第 4 章　導体境界面における光の反射と屈折

誘電体から電気伝導度を有する物質、たとえば導体などへ光が入射するとき、電気伝導度に伴う電磁波の減衰が波動の伝播に影響を与える。電磁波の減衰は現象論的には媒質のジュール加熱として現れる。ここでは、電磁波の減衰項を含む電信方程式に基づき、導体表面での反射、透過、および導体中での光波の伝播について考える。

4.1　導体内部における光波の伝播、ε、μ、およびσによる表現

光波が電気伝導度を有する媒質を伝播するとき、光波の電場と磁場は電信方程式を満たす。（第 2 章参照）

$$\Delta \mathrm{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

$$\Delta \mathrm{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

これらの微分方程式を満たす解を求めることは、誘電体中での波動方程式の解を求めることと作業的には同等である。まず、電場について 2 次元波動解を求める。光波が誘電体媒質（媒質 1）から導電性媒質、例えば金属など（媒質 2）へ入射する際の電磁波としての諸性質を導く。媒質 1 および 2 中での電場を

$$\mathbf{E}_i \exp i\left(k_{1x}x + k_{1z}z - \omega t\right) \tag{4.3}$$

$$\mathbf{E}_t \exp i\left(k_{2x}x + k_{2z}z - \omega t\right) \tag{4.4}$$

の形で求める。媒質 1 では、

$${k_1}^2 = {k_{1x}}^2 + {k_{1z}}^2 = \varepsilon_1\mu_1\omega^2 \tag{4.5}$$

$$k_{1x} = k_1 \sin\theta_1、\quad k_{1z} = k_1 \cos\theta_1 \tag{4.6}$$

が成り立ち、角度θ_1は入射角であり、k_{1x}およびk_{1z}は共に実数である。波動の等位相面、つまり波面は平面であり、波数ベクトル$\mathbf{k}_1 = \left(k_{1x}, k_{1z}\right)$が波動の伝わる方向を与える。この波動が伝導性の媒質 2 へ入射すると、どのような波動として伝播するだろうか。あるいは 2 つの界面で反射される波動はどのような性質を持つだろうか。これらの問題を考える。まず、波動（4.4）を方程式（4.1）に代入すると、波数ベクトルが満たすべき条件が求まる：

$${k_{2x}}^2 + {k_{2z}}^2 - \varepsilon_2\mu_2\omega^2 - i\mu_2\sigma\omega = 0 \tag{4.7}$$

あるいは、

$$k_2{}^2 = k_{2x}{}^2 + k_{2z}{}^2 \tag{4.8}$$

と置いて、

$$k_2{}^2 = \varepsilon_2\mu_2\omega^2 + i\mu_2\sigma\omega \tag{4.9}$$

が要求される。（4.9）式は波数が複素数であることを示す。この結論はそもそも波動を複素表示の（4.4）式で与えたことによる。それでは、この複素波数を構成する k_{2x} と k_{2z} はどのようなものであろうか。まず、k_{2x} については、境界面での波動の連続性から、媒質 1 の k_{1x} と連続するはずである。したがって、

$$k_{2x} = k_{1x} = k_1 \sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\omega\sin\theta_1 \tag{4.10}$$

で k_{2x} が決まる。つぎに、（4.7）式より、

$$k_{2z} = \pm\sqrt{\varepsilon_2\mu_2\omega^2 + i\mu_2\sigma\omega - k_{2x}{}^2} = \pm\sqrt{\varepsilon_2\mu_2\omega^2 + i\mu_2\sigma\omega - k_1{}^2\sin^2\theta_1} \tag{4.11}$$

