第3章　誘電体境界面における光の反射と屈折

光を電磁波として考え、電磁場の誘電体界面での連続性を考慮することで二つの媒質の界面を通過する光の反射率および透過率が求められる。ここでは媒質の界面を単純に誘電率と透磁率が不連続的に変化する面として考える。厳密には、境界面はバルクとは異なる物質定数を有し、表面科学のパラダイムを形成している。しかし、ここでは表面単原子層に係わる電磁気現象には立ち入らない。古典的で大雑把な理論立てでも充分に高精度な結果をもたらすこてが示されている。

3.1　電磁場の誘電体界面における連続則

光が異なる誘電率の媒質へ入射する際の反射と屈折の問題を電磁波光学の立場で考える。まず、2 つの媒質の境界で成り立つ法則を列挙する。そのために、マックスウェルの電磁場についての関係式を積分形で与える。

$$\oint_{\ell} \mathbf{H}\cdot d\mathrm{s} = \iint_{S}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\right)\cdot d\mathbf{S} \qquad (3.1) \qquad\qquad \oint_{\ell} \mathrm{E}\,ds = \iint_{S} \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}\cdot d\mathrm{S} \qquad (3.2)$$

ここで、媒質 1 と 2 の境界面に対し、図 3.1 のような矩形の閉じた積分路 ℓ を取り、矢印で示す方向に線積分をおこなう。この積分路で囲われた面を S とする。n_1 および n_2 を各媒質の屈折率とする。

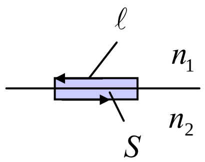

図 3.1　誘電体界面におけるストークスループ

この矩形の界面に沿った辺の長さを $\Delta\ell$ とし、界面に垂直な辺を限りなく短くすると、面積がゼロに近づくために、(3.1)および(3.2)式の右辺はゼロに近づき、磁場と電場それぞれの経路積分は、

$$\text{磁場：}(H_t)_1\Delta\ell - (H_t)_2\Delta\ell = 0 \quad \text{つまり} \quad (H_t)_1 = (H_t)_2 \qquad (3.3)$$

$$\text{電場：}(E_t)_1\Delta\ell - (E_t)_2\Delta\ell = 0 \qquad (E_t)_1 = (E_t)_2 \qquad (3.4)$$

となる。

ここで、$(H_t)_1$ および $(E_t)_1$ などは磁場および電場の界面に沿う方向の成分であり、添え字 1、2 はそれぞれ媒質 1 および 2 における値である。図中の矢印で示したように積分路をたどる

方向があるため、上式の左側の式で第 2 項にマイナスの符号が付く。この結果から**磁場と電場の界面方向成分が境界面の上下で保存する（連続である）**ことが分かる。

次に、電束密度および磁束密度についての式を図 3.2 のガウス面で囲われた体積に適用する。

$$\iint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \iiint_V \sigma dV \qquad (3.5) \qquad\qquad \iint_S \mathrm{B}d\mathrm{S} = 0 \qquad (3.6)$$

ここで、境界面に平行な面の面積を ΔS とすると、積分(3.5)および(3.6)は

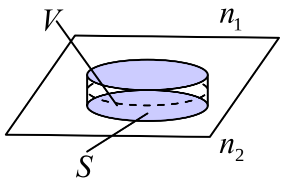

図 3.2　誘電体界面でのガウス面

$$(D_n)_1 \Delta S - (D_n)_2 \Delta S = total(\sigma) \qquad \text{および} \qquad (B_n)_1 \Delta S - (B_n)_2 \Delta S = 0$$

となる。ここで、$total(\sigma)$ は体積 V に含まれる全電荷（真電荷）である。円柱下面の面積ベクトルは下を向くので上式左辺の第 2 項にマイナスが現れる。ここで、媒質は誘電体であるので、真電荷はゼロであり、円柱の高さを限りなく短くすることで側面からの積分への寄与はゼロとなり、結局、

$$(D_n)_1 = (D_n)_2 \quad (3.7) \qquad \text{および} \qquad (B_n)_1 = (B_n)_2 \quad (3.8)$$

が得られる。この結果は、**電束密度ベクトルと磁束密度ベクトルの法線成分が界面を通して連続している**ことを示す。上記の連続に関する結論は電磁波のように、電場と磁場が時間変動する場合も成り立ち、時間の瞬間瞬間で電場と磁場の接線成分が、および電束密度と磁束密度の法線成分が連続している。電磁波が媒質 1 から 2 へ入るとき、これらの条件を満たすようにして入っていく。以下に、電磁波の反射率と透過率を導く。

