

第五編 縦曲線及び緩和曲線

第十六章 縦 曲 線

71 勾配の變化と縦曲線

線路の勾配が急激に變化する場合には次のやうな種々の不都合が生ずる。

(1) 連結器破損の危険あること——勾配の變化が急激であれば、列車が勾配の變化點を通過する際その前後の部分の速度が急激に變化するため、茲に大なる壓力又は引張力が作用して連結器を破損することがある。

(2) 車輪脱線の危険あること——勾配の變化點で大なる壓力を受けた車輛が浮上つて脱線することがある。

(3) 乗心地を悪くし且つ線路を傷めること——列車が勾配の變化點を通過する際、各車輛が激突を受ける結果、乗心地を悪くして線路に悪影響を與へることはいふまでもない。

之等の不都合を緩和するため、勾配の變化點に曲線を用ひて、その急激な變化を防ぐものを縦曲線といふ。

縦曲線として普通に用ひらるゝものは、前後の勾配線に接する圓曲線である。列車の速度は一般に大であるから、縦曲線通過の際その曲率に起因する遠心力のため、車輛には遠心加速度が作用する。その加速度が重力加速度に比して餘り大であれば車輛は再び浮上りの危険に曝らされる。故に縦曲線の半徑は相當に大でなければならない。一般に重力加速度 $9.8m/sec/sec$ に對して許容さるべき遠心加速度 p は $0.4m/sec/sec$ 以下を安全とする。今縦曲線の半徑を $R(m)$ 、列車の速度を $V(km/h)$ とすれば

$$R \geq \left(\frac{V}{3.6}\right)^2 \frac{1}{p} \frac{V^2}{13p} \dots\dots\dots (108)$$

故に

$$p=0.2 \dots R \geq \frac{V^2}{2.5}, \quad p=0.25 \dots R \geq \frac{V^2}{3},$$

$$p=0.3 \dots R \geq \frac{V^2}{4}, \quad p=0.4 \dots R \geq \frac{V^2}{5}$$

これから第29表が得られる。

第 29 表

V km/h	R(m)			
	p=0.2	p=0.25	p=0.3	p=0.4
50	1000	830	630	500
60	1440	1200	900	720
70	1960	1640	1230	980
80	2560	2140	1600	1280
90	3240	2700	2030	1620
100	4000	3340	2500	2000
110	4840	4040	3030	2420
120	5760	4800	3600	2880

縦曲線の半径に関する我國の規定は、國有鐵道建設規程に於ては普通の場合 $R > 3000\text{m}$ とし、半径800m以下の曲線中に勾配の變化ある場合は脱線の危険が多いから $R > 4000\text{m}$ として居る。朝鮮國有鐵道に於ては縦曲線に於ける勾配の平均變化率を定めて居るが、之から半径を求めると次の如くである。

20m 毎の勾配平均變化率(又は半径)

	山形の場合	谷形の場合
甲種線路	2% (10000m)	1% (20000m)

乙種線路	4% (5000m)	2% (10000m)
丙種線路	5% (4000m)	3% (6667m)

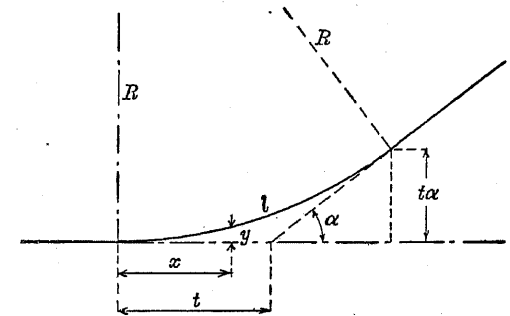
獨逸の鐵道では次の如き半径が用ひられて居る。

重要幹線鐵道	$R > 5000 \sim 10000\text{m}$
支線鐵道	$R > 2000 \sim 5000\text{m}$
地方鐵道	$R = 2000\text{m}$
停車場内及びその前方	$R = 2000\text{m}$
側 線	$R = 1000\text{m}$
ハ ン プ	$R = 100\text{m}$

72 縦曲線敷設法

上述の如く縦曲線の半径 R はその長さに比し、極めて大であるから、之を

圓曲線と見るも或は拋物線と見るも、實際上大差なく、縦曲線敷設に必要な縦横距 x, y の計算には、寧ろ拋物線と見、而もその頂點は縦曲線の始點にあるものとする方が簡易である。故に縦曲線



第 91 圖

としての拋物線の一般方程式は(第91圖参照)

$$y = Cx^2$$

然るに $x = Ra$ に於て $y = ta = \frac{Ra^2}{2}$ であるから

$$\frac{Ra^2}{2} = CR^2\alpha^2$$

$$\therefore C = \frac{l}{2R}$$

故に縦曲線の方程式は

$$y = \frac{x^2}{2R} \dots \dots \dots (104)$$

之から縦横距を計算することが出来る。

実際の場合には縦曲線の長さ l が端数となるのは不便であるから、之を 40m, 60m, 80m, ... 等の内 $l = R\alpha$ より大で之に最も近い値を探るを普通

第 30 表

両勾配 差 (%)	曲線長 l (m)	縦 距 (m)					第一法
		a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	
1.0	50						<p>両勾配差 (上向勾配 (+) 下向勾配 (-) トス) を算出シ之ヲ表中ニ求メ之ノ場合ニ相應スル曲線長 (l) 縦距 (a₁, a₂, a₃) を見出スモノトス。若シ両勾配差が端数ニシテ表中ニ求メ難キノ縦距ハ其ノ前後ノ縦距ニヨリ比例ヲ用ヒテ之ヲ見出スモノトス。</p> <p>例</p> <p>上向セル 12.5/1000 ト 下向セル 20/1000 ト 両勾配差間ニ適用スベキ縦曲線ノ長及ビニ十米毎ニ於ケル縦距ヲ求ム。</p> $\frac{12.5}{1000} - \left(-\frac{20}{1000} \right) = \frac{32.5}{1000}$ <p>求メヨリ曲線長ハ 120 米ナリ</p> <p>次ニ縦距ハ</p> $\frac{32}{1000} \text{ 及 } \frac{33}{1000} \text{ ノ場合平均ヨリ}$ <p>a₁ = 5.4 米 a₂ = 21.7 米 a₃ = 48.8 米</p>
1.1	55						
1.2	60						
1.3	65						
1.4	70						
1.5	75						
1.6	80						
1.7	85						
1.8	90						
1.9	95						
2.0	100						
2.1	105						
2.2	110						
2.3	115						
2.4	120						
2.5	125						
2.6	130						
2.7	135						
2.8	140						
2.9	145						
3.0	150						
3.1	155						
3.2	160						
3.3	165						
3.4	170						
3.5	175						
3.6	180						
3.7	185						
3.8	190						
3.9	195						
4.0	200						
4.1	205						
4.2	210						
4.3	215						
4.4	220						
4.5	225						
4.6	230						
4.7	235						
4.8	240						
4.9	245						
5.0	250						

第 31 表

両勾配 差 (%)	曲線長 l (m)	縦 距 (m)					第二法
		a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	
1.0	33	75					<p>両勾配差 (上向勾配 (+) 下向勾配 (-) トス) を算出シ之ヲ表中ニ求メ之ノ場合ニ相應スル曲線長 (l) 縦距 (a₁, a₂, a₃) を見出スモノトス。若シ両勾配差が端数ニシテ表中ニ求メ難キノ縦距ハ其ノ前後ノ縦距ニヨリ比例ヲ用ヒテ之ヲ見出スモノトス。</p> <p>例</p> <p>下向セル 4/1000 ト 下向セル 25/1000 ナル両勾配差間ニ適用スベキ縦曲線長及ビニ十米毎ニ於ケル縦距ヲ求ム</p> <p>両勾配差ハ</p> $-\frac{25}{1000} - \left(-\frac{4}{1000} \right) = -\frac{21}{1000}$ <p>求メヨリ曲線長ハ 100 米</p> <p>a₁ = 4.2 米 a₂ = 17.0 米 a₃ = 26.3 米</p>
1.1	37	83					
1.2	40	90					
1.3	43	98					
1.4	47	105					
1.5	50	113					
1.6	53	120					
1.7	57	128					
1.8	60	135					
1.9	63	143					
2.0	67	150					
2.1	70	157					
2.2	73	164					
2.3	76	171					
2.4	79	178					
2.5	82	185					
2.6	85	192					
2.7	88	199					
2.8	91	206					
2.9	94	213					
3.0	97	220					
3.1	100	227					
3.2	103	234					
3.3	106	241					
3.4	109	248					
3.5	112	255					
3.6	115	262					
3.7	118	269					
3.8	121	276					
3.9	124	283					
4.0	127	290					
4.1	130	297					
4.2	133	304					
4.3	136	311					
4.4	139	318					
4.5	142	325					
4.6	145	332					
4.7	148	339					
4.8	151	346					
4.9	154	353					
5.0	157	360					

とする。今その値を L とすれば

$$R = \frac{L}{\alpha}$$

であるから、縦曲線の方程式は

$$y = \frac{\alpha}{2L} x^2$$

今 x, y 及び L の単位を m とし、 α を $\%$ にて示せば

$$y = \frac{\alpha}{2000L} x^2 \dots \dots \dots (105)$$

尚ほ實際に於ては(105)式により必要な縦横距を豫め算出したる表を用意し置くを便とする。第30, 31表は我國有鐵道で用ひて居るものである。

第十七章 緩和曲線

73 カントの付け方及び遞減

曲線に於てカントの必要なことは前に述べた通りである。而してカントを付けるには普通曲線外側の軌條を高めるのであるが、嚴密にいへば、このために車輛の重心を高めることとなり、カントが可なり大なる場合には機關車に相當大なる仕事を課することとなる。故に特に大なるカントの場合にはその半分だけ外側の軌條を高め、他の半分は内側の軌條を低めて全體のカントを付けることもある。併し普通は外側の軌條だけを高めることによつてカントを付けることになつて居る。

かやうに曲線に於ては線路は横の方向に傾斜をなすこととなるが、直線に於ては線路は横の方向に必ず水平でなければならない。この二つの相異なる状態を接続せしむるに當つては列車の運轉を安全ならしむるため、之を徐々に變化せしめなければならない。即ち之がためにカントを或る一定距離に亘り徐々に遞減せしめる。この一定距離をカントの遞減距離と呼ぶ。

カントの遞減距離は之を曲線兩端に接続する直線部にとるのが普通であるが、時としてはその一部(約1/3)を曲線中にとることもある。又カントの遞減距離はカントの300倍以上とし、成るべくその變化を緩かにする。然らざればこゝに脱線の危険があり又乗心地が悪くなる。一般に、カントの遞減距離は、列車の速度に應じて、カントの $6V \sim 10V$ 倍(但し V は km/h で表はした列車速度)とするを可とする。

我國有鐵道ではカント遞減距離を第32表の様にて定めて居る。

第 32 表

線路の種類		遞減距離
本線路	甲線	カントの600倍以上
	乙線	カントの450倍以上
	丙線及び簡易線	カントの300倍以上
側線		カントの300倍以上

次にカントの遞減率であるが、普通は距離に比例して直線的に遞減する(以下之を直線遞減と呼ぶこととする)。直線遞減に於てはカント遞減距離の兩端に於て外側軌條の勾配が急變することとなり、高速度の列車に對しては動搖を與へ乗心地を悪くする原因となる。故に勾配の變化する所に縦曲線の必要ある如く、カント遞減距離の兩端に於ても縦曲線に相當する曲線を用ひて勾配の急變を避くるを可とする。獨逸の鐵道ではこゝに半徑2000~5000mの縦曲線を用ひて居る。朝鮮國有鐵道に於て、カント遞減距離の兩端に於けるカントの「おとし」方(軌條一本につき10mm)をその中央に於ける「おとし」方(軌條一本につき15mm)よりも緩かならしめて居るが如きは、この意味に於て首肯せらるべきである。

本章に述ぶる緩和曲線を必要としない場合は勿論、之を必要とする場合でも列車の速度が餘り大でない間はカントの遞減は普通直線遞減で十分である。併し列車のスピードアップに伴ひ漸次カントの直線遞減の不可なることが痛感せらるゝに至ることも遠き將來ではないことと思はれる。

74 緩和曲線の必要

上述の如くカントの遞減距離は普通カントを必要としない直線部にとられ

る結果、この部分を列車が通過する際、不必要なるカントのために急激に車輛を横に傾斜せしめ、不愉快なる左右傾斜動を起して乗心地を甚しく悪くするのみならず、之がために列車の抵抗を増し又線路の保守を困難ならしむるものである。

之等の缺點を除くために緩和曲線が必要となる。即ち緩和曲線はカント遞減距離に於ける各點のカントに相當した曲率を有する曲線で、カント遞減距離の始點(カントの零なる位置)に於ては半径無限大で、それよりカント遞減距離全長に亘つて漸次半径が小となり、遂にその終點(圓曲線との接續點)に於て圓曲線の半径に一致するものである。故に緩和曲線を用ひない場合の如く、半径無限大なる直線から急激に有限の半径を有する圓曲線に移行することなく、又カントと曲率半径との不釣合を除くことが出来、列車の曲線通過を著しく平滑ならしめ、従つて乗心地を善くするものである。

かやうに緩和曲線に於ては、カントと曲率半径とが相一致するものであるが、緩和曲線(即ちカント遞減距離)上の各點に於けるカントの値は、その遞減方法によつて異なる。例へば直線遞減の場合と、兩端に於ける勾配の急變を避けた圓滑な遞減(以下之をカントの圓滑遞減と呼ぶ)の場合とに於ては自ら各點のカントの値が異なる。故にその曲率半径がカントと一致すべき緩和曲線はカントの遞減法の差異に従つて自ら異なる曲線となるのは自明の理である。

