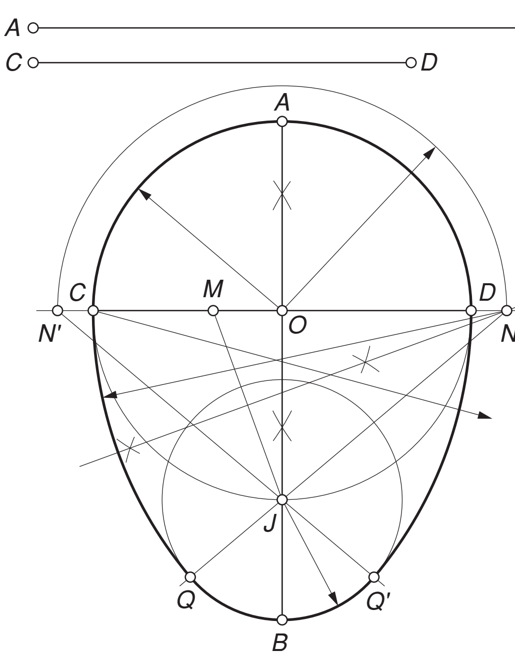


Fig. 6.9. *Ovoide conociendo los dos ejes.*

▶▶ C. Espiral

▶▶▶ Definición

La **espiral** es una curva plana, abierta y continua que se configura en expansión por un punto que se desplaza de manera uniforme a lo largo de una recta, estando ésta fija en un punto por el cual gira con un valor angular constante. Una espiral se define por los siguientes elementos:

Paso: es la distancia longitudinal con que se desplaza un punto de la curva en una vuelta completa. Es decir, es la distancia entre dos espiras consecutivas.

Espira: es la parte de la curva descrita en cada vuelta.

Núcleo: es a partir de donde se genera, en expansión, la espiral. Los núcleos pueden ser lineales si los centros están situados en una línea, o poligonales si son los vértices del polígono los centros que generan la curva.

Radios vectores: son la prolongación, bien de la línea donde están situados los centros del núcleo, o bien de los lados del polígono que hace de núcleo.

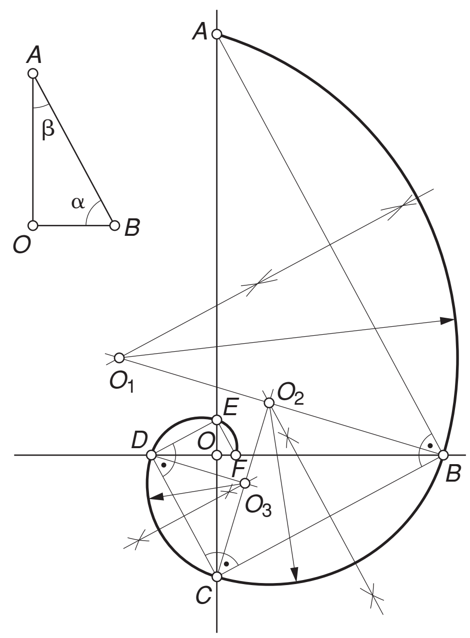


Fig. 6.10. *Espiral logarítmica.*

▶▶▶ Construcción de espirales

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de espirales más utilizados en dibujo técnico.

Espiral logarítmica

1. En esta curva se comprueba que el movimiento de traslación no es uniforme, sino que sigue una progresión geométrica, de tal modo que el paso es variable.

2. Para su construcción se trazan dos ejes perpendiculares entre sí, obteniéndose el punto *O* donde se cortan. Se traza un triángulo rectángulo *ABO*, cuyos catetos formen con la hipotenusa los ángulos que se quieren dejar constantes durante el recorrido del punto generador. Partimos del triángulo escogido *ABO*.

3. Por el punto *B* se traza una perpendicular a la hipotenusa *AB*, lo que determina sobre el otro eje el punto *C* por el que, a su vez, se traza otra perpendicular al segmento *BC*, obteniéndose el punto *D* sobre el otro eje, y así sucesivamente.

4. Se trazan las mediatrices de los segmentos que contienen los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, etc., y donde éstas corten a las bisectrices de los ángulos rectos que forman la línea poligonal definida por ellos, se obtienen los centros O_1, O_2, O_3, etc., de los diferentes arcos de circunferencia que configuran la espiral. Descritos éstos con sus radios particulares O_1A, O_2B, O_3C, etc., y unidos convenientemente, dan como consecuencia la construcción de la espiral como puede apreciarse en la Figura 6.10.

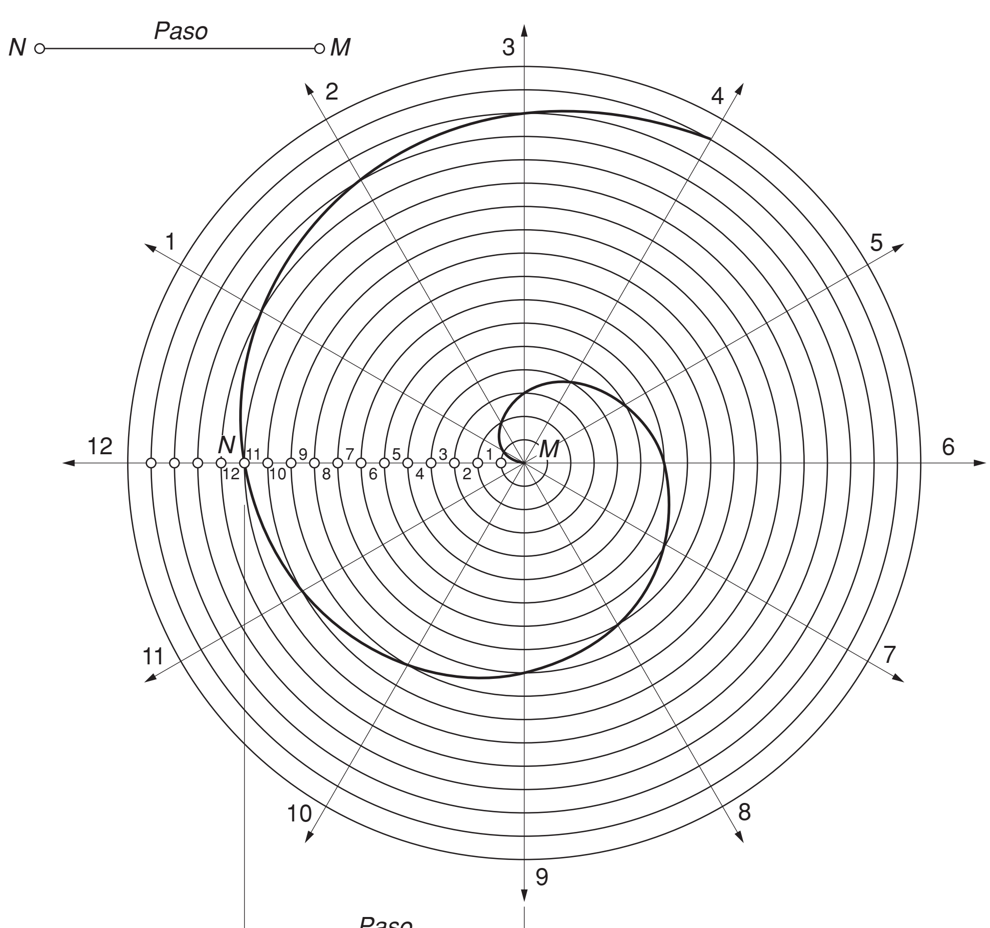


Fig. 6.11. *Espiral de Arquímedes.*

Espiral de Arquímedes conociendo el paso MN

1. Se divide el segmento *MN* en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo doce. Con centro en *M* y con radios *M*1, *M*2 ..., hasta *M*12, se trazan circunferencias.

2. Se divide la circunferencia en doce partes iguales y se trazan los respectivos radios. La intersección de dichos radios con los arcos correspondientes determinan los diversos puntos que configuran la espiral, puntos que, unidos con trazo continuo, determinan la curva pedida (Fig. 6.11).

C. Voluta

Definición

Se denomina **voluta** a la curva plana, abierta y continua compuesta por arcos de circunferencia, tangentes entre sí, siendo los centros de los arcos los vértices de un polígono básicamente regular.

Construcción de volutas

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de volutas más utilizados en dibujo técnico.

Volutas de núcleo triangular, cuadrada y hexagonal

1. La construcción de este tipo de volutas es muy sencillo: basta con fijar la posición de sus centros y la longitud del radio inicial. Observa, en las Figuras 6.12, 6.13 y 6.14, cómo en el dibujo, de cada una de ellas, los trazados para su construcción se repiten a partir de la primera vuelta, y sus arcos se desarrollan de forma paralela.