3.2　誘電体界面を透過する光波の k ベクトルの変化

図 3.3 に示すように光を媒質 1 の上方から媒質 2 へ入射させたとする。ここで、入射光線と界面の法線を含む面を**入射面**という。電磁波の電気ベクトルが入射面と同じ方向を持つ場合は、この直線偏光を p 偏光（parallel、別名 TM 波）と呼んでいる。

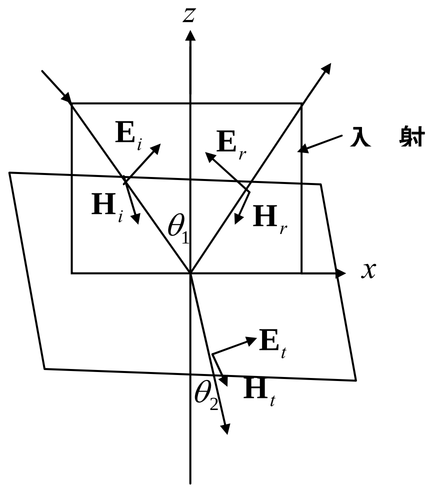

図 3.3　誘電体境界面での入射、反射、および透過波の電気ベクトルと磁気ベクトルの配置（p 偏光で入射の場合）

もし電気ベクトルが入射面と垂直であれば s 偏光（別名 TE 波）とよぶ。まずは、角周波数 ω の p 偏光を媒質 1 上方から界面へ入射した場合における波動伝播の仕方を調べ、反射率を求めよう。

媒質 1 を伝播し、界面へ入射あるいは界面から反射する電磁波の電場ベクトルは

$$\mathbf{E}_i \exp i\left(k_{1x}x + k_{1z}z - \omega t\right) \quad (3.9) \qquad \text{および} \qquad \mathbf{E}_r \exp i\left(k_{1x}x - k_{1z}z - \omega t\right) \quad (3.10)$$

と現せる。ここに、　$k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}\,\omega$ 、(3.11)

$$k_{1x} = k_1 \sin\theta_1 \text{、(3.12)} \qquad k_{1z} = -k_1 \cos\theta_1 \quad (3.13)$$

である。電場の(3.9)式は入射光を、(3.10)式は反射光を与える。(3.13)式でマイナスを入れたのは、入射波は下方へ進むために波数ベクトルの z 成分は負の値になるからである。
また、透過光についても

$$\mathbf{E}_t \exp i\left(k_{2x}x + k_{2z}z - \omega t\right) \qquad (3.14)$$

$$k_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}\,\omega \quad (15) \qquad k_2{}^2 = k_{2x}{}^2 + k_{2z}{}^2 \quad (3.16)$$

と表せる。ここで、式(3.15)および(3.16)は波動場(3.14)が媒質 2 における波動方程式の解である要件から導かれる。ここで、波動についての境界面における連続性を適用する。界面

において媒質 1 における波動の山とか谷が媒質 2 においても波動の山とか谷になっていなければならない。これは波動場の連続性であり、どのような種類の波についても成り立つはずである。したがって、**波数ベクトルの x 成分が媒質 1 と 2 で連続**（等しい）であることが要求される。つまり、

$$k_{2x} = k_{1x} = k_1 \sin\theta_1 \tag{3.17}$$

である。この状況は図 3.4 から理解できる。

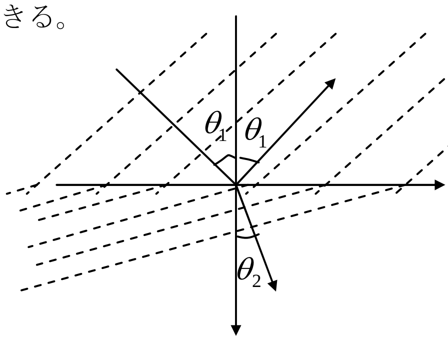

図 3.4　入射波と透過波の波面

(3.17)式の k_{2x} を(3.16)式に代入し、(3.15)式を用いると k_{2z} が求まる。

$$k_{2z}{}^2 = k_2{}^2 - k_{2x}{}^2 = \varepsilon_2\mu_2\omega^2 - (k_1\sin\theta_1)^2 = \varepsilon_2\mu_2\omega^2 - \varepsilon_1\mu_1\omega^2\sin^2\theta_1 \tag{3.18}$$

また、　$\varepsilon_1\mu_1 = \left(\dfrac{n_1}{c}\right)^2$　および　$\varepsilon_2\mu_2 = \left(\dfrac{n_2}{c}\right)^2$　(3.19)