75 カントの直線遞減と緩和曲線

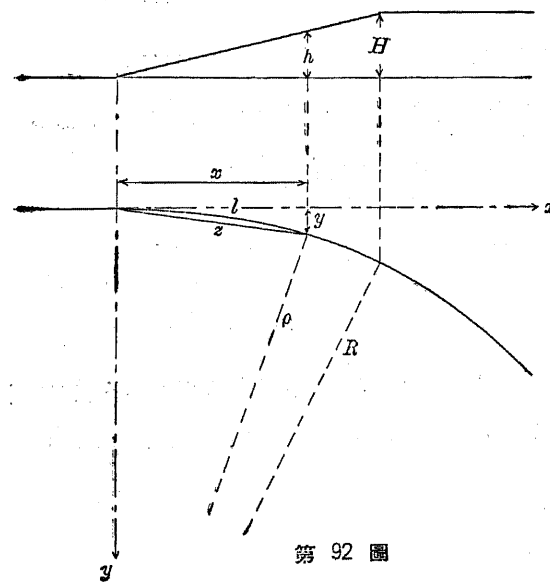
今緩和曲線の始點を直交座標の原點にとり、接線の方を x 軸に、之と直角なる方向を y 軸にとり、且つ

H = 圓曲線(半径 R)に於けるカント

h = 緩和曲線上のカント

L = 緩和曲線の長さ

ρ = カント h なる點に於ける緩和曲線の曲率半径



第 92 圖

とし、カントを直線遞減法により遞減するものとすれば(第92圖参照)

$$h = H \frac{x}{L} \dots\dots (106)$$

然るにカントと曲率半径との關係は(66)式により(160頁参照)

$$H = \frac{GV^2}{127R}$$

$$h = \frac{GV^2}{127\rho}$$

故に

$$h = H \frac{R}{\rho} = H \frac{x}{L}$$

これから

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{RL}{x} = \frac{C}{x} \\ \text{但し } C &= RL \end{aligned} \right\} \dots\dots (107)$$

この式に於ては、(106)式に示す如く、カントは横距 x に直線的に比例するものとしたのであるが、若しカントが横距 x の代りに弦長 z に直線的に比例するものとすれば

$$\rho = \frac{RL}{z} = \frac{C}{z} \dots \dots \dots (108)$$

となり、又若しカントが緩和曲線長 l に直線的に比例する場合には

$$\rho = \frac{RL}{l} = \frac{C}{l} \dots \dots \dots (109)$$

となる。而して之等に應じて緩和曲線も亦異なる曲線となるのである。即ち

$$\rho = \frac{C}{x} \text{ に対しては三次拋物線 (Cubic parabola)}$$

$$\rho = \frac{C}{z} \text{ に対してはレムニスケート曲線 (Lemniscate)}$$

$$\rho = \frac{C}{l} \text{ に対してはクロノイド曲線 (Clothoid)}$$

が對應する。而して第93圖から明かなやうに、緩和曲線を用ふる場合には圓曲線を f だけ内側に移動せしめなければならない。この f を移程といふ。

76 三次拋物線

一般に曲線の曲率半径 ρ は

$$\rho = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

で表はされるが、普通の場合は $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ は 1 に比べて甚だ小であるから近似的に次の如くおくことが出来る。

$$\frac{1}{\rho} \doteq \frac{d^2y}{dx^2}$$

この近似値を用ふれば、カントが横距 x に比例する場合は(107)式より

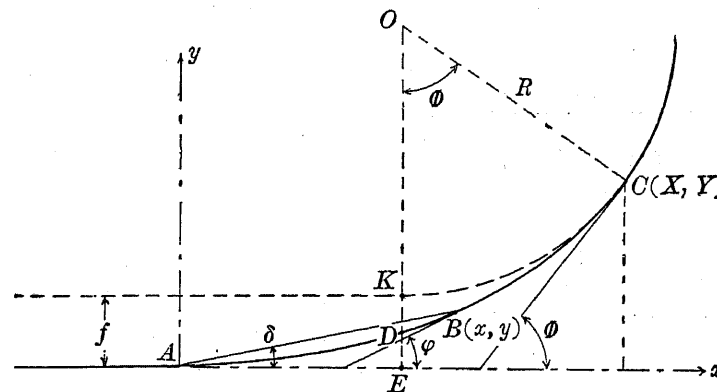
$$\rho = \frac{C}{x}$$

であるから、次の微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{x}{C} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{2C} \\ y &= \frac{x^3}{6C} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

この最後の式が緩和曲線の方程式で、之を三次拋物線といふ。一般に緩和曲線として最も廣く用ひられて居るものである。

第93圖は直線と圓曲線との間に緩和曲線を挿入した有様を示すものである。この圖に於て A は緩和曲線の始點(直交座標 x, y の原點)である。 B は



第 93 圖

緩和曲線上の任意の一點、 C は緩和曲線の終點、 K, D, E は夫々圓曲線の中心から x 軸へ下した垂線が圓曲線の延長及び緩和曲線並に x 軸と交る點である。尙圖に於て

φ = 緩和曲線上任意の點の接線が x 軸となす角。之を螺線角といふ。

θ = 緩和曲線終點に於ける螺線角 *spiral angle*

δ = A 點を過る任意の弦が x 軸となす角。之を偏倚角といふ。

X, Y = 緩和曲線終點の座標

$f = DE$ = 移程 *chord*

とすれば、三次拋物線に於ては

$$y = \frac{x^3}{6C}, \quad Y = \frac{X^3}{6C}$$

而して螺線角は普通の場合に於ては

$$\varphi \doteq \tan \varphi = \frac{x^2}{2C}, \quad \theta \doteq \tan \theta = \frac{X^2}{2C} \dots \dots \dots (111)$$

又偏倚角も小であるから

$$\delta \doteq \tan \delta = \frac{y}{x} = \frac{x^2}{6C} \dots \dots \dots (112)$$

従つて一般に三次拋物線に於ては

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi &= 3 \tan \delta \\ \varphi &= 3\delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (113)$$

なる関係がある。

次に移程 f を求むれば

$$\begin{aligned} f &= Y - R(1 - \cos \theta) \\ &= Y - R \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) \\ &= Y - R \frac{\theta^2}{2} \\ &= \frac{X^3}{6C} - R \frac{X^4}{8C^2} \end{aligned}$$

この式に於て

$$RX \doteq RL = C$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{X^3}{6C} - \frac{X^3}{8C} = \frac{X^3}{24C} \\ &= \frac{L^2}{24R} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (114)$$

従つて又

$$Y = \frac{X^3}{6C} = 4f \dots \dots \dots (115)$$

次に

$$\left. \begin{aligned} DC \doteq KC = R\theta = R \frac{X^2}{2C} = \frac{1}{2} X \\ \therefore AD \doteq \frac{1}{2} X \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (116)$$

又

$$DE = y_{x=\frac{1}{2}X} = \frac{X^3}{48C} = \frac{X^2}{48R} = \frac{f}{2}$$

故に D 點は緩和曲線及び移程を略二等分する位置にある。

(111)~(116)式は三次拋物線の一般的性質を表はすものである。

又三次拋物線上の任意の點の座標 x, y とその點に於ける曲率半径 ρ 及び螺線角 φ との關係を求むれば、次の通りである。先づ一般に

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\rho} (1 + \tan^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\rho} \sec^3 \varphi$$

然るに三次拋物線に於ては

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{C}$$

であるから、之を上の式に用ひて

$$x = \frac{C}{\rho} \sec^2 \varphi$$

然るに又

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varphi = \frac{x^2}{2C} \quad \text{或は} \quad C = \frac{x^2}{2 \tan \varphi}$$

であるから、次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \sin 2\varphi \cos \varphi \\ y &= \frac{x^3}{6C} = \frac{x}{3} \tan \varphi = \frac{\rho}{3} \sin 2\varphi \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (117)$$

従つて又

$$\left. \begin{aligned} X &= R \sin 2\theta \cos \theta \\ Y &= \frac{R}{3} \sin 2\theta \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (118)$$

次に移程 f は

$$\begin{aligned} f &= Y - R(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{R}{3} \sin 2\theta \sin \theta - R(1 - \cos \theta) \\ &= R \left(\frac{1}{3} \sin 2\theta \sin \theta + \cos \theta - 1 \right) \dots\dots\dots (119) \end{aligned}$$

又曲線長 l は一般に

$$l = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

であるから、之に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2C}$$

を用ふれば緩和曲線の全長 L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^X \sqrt{1 + \frac{x^4}{4C^2}} dx \\ &= \int_0^X \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^4}{4C^2} - \frac{1}{8} \frac{x^8}{16C^4} + \dots \right) dx \\ &= \left[x + \frac{1}{10} \frac{x^5}{4C^2} - \frac{1}{72} \frac{x^9}{16C^4} + \dots \right]_0^X \\ &= X \left(1 + \frac{1}{10} \frac{X^4}{4C^2} \right) \\ &= X \left(1 + \frac{1}{10} \tan^2 \theta \right) \end{aligned}$$

之に (118) 式を用ひて

$$L = R \sin 2\theta \cos \theta \left(1 + \frac{1}{10} \tan^2 \theta \right) \dots\dots\dots (120)$$

又緩和曲線の中点 D の縦横距を $X_{\frac{1}{2}}$, $Y_{\frac{1}{2}}$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} X_{\frac{1}{2}} &= X - R \sin \theta = R(\sin 2\theta \cos \theta - \sin \theta) \\ Y_{\frac{1}{2}} &= Y \left(\frac{X_{\frac{1}{2}}}{X} \right)^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (121)$$

一般に三次抛物線に於て X を n 等分したる場合、 m 番目の點の座標 X_m , Y_m は

$$X_m = \frac{m}{n} X, \quad Y_m = \left(\frac{m}{n} \right)^3 Y \dots\dots\dots (122)$$

から求めることが出来る。

(118)~(122)式から判るやうに、緩和曲線の長さ、各點の縦横距、移程等は何れも圓曲線の半径 R 及び緩和曲線終點の螺線角 θ の函数として表はすことが出来る。この關係は緩和曲線の計算に極めて便利であつて、緩和曲線の敷設に應用せらるることは後に述べる通りである。

77 三次拋物線に於ける誤差

緩和曲線としての三次拋物線は

$$\rho = \frac{C}{x}$$

なる条件に出發して誘導されたのであるが、その誘導に當り

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

なる近似法が用ひられた。即ち

$$\mu = \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sec^3 \varphi} = \cos^3 \varphi < 1$$

に對し近似的に $\mu=1$ とおいたのである。之は $\varphi=0$ に於てのみ成立するもので、螺線角 φ が漸次大となるに従ひ誤差が増大する。その結果 φ の最も大なる緩和曲線の終點に於て

- (1) 緩和曲線と圓曲線との半徑の不一致
- (2) 緩和曲線と圓曲線との螺線角の不一致

等を來すこととなる。今之等の誤差が如何なる程度のものであるかを吟味すれば、次の通りである。

先づ $\mu=1$ なる近似法を用いた場合の緩和曲線終點の半徑は $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ から

$$\rho = \frac{C}{X} = R$$

であるが、嚴密には $\mu \neq 1$ であるから、緩和曲線終點の嚴密なる半徑を R' とすれば

$$\rho = \frac{1}{\mu} R = R' \quad \text{但し} \quad \frac{1}{\mu} = (1 + \tan^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}$$

然るに $\mu < 1$ であるから

$$R' = \frac{R}{\mu} > R \dots\dots\dots (123)$$

この誤差は緩和曲線終點の螺線角 φ の増大に従つて第33表の様増加する。

第 33 表

$\tan \varphi$	μ	$\frac{R'}{R} = \frac{1}{\mu}$	$\tan \varphi$	μ	$\frac{R'}{R} = \frac{1}{\mu}$
0.05	0.99626	1.0038	0.30	0.87874	1.1380
0.10	0.98519	1.0150	0.40	0.80041	1.2494
0.20	0.94287	1.0606	0.447	0.76073	1.3145

この誤差を除くために Petersen は次の如く修正を加へた。

$$y = \frac{x^3}{6\mu C} \dots\dots\dots (124)$$

之を Petersen の修正三次拋物線といふ。

次に緩和曲線と圓曲線との接續點に於ける螺線角の不一致を検すれば、次の通りである。第94圖に於て

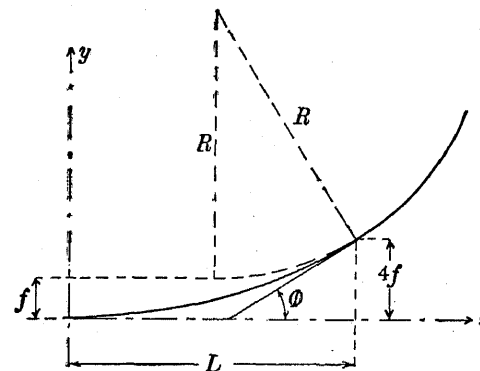
圓曲線の方程式は

$$\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + (y - R - f)^2 = R^2$$

これより

$$\left(x - \frac{L}{2}\right) dx + (y - R - f) dy = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x - \frac{L}{2}}{R + f - y}$$