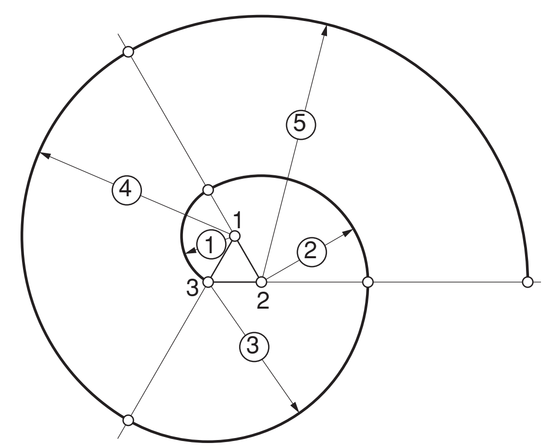


Fig. 6.12. *Voluta de núcleo triangular.*

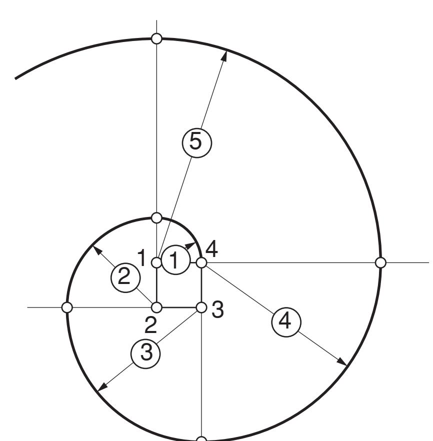


Fig. 6.13. *Voluta de núcleo cuadrangular.*

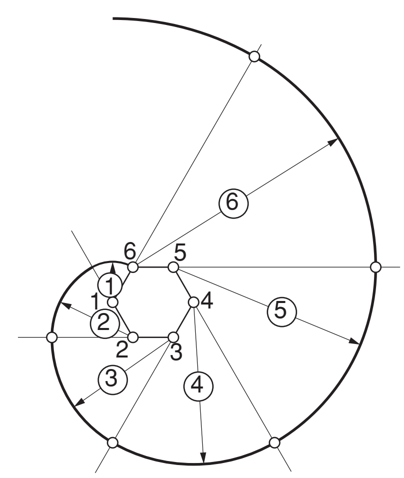


Fig. 6.14. *Voluta de núcleo hexagonal.*

Voluta jónica

1. Se parte de una circunferencia cuya longitud es igual al paso con el que se quiere construir la voluta. Se inscribe un cuadrado *ABCD* en ella, y sobre él se trazan paralelas a los lados por los puntos medios de éstos, obteniéndose los puntos 9, 10, 11 y 12.

2. Se dividen los segmentos 9-11 y 10-12 en seis partes iguales, y se numeran de la manera indicada en la Figura 6.15. Se dibujan las diagonales del cuadrado prolongándolas; en ellas están los puntos de tangencia de la voluta.

3. Con centro en 1 y radio 1*A*, se traza un arco hasta la diagonal determinándose el punto *E*; con centro en 2 y radio 2*E*, se traza otro arco hasta cortar a la siguiente diagonal en el punto F, y así sucesivamente (Fig. 6.15).

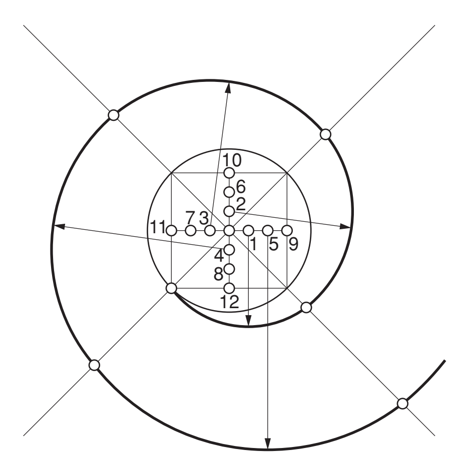
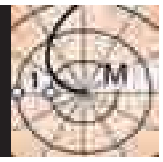


Fig. 6.15. *Voluta jónica.*



Cuestiones

Contesta de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es una curva geométrica? Clasifícalas.
2. ¿Qué es un óvalo?
3. Dibuja un óvalo óptimo conociendo sus dos ejes, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
4. Dibuja un óvalo isométrico inscrito en un rombo, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
5. ¿Qué es un ovoide?
6. Dibuja un ovoide conociendo sus dos ejes, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
7. ¿En qué se diferencia un óvalo de un ovoide?
8. ¿Qué es una espiral? Describe cómo se generan las espirales, y qué elementos la configuran.
9. Dibuja una espiral logarítmica explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
10. ¿Qué es una voluta?
11. ¿Qué característica tienen en común el óvalo, el ovoide y la espiral?

Ejercicios

1. Dibuja un óvalo sabiendo que su eje menor mide 37 mm.
2. Dibuja un óvalo sabiendo que su eje mayor mide 65 mm.
3. Dibuja un óvalo óptimo sabiendo que sus ejes miden 67 mm, y 53 mm respectivamente.
4. Dibuja un ovoide sabiendo que su eje mayor mide 67 mm.
5. Dibuja un ovoide sabiendo que sus ejes miden 67 mm, y 53 mm respectivamente.
6. Dibuja una espiral de Arquímedes sabiendo que su paso mide 40 mm.
7. Dibuja una voluta de núcleo hexagonal, sabiendo que el lado del hexágono mide 12 mm.
8. Dibuja una voluta jónica sabiendo que la circunferencia cuya longitud es igual al paso tiene un radio de 18 mm.
9. Dibuja a escala 1:1 la llave de dos bocas de la Figura 6.16.
10. Fíjate en cómo están realizadas las espirales de las Figuras 6.17 y 6.18. Intenta reproducirlas averiguando cuáles han sido sus procesos de construcción.

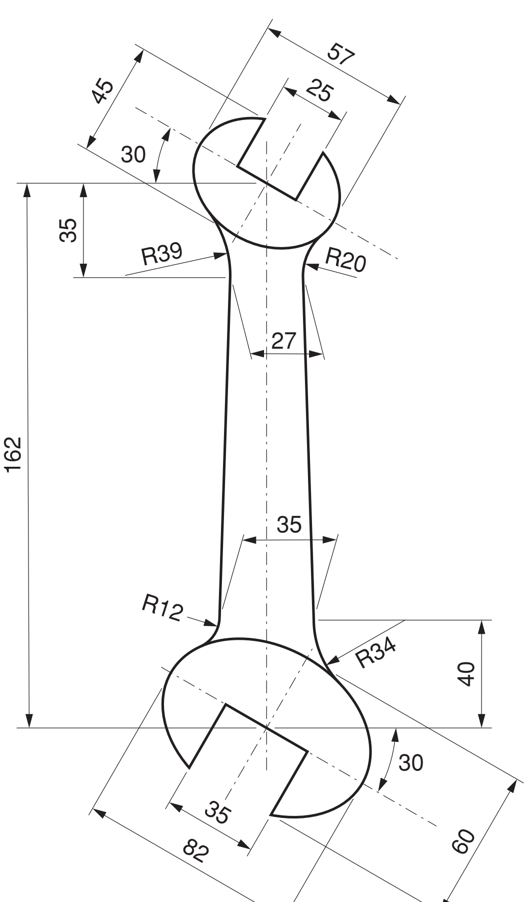


Fig. 6.16. *Ejercicio 9, figura de modelo.*

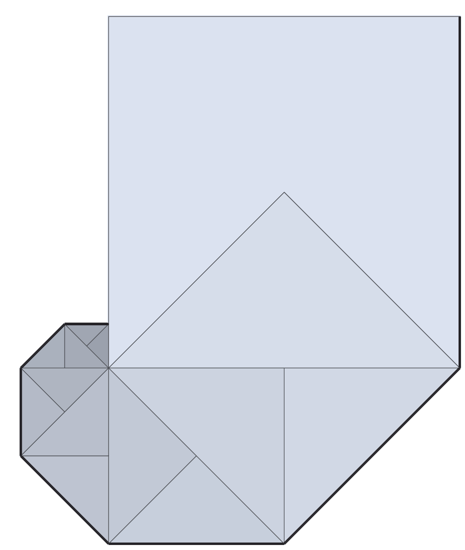


Fig. 6.17. *Ejercicio 10, primera figura de modelo.*

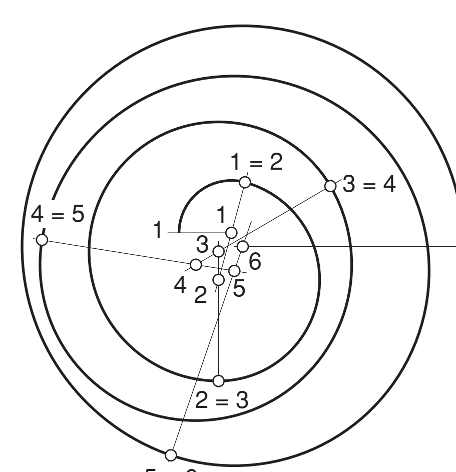


Fig. 6.18. *Ejercicio 10, segunda figura de modelo.*

6.3. Curvas cónicas

Las **curvas cónicas** se obtienen al seccionar un cono de revolución con un plano secante. Un cono de revolución es un cuerpo geométrico que puede considerarse engendrado por una línea recta denominada **generatriz,** que se mueve fija en un punto (centro de generación o **vértice** del cono), alrededor de un **eje** y con una dirección circular denominada **directriz.** (Fig. 6.19).