であることを用いると、

$$k_{2z}{}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(n_2{}^2 - n_1{}^2\sin^2\theta_1\right) \tag{3.20}$$

が得られる。

ここで、2 つの場合が生じる。

(1)　$n_1 < n_2$　の場合

この場合は例えば空気からガラスへ光が進む場合であり、θ_1 がいかなる角度（$0 \le \theta_1 \le \pi/2$）でも　$n_2 > n_1\sin\theta_1$　であるので、k_{2z} は実数として定まり、

$$k_{2z} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{n_2{}^2 - n_1{}^2\sin^2\theta_1} \tag{3.21}$$

で与えられる。ここで、波動は下方へ伝わるので(3.21)式でマイナスの符号を取る。つまり、

$$k_{2z} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{n_2{}^2 - n_1{}^2 \sin^2\theta_1} \qquad (3.22)$$

とする。

この場合、k_{2x} と k_{2z} は共に実数なので、屈折角が $\tan\theta_2 = |k_{2x}|/|k_{2z}|$ として定まる。あるいは、波数ベクトルの x 成分の連続性から

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \qquad (3.23) \qquad \text{より、} \qquad n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (3.24)$$

が導かれる。(3.24)式は屈折の法則（Snell の法則）である。

(2)　$n_1 > n_2$ の場合

この場合は例えばガラスから空気中へ光が進む場合などであり、入射角 θ_1 が $n_2 > n_1 \sin\theta_1$ を満たす角度であるならば、つまり

$$\theta_1 < \arcsin\frac{n_2}{n_1} \qquad (3.25)$$

であれば、実数の k_{2z} が存在し、屈折角が定まる。式の形は同じで、

$$k_{2z} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{n_2{}^2 - n_1{}^2 \sin^2\theta_1} \qquad (3.26)$$

である。屈折における Snell の法則も同様に成り立つ。

ところで、もし入射角 θ_1 が条件(3.25)式を満たさない場合、つまり、

$$\theta_1 > \theta_{cr} \quad (3.27) \qquad \text{ここで、} \theta_{cr} = \arcsin\frac{n_2}{n_1} \qquad (3.28)$$

である場合では波動場はどのようになるだろうか。ここで、

$$\theta_{cr} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

を**全反射の臨界角**という。

この場合は式(3.26)で与えられる k_{2z} は純虚数になる。k_{2z} が純虚数になることに違和感を覚えるかもしれないが、透過波を(3.14)式の形で求めたわけで、k_{2z} は式(3.16)を満たすものであればなんでも良く、k_{2z} を実数に限るとした議論は行っていない。ここで、

$$k_{2z} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1{}^2 \sin^2\theta_1 - n_2{}^2}\, i \qquad (3.29)$$

と置いて；ここで i は虚数単位である、透過波の波動関数(3.14)に代入すると、透過波とし

て

$$\mathbf{E}_t e^{\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_1 - n_2^2}z} \exp i(k_{2x}x - \omega t) \qquad (3.30)$$

を得る。
この式の意味は、実部を取ってみれば明らかで、

$$\mathbf{E}_t e^{\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_1 - n_2^2}z} \cos(k_{2x}x - \omega t) \qquad (3.31)$$

となり、x 方向へは角周波数 ω で波数が k_{2x} である平面波として伝わるが、z 方向へは波動としては伝わらない。この波動場はあくまでも x 方向へ伝播し、その振幅が $z<0$ 方向で減少するのである。つまり、振幅が z に依存して界面から遠ざかるにしたがって減少する。このような波を**不均一波**という。このように、屈折率が大きい媒質から小さい媒質へ光が進むとき、臨界角が定義でき、臨界角より大きな入射角では媒質内部へと進んでいく波は存在しない。媒質 2 での光波は界面に沿って伝播する。これが**全反射**特有の現象である。

3.3 入射光が P 偏光の振幅反射率と透過率

それでは、以上の議論に基づき、反射および透過率を求めてみよう。
まず、$n_1 < n_2$ の場合、あるいは $n_1 > n_2$ であっても、入射角 θ_1 が臨界角より小さい場合について考える。これは、すなわち k_{2z} が実数の場合である。この場合は屈折角 θ_2 が Snell の法則で与えられる。媒質 1 と 2 の境界における電場と磁場の連続性を利用して反射波と透過波の電場と磁場が求まる。
まず、電場 x 成分の連続性は

$$E_i \cos\theta_1 - E_r \cos\theta_1 = E_{tx} \qquad (3.32)$$

と書ける。媒質 1 では入射波と反射波の電場の合計が用いられることに注意する。E_{tx} は透過波の電場 x 成分である。ここで、電場は時間とともにプラスになったりマイナスになったりの振動を示すが、波の進む方向を見て電場ベクトルが上を向いているなら正とする。
次に、磁場の y 成分の連続性は

$$H_i + H_r = H_{ty} \qquad (3.33)$$

と表せる。

ここで、電場と磁場の大きさの関係 $$H_i = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}E_i \qquad (3.34)$$