第 94 圖

故に圓曲線の螺線角 ϕ' は

$$\begin{aligned} \tan \phi' &= \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_{x=L, y=4f} \\ &= \frac{L}{2} \frac{1}{R-3f} \\ &= \frac{L}{2R} \frac{1}{1-\frac{L^2}{8R}} \\ &\doteq \frac{L}{2R} \left(1 + \frac{L^2}{8R} \right) \end{aligned}$$

然るに三次拋物線の螺線角 ϕ は

$$\tan \phi = \frac{L^2}{2C} = \frac{L}{2R}$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi'}{\phi} &= \frac{\tan \phi'}{\tan \phi} = 1 + \frac{L^2}{8R^2} = 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \phi \\ \text{或は} \quad \frac{\phi}{\phi'} &= \frac{\tan \phi}{\tan \phi'} = \left(1 + \frac{L^2}{8R^2} \right)^{-1} = 1 - \frac{L^2}{8R^2} = 1 - \frac{1}{2} \tan^2 \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(125)$$

第 34 表

$\tan \phi$	ϕ	ϕ'/ϕ	ϕ/ϕ'	$\tan \phi$	ϕ	ϕ'/ϕ	ϕ/ϕ'
0.05	2°52'	1.001	0.999	0.30	16°42'	1.045	0.955
0.10	5°43'	1.005	0.995	0.40	21°48'	1.080	0.920
0.15	8°32'	1.011	0.989	0.447	24°05'	1.106	0.894
0.20	11°19'	1.020	0.980				

又三次拋物線は $\mu=1$ なる近似法を用ひて誘導されて居る結果、緩和曲線としての必要條件 $\rho=C/x$ は唯近似的に満足さるゝに過ぎない。即ち x が大となる程 ρ が小となるべき條件は、或る一定範圍の x に對してのみ満足されて居るに過ぎない。

今試みに三次拋物線の半径が最小となる條件を求めれば

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \right) = 0$$

即ち

$$\frac{\frac{d^3y}{dx^3} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} - \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{3}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^3} = 0$$

之より

$$\frac{d^3y}{dx^3} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} - 3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

然るに三次拋物線に於ては

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2C}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{C}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{C}$$

であるから、上式は

$$\frac{1}{C} \left\{ 1 + \frac{x^4}{4C^2} \right\} - 3 \frac{x^4}{2C^3} = 0$$

$$4C^2 + x^4 - 6x^4 = 0$$

$$x^4 = -\frac{4}{5}C^2$$

$$x = \sqrt[4]{0.8} \sqrt{C}$$

即ち三次拋物線に於ては $x = \sqrt[4]{0.8} \sqrt{C}$ に於て半径が最小となり、それより大なる x にては半径は却つて大となる。故に三次拋物線を用ふる場合は

$$x^2 = L^2 = \sqrt{0.8} C$$

$$L^2 = 0.89443 RL$$

$$L = 0.89443 R \dots\dots\dots(126)$$

以上に長い緩和曲線を用ひてはならない。

又半径が最小となる點の螺線角を求むれば

$$\tan \phi = \left\{ \frac{x^2}{2C} \right\}_{x=\sqrt{0.8}C}$$

$$= \frac{\sqrt{0.8}C}{2C} = \sqrt{0.2} = 0.4472$$

$$\therefore \phi = 24^\circ 5' 41.4'' \dots \dots \dots (127)$$

故に螺線角が $24^\circ 5' 41.4''$ 以上となる場合には三次拋物線を緩和曲線に用ふるは不可である。

又この最小半径の値は第33表に示す如く $1.3145R$ である。

かやうに三次拋物線には種々なる誤差があるが、第34表から分るやうに ϕ が $8^\circ \sim 10^\circ$ 以上に大となれば可なり誤差に達する。而して誤差の原因は $\mu=1$ にあるから、誤差を除くためにはこの近似法を用ひず、精密なる計算をしなければならぬ。今その場合の緩和曲線を求むれば次の通りである。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x}{C} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

こゝに於て

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

とおけば

$$\frac{x}{C} = \frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

故に

$$\int \frac{x}{C} dx = \int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

之を積分して

$$\frac{x^2}{2C} = p(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ 或は } \frac{x^4}{4C^2} = \frac{p^2}{1+p^2}$$

之より

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{(4C^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore y = \int \frac{x^2 dx}{(4C^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

こゝに於て

$$\frac{x}{\sqrt{2C}} = X, \quad dx = \sqrt{2C} dX$$

とおけば

$$y = \sqrt{2C} \int \frac{X^2 dX}{(1-X^4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sqrt{2C} \int X^2 \left(1 + \frac{1}{2} X^4 + \frac{3}{8} X^8 + \frac{5}{16} X^{12} + \dots \right) dX$$

$$= \sqrt{2C} \left\{ \frac{X^3}{3} + \frac{X^7}{14} + \frac{3X^{11}}{88} + \frac{1}{48} X^{15} + \dots \right\}$$

$$= \sqrt{2C} \left[\frac{X^3}{3} (1 + 0.2143 X^4 + 0.1023 X^8 + 0.0625 X^{12} + \dots) \right]$$

$$= \frac{x^3}{6C} \left(1 + \frac{0.2143}{4C^2} x^4 + \frac{0.1023}{16C^4} x^8 + \dots \right)$$

$$= \frac{x^3}{6C} \left(1 + 0.0536 \frac{x^4}{C^2} + 0.0064 \frac{x^8}{C^4} + \dots \right) \dots \dots (128)$$

若し近似的にこの式の第二項以下を無視すれば三次拋物線が得られる。

【註】 (128)式に於て $x/L = \xi$ ($\xi = 0 \sim 1$) とおけば

$$y = \frac{x^3}{6C} \left(1 + 0.0536 \frac{L^2}{R^2} \xi^4 + 0.0064 \frac{L^4}{R^4} \xi^8 + \dots \right) \dots \dots (129)$$

故に $R=300$ m, $L=42$ mの場合には

$$y = \frac{x^3}{6C} (1 + 0.00105 \frac{x^2}{C} + \dots)$$

又 $R=300m, L=84m$ の場合には

$$y = \frac{x^3}{6C} (1 + 0.0042 \frac{x^2}{C} + \dots)$$

故に普通の場合には三次拋物線で差支ない。

78 レムニスケート曲線

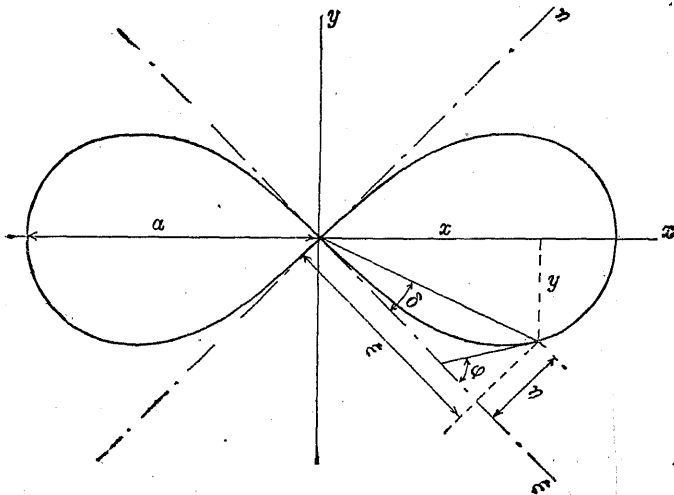
レムニスケート曲線の方程式は、直交座標を用ふれば(第95圖参照)

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \dots \dots \dots (130)$$

又極座標を用ふれば

$$z^2 = a^2 \sin 2\delta \dots \dots \dots (131)$$

であつて、この曲線も次に述ぶる如く緩和曲線として適當な條件を具備して居る。



第 95 圖

一般に曲線上の任意の點に於ては(第96圖参照)

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{dl}{d\varphi} \\ dl^2 &= dz^2 + z^2 d\delta^2 \end{aligned} \right\} \dots (132)$$

なる關係がある。

然るにレムニスケート曲線に於ては(131)式から

$$\left. \begin{aligned} z &= a\sqrt{\sin 2\delta} \\ dz &= a \frac{\cos 2\delta}{\sqrt{\sin 2\delta}} d\delta \end{aligned} \right\} (133)$$

故に(132)式の第二式は

$$dl^2 = a^2 d\delta^2 \left(\frac{\cos^2 2\delta}{\sin 2\delta} + \sin 2\delta \right)$$

$$\therefore dl = a d\delta \sqrt{\frac{\cos^2 2\delta + \sin^2 2\delta}{\sin 2\delta}} = \frac{a d\delta}{\sqrt{\sin 2\delta}}$$

然るに後に證明する如く((135)式参照)

$$d\varphi = 3d\delta$$

であるから

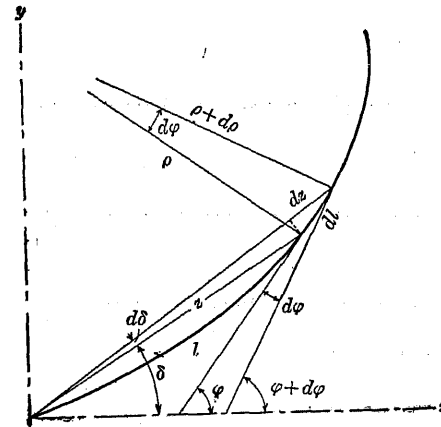
$$\rho = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{a}{3\sqrt{\sin 2\delta}}$$

然るに(133)式から

$$\sqrt{\sin 2\delta} = \frac{z}{a}$$

故に之を上式に入れて

$$\rho = \frac{a^2}{3z}$$



第 96 圖

ここに於て

$$\frac{a^2}{3} = C \text{ 或は } a = \sqrt{3C}$$

とおけば上式は $\rho = C/z$ となり緩和曲線として適当な条件を満足して居ることが分る。又レムニスケート曲線の方程式(133)は

$$z = \sqrt{3C \sin 2\delta} \dots\dots\dots (134)$$

となる。

次にレムニスケート曲線に於ける螺線角 φ と偏倚角 δ との関係を求むるため、直交座標軸 x, y を 45° 廻轉せしめて ξ, η 軸を用ふれば

$$\xi = z \cos \delta \quad \therefore d\xi = dz \cos \delta - z \sin \delta d\delta$$

$$\eta = z \sin \delta \quad \therefore d\eta = dz \sin \delta + z \cos \delta d\delta$$

故に

$$\begin{aligned} \tan \varphi = \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{z + \tan \delta \frac{dz}{d\delta}}{\frac{dz}{d\delta} - z \tan \delta} \\ &= \frac{a\sqrt{\sin 2\delta} + \tan \delta \frac{a \cos 2\delta}{\sqrt{\sin 2\delta}}}{\frac{a \cos 2\delta}{\sqrt{\sin 2\delta}} - a\sqrt{\sin 2\delta} \tan \delta} \\ &= \frac{\sin 2\delta + \tan \delta \cos 2\delta}{\cos 2\delta - \sin 2\delta \tan \delta} \\ &= \frac{\sin 2\delta \cos \delta + \sin \delta \cos 2\delta}{\cos 2\delta \cos \delta - \sin 2\delta \sin \delta} \\ &= \frac{\sin 3\delta}{\cos 3\delta} \end{aligned}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \tan \varphi &= \tan 3\delta \\ d\varphi &= 3d\delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (135)$$

この関係は三次抛物線に於ける

$$\tan \varphi = 3 \tan \delta$$

なる関係に當るものであるが、同じ偏倚角 δ に對するレムニスケート曲線の螺線角 φ_L と三次抛物線の螺線角 φ_C とを比較すれば、第35表から明かなる如く普通の場合には

$$\tan \varphi_L = \tan 3\delta > 3 \tan \delta = \tan \varphi_C$$

故に螺線角はレムニスケート曲線の方が三次抛物線よりも早く大となる。このことは市街鐵道や高速鐵道の如き急角度に曲る曲線の緩和曲線に於て望ましいことである。

第 35 表

δ	$\tan 3\delta$	$3 \tan \delta$
0.05	0.15114	0.15012
0.10	0.30934	0.30099
0.20	0.68414	0.60813
0.30	1.26916	0.92802
0.40	2.57215	1.26837
0.447	4.27481	1.43808
0.5	14.1012	1.63890

又第95圖より明かなる如く、レムニスケート曲線の半径は x 軸上に於て最小となり、この點に於ける螺線角は 135° である。故にレムニスケート曲線は螺線角が 135° となるまでは用ひることが出来る。然るに三次抛物線に於ては、前述の如く、螺線角が $24^\circ 5' 41.4''$ に於て半径が最小となるから、それ以上の螺線角に對しては三次抛物線を用ひることは出来ない。このことも亦レムニスケート曲線が市街鐵道や高速鐵道に於ける如き急角度の曲線の緩和曲線として有利なる所以である。併しかやうに有利な条件を具備して居るレムニスケート曲線が、未だ一般に用ひらるゝに至らないのは、その曲線長の計算が初等數學を以てしては不能であるからである。

79 クロソイド曲線

曲率半径が曲線長に比例して減少するが如き曲線を、クロノイド曲線といふ。即ち

$$\rho = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{C}{l}$$

故にこの曲線はカントの直線的遞減をなす場分の緩和曲線として適當なものである。

上式から

$$d\varphi = \frac{l dl}{C}$$

之を積分して

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{l^2}{2C} \\ \text{或は } \varphi &= ml^2, \quad \text{但し } m = \frac{1}{2C} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (186)$$

