

# 散逸を伴った無限成分 Dicke Model について

興川 遼大 (ryota kyokawa)  
金沢大学大学院 自然科学研究科 機械科学専攻

## 1. 緒論

近年, 量子コンピュータが注目されている. 従来型のコンピュータでは解答に膨大な時間を要する種類の問題を, 量子コンピュータは瞬時に解くことができるためである. そのため量子コンピュータは期待されているが, 実現に至るまでには課題も多い. 量子コンピュータは量子状態を利用して計算を行うが, 量子状態は壊れやすく, 維持が困難である. そのため量子状態を素早く制御することが求められる. 光子は量子情報の送信に関して優れているが, 熱などの外部の環境に影響され, 散逸に敏感であるとされている. 本研究では Dicke モデルと呼ばれる. 量子状態を表す簡単なモデルに注目した. Dicke モデルで扱われる調和振動子 (光子) と無限成分スピン (原子の集合) について数学的に調べ, 外部の熱や散逸などの影響を考察することを目的とし, 無限成分 Dicke モデルの数学的解析を行う.

## 2. シュレーディンガー方程式

量子力学では物理的状態はヒルベルト空間の元で表される. 物理量としては演算子が扱われる. 量子力学で最も重要とされる方程式は物理的状態の時間発展を与えるシュレーディンガー方程式である:

$$i\partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (0.1)$$

## 3. 調和振動子

3.1 ハミルトニアン 調和振動子の場合ヒルベルト空間の基底状態は  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$  と書かれる. ハミルトニアン  $H$  は次のようになる.

$$H = \omega a^\dagger a \quad (0.2)$$

ここで  $\omega$ : 角振動数 ( $\omega > 0$ ),  $a^\dagger$ : 生成演算子,  $a$ : 消滅演算子である. 生成演算子, 消滅演算子の  $|n\rangle$  への作用と,  $a^\dagger$  と  $a$  の交換関係は次のようになる.

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (0.3)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (0.4)$$

3.2 マスター方程式 シュレーディンガー方程式 ( $i\partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle$ ) はベクトル  $|\psi\rangle$  を扱った方程式だが, ここで密度行列を扱った方程式も考えたい. そこで密度行列  $\rho(t)$  を次のように置く.

$$\rho(t) = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (0.5)$$

この  $\rho(t)$  を微分すると

$$i\partial_t \rho(t) = H\rho(t) - \rho(t)H = [H, \rho(t)] \quad (0.6)$$

この式に外部の熱浴との相互作用を表す項を次のように加えることができる.

$$\partial_t \rho(t) = (-iK_H + \sum_i (\alpha_i D_{A_i, a_{A_i}^\dagger} + \beta_i D_{A_i^\dagger, a_{A_i}})) \rho(t) \equiv L\rho(t) \quad (0.7)$$

この式 (0.7) をマスター方程式と呼ぶ。

但し,  $K_H = [H, \rho]$

$$D_{A_i \rho A_i^\dagger}(\rho) = 2A_i \rho A_i^\dagger - A_i^\dagger A_i \rho - \rho A_i^\dagger A_i$$

$$D_{A_i^\dagger \rho A_i}(\rho) = 2A_i^\dagger \rho A_i - A_i A_i^\dagger \rho - \rho A_i A_i^\dagger \text{ である}$$

ここで  $A_i = a$  という簡単な場合を考える

$$\partial_t \rho(t) = (-iK_H + (\alpha D_{aa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa}))\rho(t) \quad (0.8)$$

$\alpha$  と  $\beta$  は

$$\alpha = \frac{\gamma_i e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1}, \beta = \frac{\gamma_i}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (0.9)$$

とパラメトライズする。右辺の  $\beta$  は外部の逆温度である。

次のようなことが導かれる。

- $\Psi_{n,m} = K_a^n K_{a^\dagger}^m |0\rangle \langle 0|$  とおくと  $(\Psi_{n,m})_{n,m \geq 0}$  は  $C_1(H)$  を張る。
- $D_{a^\dagger oa} \Psi_{n,m} = -(n+m)\Psi_{n,m}$  より  $\Psi_{n,m}$  は  $D_{a^\dagger oa}$  の固有値  $-(n+m)$  を持つ固有ベクトルである。
- $e^{D_{a^\dagger oa}}(\Psi_{0,0}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n} |n\rangle \langle n| / Z$  は Gibbs 分布. (ここで  $\beta = -\frac{1}{\omega} \log(1 - e^{-2t})$ ,  $Z = e^{2t}$ ,  $t = -\frac{1}{2} \log(1 - e^{-\omega\beta})$ )
- $e^{tD_{a^\dagger oa}} \Psi_{n,m}$  は  $e^{2t} D_{a^\dagger oa} + (e^{2t} - 1) D_{a^\dagger oa}$  の固有値  $-(n+m)$  に属する固有ベクトルである ( $n, m = 0, 1, 2, \dots$ )