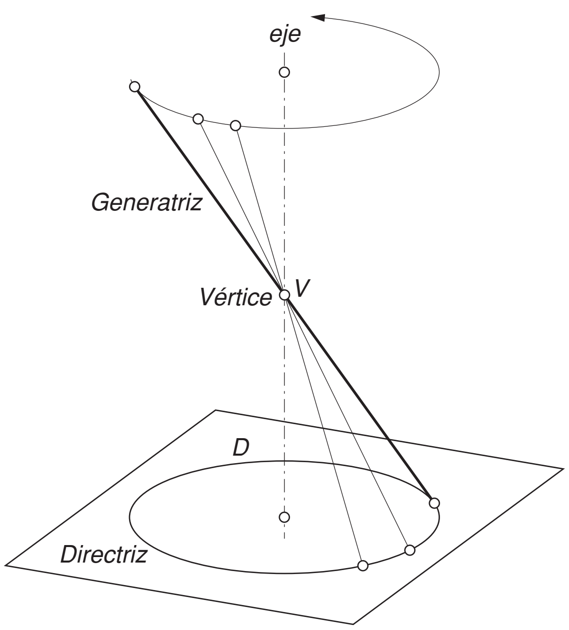


Fig. 6.19. *Elementos de un cono de revolución.*

A. Clasificación de las curvas cónicas

La posición del plano secante respecto del eje del cono posibilita diferentes tipos de curvas. Además de la circunferencia, que se genera cuando el plano secante (o plano sección) es perpendicular al eje del cono, son figuras cónicas la elipse, la parábola y la hipérbola.

Si el plano sección es oblicuo y corta todas las generatrices del cono, la sección es una **elipse.** Es decir, $\alpha < \beta$ (Fig. 6.20).

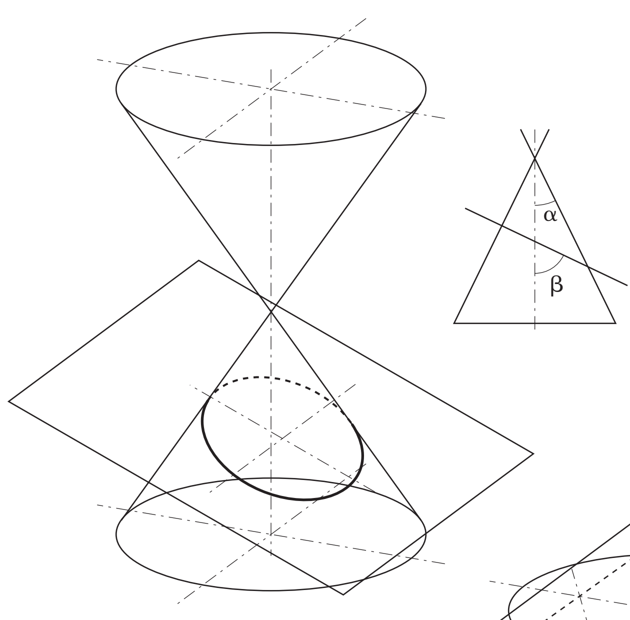


Fig. 6.20. *Elipse.*

Si el plano sección es paralelo u oblícuo al eje y corta al cono, la sección es una **hipérbola.** Es decir, $\alpha > \beta$ (Fig. 6.21).

Si el plano sección es oblicuo al eje y paralelo a una de las generatrices del cono, la sección es una **parábola.** Es decir, $\alpha = \beta$ (Fig. 6.22).

Es conveniente apuntar que las curvas cónicas, exceptuando la circunferencia, ya estudiada, se construyen por medio de la obtención de puntos que configuran la curva, y que posteriormente hay que unirlos, bien a mano alzada o mediante la utilización de plantillas de curvas.

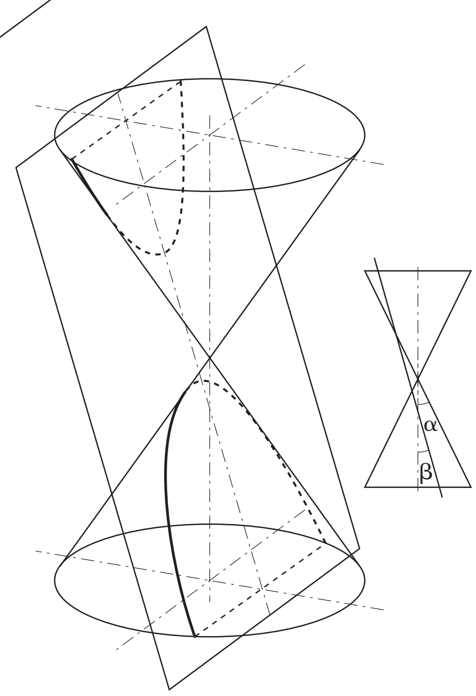


Fig. 6.21. *Hipérbola.*

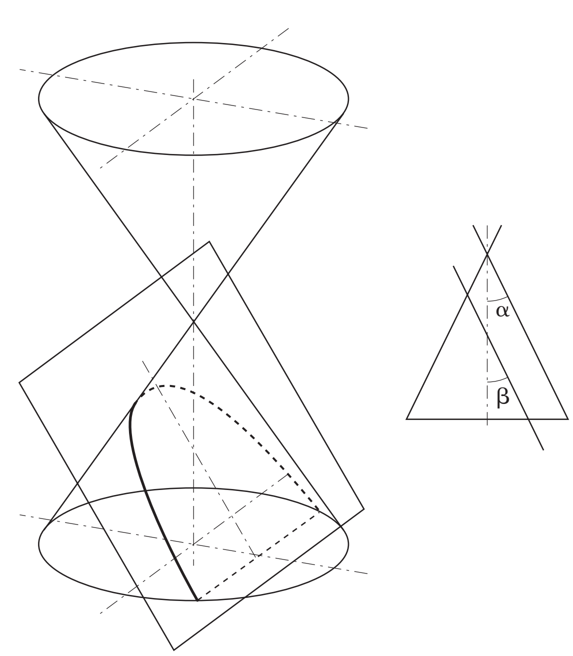


Fig. 6.22. *Parábola.*

B. Elementos de las curvas cónicas

Veamos los elementos más importantes que componen las curvas cónicas y que son necesarios para su construcción:

- **Focos:** son los puntos F y F′ de contacto de las esferas inscritas en el cono con el plano secante que genera las secciones cónicas, y están situados en el eje de simetría. La elipse y la hipérbola tienen dos focos, y la parábola tiene sólo uno.
- **Vértices:** son los puntos extremos de los ejes de la curva.
- **Ejes:** con este término se denomina a los **ejes de simetría** de la curva. Tanto la elipse como la hipérbola tienen dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí. La parábola tiene solamente uno.
- **Centro:** es el punto donde se cortan los ejes de simetría, y por tanto el centro de la curva.
- **Directrices:** son las rectas de intersección que realiza el plano secante (que genera la curva cónica) con los planos que contienen a las circunferencias tangentes de las esferas con el cono.
- **Circunferencia principal:** es el lugar geométrico de las proyecciones de los focos sobre las rectas tangentes a la cónica. El centro de esta circunferencia es el centro de la elipse o de la hipérbola, y el radio es igual a la mitad de su eje mayor. En el caso de la parábola, el radio es infinito.
- **Circunferencia focal:** es el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco respecto de las rectas tangentes a la cónica. El centro de estas circunferencias son los focos, y los radios son la longitud del eje mayor, en el caso de la elipse y la hipérbola; en la parábola, el radio es infinito.

