

## 第4章 フレネル・キルヒホッフの回折理論

ここでは波動場を偏微分方程式ではなく、積分方程式の形で定式化し、その応用として光の回折現象を考える。

### 4.1 グリーン(Green)の定理

電磁波の電場および磁場は波動方程式を満たした。電場および磁場の各成分が波動方程式を満たしたので、いま、その一成分についてのみ考える。つまり、波動方程式

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ここで、} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

の解  $F(x, y, z, t)$  の性質を全く異なった立場、微分方程式ではなく積分方程式の解として考察する。

(4.1) 式の解を

$$F = U(x, y, z) e^{\pm i\omega t} \quad (4.2)$$

の形で求めよう。つまり、時間的には角周波数  $\omega$  で調和振動するもので、その振幅が位置に依存するという解である。(4.2) 式を (4.1) 式に代入すると、

$$e^{\pm i\omega t} \Delta U + e^{\pm i\omega t} \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \quad \text{つまり、} \quad \Delta U + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \quad (4.3)$$

が得られる。(4.3) 式をヘルムホルツ方程式 (Helmholtz Eq.) という。この方程式は吸収のない空間を伝播する波動場を記述する基本方程式である。いま、関数  $U(x, y, z)$  および  $W(x, y, z)$  がヘルムホルツ方程式 (4.3) の解であるとする。このとき、図 4.1 の体積  $V$  において、次の体積積分を考える。

$$\iiint_V (U \Delta W - W \Delta U) dV \quad (4.4)$$

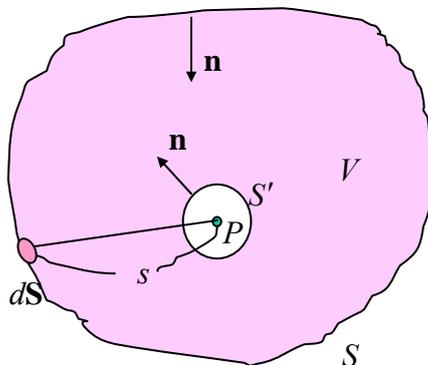


図4.1 積分領域

ただし、この体積は任意の点  $P$  を中心とする半径  $\epsilon$  の球をくりぬいたものである。この体積は 2 つの曲面で囲われているが、表面における法線方向は体積内側を向くこととする。通常の設定とは逆方向であることを注意したい。(4.4) 式はグリーン の定理 (Green's Theorem) によって、表面積分に書き直される。証明は「資料」に譲る。

$$\iiint_V (U\Delta W - W\Delta U) dV = - \iint_{S+S'} \left( U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \quad (4.5)$$

ところで、関数  $U$  と  $W$  はヘルムホルツ方程式 (4.3) を満たすので、

$$U\Delta W - W\Delta U = U \frac{\omega^2}{c^2} W - W \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \quad (4.6)$$

が導かれる。これをグリーンの定理 (4.5) に代入すると、

$$\iiint_V (U\Delta W - W\Delta U) dV = - \iint_{S+S'} \left( U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial W}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (4.7)$$

であるので、結局、

$$\iint_{S+S'} \left( U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (4.8)$$

が得られる。

#### 4.2 ヘルムホルツ・キルヒホッフ(Helmholtz・Kirchhoff)の積分定理

ここで、(4.8)式でヘルムホルツ方程式を満たす関数  $W$  として

$$W = \frac{e^{iks}}{s} \quad (4.9)$$

を用いる。ここで、 $s$  は  $P$  から閉曲面  $S$  あるいは  $S'$  上の面積要素  $dS$  までの距離である。

(4.9) 式を (4.8) 式に代入して、

$$\iint_{S+S'} \left( U \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (4.10)$$

が得られる。(4.10) 式は 2 つの閉曲面  $S$  と  $S'$  上で行われる。この積分を  $S$  と  $S'$  上の積分に分けて表記する。

(4.10) 式から  $P$  点における  $U$  の値  $U(P)$  が求められる。詳細は「資料」を参照されたい。

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( U \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \quad (4.11)$$

(4.11) の結果は非常に重要な内容を含んでいる。ヘルムホルツ方程式の解  $U$  が任意の点  $P$  での値は  $P$  点を囲む閉曲面上での積分 (4.11) で与えられる。この積分は、しかしながら、閉曲面上での関数値  $U$  を必要とし、 $U$  は未知関数であるので、(4.11) は未知関数  $U$  についての積分方程式である。これをヘルムホルツ・キルヒホッフの積分定理という。この結果は、(4.9)で与えられる要素波が閉曲面から発生したとして、観測点に到達する波を合