で k_{2z} が決まる。波数ベクトルの z 成分が複素数で与えられることは全反射の場合と似ているが、全反射では z 成分は純虚数であったのに対し、導体の場合では実部と虚部を有する複素数になるところが違う。導体中での k_{2z} を実部と虚部に分けて表示するとき、

$$k_{2z} = k_{2zr} + ik_{2zi} \tag{4.12}$$

これらの実部および虚部をそれぞれ求めることができる。そのために、（4.11）と（4.12）をそれぞれ 2 乗して等しいとおき、実部と虚部同士を比較する：

$$k_{2zr}{}^2 - k_{2zi}{}^2 + 2ik_{2zi}k_{2zi} = \varepsilon_2\mu_2\omega^2 - \varepsilon_1\mu_1\omega^2\sin^2\theta_1 + i\mu_2\sigma\omega \tag{4.13}$$

より、

$$k_{2zr}{}^2 - k_{2zi}{}^2 = \varepsilon_2\mu_2\omega^2 - \varepsilon_1\mu_1\omega^2\sin^2\theta_1 \tag{4.14}$$

$$k_{2zr}k_{2zi} = \frac{\mu_2\sigma\omega}{2} \tag{4.15}$$

ここで、（4.15）式から k_{2zr} を求め、（4.14）式に代入すると、

$$4k_{2zi}{}^4 + 4\left(\varepsilon_2\mu_2\omega^2 - \varepsilon_1\mu_1\omega^2\sin^2\theta_1\right)k_{2zi}{}^2 - \left(\mu_2\sigma\omega\right)^2 = 0 \qquad 4.16)$$

となり、k_{2zi} が求まる。

$$k_{2zi} = \pm\omega\sqrt{\left(\sqrt{\left(\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1\sin^2\theta_1\right)^2 + \left(\frac{\mu_2\sigma}{\omega}\right)^2} - \left(\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1\sin^2\theta_1\right)\right)\Big/2} \qquad (4.17)$$

ここで、(4.17) 式でーをとる。それは、 z 軸の下方へ進むほど波動の振幅が減衰することを意味する。これが＋ならば無限に増大することになる。この意味は (4.12) 式を (4.4) 式に代入してみれば分かる：

$$\mathbf{E}_t \exp i\left(k_{2x}x + k_{2z}z - \omega t\right) = \mathbf{E}_t \exp\left[i\left(k_{2x}x + k_{2zr}z - \omega t\right) - k_{2zi}z\right]$$

$z \to -\infty$ 　において、k_{2zi} が負なら

$$= \mathbf{E}_t e^{-k_{2zi}z} \exp i\left(k_{2x}x + k_{2zr}z - \omega t\right) \to 0 \qquad (4.18)$$

となる。このことは、(18) 式の実部をとると更にはっきりする。

$$\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_t e^{-k_{2zi}z} \exp i\left(k_{2x}x + k_{2zr}z - \omega t\right)\right\} = \mathbf{E}_t e^{-k_{2zi}z}\cos\left(k_{2x}x + k_{2zr}z - \omega t\right) \to 0 \qquad (4.19)$$

ここで、コサイン部分は波動を与え、掛かっている指数部は、波動の z の負方向への伝播により減衰することを示す。

(4.17) 式を (4.15) 式に代入して、

$$k_{2zr} = \frac{\mu_2\sigma\omega}{2k_{2zi}} = -\frac{\mu_2\sigma}{\sqrt{2\left(\sqrt{\left(\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1\sin^2\theta_1\right) + \left(\frac{\mu_2\sigma}{\omega}\right)^2} - \left(\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1\sin^2\theta_1\right)\right)}} \qquad (4.20)$$

が得られる。k_{2zr} がマイナスなのは、波動が下方へ伝わることを示す。ここで、まとめると、複素波数ベクトルの z 成分である k_{2z} の実部は斜め下方へ伝わる平面波を与え、虚部は z と