C. Elipse

Es una curva plana y cerrada, lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos *F* y *F′*, es constante e igual al eje mayor *AB*.

$$PF + PF' = AB$$

Elementos de la elipse

Los elementos más significativos que configuran la elipse son los siguientes (Fig. 6.23):

- **Ejes:** tiene dos ejes *AB* y *CD* perpendiculares entre sí, que se cortan en el punto *O*, centro de la elipse. El eje mayor se denomina eje real o principal, y el eje menor, secundario o virtual. Esta curva es simétrica con respecto a dichos ejes.
- **Focos:** denominados como *F* y *F′*, están situados en el eje real, y se hallan haciendo centro en uno de los extremos del eje virtual *C* o *D*, y radio igual al semieje real.
- **Distancia focal:** es la distancia que existe entre los dos focos.
- **Radios vectores:** son las rectas que unen un punto cualquiera de la elipse con los focos.
- **Circunferencia principal:** es la que se determina haciendo centro en *O*, centro de la elipse, y radio igual al semieje mayor.
- **Circunferencia focal:** la elipse tiene dos circunferencias focales. Para dibujarlas, se toma como radio el eje real y centro *F* y *F′*, respectivamente.

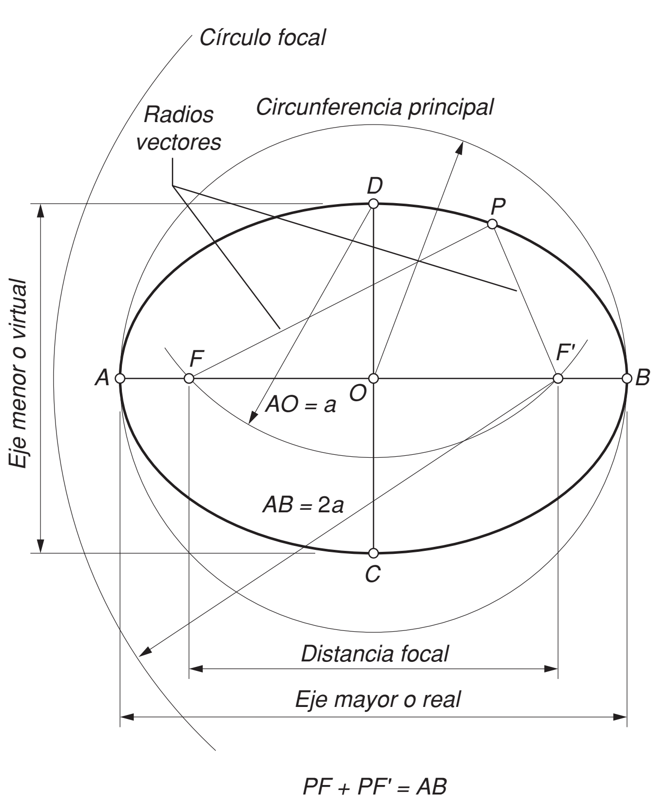


Fig. 6.23. *Elementos de la elipse.*

La nomenclatura más utilizada en geometría para denominar a los ejes y la distancia focal, es la siguiente:

- **Eje mayor o real** = *AB* = 2*a*; semieje mayor o real *a*.
- **Eje menor o virtual** = *CD* = 2*b*; semieje menor o virtual = *b*.
- **Distancia focal** = *FF′* = 2*c*.

▶▶▶ Construcción de la elipse

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de la elipse más utilizados en dibujo técnico.

Elipse conociendo sus dos ejes. Por puntos

1. Se trazan dos rectas perpendiculares obteniendo en su corte el punto *O*. Sobre ellas se sitúan los ejes de la elipse *A* = 2*a* y *CD* = 2*b*. Con centro en *C* o *D* y radio *OA*, se traza un arco que corta al eje real en los puntos *F* y *F′*, focos de la curva.

2. Se divide en un número de partes la distancia focal 1, 2, 3, etc. Con centro en *F* y radio 1*A*, se trazan dos arcos; con radio 1*B* y centro en *F′*, se trazan otros dos arcos que cortan a los dos anteriores en *E* y *F*, puntos de la elipse.

3. Con centro en *F* y radio 2*A*, se vuelven a trazar dos arcos; con radio 2*B* y centro en *F′*, se trazan otros dos arcos que cortan a los anteriores en los puntos *G* y *H*, otros dos puntos de la curva. Repetimos esta operación tomando otros puntos 3, 4, etc., del eje real para seguir hallando puntos de la elipse y, finalmente, se unen los puntos determinados manualmente o con plantillas, con lo que se obtiene la elipse pedida (Fig. 6.24).

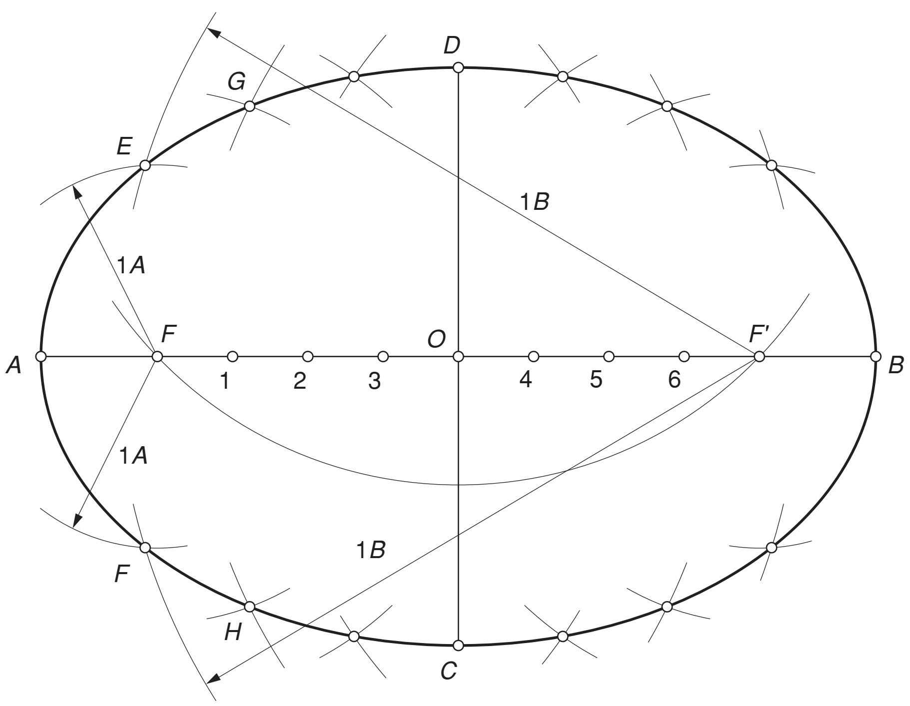


Fig. 6.24. *Construcción de la elipse por puntos.*

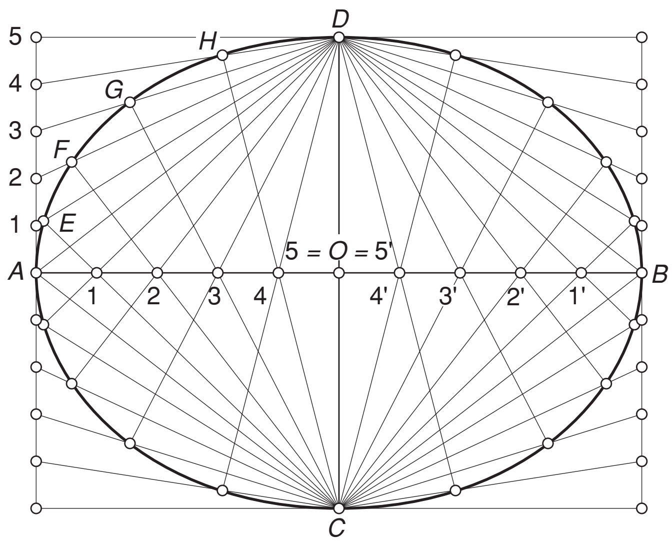


Fig. 6.25. *Construcción de la elipse por haces proyectivos.*

Elipse conociendo los dos ejes. Por haces proyectivos

1. Se dibuja un rectángulo de lados igual al valor de los ejes de la elipse. Se trazan los ejes dentro de dicho rectángulo. Se dividen los segmentos *OA* y *AE* en el mismo número de partes, e iguales en cada segmento. En este caso cinco.

