コラッツ予想についての一考察

船橋東高等学校　山城　隆

今年のセンター試験数学 II B 第 6 問にプログラムの問題として出題されましたが，コラッツ予想とは，
「自然数 n に対して，偶数ならば 2 で割り，奇数ならば 3 倍して 1 を足す，という操作を続けると，必ず 1 に至る。」
というものです。

例：$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

例を見て分かるように，$3 \to 5 \to 1$ と奇数だけを追跡しても同等です。また，奇数は必ず $4n+1, 4n+3$ のどちらかで表せますが，$4n+3$ の場合は $4n+3 \to 6n+5$(奇数) のように常に元の数より大きくなり，$4n+1$ の場合は $4n+1 \to 3n+1$(偶奇不明) のように常に元の数より小さくなり，運がよければさらに小さくなります。特に，2^k-1 は最初の $k-1$ 回 は必ず $4n+3$ と表せて，続けて増大します。$\dfrac{4^k-1}{3} = 4^{k-1} + \cdots + 1$ は $4n+1$ と表せて，明らかに 1 回で 1 に至ります。

現在，コンピュータにより 3×2^{53} 程度まで予想が正しいと確認されているそうです。Excel や Basic で試行錯誤してもなかなか規則性が見つからず，1 に至るまでのその速さに意外性が沢山あります。ルールは簡単ですが，1 に至るまでの挙動が予測不可能に見えて，まだ確率的な証明しかなされていないらしいです (ストレンマイヤー・1957 年)。ところが，今年 5 月に，G.Opfer による証明が提出されました。どちらも道具立てが大変で，読みこなすのに結構な数学の能力 が必要とされます。インターネット上には沢山の投稿があり，それらのいくつかでは直接証明しようと悪戦苦闘しています。ここでは，背理法による証明を試みます。

まず，正の奇数 (N^{odd}) を定義域・値域とする関数 $f(n)$ を

$$f(n)=\frac{3n+1}{2^m}\quad (m\text{ は割り切れる最大自然数})$$

で定義して,「すべての正の奇数 n に対して，$f^u(n)=1$ を満たす自然数 u が存在する。」ことを証明したいので,「ある正の奇数 n に対して，すべての自然数 u で $f^u(n)\neq 1$ が成り立つ。」として矛盾を導くことを目標とします。

次に，逆写像を参考に，

$$x_{i,j}=\frac{2^j\times\frac{6i-3+(-1)^i}{2}-1}{3}\,(i,j=1,2,3,\cdots)$$

とすると，明らかに

$$f(x_{i,j})=\frac{6i-3+(-1)^i}{2}\quad (\neq 3h:h\in N)$$

また,

$$x_{i,j}=2^{j-1}(2i-1)+\frac{(3-1)^{j-1}\times(-1)^i-1}{3}=(\text{整数})+\frac{(-1)^{i+j-1}-1}{3}$$

により，$i+j-1$ が偶数のとき $x_{i,j}$ は整数となり

- i が偶数，j が奇数のとき,

$$\begin{aligned}x_{i,j}&=2^{j-1}(2i-1)+\frac{2^{j-1}-1}{3}\\&=2^{j-1}(2i-1)+\frac{4^{\frac{j-1}{2}}-1}{3}\\&=2^{j-1}(2i-1)+\left(4^{\frac{j-3}{2}}+\cdots+1\right)\in N^{odd}\end{aligned}$$

- i が奇数，j が偶数のとき,

$$\begin{aligned}x_{i,j}&=2^{j-1}(2i-1)+\frac{-2^{j-1}-1}{3}\\&=2^{j-1}(2i-1)+\frac{-2\left(4^{\frac{j-2}{2}}-1\right)-3}{3}\\&=2^{j-1}(2i-1)-2\left(4^{\frac{j-4}{2}}+\cdots+1\right)-1\in N^{odd}\end{aligned}$$

ゆえに，$i+j\,(\neq 1)\in N^{odd}$ のとき，$x_{i,j}\in N^{odd}$。($j=1$ または $j=2$ のときも成立)