然るに

$$\frac{dy}{dl} = \sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

之に $\varphi = ml^2$ を用ひて

$$dy = dl \left(ml^2 - \frac{m^3 l^6}{6} + \frac{m^5 l^{10}}{120} - \frac{m^7 l^{14}}{5040} + \dots \right)$$

故に之を積分して

$$\left. \begin{aligned} y &= l \left(\frac{m}{3} l^2 - \frac{m^3}{42} l^6 + \frac{m^5}{1820} l^{10} - \frac{m^7}{75600} l^{14} + \dots \right) \\ &= l \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{\varphi^3}{42} + \frac{\varphi^5}{1820} - \frac{\varphi^7}{75600} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (187)$$

同様に

$$\frac{dx}{dl} = \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

より次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x &= l \left(1 - \frac{m^2 l^4}{10} + \frac{m^4 l^8}{216} - \frac{m^6 l^{12}}{9360} + \dots \right) \\ &= l \left(1 - \frac{\varphi^2}{10} + \frac{\varphi^4}{216} - \frac{\varphi^6}{9360} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (138)$$

(137), (138)式を以て表はさるゝクロノイド曲線を克蘭ダル螺線 (Crandal's spiral) ともいふ。

上式中の φ はラヂアンで示されて居る。今之を角度 φ° で表はせば

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \varphi^\circ = 0.017453 \varphi^\circ$$

であるから、上式は

$$\left. \begin{aligned} y &= l \left\{ \frac{\varphi^\circ}{3} (0.017453) - \frac{\varphi^{\circ 3}}{42} (0.017453)^3 + \dots \right\} \\ x &= l \left\{ 1 - \frac{\varphi^{\circ 2}}{10} (0.017453)^2 + \frac{\varphi^{\circ 4}}{216} (0.017453)^4 - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (139)$$

之をホルブルツク螺線 (Holbrook's spiral) ともいふ。

次にクロノイド曲線に於ける偏倚角 δ と螺線角 φ との關係を求めれば、先づ(137), (138)式から

$$\tan \delta = \frac{y}{x} = \frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi^3}{105} + \frac{26\varphi^5}{155925} + \dots$$

然るに一般に

$$\delta = \tan \delta - \frac{1}{3} \tan^3 \delta + \frac{1}{5} \tan^5 \delta - \dots$$

故に

$$\delta = \frac{\varphi}{3} - 0.002828\varphi^3 - 0.000068\varphi^5 \dots\dots\dots (140)$$

クロノイド曲線に於ては $l = \infty$ に於て $\rho = 0$ である。かくの如き點の位置を求めれば次の通りである。

先づ(136)式より

$$\frac{l^2}{C} = 2\varphi \text{ 或は } \frac{\sqrt{C}}{l} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\varphi}} \dots\dots\dots(141)$$

故に

$$\rho = \frac{C}{l} = \sqrt{C} \frac{\sqrt{C}}{l} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2\varphi}}$$

又 $\rho = dl/d\varphi$ より

$$dl = \rho d\varphi = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2\varphi}} d\varphi$$

故に

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_0^\varphi \cos \varphi \, dl = \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi \\ y &= \int_0^\varphi \sin \varphi \, dl = \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(142)$$

而して $l = \infty$ に於ては $\varphi = \infty$, $\rho = 0$ である。今かやうな位置の座標を x_0 , y_0 とすれば, 上式より

$$x_0 = \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\infty \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi$$

故に $\sqrt{-1} = i$ とすれば

$$x_0 + iy_0 = \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\infty \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi$$

然るに $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ であるから

$$x_0 + iy_0 = \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{\varphi}} d\varphi = \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\infty e^{i\varphi} \varphi^{-\frac{1}{2}} d\varphi$$

而して一般に

$$\int_0^\infty e^{-qx} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}$$

故に上式はこの式に於て $q = -i$, $p = \frac{1}{2}$, $x = \varphi$ とおいたものである。即ち

$$\int_0^\infty e^{i\varphi} \varphi^{-\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-i}}$$

然るに

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

であるから

$$\int_0^\infty e^{i\varphi} \varphi^{-\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-i}} = \sqrt{\pi i}$$

故に

$$x_0 + iy_0 = \sqrt{\frac{C}{2}} \sqrt{\pi i}$$

この式の左右兩邊を二乗すれば

$$x_0^2 - y_0^2 + 2ix_0y_0 = \frac{C}{2} \pi i$$

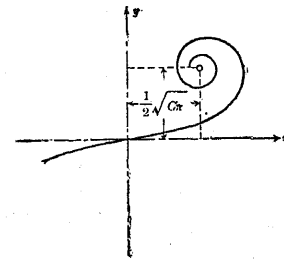
この式が成立つためには

$$x_0^2 - y_0^2 = 0$$

$$2x_0y_0 = \frac{C}{2} \pi$$

でなければならない。之より

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2} \sqrt{C\pi} \dots\dots(143)$$



第 97 圖

故に第97圖が得られる。

次にクロソイド曲線に於ける x と y の關係を求むれば次の通りである。

(142)式より

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi \\
 &= \sqrt{\frac{C}{2}} \int_0^\varphi \left(\varphi^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2!} \varphi^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4!} \varphi^{\frac{7}{2}} - \dots \right) d\varphi \\
 &= \sqrt{\frac{C}{2}} \left(2\varphi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2!} \frac{2}{5} \varphi^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4!} \frac{2}{9} \varphi^{\frac{9}{2}} - \dots \right) \\
 &= \sqrt{2C\varphi} \left(1 - \frac{1}{10} \varphi^2 + \frac{1}{216} \varphi^4 - \dots \right) \dots \dots (144)
 \end{aligned}$$

同様に

$$y = \sqrt{2C\varphi} \left(\frac{1}{3} \varphi - \frac{1}{42} \varphi^3 + \frac{1}{1820} \varphi^5 - \dots \right) \dots \dots (145)$$

今(136)式により

$$\varphi = \frac{l^2}{2C} \div \frac{x^2}{2C} \dots \dots \dots (146)$$

なる φ の近似値を用ふれば、(140)式より

$$x = \sqrt{2C\varphi} \left(1 - \frac{1}{40} \frac{x^4}{C^2} + \dots \right)$$

この式の第三項以下を省略して

$$x \div \sqrt{2C\varphi} \left(1 - \frac{1}{40} \frac{x^4}{C^2} \right)$$

とおけば、之より φ の第二近似値

$$\varphi = \frac{x^2}{2C} \left(1 - \frac{1}{40} \frac{x^4}{C^2} \right)^{-2} \div \frac{x^2}{2C} \left(1 + \frac{1}{20} \frac{x^4}{C^2} \right) \dots \dots (147)$$

が得られる。之を更に(144)式に用ひ、同様のことを繰り返して φ の高次の近似値を求め、之を(145)式に入れば、最後に

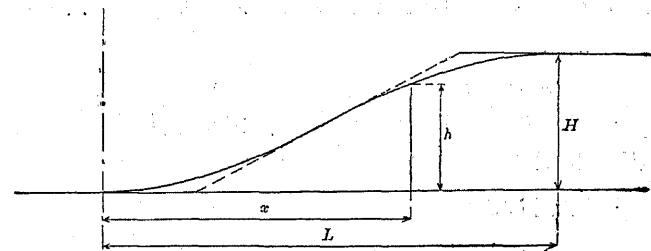
$$y = \frac{x^3}{6C} \left(1 + 0.0057 \frac{x^4}{C^2} + 0.0074 \frac{x^6}{C^3} + \dots \right) \dots \dots (148)$$

が得られる。

80 カントの圓滑遞減と緩和曲線

三次拋物線、レムニスケート曲線、クロソイド曲線等は何れもカントの直線遞減を前提とし、之に適應する曲率半徑を有する緩和曲線である。従つて直線より曲線への圓滑なる接続は單に平面に於て満足せらるるのみで、立面に於ては全く閑却されて居る。即ちこの種の緩和曲線の兩端に於ては、カントを附するために外側軌條の勾配が急變することとなり、その結果この部分を通過する列車に動搖及び激衝を與ふることとなる。このことは夙に Bräuning 氏が示した實驗結果からも明かであつて、彼によれば (Zentralblatt der Bauverwaltung, 1907, 83頁以下参照)、カントの遞減勾配10%の場合120km/hの速度の列車が受くる上下動の振幅66mmであつたのに對し、その兩端に於けるカントの急變を避けるため5000mの半徑の圓弧を以つて圓めた結果車輛の上下動の振幅は僅か18mmに減少したのである。この事實から見てもカントの圓滑遞減の必要なことは明かであつて、近來列車の速度が著しく昂上せられるに従ひ、一層痛切にその必要が感ぜられるに至つた。

カントの圓滑遞減として從來提案せられて居るものは(第98圖参照)



第 98 圖

Watorek, Lachmann 及び Rothe

$$h=H\left\{10\left(\frac{x}{L}\right)^3-15\left(\frac{x}{L}\right)^4+6\left(\frac{x}{L}\right)^5\right\} \dots\dots\dots(149)$$

Hoffmann 及び Schramm

$$\left. \begin{array}{l} \text{前半 } h=2H\left(\frac{x}{L}\right)^2 \\ \text{後半 } h=H\left\{1-2\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\right\} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(150)$$

著者

$$h=\frac{H}{16}\left(8-9\cos\frac{\pi x}{L}+\cos\frac{3\pi x}{L}\right) \dots\dots\dots(151)$$

等であるが、(150) 式はカントの遞減が拋物線的であつて、兩端に於て單に $dh/dx=0$ を満足するのみであるが、(149)及び(151)式に於ては $dh/dx=0$ のみならず $d^2h/dx^2=0$ をも満足して居るから、カントの遞減距離の兩端に於ける縦の方向の遠心加速度の變化も急激に起らず極めて圓滑なる運轉を可能ならしむるものである。

カントの遞減法が與へらるれば、緩和曲線上各點のカントと曲率半径とは

$$\frac{1}{\rho}=\frac{h}{HR} \dots\dots\dots(152)$$

なる關係にあるから、之から緩和曲線の方程式を導くことが出来る。

今若し

$$\frac{1}{\rho} \div \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h}{HR} \quad (\text{即ち } \mu = \frac{1}{(1+\tan^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \div 1)$$

なる近似法を用ふれば

(149)式に對しては

$$y=\frac{L^2}{2R}\left\{\left(\frac{x}{L}\right)^5-\left(\frac{x}{L}\right)^6+\frac{2}{7}\left(\frac{x}{L}\right)^7\right\} \dots\dots\dots(153)$$

(150)式に對しては

$$\left. \begin{array}{l} \text{前半 } y=-\frac{L^2}{6R}\left(\frac{x}{L}\right)^4 \\ \text{後半 } y=-\frac{L^2}{2R}\left\{\left(\frac{x}{L}\right)^2-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{L}\right)^4\right\} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(154)$$

(151)式に對しては

$$y=\frac{L^2}{16R}\left\{4\left(\frac{x}{L}\right)^2+\frac{1}{9\pi^2}\left(81\cos\frac{\pi x}{L}-\cos\frac{3\pi x}{L}-80\right)\right\} \dots\dots(155)$$

等の緩和曲線が得られる。

然るにカントの圓滑遞減法を用ひ且つ $\mu=1$ なる近似法を用ひて誘導せらるる緩和曲線には、必然的に、その終點より手前に於て半径が最小となり、終點に於ては半径は却つて増大しつつあるといふ缺點を生ずるものである。

何となれば曲率半径の一般式

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1+\tan^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

に於て、上記の近似法を用ふれば

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{HR}\frac{h}{(1+\tan^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

従つて

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dx}=\frac{1}{HR}\frac{\frac{dh}{dx}(1+\tan^2\varphi)-\frac{3h^2}{HR}\tan\varphi}{(1+\tan^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

となり、緩和曲線の終點 $x=L$ に於ては

$$\frac{dh}{dx}=0, h=H, \tan\varphi=\tan\theta>0 \therefore \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dx}<0$$

となり、圓滑遞減 $dh/dx=0$ の結果は、緩和曲線の終點に於ける曲率半径が既に増加しつつあることを示すからである。

この缺點は直交座標 x, y を以て示さるゝ曲率半径の一般式に於て $\mu=1$ とおくことゝカントの圓滑遞減を用ふることゝに基因する當然の結果である。直交座標 x, y を用ふことは緩和曲線を縦横距法によつて敷設する場合には最も便利なもので、従來の如くカントの直線遞減が多く用ひられて居た時代には重寶なものであつた。併しカントの圓滑遞減が用ひられる時代となれば、直交座標 x, y を用ふことは上述の如き缺點を伴ふことゝなり、従つて縦横距法によつて緩和曲線を敷設することは不適當となるのである。而して之に對しては角圖法なる緩和曲線敷設法が適當であるが、之等に就ては緩和曲線敷設法の項に於て詳述することゝする。

カントの直線遞減を用ふる場合には(107)~(109)式より明かなる如く緩和曲線の全長を通じて半径の變化は一定である。之に反してカントの圓滑遞減を用ふる場合には緩和曲線の始終點附近に於て極めて緩慢なる半径の變化をなす。従つて列車の運轉を圓滑ならしめること一層大となるのであるが、このことは又移程を著しく小ならしむるの利點をも與へるものである(第42表及び第43表比較参照)。

81 緩和曲線の長さ

緩和曲線の長さは、緩和曲線の性質上、カントの遞減距離と同一であることはいふまでもない。而してその兩端に於ける外側軌條の勾配の急變化、及び緩和曲線通過に際し列車が單位時間に傾斜せしめらるゝ割合、又はその間に於ける列車の受くる遠心加速度的變化等を、乗心地を悪くしない程度に適當に制限することによつて、緩和曲線の長さは自ら決定せられる。