供に減衰する振幅を与える。(4.18)、(4.19) から明らかであるが、$\exp i\left(k_{2x}x + k_{2zr}z - \omega t\right)$ の項は $x - z$ 面内を伝播する波動を与える。$k_{2x}x + k_{2zr}z$ ＝一定の面は等位相面を与える。この面の移動方向はベクトル $\left(k_{2x}, k_{2zr}\right)$ で与えられ、波面は位相速度

$$\frac{\omega}{\sqrt{k_{2x}{}^2 + k_{2zr}{}^2}} \tag{4.21}$$

で移動する。したがって、波面の伝播方向を屈折角 θ_2 とするなら、波数ベクトルは角度 θ_2 の方向を向いているとして、

$$\sin\theta_2 = \frac{k_{2x}}{\sqrt{k_{2x}{}^2 + k_{2zr}{}^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\omega\sin\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1\omega^2\sin^2\theta_1 + \dfrac{\left(\mu_2\sigma\right)^2}{2\left(\sqrt{\left(\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1\sin^2\theta_1\right)^2 + \left(\dfrac{\mu_2\sigma}{\omega}\right)^2} - \left(\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1\sin^2\theta_1\right)\right)}}} \tag{4.22}$$

が**屈折の法則**を与える。誘電体どうしの界面に於ける屈折の法則（Snell の法則）とは随分異なるようである。

4.2　導体内部における光波の伝播、屈折率と吸収係数による表現

以上の議論を見通しの良いシンプルな形で表現する。

（4.9）式より、$k_{2x}{}^2 + k_{2z}{}^2 = k_2{}^2 = \varepsilon_2\mu_2\omega^2 + i\mu_2\sigma\omega$　であるので、k_2 は複素数であるとの観点から

$$k_2 = k_0\left(n + i\kappa\right) = \hat{n}k_0 \tag{4.23}$$

と表現できる。k_0、n、および κ はそれぞれ、真空での波数、媒質 2 の屈折率、および減衰率であることは後に明らかになる。また、$\hat{n} = \left(n + i\kappa\right)$ は複素屈折率と呼ばれる。（4.23）式を 2 乗し（4.9）式と等しいと置くと、

$$k_2{}^2 = k_0{}^2\left(n_2{}^2 - \kappa_2{}^2\right) + 2ik_0{}^2 n_2\kappa_2 = \varepsilon_2\mu_2\omega^2 + i\mu_2\sigma_2\omega$$

より、 $k_0{}^2\left(n_2{}^2 - \kappa_2{}^2\right) = \varepsilon_2\mu_2\omega^2$ 　および　 $2k_0{}^2 n_2\kappa_2 = \mu_2\sigma_2\omega$ 　（4.24）

が得られる。（4.24）式から κ_2 を消去し、

$$4k_0{}^4 n_2{}^4 - 4\varepsilon_2\mu_2\omega^2 k_0{}^2 n_2{}^2 - \mu_2{}^2\sigma_2{}^2\omega^2 = 0 \qquad (4.25)$$

となり、n_2 について解くと、

$$n_2{}^2 = \frac{2\varepsilon_2\mu_2\omega^2 k_0{}^2 + \sqrt{4\varepsilon_2{}^2\mu_2{}^2\omega^4 k_0{}^4 + 4k_0{}^4\mu_2{}^2\sigma_2{}^2\omega^2}}{4k_0{}^4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_{r2}{}^2\mu_{r2}{}^2 + \frac{\mu_{r2}{}^2\sigma_2{}^2}{\varepsilon_0{}^2\omega^2}} + \varepsilon_{r2}\mu_{r2}\right) \qquad (4.26)$$

となる。ここで、$k_0{}^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$ を用い、

$$\varepsilon_{r2} = \varepsilon_2/\varepsilon_0\text{、} \qquad \mu_{r2} = \mu_2/\mu_0 \qquad (4.27)$$