などを使って、(3.33) を電場だけで表すと、

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(E_i+E_r\right)=\frac{1}{\mu_2\omega}\left(k_{2z}E_{tx}-k_{2x}E_{tz}\right) \qquad (3.35)$$

となる。ここで、右辺（媒質 2 での電磁場）を　$rot\mathbf{E}_t=-\dfrac{\partial\mathbf{B}_t}{\partial t}$　より　$i\mathbf{k}_2\times\mathbf{E}_t=i\omega\mu_2\mathbf{H}_t$ であることを用いて電場成分で表した。また、左辺のマイナスは、磁場が y 軸負方向を向くと電場 x 成分は正で､磁場の y 成分が正方向なら電場 x 成分は負であることを考慮したことによる。

次に、$(3.32)\times\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}-(3.35)\times\cos\theta_1$ により E_r を消去すると、

$$2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_i\cos\theta_1=\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}-\frac{\cos\theta_1}{\omega\mu_2}k_{2z}\right)E_{tx}+\frac{\cos\theta_1}{\omega\mu_2}k_{2x}E_{tz} \qquad (3.36)$$

となるが、媒質 2 でガウスの法則を適用し、

$$div\mathbf{D}_t=\varepsilon_2 div\mathbf{E}_t=0 \quad \text{より、} k_{2x}E_{tx}+k_{2z}E_{tz}=0\text{、そして}\quad E_{tz}=-\frac{k_{2x}}{k_{2z}}E_{tx} \qquad (3.37)$$

を用いることで、（3.36）式の右辺を E_{tx} だけで表せる。これから、透過波の x 成分が求まる。

$$E_{tx}=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}-\left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}+\frac{k_{2x}{}^2}{\omega\mu_2k_{2z}}\right)\cos\theta_1}E_i=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}-\frac{k_2{}^2}{\omega\mu_2k_{2z}}\cos\theta_1}E_i \qquad (3.38)$$

ここで、　$k_2{}^2=k_{2x}{}^2+k_{2z}{}^2$　を用いた。

この結果から、界面における透過電場　$E_t=E_{tx}/\cos\theta_2$　が求まる。

$$E_t=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_2-\frac{k_2{}^2}{\omega\mu_2k_{2z}}\cos\theta_1\cos\theta_2}E_i=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_2+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta_1}E_i$$

$$=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2+n_2\cos\theta_1}E_i \qquad 3.39)$$

が得られる。ここで、第一式から第二式へ移行する際に、$-k_2\cos\theta_2 = k_{2z}$、および $k_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\omega$ を用い、第二式から第三式へ移行する際に、$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ であることを用いて透磁率を払い、$n_1 \approx \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}$ および $n_2 \approx \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_0}$ であることを用いて屈折率を導入した。

（3.39）式は透過波電場振幅を入射波の電場振幅であらわしたもので、$E_t/E_i = t_p$ として振幅透過率が得られる。

$$t_p = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} \qquad (3.40)$$

第二式は Snell の法則を用いて屈折率を入射および屈折角で表すことで得られる。
反射波については、（3.32）式に（3.38）式を代入することで求めることができ、反射波にたいする振幅反射率が求まる。

$$r_p = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \qquad (3.41)$$

ここで得られた結果についていくつかの重要なポイントを指摘しておく。まず、反射率について、**入射角と屈折角の和** $\theta_1+\theta_2$ **が** $\pi/2$ **となるとき、振幅反射率はゼロとなる。このとき、しかしながら振幅透過率は 1 にはならないことを注意する。**この条件を満たす入射角 θ_B を**ブリュースター角**と呼ぶ。ブリュースター角は

$$\tan\theta_B = \frac{\sin\theta_B}{\cos\theta_B} = \frac{\sin\theta_B}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)} = \frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (3.42)$$