成することで波動場を与えるものであり、(4.11) 式はホイヘンスの原理を数学的に表したものである。

### 5.3 微小な孔を通過する光の場・光の回折現象

積分方程式 (4.11) は、実際問題に適用されるときには具体的な閉曲面  $S$  を与え、その閉曲面上での  $U$  の値も与えることで解かれる。これを境界条件という。以下に、その具体例を示す。まず、一般的に用いられる境界条件について、図 4.2 に基づき説明する。

無限に広いついたてに小さな穴が開いていて、そこに光が入射する場合を考える。積分 (4.11) の積分領域である閉曲面  $S$  はついたてを含む閉曲面にとる。この場合、まず、ついたての裏表面で  $U = 0$  であるとする（つまり、ここには光が来ない）。また、閉曲面  $S$  の半径を無限に大きくし無限遠点では光が無いとする。その結果、開口を除く  $S$  上で  $U = 0$  であると仮定する。これをキルヒホッフの境界条件という。したがって積分 (4.11) は開口面上での積分となる。

図 4.3 に示す配置で  $P$  点における波動場  $U$  を求める。 $O$  を原点とし、 $dS$  の位置を  $Q(\xi, 0, \eta)$  とする。 $Q$  と  $P$  間の距離を  $s$  とする。開口に  $y$  軸方向へ伝播する平面波が入射するとする。光の電場の 1 成分だけを考える。

$$E = Ae^{i(ky - \omega t)} = Ue^{-i\omega t} \quad (4.12)$$

ここに、

$$U = Ae^{iky} \quad (4.12)$$

であり、 $y = 0$  における  $U$  および  $\frac{\partial U}{\partial n}$  が開口面における境界条件として (4.11) 式で用いられる。

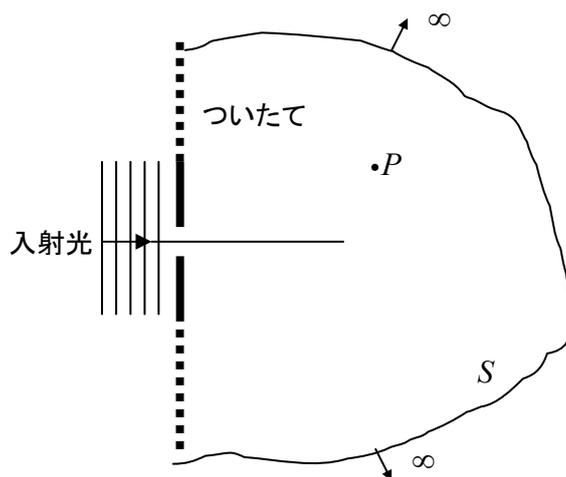


図 4.2 キルヒホッフの境界条件

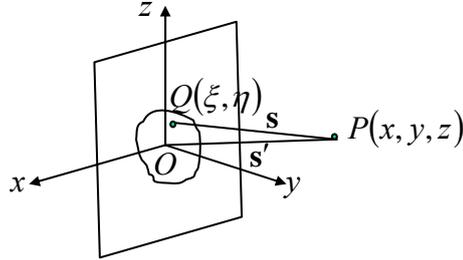


図 4.3 衝立の裏面での座標系

開口面以外では  $U = 0$  である。また、一般的には  $A = A(\xi, 0, \eta)$  のように開口面での波動場の振幅は  $Q$  点の位置に依存するが、ここでは平面波が入射するので振幅は一定値とする。

$$y = 0 \quad \text{では} \quad U = A \quad \text{および} \quad \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = ikA \quad (4.13)$$

また、法線方向が今の場合は閉曲面の内側へ向かっていることを考慮すると、開口面における法線方向の微分  $\frac{\partial}{\partial n}$  は、 $y$  方向への微分となるので、

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial e^{iks}}{\partial n} \frac{1}{s} \right]_{y_0=0} &= \left[ \frac{\partial e^{iks}}{\partial y_0} \frac{1}{s} \right]_{y_0=0} = \frac{ike^{iks} \frac{\partial s}{\partial y_0} s - e^{iks} \frac{\partial s}{\partial y_0}}{s^2} \Bigg|_{y_0=0} \\ &= \left[ -\frac{ike^{iks}}{s} + \frac{e^{iks}}{s^2} \right]_{y_0=0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial s}{\partial y_0} = \frac{\partial}{\partial y_0} \sqrt{(\xi - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (\eta - z)^2} = \frac{y_0 - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (\eta - z)^2}} = \frac{y_0 - y}{s}$$