は導電性媒質における比誘電率と比透磁率である。さらに、

$$\kappa_2{}^2 = \frac{\mu_2{}^2\sigma_2{}^2\omega^2}{4k_0{}^4 n_2{}^2} = \frac{\mu_2{}^2\sigma_2{}^2\omega^2}{2\varepsilon_0{}^2\mu_0{}^2\omega^4\left(\varepsilon_{r2}\mu_{r2} + \sqrt{\varepsilon_{r2}{}^2\mu_{r2}{}^2 + \frac{\mu_{r2}{}^2\sigma_2{}^2}{\varepsilon_0{}^2\omega^2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_{r2}{}^2\mu_{r2}{}^2 + \frac{\mu_{r2}{}^2\sigma_2{}^2}{\varepsilon_0{}^2\omega^2}} - \varepsilon_{r2}\mu_{r2}\right) \qquad (4.28)$$

が得られる。

(4.26)と(4.28)式は形式が似ていて、導電性媒質表面での光学現象に良く出てくる。

さて、ここで、k_{2zr} と k_{2zi} を n_2 と κ_2 で表すことが出来る。（4.8）（4.12）（4.23）より、

$$k_0{}^2\left(n_2{}^2 - \kappa_2{}^2\right) + 2ik_0{}^2 n_2\kappa_2 = k_{2x}{}^2 + k_{2zr}{}^2 - k_{2zi}{}^2 + 2ik_{2zr}k_{2zi} \qquad (4.29)$$

が得られるが、実部と虚部をそれぞれ等しいと置いて、

$$k_0{}^2\left(n_2{}^2-\kappa_2{}^2\right)=k_{2x}{}^2+k_{2zr}{}^2-k_{2zi}{}^2 \text{、} \qquad k_0{}^2 n_2\kappa_2=k_{2zr}k_{2zi} \tag{4.30}$$

を得る。これから、k_{2zr} と k_{2zi} について解くと、

$$k_{2zr}{}^4+\left\{k_{2x}{}^2-k_0{}^2\left(n_2{}^2-\kappa_2{}^2\right)\right\}k_{2zr}{}^2-k_0{}^4 n_2{}^2\kappa_2{}^2=0 \tag{4.31}$$

より、k_{2zr} について解くことができ、$k_{2x}=k_{1x}=k_1\sin\theta_1$ および $k_1=n_1k_0$ を用いて、

$$\begin{aligned}k_{2zr}{}^2&=\frac{1}{2}\left[k_0{}^2\left(n_2{}^2-\kappa_2{}^2\right)-k_1{}^2\sin^2\theta_1+\sqrt{\left\{k_0{}^2\left(n_2{}^2-\kappa_2{}^2\right)-k_1{}^2\sin^2\theta_1\right\}^2+4k_0{}^4n_2{}^2\kappa_2{}^2}\right]\\&=\frac{k_0{}^2}{2}\left[n_2{}^2-\kappa_2{}^2-n_1{}^2\sin^2\theta_1+\sqrt{\left(n_2{}^2-\kappa_2{}^2-n_1{}^2\sin^2\theta_1\right)^2+4n_2{}^2\kappa_2{}^2}\right]\end{aligned} \tag{4.32}$$

が得られる。

屈折角 θ_2 に対して、

$$\sin\theta_2=\frac{k_{2x}}{\sqrt{k_{2x}{}^2+k_{2zr}{}^2}}=\frac{\sqrt{2}n_1\sin\theta_1}{\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1+n_2{}^2-\kappa_2{}^2+\sqrt{\left\{n_2{}^2-\kappa_2{}^2-n_1{}^2\sin^2\theta_1\right\}^2+4n_2{}^2\kappa_2{}^2}}} \tag{4.33}$$

という表現を得る。この結果から、導体表面における屈折率に相当する部分は屈折率のみならず入射角にも依存していて、誘電体表面における屈折現象よりもはるかに複雑である。屈折の法則を与える（4.22）式は屈折の法則を磁気透磁率、誘電率および電気伝導度という物理定数で表したが、（4.33）式はこれを屈折率と減衰係数という現象論的なパラメータで表している。