という条件を満たす $\tan\theta_B$ の角として求めることができる。この角度は単純に 2 つの媒質の屈折率比から求められる。ブリュースター角は $n_1 < n_2$ でも $n_1 > n_2$ の場合でも存在し、この角度では **p 偏光の光が反射しない**ので、反射光が邪魔な場合や、直線偏光の偏光方向を精密に求めることに利用される。**また、入射角がブリュースター角を超えると反射電場の符号が反転する（位相が π ずれる）。**

3.4 入射光が S 偏光の振幅反射率と透過率

以上の議論は入射光が p 偏光の場合の取り扱い方法である。電場ベクトルが界面に平行

である場合、つまり s 偏光の場合では、電場が y 軸方向を向いているとする。このとき、磁場ベクトルは入射面内にある。このとき、磁場と電場の界面方向成分（磁場については x 成分、電場は y 成分）が界面を通して連続である。

$$\text{電場の連続性：}\quad E_i + E_r = E_{ty} \tag{3.43}$$

$$\text{磁場の連続性：}\quad H_i \cos\theta_1 - H_r \cos\theta_1 = H_{tx} \tag{3.44}$$

ここで電場と磁場の関係　$H_i = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}E_i$　などと

$$H_{tx} = \frac{1}{\mu_2\omega}\left(k_{2y}E_{tz} - k_{2z}E_{ty}\right) = -\frac{k_{2z}E_{ty}}{\mu_2\omega}$$

を用いると、（ここで、$E_{tz} = 0$ を使った）（3.44）式は

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(E_i - E_r\right)\cos\theta_1 = -\frac{k_{2z}E_{ty}}{\mu_2\omega} \tag{3.45}$$

となる。$k_{2z} = -k_2\cos\theta_2 = -\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\omega\cos\theta_2$ と（3.43）式を（3.45）式に代入して E_{ty} を消去すると、E_r について求めることができる。

$$E_r = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}E_i \tag{3.46}$$

これより、振幅反射率が次のようにもとまる

$$r_s = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = -\frac{\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)} \tag{3.47}$$

また、（3.46）式を（3.43）式に代入し、E_{ty} について解くことで振幅透過率を得ることができる。媒質 2 では電場成分は E_{ty} のみである。振幅透過率は

$$t_s = \frac{E_{ty}}{E_i} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)} \tag{3.48}$$

となる。

ここで、一つ注意すべきことがある。それは振幅透過率と反射率の和は 1 にならないことである。その理由は媒質 1 と 2 で誘電率および透磁率が異なり、光速が異なるからであり、以下に述べるハワー反射率とパワー透過率の和は1になることが示される。

3.5 パワー反射率と透過率

これまでは、電場振幅の反射率と透過率を求めた。磁場振幅の反射率は同様の方法で求められる。しかし、透過率の場合、2つの媒質で誘電率および磁気透磁率が異なるので電場から磁場を求めるときの特性インピーダンスが異なるために、透過率の表式が違ったものになる。

このような考えが必要となるのは、光強度の反射率と透過率である。光強度は単位面積を単位時間に通過するエネルギー、つまりパワーの密度である。光強度はポインティングベクトル $\overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}$ で与えられるが、その大きさを電場の大きさで表すなら $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}E^2$ である。ここに、E は電場の振幅である。このポインティングベクトルの大きさを入射光と反射光について求め、その比をとれば光強度の反射率が求まる。入射光と反射光に同じ ε_1 と μ_1 を用いるため、強度反射率は振幅反射率 r_p あるいは r_s に対して $R_s = |r_s|^2$ および $R_P = |r_p|^2$ で与えられる。

$$R_P = |r_P|^2 = \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)} \qquad (49)$$

$$R_s = |r_s|^2 = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \qquad (50)$$

透過率については、媒質 1 と 2 で特性インピーダンスが異なるのでポインティングベクトルの比で求める。入射光と透過光のポインティングベクトルの大きさは、それぞれ

$S_i = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_i^{\,2}$ および $S_t = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_t^{\,2}$ であり、その比は $\dfrac{S_t}{S_i} = \dfrac{n_2}{n_1}|t|^2$ である。ここに t はsおよびp偏光の振幅透過率である。**強度透過率（つまりパワー密度**の比**）**はこれで求まるが、透過光のパワー透過率を求めるにはこれだけでは不十分で、入射角と屈

折角が異なることによるビーム断面積の変化を考慮し、 $T=\dfrac{S_t}{S_i}\dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$ としてパワー透過率を求めなければならない。P 偏光と s 偏光についてパワー透過率を求めると次のようになる。

$$T_P=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}t_P{}^2=\frac{\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)} \qquad (3.51)$$

$$T_s=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}t_s{}^2=\frac{n_2\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2}{n_1\sin^2(\theta_1+\theta_2)} \qquad (3.52)$$