2. Las intersecciones de los rayos *C*1, *C*2, *C*3 y *C*4 con los rayos *D*1, *D*2, *D*3 y *D*4 respectivamente, determinan distintos puntos de la elipse *E*, *F*, *G* y *H*.

3. Observa que los puntos de la curva en los otros tres cuadrantes de la elipse se han obtenido aplicando el mismo método. Por último, sólo queda unir esos puntos para completar la elipse (Fig. 6.25).

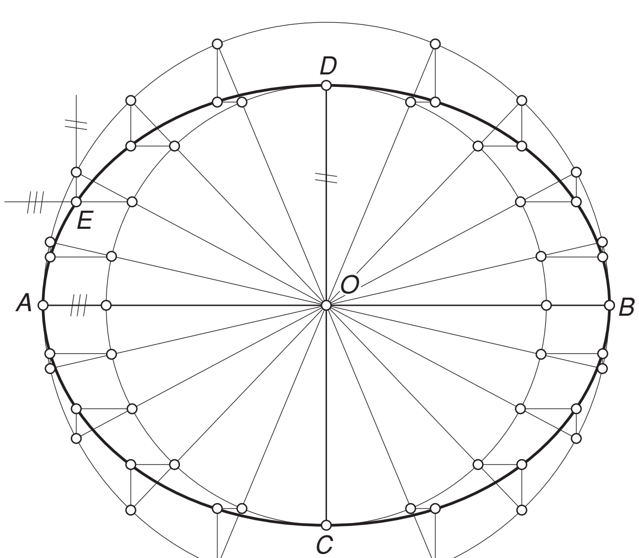


Fig. 6.26. *Construcción de la elipse por afinidad.*

Elipse conociendo sus dos ejes. Por circunferencias concéntricas o afinidad

1. Se dibujan dos circunferencias concéntricas de radios iguales a los valores de los semiejes mayor y menor. Se trazan distintos radios de las dos circunferencias.

2. Por los extremos de los radios de la circunferencia mayor, se trazan rectas paralelas al eje menor. Por los extremos de los radios de la circunferencia menor, se trazan paralelas al eje mayor.

3. Los puntos de intersección de las respectivas paralelas determinan puntos de la elipse buscada (Fig. 6.26).

Elipse conociendo sus dos ejes. Método de la tira de papel

1. Éste es un método sencillo y rápido para trazar elipses. El procedimiento está basado en la definición de elipse. Consiste, por tanto, en marcar sobre una tira de papel, con trazos pequeños, la longitud del semieje mayor *AO* y la del semieje menor *CO*.

2. Se hace coincidir el punto N sobre el semieje mayor *AO* de la elipse que se va a dibujar, y el punto F sobre el semieje menor *CO*, siendo *M* un punto de la elipse. Repitiendo este procedimiento se consiguen nuevos puntos, tantos como se deseen.

3. No hay que olvidar que los puntos *N* y *F* de la tira de papel han de coincidir siempre sobre los ejes de la elipse que se quiere dibujar. Por último, sólo resta unir los puntos hallados de forma manual o con plantillas para determinar la curva (Fig. 6.27).

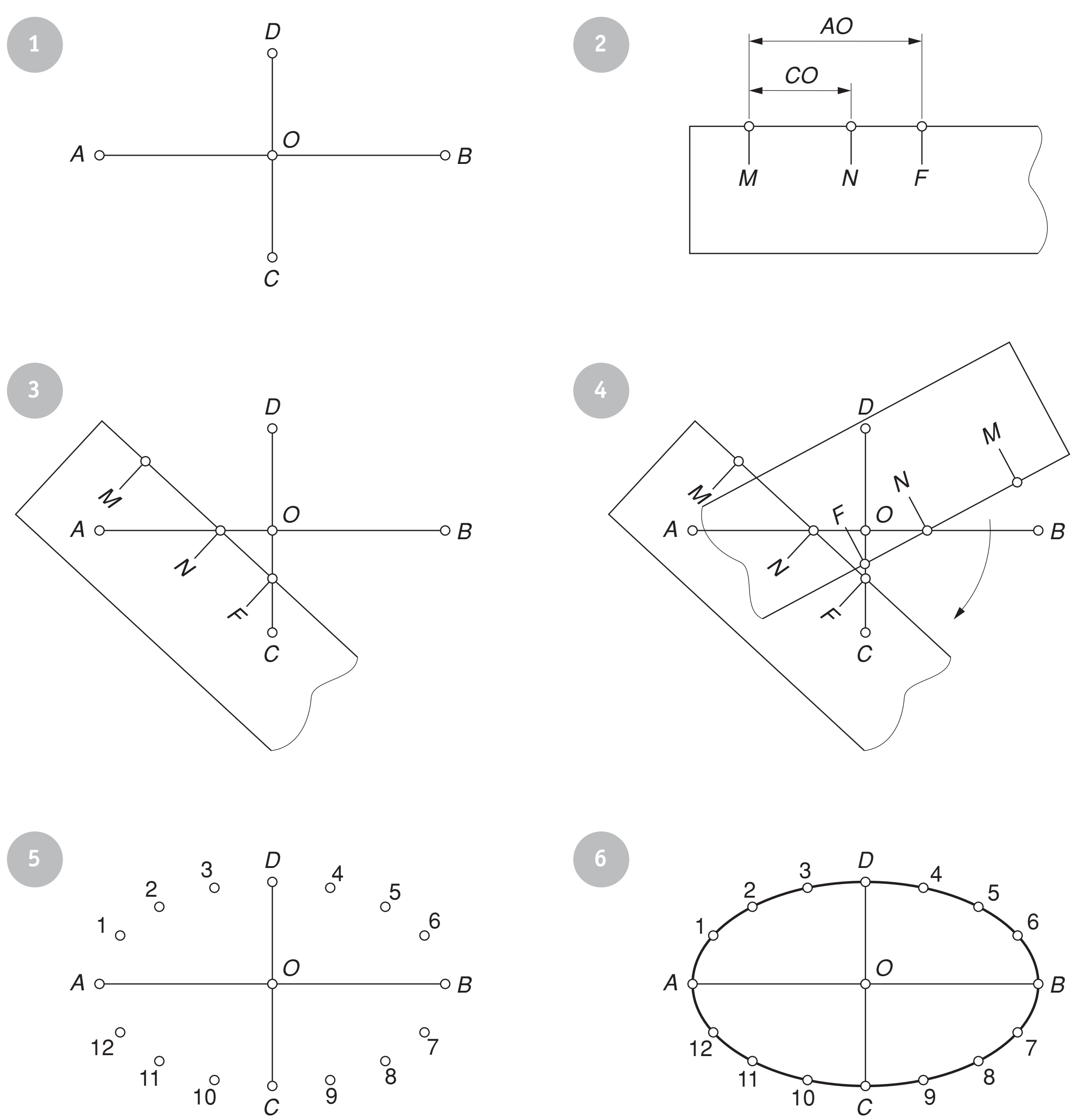


Fig. 6.27. *Construcción de la elipse por el método de la tira de papel.*

Elipse conociendo dos diámetros conjugados

Dado un diámetro cualquiera *JK* de una elipse, su conjugado *MN* es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas a *JK*. Se puede observar en la Figura 6.28 que la cuerda *EF*, paralela al diámetro *JK*, es cortada en *P*, que es su punto medio, por el diámetro *MN*.

1. Se parte de los diámetros conjugados *AB* y *CD*. Se dibuja una circunferencia de diámetro igual al mayor de los diámetros conjugados *AB*. Sobre ella se traza otro diámetro *C′D′* perpendicular a *AB*.

2. Se divide *AB* en *n* partes, por ejemplo seis, y se trazan por ellas paralelas a *CD* y *C′D′*. Se trazan los segmentos que unen los puntos *C′* con *C*, y *D′* con *D*.

3. Donde las cuerdas cortan a la circunferencia, se trazan paralelas a *D′D* y *C′C* que cortan a las paralelas al diámetro conjugado *CD* en los puntos *E* y *E′, F* y *F′,* etc., y así sucesivamente; así se determinan los puntos de la elipse buscada (Fig. 6.29).