今

$$v(\text{m/sec})=V(\text{km/h})=\text{列車の速度}$$

L =緩和曲線の長さ(m)

H =カント(m)

c =車輛が傾斜せしめらるゝ速さの許容限度(m/sec)

とすれば

$$\frac{L}{v} = \frac{H}{c} \quad \therefore \frac{L}{H} = \frac{v}{c} = \frac{V}{3.6c}$$

c の値は普通25~50mm/secとせられる。故に

$$n = \frac{L}{H} = \frac{V}{0.18} \sim \frac{V}{0.09} = 5.56V \sim 11.1V \dots\dots\dots(156)$$

又若し

α =遠心加速度的變化の許容限度(m/sec²)

とすれば

$$\alpha \frac{L}{v} = \frac{v^2}{R} = \frac{9.8H}{G}$$

$$\therefore \frac{L}{H} = \frac{2.722}{\alpha G} V$$

α の値は16~30cm/sec²がとられる。故に

$$\left. \begin{aligned} 1.067\text{m軌間に對しては } n &= \frac{L}{H} = 8.5V \sim 16V \\ 1.435\text{m軌間に對しては } n &= \frac{L}{H} = 6V \sim 11.3V \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(157)$$

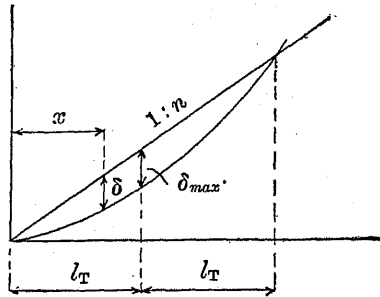
故に緩和曲線の長さは列車の速度の大小に應じて加減するを可とする。我國に於ては凡そ次の通りである。

- 甲 線 $n=600 \sim 800$
- 乙 線 $n=480 \sim 600$
- 丙 線 $n=400 \sim 480$

次に緩和曲線の長さ即ちカントの遞減距離が、之を通過する車輛の動搖に

対し重大なる関係あることに就ては Schramm の説がある。

今カントの直線遞減の場合を考へ、車輛が $1/n$ なる勾配に衝突するために



第 99 圖

車輛のスプリングが先づ壓縮され、次に伸長することによつて生ずる車體の動搖を δ で表はし(第99圖参照)、その最大値を δ_{max} とし、且つ

$T = \delta$ が 0 より δ_{max} となる迄の時間(sec)
 $v =$ 列車の速度(m/sec)
 $V =$ 列車の速度(km/h)

$l_T = T$ なる時間に於ける列車の進行距離 $= vT$

とすれば、振動は正弦曲線となるものと假定して

$$\delta = K \sin \frac{\pi x}{2l_T}$$

と置くことが出来る。

然るに $x=0$ に於ては $\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{n}$ であることから

$$K = \frac{2l_T}{n\pi}$$

故に

$$\delta = \frac{2l_T}{n\pi} \sin \frac{\pi x}{2l_T} \dots \dots \dots (158)$$

δ_{max} は $x=l_T$ の時に起るから

$$\delta_{max} = \frac{2l_T}{n\pi} = \frac{2vT}{n\pi} = 0.177T \frac{V}{n} \dots \dots \dots (159)$$

この式中車輛動搖の周期 T は車輛の構造特にそのスプリングの性質及びス

プリングの上の重量に關係あるものであるが、今普通の車輛の場合をとつて

$T=0.28$ sec とすれば

$$\left. \begin{aligned} \delta_{max} &= 0.177 \times 0.28 \frac{V}{n} \doteq 0.05 \frac{V}{n} \quad (\text{單位m}) \\ \text{或は} \quad \delta_{max} &= 5 \frac{V}{n} \quad (\text{單位cm}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (160)$$

之から第 36 表が得られる。

第 36 表

n	δ_{max} (cm)		
	V=50km/h	V=80km/h	V=100km/h
100	2.50	4.00	5.00
200	1.25	2.00	2.50
400	0.625	1.00	1.25
600	0.4167	0.6667	0.8333
800	0.3125	0.50	0.625
1000	0.25	0.40	0.50
1200	0.2083	0.3333	0.4167

故に今 $\delta_{max} < 0.65$ cm ならしめるためには

V=50km/h に対しては $n > 400$

V=80km/h に対しては $n > 600$

V=100km/h に対しては $n > 800$

としなければならない。

又(160)式から

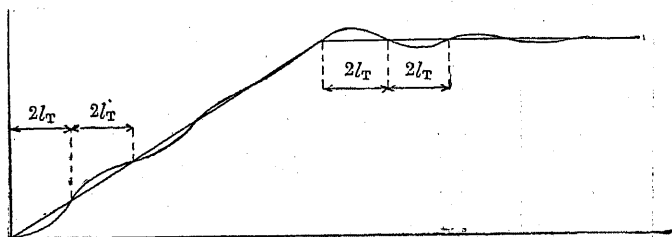
$$n = \frac{5V}{\delta_{max}} \dots \dots \dots (161)$$

故に

- $\delta_{max}=0.8\text{cm}$ に対しては $n=6V$
- $=0.5\text{cm}$ に対しては $n=10V$
- $=0.3\text{cm}$ に対しては $n=16V$

等が得られる。

次に、この δ_{max} は車輛の進行に従ひ、摩擦のために次第に減衰するであらうから、若し緩和曲線の長さが十分に大であれば、遂には消滅するに至るであらう。かやうに消滅した後に緩和曲線の終點に來れば茲に新しい動搖を起すであらう(第100圖参照)。而してこの動搖は前のものと略同様であらう。



第 100 圖

然るに若し緩和曲線の長さが餘り大でなく、従つて δ が十分消滅しない間に緩和曲線の終點に達すれば、茲に於て新しく起る振動と共鳴することがあらう。若しこの二振動が共鳴する場合には車輛の動搖は著しく大となるに相違ない。而してこの共鳴は緩和曲線の長さが $2l_T$ の奇數倍即ち

$$L=2l_T, L=3(2l_T), L=5(2l_T), \dots$$

なる場合に起る。併し緩和曲線の長さが $L=5(2l_T)$ 以上に大となれば、車輛の動搖は十分消滅するものと考へて差支ないであらうから、結局共鳴を起すべき緩和曲線の長さ L_k は

$$L_{k1}=2l_T=2vT=0.556VT=0.156V$$

$$L_{k2}=6l_T=6vT=1.667VT=0.466V$$

で表はすことが出来る。即ち第 37 表の如くなる。

第 37 表

V(km/h)	L_{k1} (m)	L_{k2} (m)
50	7.8	23.3
80	12.4	37.2
100	15.5	46.6

第 38 表

L(m)	V_{k1} (km/h)	V_{k2} (km/h)
20	129	43
40	—	86
60	—	129

又逆に與へられたる T 及び L に對して、共鳴を起すべき速度 V_k を求むれば

$$V_{k1}=1.8 \frac{L}{T}=6.46L$$

$$V_{k2}=0.6 \frac{L}{T}=2.14L$$

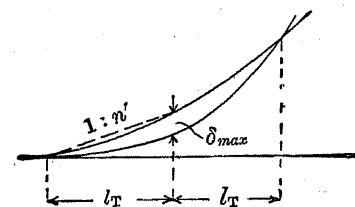
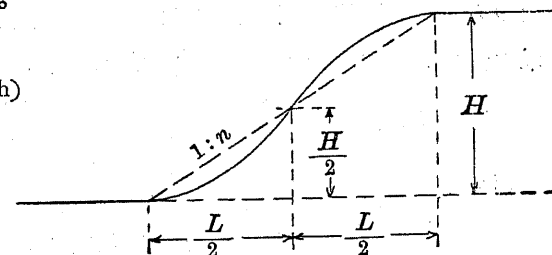
即ち第 38 表の如くなる。

一般に

$$L(\text{m}) > V(\text{km/h})$$

ならば、車輛の動搖は緩和曲線進行中に十分に減衰消滅し、従つて共鳴を起す處れなきものと考へられて居る。

最後に、カントの圓滑遞減が直線遞減に比し如何に車輛の動搖を少からしむるかに就て述ぶるため



第 101 圖

に、カントは(150)式に従つて遞減されるもの、即ち

$$h=2H\left(\frac{x}{L}\right)^2 \dots\dots\dots \text{前半}$$

$$h=H\left\{1-2\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\right\} \dots\dots\dots \text{後半}$$

とすれば(第101圖参照)

$$\frac{1}{n} = \frac{H}{L} \quad \therefore H = \frac{L}{n}$$

従つて前半に於ては

$$h = \frac{2L}{n} \left(\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{2x^2}{nL}$$

而してこの場合の δ の形を正しく求めることは困難であるが、併しこの場合の δ_{max} は $1/n'$ (第101圖参照)の如きカントの直線遞減の場合に於ける δ の最大値 δ'_{max} よりも小なることは明かである。即ち(160)式を用ひて

$$\delta_{max} < \delta'_{max} = 5 \frac{V}{n'}$$

然るに

$$n' = \frac{lr}{hr} = \frac{lr}{\frac{2lr^2}{nL}} = \frac{nL}{2lr} = \frac{nL}{2vT} = \frac{1.8nL}{VT} = \frac{6.43nL}{V}$$

故に

$$\delta'_{max} = 5 \frac{V}{\frac{6.43nL}{V}} = 0.78 \frac{V^2}{nL}$$

従つて

$$\delta_{max} < 0.78 \frac{V^2}{nL}$$

例へば $V=100\text{km/h}$, $L=100\text{m}$, $n=1000$ の場合には

$$\text{圓滑遞減に對しては } \delta_{max} < 0.078\text{cm}$$

$$\text{直線遞減に對しては } \delta_{max} = 5 \frac{V}{n} = 0.5\text{cm}$$

故に緩和曲線の長さが同一である場合には、圓滑遞減に於ける車輛の動搖は直線遞減を用ふる場合の動搖に比し $1/6.5$ 以下に過ぎない。

82 緩和曲線敷設法

(a) 縦横距法——緩和曲線の方程式が x, y の直交座標で表はさるる場合には、 x を横距、 y を縦距にとることによつて容易に緩和曲線を敷設すること

第 39 表

R (m)	L (m)	$f = \frac{L^2}{24R}$ (m)	$Y_{\frac{1}{4}}$ (m)	$Y_{\frac{1}{2}}$ (m)	$Y_{\frac{3}{4}}$ (m)	Y (m)	$\frac{H}{L}$
300	80	0.889	0.056	0.444	1.500	3.556	1:730
350	80	0.762	0.048	0.381	1.285	3.048	1:800
375	80	0.701	0.044	0.356	1.200	2.844	1:800
400	80	0.667	0.042	0.333	1.125	2.667	1:840
450	80	0.593	0.037	0.296	1.000	2.372	1:880
475	80	0.561	0.035	0.281	0.947	2.245	1:940
500	60	0.300	0.019	0.150	0.506	1.200	1:750
550	60	0.273	0.017	0.137	0.460	1.091	1:800
600	60	0.250	0.016	0.125	0.422	1.000	1:860
650	60	0.231	0.014	0.115	0.389	0.924	1:890
700	60	0.214	0.013	0.107	0.362	0.857	1:920
800	60	0.188	0.012	0.094	0.316	0.750	1:1000
900	60	0.167	0.010	0.083	0.281	0.667	1:1100
1000	60	0.150	0.009	0.075	0.253	0.600	1:1100
1500	40	0.044	0.003	0.022	0.075	0.178	1:1000
2000	40	0.033	0.002	0.017	0.056	0.133	1:1300
2500	40	0.027	0.002	0.013	0.045	0.107	1:1600
3000	40	0.022	0.001	0.011	0.038	0.088	1:2000

とが出来る。之を縦横距法といひ、三次拋物線の敷設には主としてこの方法が用ひられて居る。

先づカント H を定め、 n を適當にとり、緩和曲線の長さ L (又は X) $= nH$ を定むれば、(114)式から移程 f が決定される。次に(115)式を用ひて緩和曲線終點に於ける横距 Y を定むれば、緩和曲線上の任意の點の縦横距は(122)式を用ひて算出することが出来る。普通は全長の各四等分點の横距が計算せられる。第39表は獨逸の幹線鐵道に於て用ひらるゝ緩和曲線の表であつて、緩和曲線の長さを常に40m, 60m, 80mの三種とした結果、 $n=L/H$ の値が780~2000の間にある。

我國鐵道省に於て用ふる緩和曲線の表は第40表の通りである。この表に於ては種々なる螺線角 θ に対する L, f, X, Y 等を(118), (119), (120)式を用ひて算出し、緩和曲線の長さの各四等分點の縦横距は(121)及び(122)式を用ひて算出したものである。今その使用法を計算例を以つて示せば次の通りである。