なので、

$$\left. \frac{\partial s}{\partial y_0} \right|_{y_0=0} = -\frac{y}{s} \approx -1 \quad (4.14)$$

を使った。ここで、 $y_0$  は  $Q$  点の  $y$  座標であり、 $y_0 = 0$  で開口に於ける位置を与える。

さらに、(4.14) 式の第二項は第一項に比べて小さいので第二項を無視し、これらの結果を (4.11) 式に代入すると、

$$U(P) = -\frac{ik}{2\pi} \iint_S A \frac{e^{iks}}{s} dS = -\frac{i}{\lambda} \iint_S A \frac{e^{iks}}{s} dS \approx -\frac{i}{\lambda s_0} \iint_S A e^{iks} dS \quad (4.15)$$

となる。ここで、 $dS = d\xi d\eta$  であり、 $s_0$  は  $P$  点と開口中心との距離である。上式で  $1/s_0$  を積分の外へ出したのは、 $s_0$  は  $dS$  の位置が開口面内で変位したとしても、 $1/s_0$  の値はゆっくり変化するからである。それに対して  $e^{iks}$  は激しく振動するので積分の外へは出せない。積分 (4.15) を計算するために、面積要素  $dS$  ( $Q$  点) と  $P$  との距離  $s$  の近似表現を求める。 $\eta$  と  $\xi$  は  $x$ 、 $y$ 、および  $z$  に比べ非常に小さいので、 $\eta$  と  $\xi$  のべき級数へ展開することで近似表現は、

$$\begin{aligned} s &= s_0 - \frac{x\xi + z\eta}{s_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s_0} - \frac{x^2\xi^2 + 2xz\xi\eta + z^2\eta^2}{2s_0^3} + \dots \\ &= s_0 - \frac{x\xi + z\eta}{s_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s_0} - \frac{(x\xi + z\eta)^2}{2s_0^3} + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

と現せるが (詳細は「資料」を参照のこと)、ここで、最初の 2 項だけをとって積分 (4.15) を行うことをフランホーファー近似 (Fraunhofer approximation)、第 3 項まで含めた近似をフレネル近似 (Fresnel approximation) と呼ぶ。

ついでに開口は通常、光の場を求める点  $P$  までの距離に比べ非常に小さいのでフランホーファー近似が用いられる。フランホーファー近似を適用すると、積分 (4.15) は (4.16) 式より、

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda s_0} e^{iks_0} \iint_S A(\xi, \eta) e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (4.17)$$

と表される。ここで、

$$p = \frac{x}{s_0} \quad \text{および} \quad q = \frac{z}{s_0} \quad (4.18)$$

は原点から見た観測点  $P$  への方向余弦である。式 (4.17) で与えられる結果は非常に重要な意味を持つ。(4.17) 式の積分は、波動場  $U$  の開口における振幅  $A(\xi, \eta)$  のフーリエ変換になっていることである。つまり、観測点  $P$  における波動場を求めるということは、入射波振場を開口面でフーリエ変換することで求められる。今までは、入射波を  $y$  軸方向へ伝播する波として与えてきたが、任意一般の方向へ伝播する波についてもこの結論は適用でき、その場合は、進行方向が傾いていることを表現する位相を含む形で開口における振幅 (つまり境界条件) を与える。

次に、開口の形をいくつか変え、開口において  $A$  は  $(\xi, \eta)$  に依存しない一定値である場合についてフランホーファー近似で光強度分布を求める。