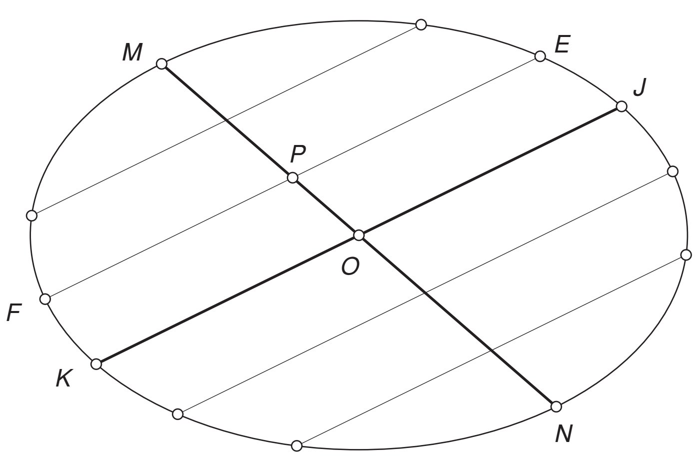


Fig. 6.28. *Diámetros conjugados de una elipse.*

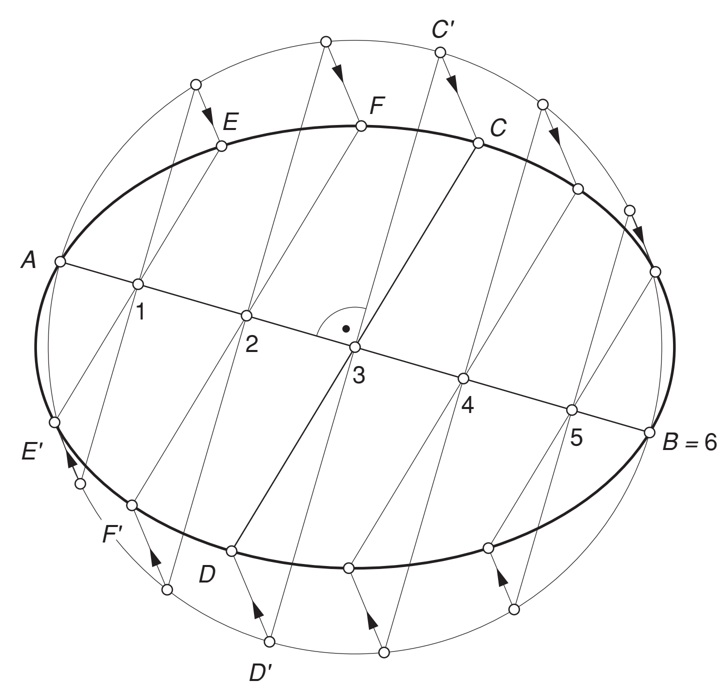


Fig. 6.29. *Elipse conociendo dos diámetros conjugados.*

Determinación de los ejes de una elipse conociendo dos diámetros conjugados

1. Se parte de los diámetros conjugados *AB* y *CD*. Por *D* se traza una perpendicular al diámetro *AB*, llevando a partir de *D* el semidiámetro a cada lado, es decir, *OA* = *DP* = *DQ*.

2. Se une el punto *O* con *P* y *Q*, y se halla la bisectriz del ángulo *POQ*; esta recta contiene al eje mayor de la elipse. Por *O* se traza una perpendicular al eje mayor; esta recta contiene al eje menor. Y por *D* se traza una paralela; donde ésta corte al segmento O*P* se obtindrá el punto *J*.

3. *OJ* es el valor del semieje menor y *JP* el del semieje mayor. Se traslada estas magnitudes a partir de *O* a ambos lados de los ejes, y quedan determinados *MN* y *EF*, ejes de la elipse buscada. (Fig. 6.30)

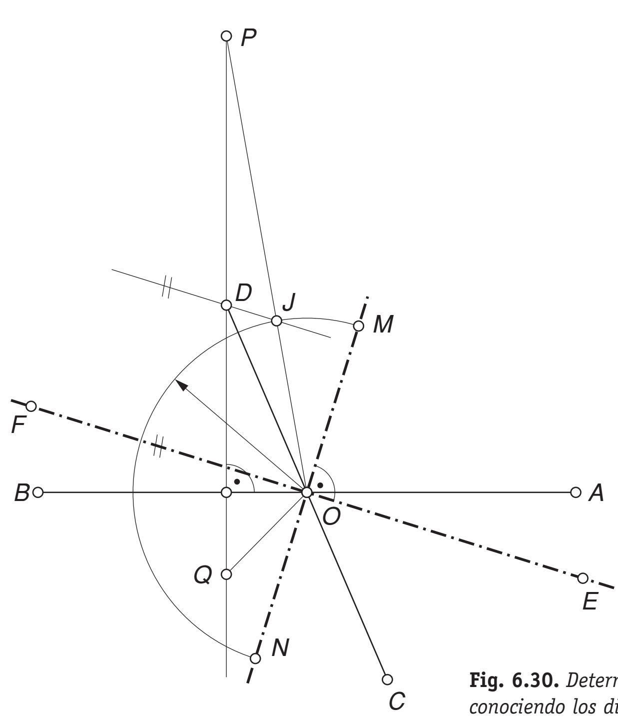


Fig. 6.30. *Determinación de los ejes de una elipse conociendo los diámetro s conjugados.*

D. Hipérbola

La hipérbola es una curva plana y abierta, lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos *F* y *F'*, es constante e igual al eje real *AB*, es decir, a la distancia entre los vértices *V* y *V'*.

$$PF - PF' = AB$$

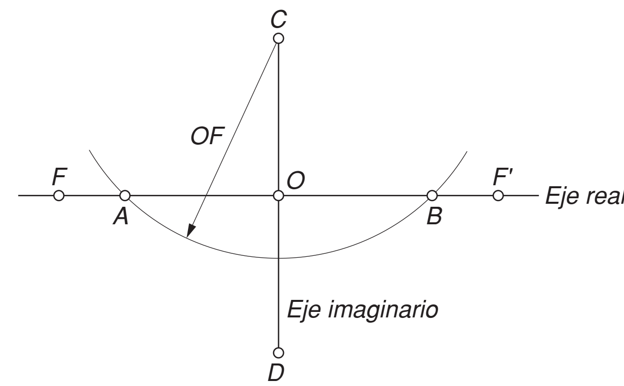


Fig. 6.31. *Determinación del eje real de la hipérbola.*

Elementos de la hipérbola

Los elementos más significativos que configuran la hipérbola son los siguientes (Fig. 6.33):

- **Ejes:** tiene dos ejes: *AB*, eje real, y *CD*, eje imaginario; son perpendiculares entre sí y se cortan en el punto *O*. El eje real contiene a los vértices *A* y *B* de cada rama de la curva. La hipérbola consta de dos ramas simétricas respecto de los dos ejes.

  En esta curva, la distancia desde el centro de simetría *O* a cada foco es igual a la distancia *AC*, siendo *A* un extremo del eje real y *C* un extremo del eje imaginario. Esta propiedad permite, si se conoce uno de los ejes y los focos, determinar el otro eje (Fig. 6.31); y, lógicamente, si se conocen los dos ejes, se pueden obtener los focos (Fig. 6.32).

- **Focos:** denominados como *F* y *F'*, están situados en el eje real, y se hallan haciendo centro en *O* y radio igual a la distancia *AC*.

- **Distancia focal:** es la distancia que existe entre los dos focos.

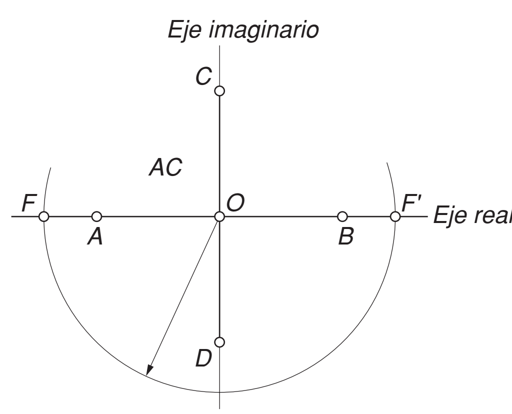


Fig. 6.32. *Determinación de los focos de la hipérbola.*

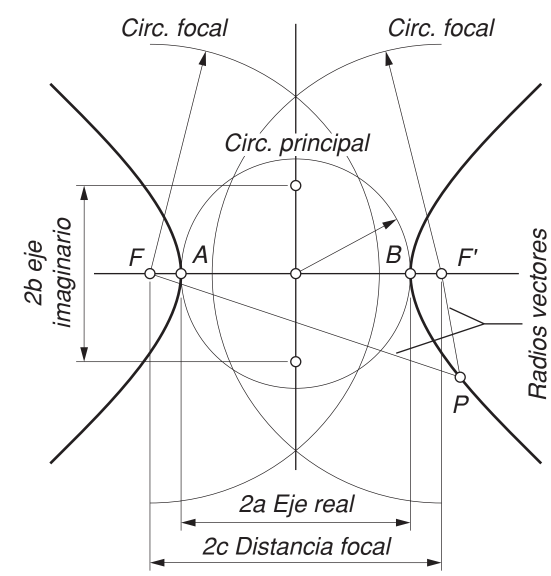


Fig. 6.33. *Elementos de la hipérbola.*

- **Radios vectores:** son las rectas que unen un punto cualquiera de la hipérbola con los focos.