〔計算例〕 $R=300m, H=115mm, n=800$ の場合には

$$L=0.155 \times 800 = 92m$$

$$\frac{L}{R} = \frac{92}{300} = 0.3067$$

故に表中 $L/R=0.3067$ に最も近い $L/R=0.305978$ を探る。即ち $\theta=9^\circ 00'$ を探るのである。而して之に相當する表中の數値を用ひて

$$L=0.305978 \times 300 = 91.793m$$

$$f=0.0038019 \times 300 = 1.140m$$

$$X=0.305212 \times 300 = 91.564m$$

$$Y=0.016113 \times 300 = 4.834m$$

$$X_{\frac{1}{4}}=0.148777 \times 300 = 44.633m$$

$$Y_{\frac{1}{4}}=0.0018664 \times 300 = 0.560m$$

$$X_{\frac{2}{4}}=0.076303 \times 300 = 22.891m$$

$$Y_{\frac{2}{4}}=0.0002518 \times 300 = 0.076m$$

第 40 表

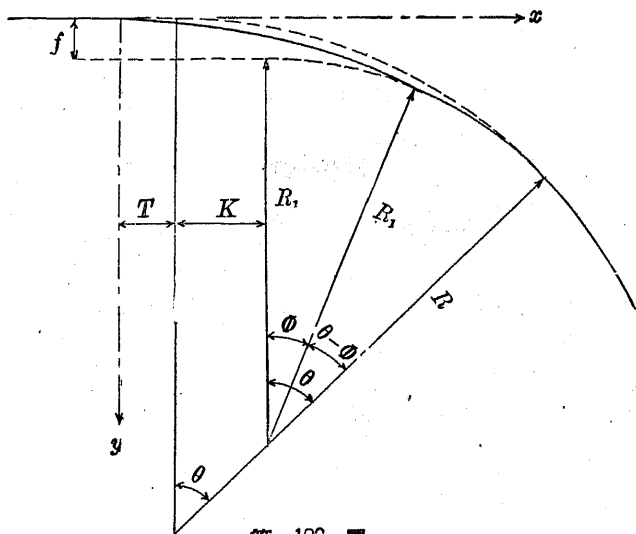
θ	L/R	f/R	X/R	Y/R	$X_{\frac{1}{4}}/R$	$Y_{\frac{1}{4}}/R$	$X_{\frac{2}{4}}/R$	$Y_{\frac{2}{4}}/R$	$X_{\frac{3}{4}}/R$	$Y_{\frac{3}{4}}/R$	$X_{\frac{4}{4}}/R$	$Y_{\frac{4}{4}}/R$
0°30'	0.17452	0.000127	0.017452	0.000508	0.008725	0.000063	0.004363	0.000003	0.013098	0.0000214	0.013098	0.0000214
0°40'	0.23268	0.000225	0.023268	0.000902	0.011632	0.000112	0.005317	0.000014	0.017451	0.0000381	0.017451	0.0000381
0°50'	0.29082	0.000358	0.029082	0.001410	0.014538	0.000176	0.007270	0.000022	0.021811	0.0000595	0.021811	0.0000595
1°00'	0.34895	0.000507	0.034894	0.002030	0.017442	0.000254	0.008724	0.000032	0.026171	0.0000856	0.026171	0.0000856
1°15'	0.40300	0.000792	0.040309	0.003172	0.021794	0.000386	0.010902	0.000050	0.032707	0.0001338	0.032707	0.0001338
1°30'	0.45222	0.001140	0.052318	0.004567	0.026141	0.000569	0.013080	0.000071	0.038389	0.0001927	0.038389	0.0001927
1°45'	0.61077	0.001550	0.061020	0.006214	0.030482	0.000775	0.015255	0.000097	0.045765	0.0002622	0.045765	0.0002622
2°00'	0.69723	0.002023	0.069714	0.008115	0.034815	0.001012	0.017429	0.000127	0.052230	0.0003424	0.052230	0.0003424
2°30'	0.87089	0.003154	0.087073	0.012672	0.043453	0.001575	0.021768	0.000198	0.065305	0.0005946	0.065305	0.0005946
3°00'	1.04414	0.004531	0.104336	0.018226	0.052050	0.002261	0.026097	0.000285	0.078290	0.0007693	0.078290	0.0007693
3°30'	1.21687	0.006148	0.121642	0.024800	0.060593	0.003065	0.030411	0.000358	0.091232	0.0010463	0.091232	0.0010463
4°00'	1.38902	0.008002	0.138854	0.032381	0.069077	0.003987	0.034709	0.000506	0.104126	0.0013652	0.104126	0.0013652
4°30'	1.56049	0.010085	0.155952	0.040912	0.077493	0.005020	0.038988	0.000639	0.116964	0.0017260	0.116964	0.0017260
5°00'	1.73119	0.012395	0.172987	0.050448	0.085881	0.006162	0.043247	0.000788	0.129740	0.0021283	0.129740	0.0021283
5°30'	1.90106	0.014923	0.189930	0.060961	0.094084	0.007410	0.047483	0.000953	0.142448	0.0025718	0.142448	0.0025718
6°00'	2.07002	0.017661	0.206773	0.072442	0.102244	0.008758	0.051693	0.001132	0.155080	0.0030561	0.155080	0.0030561
6°30'	2.23795	0.020603	0.223505	0.084884	0.110302	0.010203	0.055876	0.001326	0.167629	0.0035910	0.167629	0.0035910
7°00'	2.40481	0.023738	0.240119	0.098276	0.118250	0.011739	0.060030	0.001536	0.180090	0.0041460	0.180090	0.0041460
7°30'	2.57050	0.027058	0.256605	0.112609	0.126079	0.013358	0.064151	0.001760	0.192454	0.0047507	0.192454	0.0047507
8°00'	2.73494	0.030552	0.272955	0.127871	0.133732	0.015056	0.068239	0.001998	0.204716	0.0053946	0.204716	0.0053946
8°30'	2.89806	0.034210	0.289160	0.144051	0.141351	0.016827	0.072290	0.002251	0.216870	0.0060772	0.216870	0.0060772
9°00'	3.05978	0.038019	0.305212	0.161130	0.148777	0.018664	0.076303	0.002518	0.228909	0.0067979	0.228909	0.0067979
9°30'	3.22002	0.041970	0.321103	0.179114	0.156055	0.020560	0.080276	0.002799	0.240827	0.0075564	0.240827	0.0075564
10°00'	3.37871	0.046049	0.336824	0.197471	0.163176	0.022509	0.084206	0.003093	0.252618	0.0083519	0.252618	0.0083519

$$X_{\frac{2}{3}} = 0.228909 \times 300 = 68.673\text{m}$$

$$Y_{\frac{2}{3}} = 0.0067979 \times 300 = 2.039\text{m}$$

等が得られる。

緩和曲線を挿入するためには圓曲線を内方に移程 f だけ移動せしめなければならぬが、既設の線路では之が不可能の場合がある。かやうな場合に、已むを得ず圓曲線の両端附近に稍小なる半径の圓曲線を用ひて之に緩和曲線



第 102 圖

を挿入することがある(第102圖参照)。この場合小なる半径 R_1 を餘り小にすることは宜しくない。普通

$$R_1 = R - \frac{1}{20}(R - 100) \dots \dots \dots (162)$$

が用ひられる。 R_1 が定めれば之に對する緩和曲線の計算を行ひ、その長さ L 及びその終點に於ける螺線角 θ 、縦横距 X, Y 等を算定することが出来る。而して移程 f は(119)式により

$$f = Y - R_1(1 - \cos \theta) = R_1 \left(-\frac{1}{3} \sin 2\theta \sin \theta + \cos \theta - 1 \right)$$

然るに又圖より明かなる如く

$$f = (R - R_1)(1 - \cos \theta)$$

故にこの二式より

$$\frac{1 - \cos \theta}{R_1} = \frac{\text{vers } \theta}{R_1} = \frac{\frac{1}{3} \sin 2\theta \sin \theta + \cos \theta - 1}{R - R_1} \dots \dots (163)$$

が得られ、之より移動せしむべき圓曲線の範圍 θ を求むることが出来る。第 41 表は(163)式の値を $R - R_1 = 10 \sim 35\text{m}$ に對し種々の θ の場合に就て計算したもので、 θ の値を求むるに便利なるものである。

又圖に於ける K の長さは

$$K = (R - R_1) \sin \theta \dots \dots \dots (164)$$

となり、 R_1 なる半径の圓曲線の長さは

$$\pi R_1 \frac{\theta - \phi}{180} \dots \dots \dots (165)$$

となる。但し θ 及び ϕ は角度にて表はしたものである。

尙又移動せしむべき直線部の長さ T は圖より明かなる如く

$$T = X_{\frac{2}{3}} - K$$

之に(121)及び(164)式を用ひて

$$T = R_1(\sin 2\theta \cos \theta - \sin \theta) - (R - R_1) \sin \theta \dots \dots \dots (166)$$

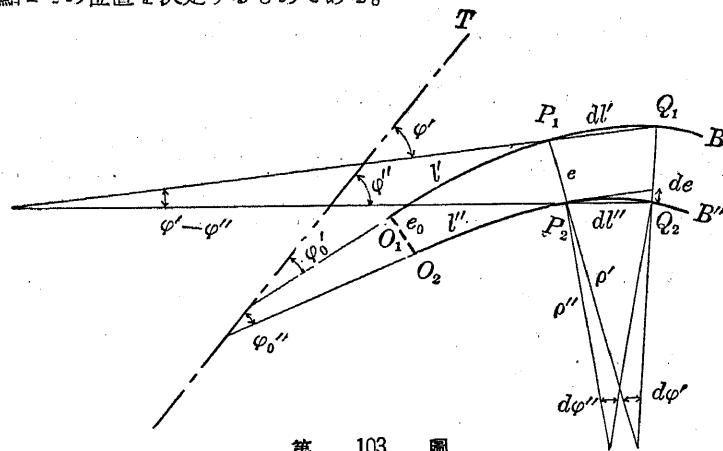
が得られる。

(b) 角圖法——この方法は Nalenz, Höfer によつて創始せられ Nalenz-Höfer 法として知られて居たが、其後 Schramm によつて實用化され、現今に於ては Winkelbildverfahren (角圖法) と呼ばれて居る。與へられたる直

第 41 表

R_1 (m)	R_2 (m)	ϕ	$R-R_1$	10m	15m	20m	25m	30m	35m	備考
300	290	0°30'	0.00000127	0.00000085	0.00000640	0.00000510	0.00000430	0.00000360	0.00000306	乗じて求めることを得 本表以外の $R-R_1$ に對する値は $R-R_1$ を以て $R-R_1=10$ なる場合の値を除き表れに10を
320	310	0°40'	0.0000225	0.0000150	0.0000113	0.0000090	0.0000075	0.0000064	0.0000054	
340	330	0°50'	0.0000352	0.0000235	0.0000176	0.0000141	0.0000117	0.0000101	0.0000086	
360	345	1°00'	0.0000507	0.0000338	0.0000254	0.0000203	0.0000169	0.0000145	0.0000124	
380	365	1°15'	0.0000792	0.0000528	0.0000396	0.0000317	0.0000264	0.0000226	0.0000196	
400	385	1°30'	0.0001140	0.0000769	0.0000570	0.0000456	0.0000380	0.0000326	0.0000280	
420	405	1°45'	0.0001550	0.0001033	0.0000775	0.0000620	0.0000517	0.0000443	0.0000380	
440	425	2°00'	0.0002023	0.0001349	0.0001012	0.0000809	0.0000674	0.0000578	0.0000494	
460	440	2°30'	0.0003154	0.0002103	0.0001577	0.0001262	0.0001051	0.0000891	0.0000744	
480	460	3°00'	0.0004530	0.0003029	0.0002265	0.0001812	0.0001510	0.0001294	0.0001117	
500	480	3°30'	0.0006148	0.0004099	0.0003074	0.0002459	0.0002049	0.0001757	0.0001531	
520	500	4°00'	0.0008002	0.0005335	0.0004001	0.0003201	0.0002667	0.0002236	0.0001881	
540	520	4°30'	0.0010085	0.0006723	0.0005043	0.0004034	0.0003362	0.0002854	0.0002426	
560	540	5°00'	0.0012595	0.0008263	0.0006198	0.0004958	0.0004132	0.0003541	0.0003016	
580	555	5°30''	0.0014923	0.0009949	0.0007462	0.0005969	0.0004974	0.0004264	0.0003641	
600	575	6°00'	0.0017661	0.0011774	0.0009831	0.0007064	0.0005837	0.0005046	0.0004387	
670	670	6°30'	0.0020603	0.0013735	0.0010302	0.0008241	0.0006868	0.0005887	0.0005157	
765	765	7°00'	0.0023738	0.0015825	0.0011869	0.0009495	0.0007913	0.0006782	0.0005901	
		7°30'	0.0027058	0.0018039	0.0013529	0.0010823	0.0009019	0.0007731	0.0006729	
		8°00'	0.0030552	0.0020368	0.0015276	0.0012221	0.0010184	0.0008729	0.0007774	
		8°30'	0.0034210	0.0022807	0.0017105	0.0013684	0.0011403	0.0009977	0.0008863	
		9°00'	0.0038019	0.0025345	0.0019010	0.0015208	0.0012673	0.0010863	0.0009591	
		9°30'	0.0041970	0.0027930	0.0020935	0.0016738	0.0013999	0.0011991	0.0010457	
		10°00''	0.0046049	0.0030692	0.0023025	0.0018420	0.0015350	0.0013157	0.0011317	

線又は曲線を基準として他の與へられたる直線又は曲線を敷設する方法で、第103圖に於て B' を基準線とすれば、その上の任意の點 P_1 より新たに敷設すべき線 B'' までの移程 e (B' 線に直角の方向にとる) を算定して新線 B'' 上の一點 P_2 の位置を決定するものである。