#### 4. 無限成分スピン

4.1 無限成分スピンの導入 スピン  $j$  をもつスピン系のヒルベルト空間の基底状態は  $|j, -j\rangle, \dots, |j, 0\rangle, \dots, |j, j\rangle$  となる。スピンの上昇演算子の作用を表す式は次のようになる。

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle, (-j < m < j) \quad (0.10)$$

整数  $m$  を止めて  $j$  を  $\infty$  にすると,  $(j-m)(j+m+1)$  の  $m$  は無視できるので  $l_+$  を  $l_+ = J_+ / \sqrt{j(j+1)}$  と定義して  $j$  を  $\infty$  とし,  $|z\rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} |j, z\rangle$  と置けば

$$l_+ |z\rangle = |z+1\rangle, (z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (0.11)$$

が得られる。同様に  $l_-$  も定義すると

$$l_- |z\rangle = |z-1\rangle, (z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (0.12)$$

これを無限成分スピンと呼ぶ。

4.2 マスター方程式 無限成分スピンでのマスター方程式は

$$\partial_t \rho(t) = L\rho(t) \quad (0.13)$$

となり, ジェネレータ  $L$  は次のようなものを考える。

$$L = -i\mu K_M + \alpha D_{L_+ l_+} + \beta D_{L_- l_-} \quad (0.14)$$

ここで  $\mu > 0$  であり,  $S = \alpha D_{L_+ l_+} + \beta D_{L_- l_-}$  とおく。また,  $M$  は  $M|z\rangle = z|z\rangle$  である。

調和振動子のときに  $e^{\alpha D_{aa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa}}$  について考えたのと同様にスピンのとき  $e^{KS}(\rho)$  を考えると次のようになる。

$$e^{KS}(\rho) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(z-2(\alpha-\beta)\kappa)^2}{4\kappa(\alpha+\beta)}}}{\sqrt{2\pi\kappa(\alpha+\beta)}} F_- \rho F_+^z \quad (0.15)$$

この結果から調和振動子で得られた Gibbs 分布とは異なり, スピン系では分布が収束せずに広がっていく様子が見られる。

## 5. 無限成分 Dicke モデル

**5.1 RWA** 散逸を伴う無限成分 Dicke モデルを扱う前に、まず、散逸の伴わない系である RWA の下での Dicke モデルを考える。それは調和振動子（光子）と無限成分スピン（原子の集合）が相互作用している系をモデル化したものである。ここで考えるヒルベルト空間は調和振動子のものとスピン系のものとのテンソル積である。そこでの基底状態は

$$|n\rangle \otimes |k\rangle, (n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (0.16)$$

で与えられる。ここで扱うハミルトニアン  $H_{RWA}$  は次のようになる。

$$H_{RWA} = \omega a^\dagger a + \mu M + \lambda(a l_+ + a^\dagger l_-) \quad (0.17)$$

ここで  $a^\dagger a$  は  $a^\dagger a \otimes 1$ ,  $a l_+$  は  $a \otimes l_+$ ,  $a^\dagger l_-$  は  $a^\dagger \otimes l_-$  の略号である。ユニタリー変換

$$U(\epsilon) = e^{\epsilon(a^\dagger l_- - a l_+)} \quad (0.18)$$

の下で、ハミルトニアン  $H_{RWA}$  は対角化することができ

$$H_{RWA} = \omega a^\dagger a + \mu M + \lambda(a l_+ + a^\dagger l_-) = U^{-1} \left( \omega a^\dagger a + \mu M - \frac{\lambda^2}{\omega - \mu} \right) U \quad (0.19)$$

