PCSI **DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES n° 2** 12/10/2001

Durée : 3 heures

EXERCICE 1 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier les expressions suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \quad ; \quad P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad ; \quad Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}\right) .$$

EXERCICE 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal n. Exprimer en fonction de n le nombre

$$N = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) ,$$

c'est-à-dire la somme des cardinaux de toutes les parties de E.

PROBLÈME 1 :

On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt[n]{n!} .$$

a. Montrer que $\ln u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k$.

b. Soit k un entier, $k \geq 2$. Démontrer l'encadrement

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x \, dx .$$

c. En déduire un encadrement de $\ln u_n$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Étudier le signe de v_n.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

PROBLÈME 2 :

La suite (u_n) (**suite de Fibonacci**) est définie par

$$u_0 = 1 \ ; \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n .$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Montrer que $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

3. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n .$$

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, puis $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$.

a. Démontrer la relation $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ pour tout entier naturel n.

b. Démontrer la relation $v_{n+2} - v_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

d. En déduire que la suite (v_n) converge. Quelle est sa limite ?

****

CORRIGÉ

****

EXERCICE 1 :

- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{p-1}{p!}$ (*translation d'indice : poser* $p = k+1$). Donc

$$S_n = \sum_{p=2}^{n+1} \left(\frac{p}{p!} - \frac{1}{p!} \right) = \sum_{p=2}^{n+1} \left(\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{p!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \qquad (\textit{somme “téléscopiqueô}) .$$

- $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, donc (*en effectuant des translations d'indices*) :

$$P_n = \frac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k \right) \left(\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} k \right)}{\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k \right)^2} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k} \times \frac{\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} k}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} .$$

- $Q_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{C_n^k + C_n^{k+1}}{C_n^{k+1}} \right)$. En utilisant la relation de Pascal,

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^{k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!\,(n-k-1)!\,(k+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!\,n!} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{n-k} = \frac{(n+1)^n}{n!} .$$

EXERCICE 2 :

Première méthode :

Dans E, il y a $C_n^0 = 1$ parties à 0 éléments (l'ensemble vide), $C_n^1 = n$ parties à 1 élément (les singletons),... C_n^k parties à k éléments pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. La somme des cardinaux de toutes les parties de E est donc

$$N = 0 \times C_n^0 + 1 \times C_n^1 + \cdots + n \times C_n^n = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k \quad (\textit{le terme pour } k = 0 \textit{ est nul}) .$$

Or, $k\, C_n^k = n\, C_{n-1}^{k-1}$, donc $N = n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}$ (*translation d'indice*), donc $N = n\, 2^{n-1}$.

Deuxième méthode :

Si on fixe un élément a de E, le nombre de parties de E contenant a est égal au nombre de parties de $E \setminus \{a\}$, à savoir 2^{n-1} ; chacun des n éléments de E appartenant à 2^{n-1} parties. Si l'on écrit, pour chaque partie de E, la liste de ses éléments, chacun des n éléments de E sera alors écrit 2^{n-1} fois, la somme des cardinaux des parties de E est donc $n\,2^{n-1}$.

PROBLÈME 1 :

a. $\ln u_n = \ln\left((n!)^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{n}\ln(n!) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln k.$

b. La fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, si $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [k, k+1]$, on a $\ln k \leq \ln x \leq \ln(k+1)$. L'inégalité de la moyenne donne alors

$$\ln k = \int_k^{k+1} \ln k \, dx \leq \int_k^{k+1} \ln x \, dx \leq \int_k^{k+1} \ln(k+1)\, dx = \ln(k+1)\ .$$

On en déduit l'inégalité de droite ; on en déduit aussi l'inégalité de gauche en faisant une translation d'indice (remplacer k par $k-1$).

c. En sommant les inégalités obtenues ci-dessus pour k variant de 2 à n, on obtient

$$\frac{1}{n}\int_1^n \ln x\, dx = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \ln x\, dx \ \leq\ \ln u_n \ \leq\ \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1} \ln x\, dx = \frac{1}{n}\int_2^{n+1} \ln x\, dx\ .$$