これらの結果から、

$T_P+R_P=1$ （3.53） および $T_s+R_s=1$ （3.54）

が確認できる。

また、特に、垂直入射（$\theta_1=0$ 、$\theta_2=0$）の場合にはパワー反射率は s 偏光も p 偏光も同じで（3.41）および（3.47）式の振幅反射率の 2 乗を計算すると、

$$R_s=R_P=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 \qquad (3.55)$$

パワー透過率も求まり、 $$T_s=T_P=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2} \qquad (3.56)$$

が得られる。例えば、空気中（$n_1=1$）におかれたガラス（$n_2=1.5$）表面での振幅反射率は 0.2 であるが、強度反射率は 0.04 となる。これはなじみ深い値である。ところが、半導体レーザーの光増幅部分は n=2.8 程度なので、強度反射率は 0.2 くらいにもなり、レーザーとしての共振器ミラーとして機能する。

図 3.5a~b に $n_1=1, n_2=1.4$ の場合の振幅反射率、パワー反射率、振幅透過率、およびパワー透過率の入射角依存性を示す。

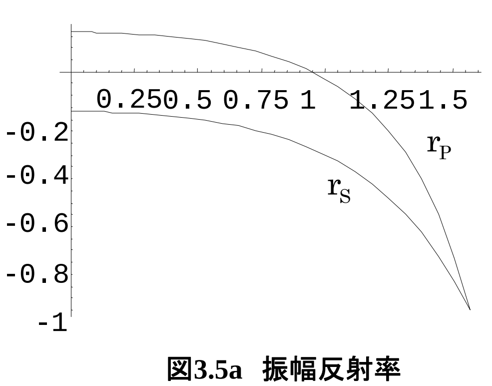

図3.5a 振幅反射率

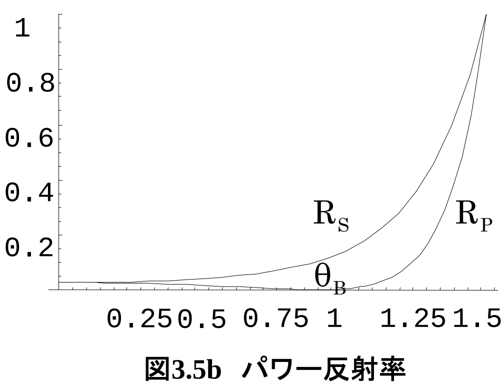

図3.5b パワー反射率

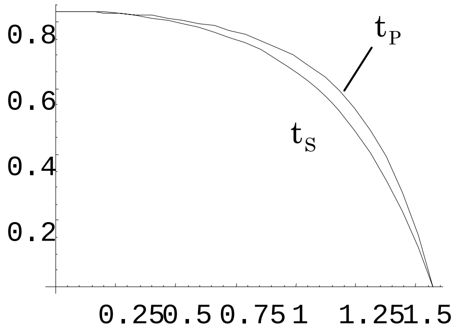

図3.5c 振幅透過率

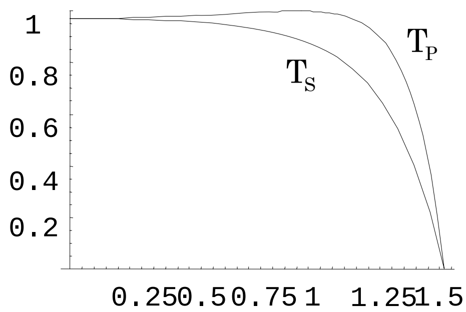

図3.5d パワー透過率

また、$n_1 = 1.4, n_2 = 1$ の場合の反射率を図 3.6a~b に示す。この反射率カーブから全反射が生じる状況が分かる。

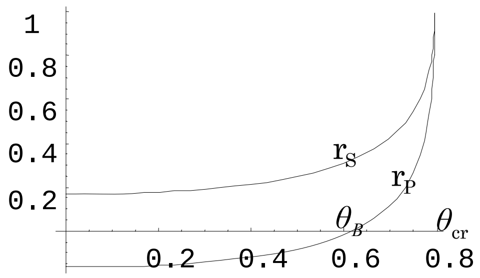

図3.6a 振幅反射率

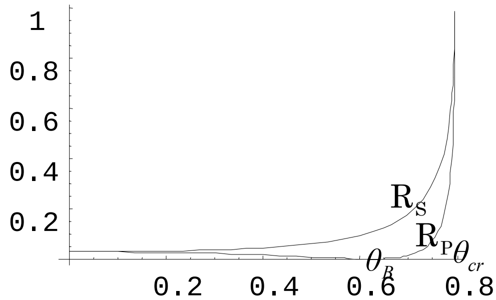

図3.6b パワー反射率

3.6 全反射とエヴァネッセント波

さて、全反射の場合、媒質 2 で光波はどのように振舞うであろうか。入射光が p 偏光の場合、(3.38) で透過光の電場の x 成分が与えられる。この式は、全反射するかどうかにかかわらず成り立つ。(3.38) 式に (3.29) 式で与えられる k_{2z} を代入し、$k_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}\,\omega$ などを使うと、透過波の E_{tx} を求めることができる。

$$E_{tx} = \frac{2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \dfrac{{k_2}^2}{\omega \mu_2 k_{2z}}\cos\theta_1} E_i \qquad (3.38)'$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}k_{2z}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}k_{2z}-\frac{k_2{}^2}{\omega\mu_2}\cos\theta_1}E_i=\frac{2\cos\theta_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1-n_2{}^2}i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1-n_2{}^2}i+\frac{k_2{}^2}{\omega\mu_2}\cos\theta_1}E_i$$