4.3　導体表面での反射率と透過率

次に、導体表面における反射波と屈折波について考察する。光は誘電率および磁気透磁率がそれぞれ ε_1 と μ_1 である誘電体から導体表面へ入射するとする。このときも、境界面における電場と磁場の界面に沿う成分が保存する。この基礎になっているマックスウエル方程式において、界面近傍で電気的中性のため、電荷密度がゼロであることを適用すると、結局誘電体同士の境界面における取り扱いと同じアプローチが取れる。

まず、電場 x 成分の連続性は

$$E_i\cos\theta_1-E_r\cos\theta_1=E_{tx} \tag{4.34}$$

と書ける。E_{tx} は透過波の電場 x 成分である。ここで、波の進む方向を見て上側を正とする。次に、磁場の y 成分の連続性は

$$H_i + H_r = H_{ty} \tag{4.35}$$

と表せる。

ここで、誘電体中での電場と磁場の関係 $$H_i = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}E_i \tag{4.36}$$

などを使って、(4.35) を電場だけで表すと、

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(E_i + E_r\right) = \frac{1}{\mu_2\omega}\left(k_{2z}E_{tx} - k_{2x}E_{tz}\right) \tag{4.37}$$

となる。ここで、右辺を $rot\mathbf{E}_t = -\dfrac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t}$ より $i\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_t = i\omega\mu_2\mathbf{H}_2$ であることを用いて成分で表した。また、左辺のマイナスは、磁場が y 軸負方向を向いていることを考慮したことによる。

次に、$(4.34)\times\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} - (4.37)\times\cos\theta_1$ により E_r を消去すると、

$$2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_i\cos\theta_1 = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \frac{\cos\theta_1}{\omega\mu_2}k_{2z}\right)E_{tx} + \frac{\cos\theta_1}{\omega\mu_2}k_{2x}E_{tz} \tag{4.38}$$

となるが、媒質 2 でガウスの定理を適用し、

$div\mathbf{D}_t = \varepsilon_2 div\mathbf{E}_t = 0$ より、$k_{2x}E_{tx} + k_{2z}E_{tz} = 0$、そして $$E_{tz} = -\frac{k_{2x}}{k_{2z}}E_{tx} \tag{4.39}$$

を用いることで、(37) 式右辺を E_{tx} だけで表せる。これから、透過波電場の x 成分が求まる。

$$E_{tx} = \frac{2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \left(\dfrac{k_{2z}}{\omega\mu_2} + \dfrac{{k_{2x}}^2}{\omega\mu_2 k_{2z}}\right)\cos\theta_1}E_i = \frac{2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \dfrac{{k_2}^2}{\omega\mu_2 k_{2z}}\cos\theta_1}E_i \tag{4.40}$$

ここで、 ${k_2}^2 = {k_{2x}}^2 + {k_{2z}}^2$ を用いた。ここまでの扱いは媒質 2 が誘電体である場合と

全く同じであるが、これ以降は k_2、${k_2}^2$ および k_{2z} が複素数であることを考慮しなければな

らない。

透過電場の z 成分は(4.30) および（4.39）から求められる：

$$E_{tz}=-\frac{k_{2x}}{k_{2z}}E_{tx}=-\frac{k_{2x}}{k_{2zr}+ik_{2zi}}E_{tx}=-\frac{k_{2x}\left(k_{2zr}-ik_{2zi}\right)}{{k_{2zr}}^2+{k_{2zi}}^2}E_{tx}$$

$$=-\frac{k_{2x}\left(k_{2zr}-i\dfrac{{k_0}^2n_2\kappa_2}{k_{2zr}}\right)}{{k_{2zr}}^2+\dfrac{{k_0}^4{n_2}^2{\kappa_2}^2}{{k_{2zr}}^2}}E_{tx}=-\frac{k_{2x}\left({k_{2zr}}^3-i{k_0}^2k_{2zr}n_2\kappa_2\right)}{{k_{2zr}}^4+{k_0}^4{n_2}^2{\kappa_2}^2}E_{tx} \tag{4.41}$$