となる。ここで、 $\lambda = \epsilon(\omega - \mu)$  である。

**5.2 RWA ではない場合** 次に、散逸の伴わない系の RWA を用いないハミルトニアンの下で調和振動子（光子）と無限成分スピン（原子の集合）が相互作用している系を考える。RWA のときと同様にヒルベルト空間は調和振動子のものとスピン系のものとのテンソル積である。ここで扱うハミルトニアン  $H_{Full}$  は次のようになる。

$$H_{Full} = \omega a^\dagger a + \mu M + \lambda(a + a^\dagger)(l_+ + l_-) \quad (0.20)$$

$H_{RWA}$  のときの  $\lambda(a l_+ + a^\dagger l_-)$  の項が  $H_{Full}$  の場合  $\lambda(a + a^\dagger)(l_+ + l_-)$  となっている。ここでは、ユニタリー変換

$$U = \exp \left[ - \left( \frac{\lambda}{\omega + \mu} (a l_- - a^\dagger l_+) + \frac{\lambda}{\omega - \mu} (a l_+ - a^\dagger l_-) \right) + \frac{\omega \lambda^2}{2\mu(\omega^2 + \mu^2)} (l_+^2 - l_-^2) \right] \quad (0.21)$$

の下で、対角化することができ

$$H = \omega a^\dagger a + \mu M + \lambda(a + a^\dagger)(l_+ + l_-) = U^{-1} \left( \omega a^\dagger a + \mu M - \frac{\omega \lambda^2}{2\mu(\omega^2 + \mu^2)} \right) U \quad (0.22)$$

となる。

**5.3 散逸を伴う無限成分 Dicke モデル** 最後に散逸を伴った無限成分 Dicke モデルを考える。ここで考えるハミルトニアンは RWA のときの式 (0.17) を考える。マスター方程式のジェネレータ  $L$  は次のようになる。

$$L = -i\mu K_{H_{RWA}} + \alpha D_{a o a^\dagger} + \beta D_{a^\dagger o a} \quad (0.23)$$

ここで  $U(t)$  を

$$U(t) = \exp [ t ( (\omega - \mu) (K_{a^\dagger l_-} - K_{a l_+}) - i(\alpha D_{l_- o a^\dagger} + \beta D_{a^\dagger o l_-} - \alpha D_{a o l_+} - \beta D_{l_+ o a}) ) ] \quad (0.24)$$

と置くと

$$U(t)^{-1} \left( -i(\omega K_{a^\dagger a} + \mu K_M) + \alpha D_{a o a^\dagger} + \beta D_{a^\dagger o a} + \frac{\lambda^2 S}{(\omega - \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2} \right) U(t) = -i\mu K_{H_{RWA}} + \alpha D_{a o a^\dagger} + \beta D_{a^\dagger o a} = L \quad (0.25)$$

となり対角化できた。ここで、

$$t = \frac{\lambda}{(\omega - \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2} \quad (0.26)$$

と置けばよい。

ここで対角化する前と後で光子 (photon) とスピン (spin) がどのように変化しているか図に示した。(Fig1)