$$=\frac{2n_1{}^2\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}i}{n_2{}^2\cos\theta_1+n_1{}^2\sqrt{\sin^2\theta_1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}i}E_i \tag{3.57}$$

ここで、 $$k_{2z}=-\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1-n_2{}^2}i \qquad (3.29)'$$

を用いた。

さらに、E_{tz} は（3.37）式を用いて求められる。

$$E_{tz}=-\frac{k_{2x}}{k_{2z}}E_{tx} \qquad (3.37)'$$

$$=\frac{k_{2x}}{\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1-n_2{}^2}i}E_{tx}=-\frac{ci\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\omega\sin\theta_1}{\omega\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1-n_2{}^2}}E_{tx}$$

$$=-\frac{in_1\sin\theta_1}{\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1-n_2{}^2}}E_{tx}=-\frac{i\sin\theta_1}{\sqrt{\sin^2\theta_1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}E_{tx} \tag{3.58}$$

これまでの結果から、まず（3.57）式より、透過波電場の x 成分は入射波電場に複素数を掛けたものになっている。このことは振幅が入射波から変化するだけでなく、位相も変化することを意味する。さらに、(3.58) が示すように透過波電場の z 成分は透過波電場の x 成分に負の純虚数をかけてあるので、位相が $\pi/2$ 遅れている。したがって、媒質 2 の界面近くでは電気ベクトルは入射面内で反時計回りの楕円を描く。この電場ベクトルの動きは通常の楕円偏光と全く異なるものであることを注意しておく。全反射現象におけるエヴァネッセント波のイメージを図 3.7 に示す。

媒質Ⅱにおける磁場ベクトルはどうなっているだろうか。式（3.33）のように、磁場ベクトルは媒質の境界面方向の成分が連続する。今の場合、媒質Ⅰ（入射側）での磁場は入射波、反射波供に境界面方向の y 成分だけとなっている。したがって、媒質Ⅱでも磁場は y 方向を向き、時間と x 座標値に依存した $\exp i\left(k_{1x}x-\omega t\right)$ の形で進む。

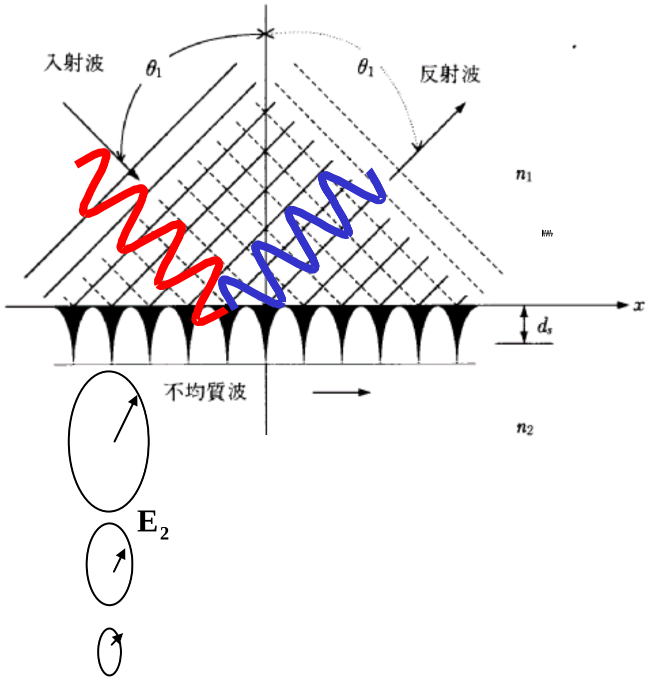

図 3.7　全反射現象に伴うエヴァネッセント波

また、このことは $rot\mathrm{E} = -\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}$ の関係からも得られる。これを成分別に書くと、媒質Ⅱでの電場は x と z 成分だけであり、これらは y 座標値に依存しないことに留意すると、