逆に，$x_{i,j}=2n-1\,(n=1,2,3,\cdots)$ とおくと，

$$3x_{i,j}+1=2^j\times\frac{6i-3+(-1)^i}{2}=6n-2=2^p\,(3q\pm 1)=2^p\times\frac{6q\pm 2}{2}\ (q\text{ は偶数})$$

により， $j=p, i=q$ または $q+1$，と求まる。$\left(i+j\in N^{odd}\right)$

以上により，$i+j\,(\neq 1)\in N^{odd}$ のとき，$x_{i,j}$ はすべての正の奇数を表している。

以降は $i+j\,(\neq 1)\in N^{odd}$ を仮定する。

$[i]=\left\{x_{i,j}|j\in N, i+j\in N^{odd}\right\}$ とおけば，

$f\left([i]\right)=\dfrac{6i-3+(-1)^i}{2}$，特に $f\left([1]\right)=1$

また，あきらかに $[i]\cap[j]=\phi(i\neq j), \displaystyle\bigcup_i [i]=N^{odd}$。

集合							$f\left([i]\right)$
$[1]=\{$	1,	5,	21,	85,	341,	$\cdots\}$	1
$[2]=\{$	3,	13,	53,	213,	853,	$\cdots\}$	5
$[3]=\{$	9,	37,	149,	597,	2389,	$\cdots\}$	7
$[4]=\{$	7,	29,	117,	469,	1877,	$\cdots\}$	11
$[5]=\{$	17,	69,	277,	1109,	4437,	$\cdots\}$	13
$[6]=\{$	11,	45,	181,	725,	2901,	$\cdots\}$	17
$[7]=\{$	25,	101,	405,	1621,	6485,	$\cdots\}$	19
			$\cdots$				$\cdots$
$[18]=\{$	35,	141,	565,	2261,	9045,	$\cdots\}$	53
			$\cdots$				$\cdots$
$[29]=\{$	113,	453,	1813,	7253,	29013,	$\cdots\}$	85
			$\cdots$				$\cdots$

$[114] = \{$	227,	909,	3637,	14549,	58197,	$\cdots\}$	341
			$\cdots$				$\cdots$
$[285] = \{$	1137,	4549,	18197,	72789,	291157,	$\cdots\}$	853

ここで，$[i]^{(1)} = [i]$ と記号を新しくし，

$[i]^{(2)} = \bigcup_k [k]^{(1)}$ ただし，$f\left([k]^{(1)}\right) = x_{i,j}\,(\neq 3h)\left(j \in N, i+j \in N^{odd}\right)$

つまり，$[1]^{(2)} = [1]^{(1)} \cup [2]^{(1)} \cup [29]^{(1)} \cup [114]^{(1)} \cup \cdots$

$[2]^{(2)} = [5]^{(1)} \cup [18]^{(1)} \cup [285]^{(1)} \cup [1138]^{(1)} \cup \cdots$

などと定義すると，

$$f^2\left([i]^{(2)}\right) = \frac{6i - 3 + (-1)^i}{2}, \text{特に} \quad f^2\left([1]^{(2)}\right) = 1。$$

また，あきらかに $[i]^{(2)} \cap [j]^{(2)} = \phi(i \neq j), \bigcup_i [i]^{(2)} = N^{odd}$。

集合		$f^2\left([i]^{(2)}\right)$
$[1]^{(2)} =$	$[1]^{(1)} \cup [2]^{(1)} \cup [29]^{(1)} \cup [114]^{(1)} \cup \cdots$	1
$[2]^{(2)} =$	$[5]^{(1)} \cup [18]^{(1)} \cup [285]^{(1)} \cup [1138]^{(1)} \cup \cdots$	5
$[3]^{(2)} =$	$[13]^{(1)} \cup [50]^{(1)} \cup [797]^{(1)} \cup \cdots$	7
	$\cdots$	$\cdots$
$[18]^{(2)} =$	$[12]^{(1)} \cup [189]^{(1)} \cup [754]^{(1)} \cup \cdots$	53
	$\cdots$	$\cdots$
$[29]^{(2)} =$	$[38]^{(1)} \cup [605]^{(1)} \cup \cdots$	85
	$\cdots$	$\cdots$
$[114]^{(2)} =$	$[76]^{(1)} \cup [1213]^{(1)} \cup \cdots$	341
	$\cdots$	$\cdots$
$[285]^{(2)} =$	$[1517]^{(1)} \cup \cdots$	853