Une primitive de la fonction ln étant $x \mapsto x\ln x - x$, cela donne

$$\frac{1}{n}\,(n\ln n - n + 1) \leq \ln u_n \leq \frac{1}{n}\Big[(n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1\Big]\ .$$

Comme $\dfrac{1}{n}(n\ln n - n + 1) = \ln n - 1 + \dfrac{1}{n}$ tend vers $+\infty$, par comparaison, la suite $(\ln u_n)$ tend vers $+\infty$, donc $u_n = e^{\ln u_n}$ tend aussi vers $+\infty$.

d. On obtient

$$\begin{aligned} v_n &= \ln u_{n+1} - \ln u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}\ln k - \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln k \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{n}\ln k + \frac{1}{n+1}\ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left[n\ln(n+1) - \sum_{k=2}^{n}\ln k\right]\ . \end{aligned}$$

Chaque terme de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln k$ est inférieur à $\ln(n+1)$ et il y a $n-1$ termes ; cette somme est donc inférieure à $n\ln(n+1)$, donc $v_n > 0$. Il en résulte que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$: la suite (u_n) est strictement croissante.

PROBLÈME 2 :

1. On montre d'abord que $u_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est vrai pour $n = 0$, pour $n = 1$, puis si c'est vrai au rang n et au rang $n+1$, alors cela reste vrai au rang $n+2$ car la somme de deux entiers naturels non nuls en est encore un).

Ensuite, on a $u_1 - u_0 \geq 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = u_{n-1} \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante (strictement à partir du rang 1).

2. L'assertion $u_n \geq n$ est vraie au rang 0, au rang 1 et au rang 2 ;

soit $n \geq 1$ donné, si on a $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$, alors

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq (n+1) + n = 2n + 1 \geq n + 2$$

(cette dernière inégalité est vraie pour $n \geq 1$, ce qui obligeait à vérifier l'assertion $u_n \geq n$ aussi pour $n = 2$).

Par les théorèmes de comparaison, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. Pour $n \geq 1$, on a

$$u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = u_n(u_n + u_{n+1}) - u_{n+1}^2 = u_n^2 - (u_{n+1} - u_n)u_{n+1} = u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} \ .$$

Ainsi, en posant $a_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a prouvé la relation $a_n = -a_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit (a_n) est une suite géométrique de raison -1 ; comme $a_0 = u_0 u_2 - u_1^2 = 1$, on a donc $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait prouver.

4.a. Immédiat : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1} + u_n}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.

b. Vérifions :

$$\begin{aligned}
v_{n+2} - v_n &= \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+3}u_n - u_{n+1}u_{n+2}}{u_n u_{n+2}} \\
&= \frac{(u_{n+1} + u_{n+2})u_n - u_{n+1}(u_n + u_{n+1})}{u_n u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n u_{n+2}} \\
&= \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}} \ .
\end{aligned}$$

c. Étudions le sens de variation de (x_n) :

$$x_{n+1} - x_n = v_{2n+2} - v_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n}u_{2n+2}} = \frac{1}{u_{2n}u_{2n+2}} > 0$$

et la suite (x_n) est strictement croissante.

De même,

$$y_{n+1} - y_n = v_{2n+3} - v_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{u_{2n+1}u_{2n+3}} = -\frac{1}{u_{2n+1}u_{2n+3}} < 0$$

et la suite (y_n) est strictement décroissante.

Enfin, $y_n - x_n = v_{2n+1} - v_{2n} = \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} - \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \dfrac{u_{2n+2}u_{2n} - u_{2n+1}^2}{u_{2n}u_{2n+1}} = \dfrac{1}{u_{2n}u_{2n+1}}$ tend vers zéro car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$ (*ce sont des suites extraites de* (u_n) *qui tend vers* $+\infty$).

d. Les suites (x_n) et (y_n), adjacentes, ont une limite commune l. Une suite (v_n), dont les deux suites extraites constituées respectivement des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs convergent vers la même limite, est convergente (*propriété démontrée en cours*), donc (v_n) converge vers l.

Enfin, en passant à la limite dans la relation obtenue en **a.**, on obtient $l = 1 + \dfrac{1}{l}$, soit $l^2 - l - 1 = 0$, d'où $l = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La suite (v_n) étant à termes positifs, on a nécessairement $l \geq 0$, donc $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.