(1) 矩形開口

開口の形と大きさを図 4.4 のようにする。

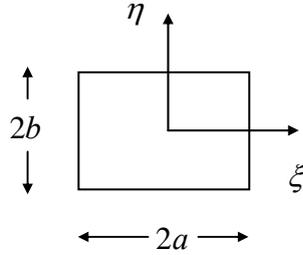


図 4.4 矩形の開口

位置  $P$  における光の電場振幅は

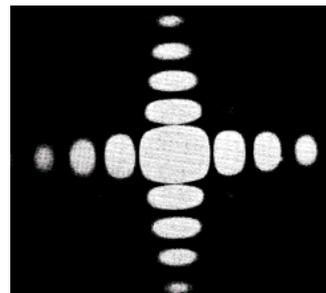
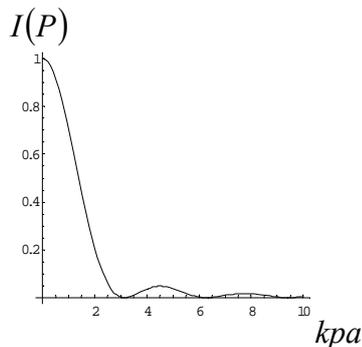
$$\begin{aligned}
 U(P) &= -\frac{iA}{\lambda s_0} e^{iks_0} \iint_S e^{-ik(p\xi+q\eta)} d\xi d\eta \\
 &= -\frac{iA}{\lambda s_0} e^{iks_0} \int_{-a}^a e^{-ikp\xi} d\xi \int_{-b}^b e^{-ikq\eta} d\eta = -\frac{ie^{iks_0} AS}{\lambda s_0} \frac{\sin kpa}{kpa} \frac{\sin kqb}{kqb} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

で与えられる。ここに  $p = \frac{x}{s_0}$ 、および  $q = \frac{z}{s_0}$  であり  $S = 4ab$  は開口の面積である。

この式の最初の複素数部分は波動の位相を与え、開口からの距離に応じて波としての位相が変わることを意味する。さらに、この式の  $p$  および  $q$  に依存する項は波動振幅の伝搬方向への依存性を与える。(5.32) 式は 2次元矩形関数のフーリエ変換であることを再度確認したい。光強度は振幅の絶対値の 2 乗に比例するので、(5.32) より光強度が次式で与えられる。

$$I(P) \propto \left( \frac{AS}{\lambda s_0} \right)^2 \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 \left( \frac{\sin kqb}{kqb} \right)^2 \quad (4.20)$$

(4.20) 式で与えられる強度分布と実際の光強度のパターンを図 4.5(a)(b)に示す。



(a) (b)  
 図 4.5 矩形開口により回折された光の場

(2) 円形開口

図 4.6 に示すような円形の開口に  $y$  軸に沿って平面波の光が入射するとする。開口が円形であることから、 $p$ 、 $q$  および  $dS$  の位置をそれぞれ極座標であらわす。

$$p = \frac{x}{s_0} = \frac{r}{s_0} \frac{x}{r} = w \cos \varphi, \quad q = \frac{z}{s_0} = \frac{r}{s_0} \frac{z}{r} = w \sin \varphi, \\ \xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta \quad (4.21)$$

ここで、 $w = \sin \alpha$  とする。 $\alpha$  は  $s_0$  と  $y$  軸との角度である。

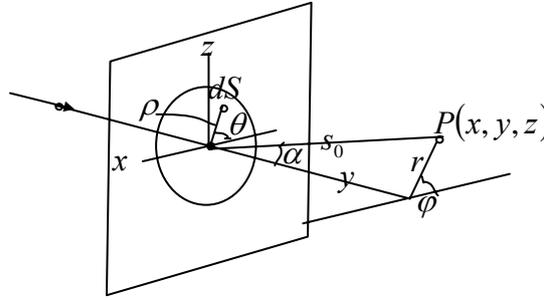


図 4.6 円形開口

(4.17) より、

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda s_0} e^{iks_0} \iint_S e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (4.22)$$

ここで、

$$-ik(p\xi + q\eta) = -ik\rho w(\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) = -ik\rho w \cos(\theta - \varphi) \quad (4.23)$$

であることを用いて、

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda s_0} e^{iks_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-k\rho w \cos(\theta - \varphi)} \rho d\rho d\theta \\ = -\frac{2\pi i A}{\lambda s_0} e^{iks_0} \int_0^a J_0(k\rho w) \rho d\rho = -\frac{\pi i a^2 A}{\lambda s_0} e^{iks_0} \left( \frac{2J_1(kaw)}{kaw} \right) \quad (4.24)$$

が得られる。ここで、ベッセル関数に関する次の関係を用いた。

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \alpha} d\alpha, \quad \frac{d}{dx} xJ_1(x) = xJ_0(x) \quad (4.25)$$

$J_0(x)$  および  $J_1(x)$  はそれぞれ 0 次および 1 次ベッセル関数である。

したがって、 $y$  軸に垂直な平面上での光強度分布は  $y$  軸を中心とする円形に分布し、中心からの距離だけに依存した形となる。強度分布と分布パターンを図 4.7 (a)(b)に示す。