第 103 圖

今 B' 線上に極めて相接近せる二點 P_1, Q_1 をとりその間の線長を dl' とすれば P_1Q_1 なる直線は B' 線への接線と見做すことが出来る。又 P_1, Q_1 各點に於ける B' 線への法線が B'' 線を切る點を P_2, Q_2 とし、 B' 線と B'' 線との間の間隔はそれ等の半徑に比して極めて小であるものと假定すれば、 P_2, Q_2 も亦 B'' 線上の極めて相接近せる二點で (その間の線長を dl'' とす)、 P_2Q_2 なる直線は B'' 線への接線と見做すことが出来る。この二つの接線 P_1Q_1 及び P_2Q_2 が他の與へられた任意の直線 T となす角を夫々 ϕ', ϕ'' とすれば、二接線 P_1Q_1 及び P_2Q_2 の間の角は、圖より明かなる如く $\phi' - \phi''$ である。而して $\phi' - \phi''$ なる角も亦小である。故に今 $P_1P_2 = e, Q_1Q_2 = e + de$ とすれば、圖より明かなる如く

$$de = (\varphi' - \varphi'') dl''$$

$$\therefore e = \int (\varphi' - \varphi'') dl'' \dots \dots \dots (167)$$

又基準線 B' 上に O_1 なる原点をとり、 O_2 點に於ける B'' 線の移程 O_1O_2 を e_0 にて表はし、線長 O_1P_1 を l' 、線長 O_2P_2 を l'' とすれば

$$e = e_0 + \int_0^{l''} de = e_0 + \int_0^{l''} (\varphi' - \varphi'') dl''$$

次に O_1, O_2 に於ける B' 線及び B'' 線の接線が直線 T とす角を夫々 φ_0', φ_0'' とし、 B' 線及び B'' 線の曲率半径を夫々 ρ', ρ'' とすれば

$$\varphi' = \varphi_0' + \int_0^{l'} \frac{1}{\rho'} dl'$$

$$\varphi'' = \varphi_0'' + \int_0^{l''} \frac{1}{\rho''} dl''$$

故に上式は

$$e = e_0 + \int_0^{l''} (\varphi_0' - \varphi_0'') dl'' + \int_0^{l''} \left(\int_0^{l'} \frac{1}{\rho'} dl' - \int_0^{l''} \frac{1}{\rho''} dl'' \right) dl''$$

然るに $l' = l''$ 、 $dl' = dl''$ と見て差支ないから

$$l' = l'' = l, \quad dl' = dl'' = dl$$

とおけば

$$e = e_0 + \int_0^l (\varphi_0' - \varphi_0'') dl + \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right) dl dl \dots \dots (168)$$

この式が移程を算出するに必要な基本式である。

若し(168)式に於て $\varphi_0' = \varphi_0''$ ならば

$$e = e_0 + \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right) dl dl \dots \dots \dots (169)$$

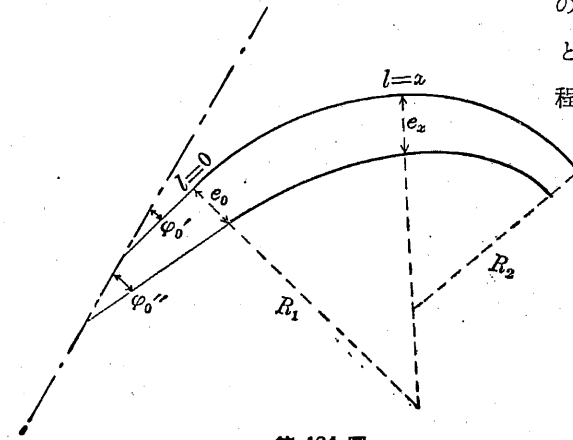
更に又 $e_0 = 0$ ならば

$$e = \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right) dl dl \dots \dots \dots (170)$$

尚緩和曲線敷設の場合には基準線 B' は圓曲線で、その半径は一定値 R である。故に $\rho' = R$ とすれば(170)式は

$$e = \frac{l^2}{2R} - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho''} dl dl \dots \dots \dots (171)$$

又時としては基準曲線が複合曲線からなる場合がある。かやうな場合には(第104圖参照)複合曲線の半径を夫々 R_1, R_2 とし、原点 $l=0$ より複合曲線の



第 104 圖

の接合點までの曲線長を x とし、又接合點に於ける移程を e_x とし、 $l < x$ 及び

$l > x$ の二區間に分ちて考ふれば

$l < x$ の區間にては

$$\varphi' = \varphi_0' + \int_0^l \frac{1}{R_1} dl$$

$$= \varphi_0' + \frac{l}{R_1}$$

$$\varphi'' = \varphi_0'' + \int_0^l \frac{1}{\rho} dl$$

故に

$$\varphi' - \varphi'' = \varphi_0' - \varphi_0'' + \frac{l}{R_1} - \int_0^l \frac{1}{\rho} dl$$

従つて

$$e = e_0 + \int_0^l (\varphi_0' - \varphi_0'') dl + \frac{l^2}{2R_1} - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \dots \dots (172)$$

$l > x$ の區間に於ては

$$\varphi' = \varphi_0' + \int_0^x \frac{1}{R_1} dl + \int_x^l \frac{1}{R_2} dl = \varphi_0' + \frac{x}{R_1} + \frac{1}{R_2}(l-x)$$

$$\varphi'' = \varphi_0'' + \int_0^l \frac{1}{\rho} dl$$

$$\therefore \varphi' - \varphi_0'' = \varphi_0' - \varphi_0'' + \frac{x}{R_1} + \frac{1}{R_2}(l-x) - \int_0^l \frac{1}{\rho} dl$$

従つて

$$\begin{aligned} e &= e_x + \int_x^l (\varphi_0' - \varphi_0'') dl + \int_x^l \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) x dl \\ &\quad + \int_x^l \frac{l}{R_2} dl - \int_x^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \\ &= e_x + \int_x^l (\varphi_0' - \varphi_0'') dl + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) x(l-x) \\ &\quad + \frac{1}{2R_2}(l^2 - x^2) - \int_x^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \end{aligned}$$

然るに e_x は (172) 式に於て $l=x$ まで積分したものであるから

$$e_x = e_0 + \int_0^x (\varphi_0' - \varphi_0'') dl + \frac{x^2}{2R_1} - \int_0^x \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl$$

之を上式に入れて

$$\begin{aligned} e &= e_0 + \int_0^l (\varphi_0' - \varphi_0'') dl + \frac{x}{R_1} \left(l - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2R_2}(x-l)^2 \\ &\quad - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \dots \dots \dots (173) \end{aligned}$$

(172) 及び (173) 式は複合曲線を敷設する場合の移程を求むるに必要な式である。

若し $\varphi_0' - \varphi_0'' = 0$ ならば

$$l < x \text{ に対しては } e = e_0 + \frac{l^2}{2R_1} - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \quad \left. \right\}$$

$$l > x \text{ に対しては } e = e_0 + \frac{x}{R_1} \left(l - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2R_2}(l-x)^2 - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \quad \left. \right\} \dots (174)$$

更に特別の場合として $R_1 = \infty$ ならば

$$l < x \text{ に対しては } e = e_0 - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl$$

$$l > x \text{ に対しては } e = e_0 + \frac{1}{2R_2}(l-x)^2 - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl$$

若しこの式に於て $e_0 = 0, R_2 = R$ ならば

$$\left. \begin{aligned} l < x \text{ に対しては } e &= - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \\ l > x \text{ に対しては } e &= \frac{1}{2R}(l-x)^2 - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \end{aligned} \right\} \dots \dots (175)$$

(175) 式は直線と之に接する半径 R なる圓曲線との間に緩和曲線を敷設する場合に相當し、原點を緩和曲線の始點にとれば、 x は原點より直線と圓曲線との接合點までの距離を示し、 ρ は緩和曲線の曲率半径である。故にカントの直線遞減即ち $h = H - \frac{l}{L}$ の場合には

$$\frac{1}{\rho} = \frac{h}{RH} = \frac{l}{RL}$$

今 $\frac{l}{L} = \xi$ と置けば、(175) 式より

$$l < x \text{ に対しては } e = - \int_0^l \int_0^l \frac{l}{RL} dl dl = - \frac{l^3}{6RL} = - \frac{L^2}{6R} \xi^3$$

$$\begin{aligned} l > x \text{ に対しては } e &= \frac{1}{2R}(l-x)^2 - \frac{l^3}{6RL} \\ &= \frac{L^2}{R} \left\{ \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{6} \xi^3 \right\} \end{aligned}$$

而して x の値は緩和曲線の終點に於て圓曲線と緩和曲線との螺旋角が相一致すべき條件

$$\int_0^l \frac{1}{\rho} dl = \int_x^l \frac{1}{R} dl$$

から定めることが出来る。即ち

$$\int_0^L \frac{1}{\rho} dl = \int_0^L \frac{l}{RL} dl = \frac{L}{2R}$$

$$\int_x^L \frac{1}{R} dl = \frac{1}{R}(L-x)$$

$$\therefore \frac{L}{2R} = \frac{1}{R}(L-x)$$

$$\therefore x = \frac{L}{2}$$

故に圓曲線の始點は緩和曲線の長さを二等分する位置にある。この x の値を用ひて

$$\left. \begin{aligned} l < \frac{L}{2} \text{に對しては } e &= -\frac{L^2}{6R} \xi^3 \\ l > \frac{L}{2} \text{に對しては } e &= \frac{L^2}{R} \left\{ \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} \xi^3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (176)$$

而して圓曲線の移程 f は

$$f = e_L = e_{\xi=1} = \frac{L^2}{R} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \right\} = -\frac{1}{24} \frac{L^2}{R}$$

又 $l=L/2$ に於ける移程は

$$e_{\frac{L}{2}} = e_{\xi=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{48} \frac{L^2}{R}$$

之等の結果は三次拋物線に於て得た結果と同一である。たゞ三次拋物線の場合に於ける横距 x の代りに曲線に沿ふて測る長さ l を用ふることが異なるの

みである。

第42表は(176)式を用ひて緩和曲線の各十分等點に於ける移程を算出した結果を示す。移程の負符號は第98圖に於て $\varphi' - \varphi'' < 0$ なることによるもので、圖の如く基準曲線の内側に移動せしめることを意味する。

第 42 表

ξ	$e / \left(\frac{L^2}{R} \right)$	l/H	ξ	$e / \left(\frac{L^2}{R} \right)$	l/H
0	0	0	0.6	-0.03100	0.6
0.1	-0.00017	0.1	0.7	-0.03717	0.7
0.2	-0.00133	0.2	0.8	-0.04033	0.8
0.3	-0.00450	0.3	0.9	-0.04150	0.9
0.4	-0.01067	0.4	1	-0.04167	1
0.5	-0.02083	0.5			

角圖法の原理は大體上述の通りであつて、移程 e は(167)式に示す如く

$$e = \int (\varphi' - \varphi'') dl = \int \varphi' dl - \int \varphi'' dl$$

から求められる。即ち基準線及び新たに敷設さるべき線の接線の方向を示す角度を積分することによつて移程が求められる。故に今縦軸に角度をとり、横軸に線の長さをとつて、基準線の角度 φ' の變化と、新たに敷設さるべき線の角度 φ'' の變化とを圖示すれば、その角圖と横軸との間に作らるゝ面積の差が即ち移程を表はすこととなる。かやうに角圖の面積から移程が求められるから、この方法を角圖法と呼ぶのである。

角圖法に於ては縦横距法に於ける如く直交座標 x, y を用ひず、基準曲線がそのまゝ一つの座標軸となるのである。故に x, y 軸を用ふる場合のやうに近似法 ($\mu=1$) を用ふる必要なく、従つてそれから必然的に生ずる種々の矛盾も起らない。故にカントの直線遞減の場合は勿論、カントの圓滑遞減の場合

に於ても少しの不都合なく應用することが出来る。

次にカントが(151)式により圓滑に遞減さるゝ場合をとれば

$$h = \frac{H}{16}(8 - 9 \cos \pi \xi + \cos 3\pi \xi)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{16R}(8 - 9 \cos \pi \xi + \cos 3\pi \xi)$$

故に緩和曲線の終點に於ける圓曲線と緩和曲線との螺線角は夫々

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho} L d\xi = \frac{L}{2R}, \quad \int_x^L \frac{1}{R} dl = \frac{1}{R}(L-x)$$

この二式が相等しきことより $x = \frac{L}{2}$ となる。而して移程は(175)式から

$$\left. \begin{aligned} l < \frac{L}{2} \text{に對しては } e &= -\frac{L^2}{R} \frac{1}{16} \left\{ 4\xi^2 + \frac{9}{\pi^2} (\cos \pi \xi - 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9\pi^2} (\cos 3\pi \xi - 1) \right\} \\ l > \frac{L}{2} \text{に對しては } e &= \frac{L^2}{R} \left[-\frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{16} \left\{ 4\xi^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{\pi^2} (\cos \pi \xi - 1) - \frac{1}{9\pi^2} (\cos 3\pi \xi - 1) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (177)$$

又移程 f 及び $l = \frac{L}{2}$ に於ける移程 e_L は

$$f = e_L = e_{\xi=1} = -\frac{L^2}{R} \left(\frac{1}{8} - \frac{10}{9\pi^2} \right)$$

$$e_{\frac{L}{2}} = e_{\xi=\frac{1}{2}} = -\frac{L^2}{R} \left(\frac{1}{16} - \frac{5}{9\pi^2} \right)$$