- **Circunferencia principal:** es la que se determina haciendo centro en *O*, centro de la hipérbola, y radio igual a la distancia *AO* del semieje real.

- **Circunferencia focal:** la hipérbola tiene dos circunferencias focales. Para dibujarlas se toma como radio el eje real *AB*, y centro *F* y *F'*, respectivamente.

- **Asíntotas:** son rectas que pasan por el centro de la hipérbola, y son tangentes a ella en el infinito; además, son simétricas respecto de los ejes *AB* y *CD*. Se determinan trazando la circunferencia principal con centro en *O*. Se dibujan rectas tangentes desde el foco *F* a la circunferencia, determinando así los puntos de tangencia *M* y *N*. Se une estos puntos con *O* y se obtienen las dos asíntotas (Fig. 6.34).

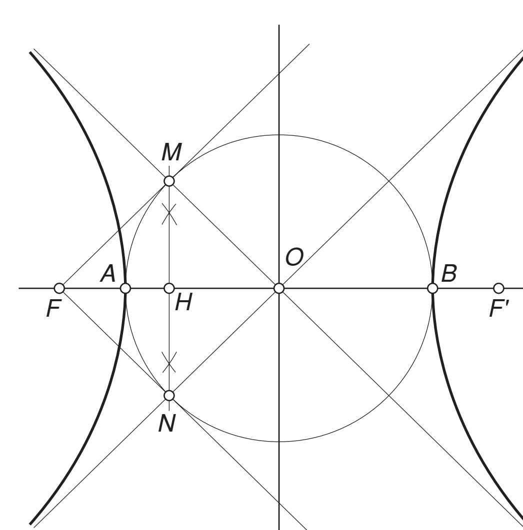


Fig. 6.34. *Determinación de las asíntotas de una hipérbola.*

La nomenclatura más utilizada en geometría para denominar a los ejes y la distancia focal es la siguiente:

- **Eje real** = A*B* = 2*a*; semieje mayor o real *a*.
- **Eje imaginario** = *CD* = 2*b*; semieje menor o virtual = *b*.
- **Distancia focal** = *FF′* = 2*c*.

▶▶▶ Construcción de la hipérbola

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de la hipérbola más utilizados en dibujo técnico.

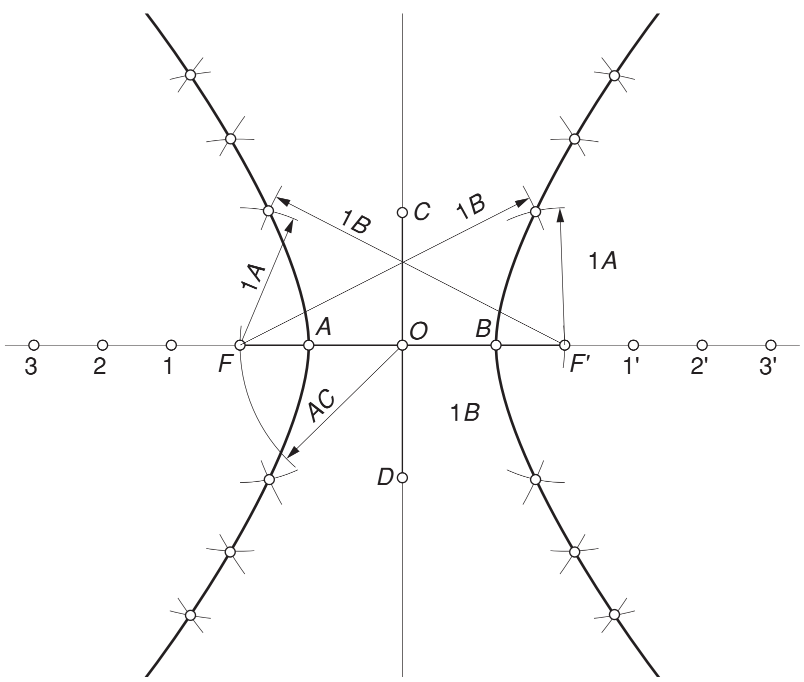


Fig. 6.35. *Construcción de la hipérbola conociendo los dos ejes.*

Hipérbola conociendo los dos ejes. Por puntos

1. Una vez situados los ejes A*B* y *CD*, se procede a determinar los focos; con centro en *O*, y radio *AC* se traza un arco, y allí donde éste corta al eje real están los focos *F* y *F′*.
2. Se sitúan puntos arbitrarios: 1 y 1′, 2 y 2′, etc., sobre el eje real a uno y otro lado de los focos, *F* y *F′*, respectivamente. Con radio 1*A*, y centro en *F* y *F′* se realizan dos arcos; con radio 1*B*, y centro en *F* y *F′* se describen otros dos arcos, que cortan a los anteriores determinando los puntos *M* y *M′*, y *N* y *N′*, de la curva de ambas ramas.
3. Repitiendo esta operación tantas veces como puntos se hayan marcado sobre el eje, se obtiene el resto de los puntos de la hipérbola. Por último, se unen con plantillas de curvas o a mano alzada hasta terminar las dos ramas de la curva (Fig. 6.35).

Hipérbola conociendo las asíntotas y los vértices

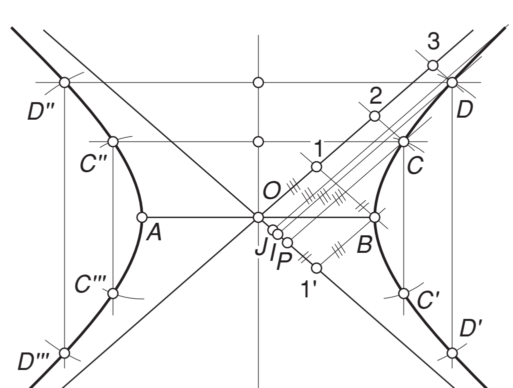


Fig. 6.36. *Hipérbola conociendo las asíntotas y los vértices.*

1. Se trazan rectas paralelas a las asíntotas por los vértices *A* y *B*, obteniendo sobre éstas los puntos 1 y 1′. Se lleva sobre las asíntotas la distancia *O*1 = *O*1′, determinando los puntos 2, 3, etc., por los que se trazan paralelas a la asíntota.
2. Se divide el segmento *O*1′ en partes, que están a 1/2 de la distancia *O*1′ (punto P), a 1/3 (punto I), a 1/4 (punto J), etc., de forma que las paralelas trazadas por los puntos *P*, *I*, *J*, etc., cortan a las trazadas por 2 en *C*, por 3 en *D*, y así sucesivamente.
3. Los puntos de la otra mitad de la rama en la que se ha trabajado pueden obtenerse hallando los simétricos, respecto a los ejes de la curva, de los ya determinados, al igual que los puntos de la otra rama (Fig. 6.36).

E. Parábola

La parábola es una curva plana y abierta, lugar geométrico de todos los puntos del plano equidistantes de uno fijo llamado foco *F* y de una recta *d* denominada directriz.

$$PF = FD$$

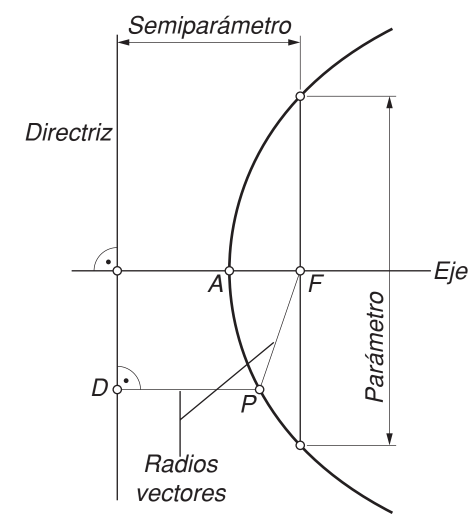


Fig. 6.37. *Elementos de la parábola.*

Elementos de la parábola

Los elementos más significativos que configuran la parábola son los siguientes (Fig. 6.37):

- **Eje:** tiene sólo un eje de simetría, perpendicular a la directriz, y que contiene al **vértice** y al **foco.**
- **Radios vectores:** son las rectas que unen un punto cualquiera de la parábola con el foco.
- **Circunferencia principal:** tiene un radio infinito y es tangente a la parábola en su vértice.
- **Circunferencia focal:** también tiene un radio infinito y se convierte en una recta que coincide con la directriz.
- **Parámetro:** es la longitud de la cuerda de la parábola, perpendicular al eje, que pasa por el foco.
- **Semiparámetro:** es la distancia desde el foco hasta la directriz.