この結果から透過電場の x および z 成分は互いに振幅と位相が異なり、電場ベクトルは $x-z$ 平面内で楕円を描くことがわかる。

さらに、反射波の電場を求める。

$$E_r=E_i-\frac{E_{tx}}{\cos\theta_1}=\left(1-\frac{2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}-\dfrac{{k_2}^2}{\omega\mu_2k_{2z}}\cos\theta_1}\right)E_i$$

$$=\left(\frac{\dfrac{{k_2}^2}{\omega\mu_2k_{2z}}\cos\theta_1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\dfrac{{k_2}^2}{\omega\mu_2k_{2z}}\cos\theta_1-\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}\right)E_i \tag{4.42}$$

さてここで、伝統的な光学の記法で式(4.42)を表してみる。まず、(4.23)式を

$$k_2=k_0\left(n_2+i\kappa_2\right)=k_0\hat{n}_2 \tag{4.44}$$

と書く。ここで、 $\hat{n}_2=n_2+i\kappa_2$ (4.45)

は複素屈折率である。

ところで、 $${k_2}^2={k_{2x}}^2+{k_{2z}}^2 \tag{4.8'}$$

より、

$$k_{2z}=-\sqrt{{k_2}^2-{k_{2x}}^2}=-\sqrt{{k_0}^2{\hat{n}_2}^2-{k_0}^2{n_1}^2\sin^2\theta_1}=-k_0\hat{n}_2\sqrt{1-\frac{{n_1}^2\sin^2\theta_1}{{\hat{n}_2}^2}} \tag{4.46}$$

であるが、ここで、

$$\frac{n_1 \sin\theta_1}{\hat{n}_2} = \sin\hat{\theta}_2 \tag{4.47}$$

と置けば、

$$k_{2z} = -k_0 \hat{n}_2 \sqrt{1-\sin^2\hat{\theta}_2} = -k_0 \hat{n}_2 \cos\hat{\theta}_2 \tag{4.48}$$

と形式的に表すことが出来る。

ここで現れた $\hat{\theta}_2$ は複素数であり、**通常の角度を意味しない**。このように、任意の複素数 $z = x + iy$ を変数とするサインおよびコサイン関数は

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (4.49) \qquad および \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (4.50)$$ で定義され、

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \tag{4.51}$$

が成り立つ。(4.44)および(4.48)式を(4.42)式に代入すれば、振幅反射率の表現が求まる。

$$r_p = \frac{\dfrac{k_2{}^2}{\omega\mu_2 k_{2z}}\cos\theta_1 + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\dfrac{k_2{}^2}{\omega\mu_2 k_{2z}}\cos\theta_1 - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}} = \frac{\dfrac{k_0{}^2\hat{n}_2{}^2}{\omega\mu_2 k_{2z}}\cos\theta_1 + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\dfrac{k_0{}^2\hat{n}_2{}^2}{\omega\mu_2 k_{2z}}\cos\theta_1 - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}} = \frac{\varepsilon_0\mu_0\omega\hat{n}_2{}^2\cos\theta_1 + \mu_2 k_{2z}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\varepsilon_0\mu_0\omega\hat{n}_2{}^2\cos\theta_1 - \mu_2 k_{2z}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}$$

$$\approx \frac{\varepsilon_0\mu_0\omega\hat{n}_2{}^2\cos\theta_1 + k_{2z}\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}}{\varepsilon_0\mu_0\omega\hat{n}_2{}^2\cos\theta_1 - k_{2z}\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}} = \frac{k_0\hat{n}_2{}^2\cos\theta_1 + k_{2z}n_1}{k_0\hat{n}_2{}^2\cos\theta_1 - k_{2z}n_1} \tag{4.43}$$

ここで、$\mu_0 \approx \mu_1 \approx \mu_2$、および $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0} = n_1$ を用いた。

したがって振幅反射率は下記のように表現される。

$$r_p = \frac{E_r}{E_i} = \left(\frac{\hat{n}_2\cos\theta_1 - n_1\cos\hat{\theta}_2}{\hat{n}_2\cos\theta_1 + n_1\cos\hat{\theta}_2}\right) \tag{4.52}$$