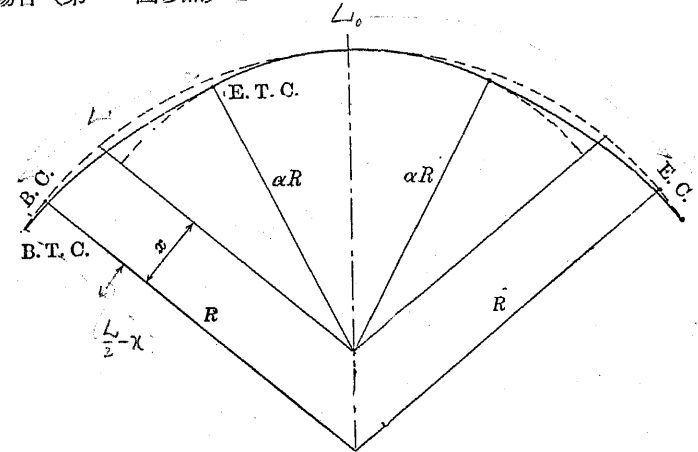
第43表は之等の式を用ひて計算した結果を示す。この表と第42表とを比較すれば移程 f が著しく小なることを知る。このことはカントの圓滑遞減を

用ふることより起る大なる特徴である。

第 43 表

ξ	$e / \left(\frac{L^2}{R} \right)$	h/H	ξ	$e / \left(\frac{L^2}{R} \right)$	h/H
0	0	0	0.6	-0.01053	0.68463
0.2	-0.00004	0.05607	0.8	-0.01238	0.94393
0.4	-0.00189	0.31534	1	-0.01242	1
0.5	-0.00621	0.5			

以上はすべて圓曲線全部を f だけ移動せしめて緩和曲線を敷設する場合であるが、既設の線路に於て圓曲線全部の移動が困難な場合、既設の圓曲線の頂點は移動せしめず、その半径を稍小ならしめてその兩端に緩和曲線を挿入する場合(第105圖参照)を示せば次の通りである。



第 105 圖

この場合、新たに用ふる圓曲線の半径を

$$\alpha R \text{ (但し } \alpha < 1)$$

とし、又舊圓曲線の始點と新圓曲線の始點（即ち緩和曲線の中點）との間の距離を x とすれば、 α 及び x は未知數である。この 2 未知數を決定すべき條件は

(1) 圓曲線の頂點に於て原圓曲線と新圓曲線とが共通の接線を有すること。

(2) 圓曲線の頂點に於て移程が消滅すること。

今原圓曲線の全長を L_0 とすれば、この第一條件は

$$\int_0^{\frac{L_0}{2}} \frac{1}{R} dl = \int_0^L \frac{1}{\rho} dl + \int_L^{\frac{L_0}{2} + \frac{L}{2} - x} \frac{1}{\alpha R} dl \dots\dots\dots (178)$$

又第二の條件は

$$\int_{\frac{L}{2} - x}^{\frac{L_0}{2} + \frac{L}{2} - x} \frac{1}{R} dl - \int_{\frac{L}{2} - x}^L \frac{1}{\rho} dl - \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\rho} dl dl - \int_L^{\frac{L_0}{2} + \frac{L}{2} - x} \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{1}{\alpha R} dl dl = 0 \dots\dots\dots (179)$$

先づカントの直線遞減の場合を考ふれば

$$h = H \frac{l}{L} \text{ (但し } H \text{ は半徑 } \alpha R \text{ なる圓曲線のカント)}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{l}{\alpha R L}$$

故に (178) 式は

$$\frac{L_0}{2R} = \frac{L}{2\alpha R} + \frac{1}{\alpha R} \left(\frac{L_0}{2} + \frac{L}{2} - x - L \right)$$

となり、之より

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{L_0}{2} (1 - \alpha) \\ \alpha &= 1 - \frac{2x}{L_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (180)$$

次に (179) 式は計算の結果

$$1 - \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{4}{3} \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 + \left(\frac{L_0 - 2x}{L_0} \right)^2 - \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 \right\} = 0$$

となる。之に (180) 式を用ひて

$$1 - \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{4}{3} \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 + \alpha^2 - \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3} \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 = 0$$

之より

$$\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{L}{L_0} \right)^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{3} \left(\frac{L}{L_0} \right)^2} \right)$$

従つて (180) より

$$x = \frac{L_0}{2} (1 - \alpha) = \frac{L^2}{3L_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{3} \left(\frac{L}{L_0} \right)^2} \right)}$$

但し $\frac{L}{L_0} \leq 0.866$

$$\dots\dots\dots (181)$$

この式を用ひて計算した結果は第 44 表の通りである。

第 44 表

L/L_0	x/L	α	L/L_0	x/L	α	L/L_0	x/L	α
0.866	0.2887	0.5	0.5	0.0918	0.908	0.2	0.2328	0.986
0.8	0.1930	0.691	0.4	0.0706	0.943			
0.7	0.1469	0.794	0.3	0.0518	0.969			
0.6	0.1181	0.861						

次に移程を求むれば

$$l = 0 \sim \frac{L}{2} - x \text{ に対しては } e = - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl = - \frac{L^2}{R} \frac{1}{6\alpha} \xi^3$$

$l = \frac{L}{2} - x \sim L$ に対しては

$$e = \int_{\frac{L}{2}-x}^L \int_{\frac{L}{2}-x}^l \frac{1}{R} dl dl - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl$$

$$= \frac{L^2}{R} \left\{ \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{6\alpha} \xi^3 \right\}$$

$l = L \sim \frac{L_1}{2} + \frac{L}{2} - x$ に対しては

$$e = \int_{\frac{L}{2}-x}^l \int_{\frac{L}{2}-x}^l \frac{1}{R} dl dl - \int_0^L \int_0^l \frac{l}{\alpha R L} dl dl - \int_L^l \int_{\frac{L}{2}}^l \frac{1}{\alpha R} dl dl$$

$$= \frac{L^2}{R} \left\{ \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{3} + \xi^2 - \xi \right) \right\}$$

若しカントの直線遞減の代りに圓滑遞減を用ふることとし

$$h = \frac{H}{16} \left(8 - 9 \cos \frac{\pi l}{L} + \cos \frac{3\pi l}{L} \right)$$

をとれば

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{16\alpha R} \left(8 - 9 \cos \frac{\pi l}{L} + \cos \frac{3\pi l}{L} \right)$$

之を(178)式に入れば(180)式と同一の結果が得られ、又(179)式に用ふれば次の結果が得られる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 0.39747 \left(\frac{L}{L_0} \right)^2} \right) \dots \dots \dots (182)$$

従つて(180)式より

$$\frac{x}{L} = \frac{L}{L_0} \frac{0.39747}{4 \left(1 + \sqrt{1 - 0.39747 \left(\frac{L}{L_0} \right)^2} \right)} \dots \dots \dots (183)$$

之等の式から第45表が得られる。

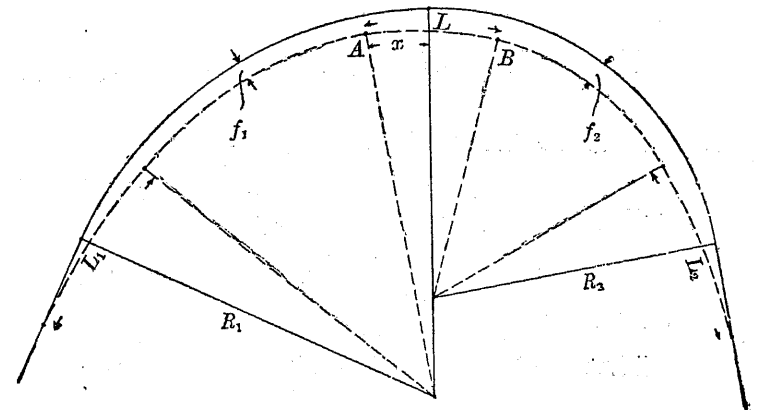
第 45 表

L/L_1	x/L	α	L/L_0	x/L	α	L/L_0	x/L	α
1	0.05594	0.888	0.6	0.03096	0.963	0.2	0.00998	0.996
0.9	0.04904	0.912	0.5	0.02549	0.975	0.1	0.00497	0.999
0.8	0.04266	0.932	0.4	0.02020	0.984			
0.7	0.03666	0.949	0.3	0.01504	0.991			

83 複合曲線に於ける緩和曲線

複合曲線に緩和曲線を挿入する場合には曲線全部を内側に移動せしめなければならぬ(第106圖参照)。而して半径 R_1 及び R_2 の圓曲線に對する移程を夫々 f_1, f_2 とし、之等の圓曲線と直線との間に挿入せらるる緩和曲線長を夫々 L_1, L_2 とすれば

$$f_1 = \frac{1}{24} \frac{L_1^2}{R_1}$$



第 106 圖

$$f_2 = \frac{1}{24} \frac{L_2^2}{R_2}$$

厳密にいへば、 R_1, R_2 は移程量だけ縮少さるべきであるが、実際には之を無視しても差支ない。而してこの部分に於ける緩和曲線の敷設法は普通の曲線の場合と同様である。故に茲にて問題となるのは半径 R_1, R_2 なる複合二曲線の接合部に於ける緩和曲線であるが、この部分の緩和曲線の敷設法は縦横距法によることも出来るが、最も簡単で便利な方法は角圖法である。故に茲には角圖法に就てのみ述べることにする。

今複合二曲線の中間に挿入すべき緩和曲線の長さを L とすれば、 L の値と、その内の半径 R_1 の圓曲線中にとるべき長さ x とが未知數である。この2未知數を決定する條件は

- (1) A, B 二點に於て原圓曲線と緩和曲線との接線が平行なるべきこと
- (2) A 及び B に於ける移程は夫々 f_1, f_2 なるべきこと

である。この内第一の條件は

$$\int_0^L \frac{1}{\rho} dl = \int_0^x \frac{1}{R_1} dl + \int_x^L \frac{1}{R_2} dl \dots\dots\dots(184)$$

にて表はされ、第二の條件は(173)式により

$$f_1 + \frac{x}{R_1} \left(L - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2R_2} (L-x)^2 - \int_0^L \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl = f_2 \dots\dots\dots(185)$$

にて表はされる。

これ等の條件より L と x が定まれば、移程は(172), (173)式より

$$l < x \text{ に対しては } e = f_1 + \frac{l^2}{2R_1} - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \quad \Bigg\}$$

$$l > x \text{ に対しては } e = f_1 + \frac{x}{R_1} \left(l - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2R_2} (l-x)^2 - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl \quad \Bigg\} (186)$$

にて與へられる。

今半径 R_1 及び R_2 に対するカントを夫々 H_1, H_2 とし、且つカントの遞減を直線的に行ふものとすれば、複合二曲線の中間に挿入すべき緩和曲線の上のカント h は

$$h = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} l$$

従つてその曲率半径 ρ は

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \frac{l}{L}$$

之を(184)式に入れば

$$\frac{L}{R_1} + \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \frac{L}{2} = \frac{x}{R_1} + \frac{L-x}{R_2}$$

$$\therefore x = \frac{L}{2} \dots\dots\dots(187)$$

又(185)式より

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{24} \frac{L_1^2}{R_1} + \frac{x}{R_1} \left(L - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2R_2} (L-x)^2 - \frac{L^2}{2R_1} - \frac{R_1 - R_2}{6R_1 R_2} L^2 \\ & = -\frac{1}{24} \frac{L_2^2}{R_2} \end{aligned}$$

之に $x=L/2$ を入れば

$$L = \sqrt{\frac{L_2^2 R_1 - L_1^2 R_2}{R_1 - R_2}} \dots\dots\dots(188)$$

カントの圓滑遞減に對しても、普通の場合(即ちカントの遞減が中央より兩端に向ひ對稱なる場合)は、 x 及び L に對じて(187)及び(188)式と同じ結

果が得られる。

尚カントの直線遞減の場合の移程を求むれば(186)式より

$$\left. \begin{aligned}
 & l < \frac{L}{2} \text{ に対しては} \\
 & e = \frac{1}{24} \frac{L_1^2}{R_1} - \frac{(R_1 - R_2)L^2}{6R_1R_2} \xi^3 \\
 & l > \frac{L}{2} \text{ に対しては} \\
 & e = \frac{1}{24} \frac{L_1^2}{R_1} - \frac{(R_1 - R_2)L^2}{2R_1R_2} \left(\frac{1}{3} \xi^3 - \xi^2 + \xi - \frac{1}{4} \right) \\
 & \text{但し } \xi = \frac{l}{L}
 \end{aligned} \right\} \dots (189)$$

84 反向曲線に於ける緩和曲線

反向曲線に於ては反向点を境として列車の前部と後部とに於けるカントによる車輛の横傾斜が相反するのみならず、反向二曲線の間に於けるカントの遞減勾配が一種の落込み勾配となるため、列車の通過に際し著しく車輛の動搖を起し運轉上甚だ好ましくない。故に成るべく之を避くるを可とするのであるが、已むを得ない場合は反向二曲線の間に相當に長い直線部分を残し、カントの遞減による落込み勾配の害を軽減せしめなければならない。この中間直線の長さは緩和曲線又はカントの遞減距離を除いて尚 30m 以上（主要幹線の場合）を残すを可とする。この中間直線に関する我國の規定は、國有鐵道建設規程に於ては 10m 以上とし、朝鮮國有規程に於ては次の通りである。

- 甲種線路 50m 以上
- 乙種線路 30m 以上
- 丙種線路 20m 以上

併しカントの付け方に特殊の方法をとる場合、例へばカントの半分だけ外側軌條を高め残りの半分だけ内側軌條を低めて全カントを付ける場合には、上述の如き落込み勾配となることがないから中間直線を省略しても差支なく、餘り短い中間直線を残すよりも寧ろ之を省略した方が運轉が圓滑となるものとされて居る。