この図 (Fig1) の上の部分が対角化する前の式に対応しており、下の部分が対角化した後の式に対応している。

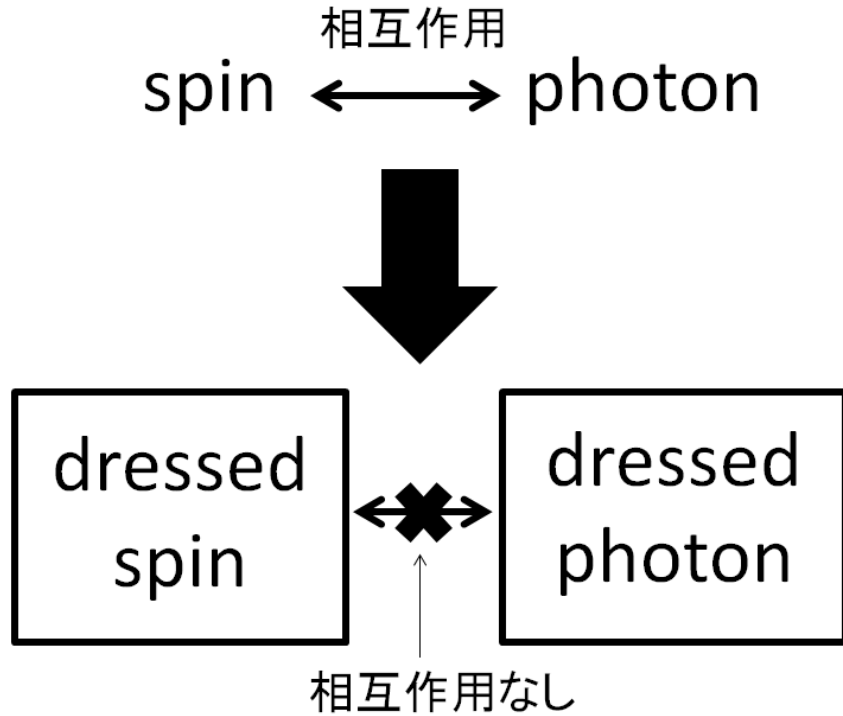


Figure 1: dressed photon, dressed spin

(補足)

散逸を伴った無限成分 Dicke モデルでハミルトニアンを Full のときに用いた式 (0.20) として考えた場合、マスター方程式のジェネレータ  $L$  は次のようになる。

$$L = -i\mu K_{H_{Full}} + \alpha D_{a\alpha a^\dagger} + \beta D_{a^\dagger \alpha a} \quad (0.27)$$

$U$  と  $V$  を

$$U = \exp\left[\lambda \left( \frac{(\omega - \mu)(K_+ - K_-) - i(D_+ - D_-)}{(\omega - \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2} + \frac{(\omega + \mu)(K_{2+} - K_{2-}) - i(D_{2+} - D_{2-})}{(\omega + \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2} \right)\right] \quad (0.28)$$

$$V = \exp\left[ \frac{\lambda^2 \omega (\omega^2 - \mu^2 + (\alpha - \beta)^2) (K_{\bar{r}} - K_{\bar{l}})}{2\mu((\omega - \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2)((\omega + \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2)} + \frac{\lambda^2 (\alpha + \beta) (\omega^2 + \mu^2) (D_{L,ol} - D_{L,ol})}{2\mu((\omega - \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2)((\omega + \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2)} \right] \quad (0.29)$$

と置くと

$$V^{-1} U^{-1} \left( -i(\omega K_{a^\dagger a} + \mu K_M) + \alpha D_{a\alpha a^\dagger} + \beta D_{a^\dagger \alpha a} + \frac{\lambda^2 S}{(\omega - \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2} + \frac{\lambda^2 \bar{S}}{(\omega + \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2} \right) UV = -i\mu K_{H_{Full}} + \alpha D_{a\alpha a^\dagger} + \beta D_{a^\dagger \alpha a} = L \quad (0.30)$$

となり対角化できる.

$U$  と  $V$  に使った記号は以下のようにになっている.

$$\begin{aligned}K_- &= K_{al_+}, K_+ = K_{a^\dagger l_-}, K_{2-} = K_{al_-}, K_{2+} = K_{a^\dagger l_+}, \\D_- &= \alpha D_{aol_+} + \beta D_{l_+oa}, D_+ = \alpha D_{l_-oa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger ol_-}, \\D_{2-} &= \alpha D_{aol_-} + \beta D_{l_-oa}, D_{2+} = \alpha D_{l_+oa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger ol_+}\end{aligned}$$

## 6. 結言

- ・調和振動子と無限成分スピンについて調べた.
- ・スピンと光子が相互作用する散逸系を伴う Dicke モデルは対角化でき, dressed spin と dressed photon が独立に散逸している状況を確認することができた.

## 参考文献

- [1] Daigo Honda, Hiromichi Nakazato, and Motoyuki Yoshida, Spectral resolution of the Liouvillian of the Lindblad master equation for a harmonic oscillator (2010).
- [2] H. J. Briegel, B. G. Englert, Phys. Rev. A 47, 3311 (1993).
- [3] Davies E.B., "The infinite atom Dicke maser model II", Communications in Mathematical Physics, 34, (1973).
- [4] S. Chaturvedi, V. Srinivasan, Phys. Rev. A 43, 4054 (1991).
- [5] R. Endo, K. Fujii, T. Suzuki, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 5, 653, (2008).
- [6] B. A. Tay, T. Petrosky, J. Math. Phys. 49, 113301 (2008).
- [7] D.R. ベス, "現代量子力学入門", 丸善プラネット株式会社, (2009).