この表式は第3章で導いた誘電体表面でのp偏光の反射率を与える(3-41)式と形式的に同じ形をしている。

次に、反射および透過波を s 偏光した入射波について求める。誘電体の場合と同様に、界面における透過電場は y 成分のみであり、電場と磁場の保存から透過電場が求まる。

$$E_{2y} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 - \frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}} E_i \qquad (4.53)$$

反射波については、

$$E_i + E_r = E_{2y} \qquad (4.54)$$

から、

$$E_r = E_{2y} - E_i = \left(\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 - \frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}} - 1 \right) E_i = \left(\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 + \frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 - \frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}} \right) E_i \qquad (4.55)$$

となる。

透過電場は直線偏光しているが、磁場については $div\mathbf{H}_2 = 0$ つまり、$ik_{2x}H_{2x} + ik_{2z}H_{2z} = 0$ より、

$$ik_{2x}H_{2x} + ik_{2z}H_{2z} = 0 \qquad (4.56)$$

あるいは、

$$\frac{H_{2z}}{H_{2x}} = -\frac{k_{2x}}{k_{2z}} = -\frac{k_{2x}}{k_{2zr} + ik_{2zi}} = -\frac{k_{2x}\left(k_{2zr}{}^3 - ik_0{}^2 k_{2zr} n_2 \kappa_2\right)}{k_{2zr}{}^4 + k_0{}^4 n_2{}^2 \kappa_2{}^2} \qquad (4.57)$$

となり、磁場の x と z 成分は互いに振幅が異なり位相がずれていて、磁場ベクトルは $x-z$ 平面内で楕円を描く。この様子は p 偏光で入射する場合の導体内における電場ベクトルの動きと似ている。

入射光が s 偏光の場合の振幅反射率 r_s は以下のように求められる。

$$r_s = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 + \frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 - \frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}} = \frac{\omega\mu_2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 + k_{2z}}{\omega\mu_2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 - k_{2z}} \approx \frac{k_0 n_1\cos\theta_1 + k_{2z}}{k_0 n_1\cos\theta_1 - k_{2z}}$$

$$= \left(\frac{n_1\cos\theta_1 - \hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2}{n_1\cos\theta_1 + \hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2} \right)、\qquad \text{ここで（4.48）を使った。} \qquad (4.58)$$

ここで、パワー反射率R_p、R_sはそれぞれ、

$$R_p = |r_p|^2 = r_p r_p^* \tag{4.59}$$

$$R_s = |r_s|^2 = r_s r_s^* \tag{4.60}$$

から求められ、誘電体同士の界面における反射率の表式において屈折角θ_2を複素数$\hat{\theta}_2$で置き換えることで表現形式が得られる。使用頻度が高い垂直入射の場合について具体的な形を求めておこう。

(4.47)式から、$\theta_1 = 0$であれば$\hat{\theta}_2 = 0$であり、(4.52)式から

$$r_p = \frac{\hat{n}_2 - n_1}{\hat{n}_2 + n_1} \tag{4.61}$$

および、$$R_s = R_p = \left(\frac{\hat{n}_2 - n_1}{\hat{n}_2 + n_1}\right)\left(\frac{\hat{n}_2^* - n_1}{\hat{n}_2^* + n_1}\right) = \frac{(n_2 - n_1 + i\kappa_2)(n_2 - n_1 - i\kappa_2)}{(n_2 + n_1 + i\kappa_2)(n_2 + n_1 - i\kappa_2)}$$

$$= \frac{(n_2 - n_1)^2 + \kappa_2^2}{(n_2 + n_1)^2 + \kappa_2^2} \tag{4.62}$$

導体表面での反射および導体薄膜を透過する光を調べることで、導体の物性、特に光などの高周波電磁波に対する物質の応答についての研究（表面物性論）が進行している。