$$I(P) = |U(P)|^2 = I_0 \left( \frac{2J_1(kaw)}{kaw} \right)^2 \quad (4.26)$$

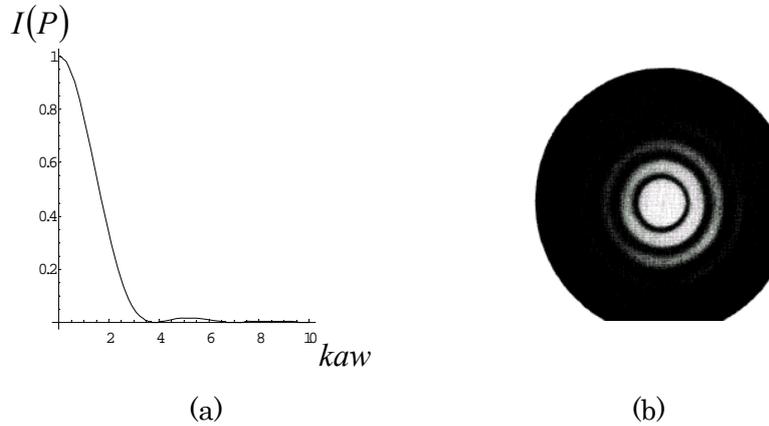


図 4.7 円形開口からの回折像

### (3) 周期的に並ぶ矩形開口 (回折格子: グレーティング)

図 4.8 に示すように、縦、横それぞれが  $b$  および  $a$  の矩形を等間隔  $d$  で  $N$  個横にならべてある。ここへ  $y$  軸に沿って平面波を入れたとする。

$n$  番目の矩形の中心位置は  $(nd, 0)$  である。(1) の場合と同様の議論により、観測点を方向余弦  $(p, q)$  であたえるなら、観測点での波動場の振幅は

$$\begin{aligned} U(p, q) &= -\frac{iA}{\lambda s_0} e^{iks_0} \sum_n \iint_A e^{-ik\{(nd+\xi)p+\eta q\}} d\xi d\eta \\ &= U^{(0)}(p) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ikndp} = U^{(0)}(p) \frac{1 - e^{-iNkdp}}{1 - e^{-ikdp}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

である。ここに、

$$U^{(0)}(p) = -\frac{2ie^{iks_0} A \sin kpa \sin kqb}{\lambda s_0 kp kq} \quad (4.28)$$

は 1 個の矩形を通った光の振幅である。

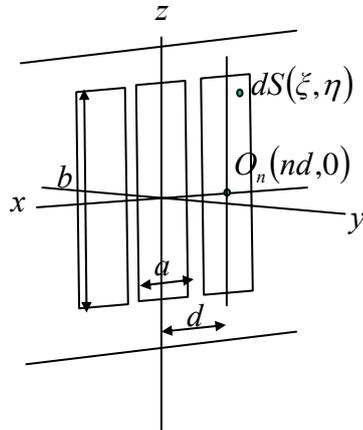


図 4.8 矩形開口の列 (グレーティング・回折格子)

したがって、光強度は

$$\begin{aligned}
 I(P) &\propto |U(P)|^2 = \frac{1 - \cos Nkdp}{1 - \cos kdp} I^{(0)}(P) \\
 &= I^{(0)}(P) \left( \frac{\sin \frac{Nkdp}{2}}{\sin \frac{kdp}{2}} \right)^2 \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

となる。ここに、 $I^{(0)}(P)$ は (4.48) 式の絶対値の 2 乗であり、1 個の矩形を通った光の強度分布である。

図 4.9 に光強度分布を示す。大きなうねりは 1 個の矩形開口による回折パターンで、小さな周期のパターンは矩形開口を多数等間隔で並べた干渉効果による。ここでは 10 個の矩形開口を並べて計算した。

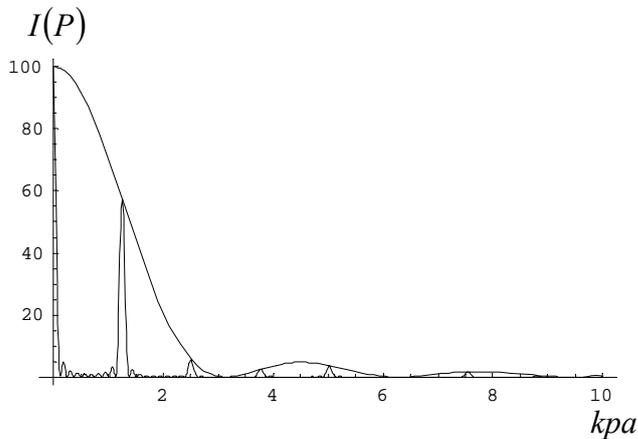


図 4.9 矩形開口の列を通過した光の回折強度

これらの結果からも、開口から離れた場所における波動場は開口における波動場振幅のフーリエ変換で与えられることがわかる。