Construcción de la parábola

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de la parábola más utilizados en dibujo técnico.

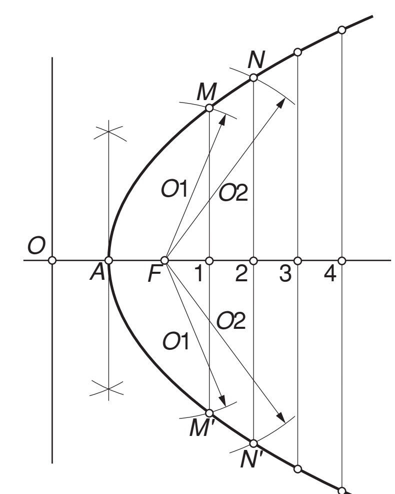


Fig. 6.38. *Construcción de la parábola conociendo la directriz y el foco.*

Parábola conociendo la directriz y el foco. Por puntos

1. Se dibuja la directriz *d* y el foco *F*, y se halla el punto medio del segmento *OF*, siendo éste el vértice *A* de la curva. A partir del foco *F* se sitúan puntos arbitrarios: 1, 2, 3, etc., y por ellos se trazan paralelas a la directriz *d*.
2. Tomando como radios las distancias *O*1, *O*2, etc., y haciendo siempre centro en el punto *F*, se trazan arcos que cortan, respectivamente, a las rectas que pasan por 1, 2, 3, etc., obteniéndose los puntos *M* y *M'*, *N* y *N'*, y así sucesivamente.
3. Al unir estos puntos con trazo continuo resulta la parábola buscada (Fig. 6.38).

Parábola conociendo el vértice, el eje y un punto P de la curva

1. Se sitúan los datos con los que contamos, y se determina el punto *P'*, simétrico de *P* respecto del eje. Por el vértice *A* de la curva se traza una perpendicular al eje, y por *P* y *P'* se trazan las paralelas al eje; donde éstas cortan a la perpendicular se obtienen los puntos *M* y *N*.
2. Se dividen *MP* y *AM* en un número de partes iguales, por ejemplo seis. Por las divisiones obtenidas sobre *AM* se trazan paralelas al eje. Se unen con el vértice *A* los puntos de la división *MP*, y donde estas rectas cortan a las paralelas se obtienen los puntos 1, 2, 3, etc. Los puntos 1', 2', 3', etc., se hallan por simetría.
3. Uniendo los puntos así determinados con una línea continua, se obtiene la parábola pedida (Fig. 6.39).

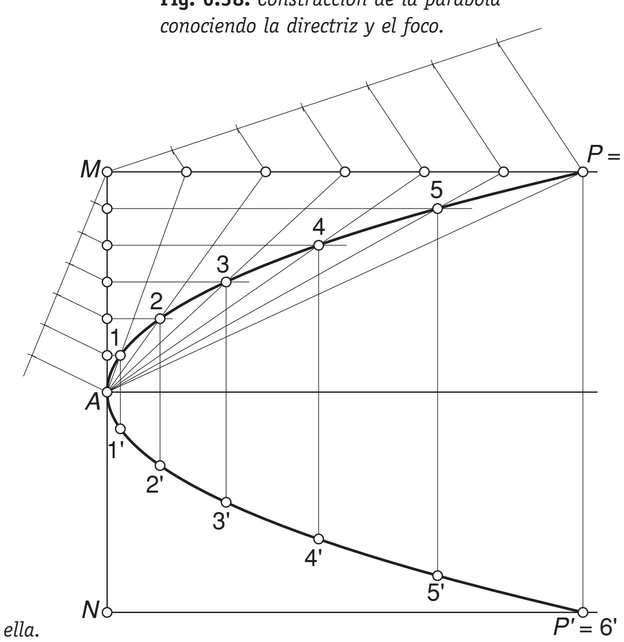
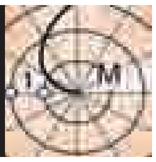


Fig. 6.39. *Parábola conociendo el vértice, el eje y un punto de ella.*



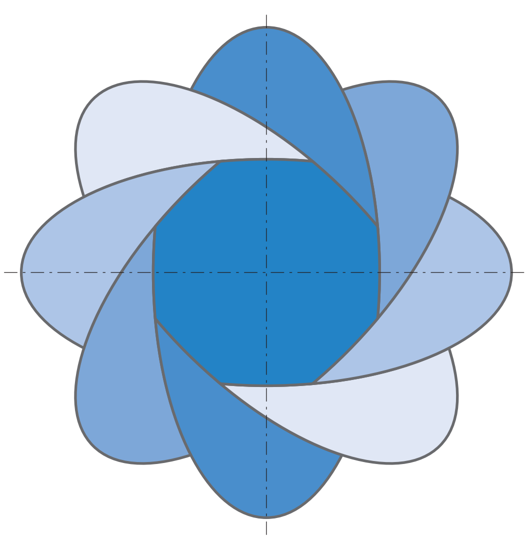
Cuestiones

Define de manera razonada las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se obtienen las curvas cónicas? Clasifícalas.
2. Comenta los elementos más importantes que componen a las curvas cónicas.
3. ¿Qué es una elipse? ¿Qué nomenclatura se utiliza para denominar a los ejes y a la distancia focal?
4. Comenta los elementos que configuran la elipse.
5. Dibuja una elipse conociendo sus dos ejes, por puntos, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
6. ¿Qué es una hipérbola? ¿Qué nomenclatura se utiliza para denominar a los ejes y a la distancia focal?
7. Comenta los elementos que forman la hipérbola.
8. Dibuja una hipérbola conociendo las asíntotas, explicando por escrito los pasos dados para su construcción.
9. ¿Qué es una parábola?
10. Comenta los elementos que configuran la parábola.

Ejercicios

1. Dibuja una elipse por puntos, sabiendo que sus ejes tienen una longitud de 65 mm y 45 mm, respectivamente.
2. Dibuja una elipse por haces proyectivos, sabiendo que sus ejes tienen una longitud de 69 mm y 47 mm, respectivamente.
3. Dibuja una elipse, sabiendo que su eje mayor mide 68 mm y su distancia focal 56 mm.
4. Dibuja una elipse por circunferencias concéntricas o afinidad, sabiendo que sus ejes miden 73 mm y 57 mm, respectivamente.
5. Dibuja una elipse por el método de la tira de papel, sabiendo que dos de sus diámetros conjugados miden 78 mm y 56 mm, respectivamente, y el ángulo menor que forman entre sí es de 45º.
6. Dibuja una hipérbola por puntos, sabiendo que AB = 65 mm, y CD = 47 mm.
7. Dibuja una hipérbola sabiendo que AB = 65 mm, y CD = 47 mm, utilizando para su construcción las asíntotas de la curva.
8. Dibuja una parábola por puntos, sabiendo que la distancia entre el vértice A de la curva y su foco es de 33 mm.
9. Con ayuda de elipses, que puedes realizar mediante los trazados geométricos estudiados, diseña dos figuras ornamentales de manera similar a las que te proponemos en la Figura 6.40.



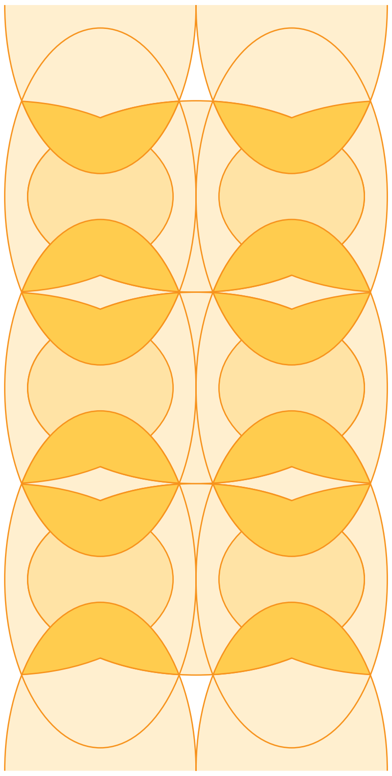


Fig. 6.40. *Ejercicio 9, figuras de ejemplo.*