以下，帰納的に

$[i]^{(r+1)} = \bigcup_k [k]^{(r)}$ ただし，$f\left([k]^{(r)}\right) = x_{i,j}\,(\neq 3h)\left(j \in N, i+j \in N^{odd}\right)$

つまり，$[1]^{(r+1)} = [1]^{(r)} \cup [2]^{(r)} \cup [29]^{(r)} \cup [114]^{(r)} \cup \cdots$
$[2]^{(r+1)} = [5]^{(r)} \cup [18]^{(r)} \cup [285]^{(r)} \cup [1138]^{(r)} \cup \cdots$
などと定義すると，

$$f^{r+1}\left([i]^{(r+1)}\right) = \frac{6i-3+(-1)^i}{2}，特に\ f^{r+1}\left([1]^{(r+1)}\right) = 1。$$

また，あきらかに $[i]^{(r+1)} \cap [j]^{(r+1)} = \phi(i \neq j)$，$\bigcup_i [i]^{(r+1)} = N^{odd}$。

$$\begin{aligned}
例：[1]^{(3)} &= [1]^{(2)} \cup [2]^{(2)} \cup [29]^{(2)} \cup [114]^{(2)} \cup \cdots \\
&= [1]^{(1)} \cup [2]^{(1)} \cup [29]^{(1)} \cup [114]^{(1)} \cup \cdots \\
&\quad \cup [5]^{(1)} \cup [18]^{(1)} \cup [285]^{(1)} \cup [1138]^{(1)} \cup \cdots \\
&\quad \cup [38]^{(1)} \cup [605]^{(1)} \cup \cdots \\
&\quad \cup [76]^{(1)} \cup [1213]^{(1)} \cup \cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

ところで，集合の濃度を測る関数を $\#$ で表せば，$\#(N) = \omega$(可算無限濃度) として，$\#\left(N^{odd}\right) = \omega$，$\#\left([i]^{(1)}\right) = \omega$，$\#\left([i]^{(2)}\right) = \omega^2 = \omega$，
$\#\left([i]^{(3)}\right) = \omega^3 = \omega$，$\cdots$。

さて，
「ある正の奇数 n に対して，すべての自然数 u で $f^u(n) \neq 1$ が成り立つ。」
ということは，
「$n \in [i]$ を満たすある自然数 i に対して，すべての自然数 u で $f^u([i]) \neq 1$ が成り立つ。」
つまり
「すべての自然数 u で $[i] \not\subset [1]^{(u)}$」
ということになる。このとき，上述の帰納的定義が無限回繰り返されるので，$\#\left([1]^{(\omega)}\right) = \omega^\omega > \omega$ となる。

ところが，すべての自然数 u に対して，$[1]^{(u)} \subseteq N^{odd}$ により，$[1]^{(\omega)} \subseteq N^{odd}$ であるので矛盾である。

したがって，
「すべての自然数 i に対して，$f^u([i]) = 1$ を満たす自然数 u が存在する。」

このとき，$[i] \subset [1]^{(u)}$，$\#\left([1]^{(u)}\right) = \omega^u = \omega$。

以上により，

「すべての正の奇数 n に対して，$f^u(n) = 1$ を満たす自然数 u が存在する。」

初めから帰納的定義を無限回繰り返して ω^ω になりそうですが，可算無限集合の稠密性に関係して，ある自然数 u を決めてから帰納的定義を繰り返し，u で繰り返しが止まることに意味があるのだと思います。コラッツ予想を十数年前に知り，頭の隅に引っかかっていましたが，ここ 1 年ほど集中して取り組んで，上述のようにまとめてみました。しかし，そう簡単に証明できるはずもないので，論理的な誤りなどを指摘して頂ければ幸いです。