$$(rot\mathrm{E})_x = \frac{\partial E_{tz}}{\partial y} - \frac{\partial E_{ty}}{\partial z} = 0 \text{、}\quad (rot\mathrm{E})_z = \frac{\partial E_{ty}}{\partial x} - \frac{\partial E_{tx}}{\partial y} = 0$$

$$(rot\mathrm{E})_y = \frac{\partial E_{tx}}{\partial z} - \frac{\partial E_{tz}}{\partial x} = ik_{2z}E_{tx} - ik_{2x}E_{tz} = \frac{\omega\left(n_2^{\,2} - 2n_1^{\,2}\sin^2\theta_1\right)}{c\sqrt{n_1^{\,2}\sin^2\theta_1 - n_2^{\,2}}}E_{tx}$$

であり、$-\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega\mu_2\mathbf{H}_t$ なので、

$$H_{ty} = \frac{i\left(2n_1^{\,2}\sin^2\theta_1 - n_2^{\,2}\right)}{c\mu_2\sqrt{n_1^{\,2}\sin^2\theta_1 - n_2^{\,2}}}E_{tx}$$

であり、確かに磁場は y 成分のみを持つ。しかもこの y 成分の時間と座標に対する依存性は E_{tx} と同じで、位相が $\dfrac{\pi}{2}$ 進んでいるので $\exp i\left(k_{1x}x - \omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ の形をしていて x 方向へは

波動として伝わるが、z 方向へは（3.31）式のように減衰する。

ポインティングベクトル $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ の各成分を書き出してみると、

$$S_x = E_{ty}H_{tz} - E_{tz}H_{ty} = -E_{tz}H_{ty} \propto \sin^2\left(k_{1x}x-\omega t\right)、\quad S_y = E_{tz}H_{tx} - E_{tx}H_{tz} = 0$$

$$S_z = E_{tx}H_{ty} - E_{ty}H_{tx} = E_{tx}H_{ty} \propto \cos\left(k_{1x}x-\omega t\right)\sin\left(k_{1x}x-\omega t\right) = \frac{1}{2}\sin 2\left(k_{1x}x-\omega t\right)$$

となり、ポインティングベクトルは $x-z$ 平面内にあり、x 成分は常に正であり、z 成分は正弦的に振動する。したがって、ポインティングベクトルを 1 周期で時間平均すると x 成分だけが残る。これは、媒質 II ではエネルギーは x 方向へ流れることを意味する。

さらに、（3.32）式を用いることで反射波振幅が求まる。

$$E_r = \frac{n_2{}^2\cos\theta_1 - n_1{}^2\sqrt{\sin^2\theta_1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}\,i}{n_2{}^2\cos\theta_1 + n_1{}^2\sqrt{\sin^2\theta_1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}\,i}E_i \tag{3.59}$$

また、振幅反射率の絶対値が

$$\left|r_p\right| = \left|\frac{E_r}{E_i}\right| = 1 \tag{3.60}$$

であることが、（3.59）式の形からわかる。このことは、光ビームのパワーが 100%反射されることを物語る。これが全反射と言われる所以である。

次に、s 偏光の場合について考える。（3.43）（3.45）式から

$$E_{2y} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 - \frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}}E_i = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\mu_2}\sqrt{\sin^2\theta_1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}\,i}E_i$$

$$= \frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1 + \sqrt{\sin^2\theta_1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}\,i}E_i \tag{3.61}$$

が得られる。さらに、反射波の電場は

$$E_r = E_{2y} - E_i = \frac{\cos\theta_1 - \sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} i}{\cos\theta_1 + \sqrt{\sin^2\theta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} i} E_i \tag{3.62}$$

である。(3.62) から、振幅反射率の絶対値は

$$|r_s| = \left|\frac{E_r}{E_i}\right| = 1 \tag{3.63}$$

である。入射波が s 偏光である場合、媒質 2 における界面近傍での電場は y 成分のみであり、磁場は楕円を描くことを示すことが出来る。媒質Ⅱにおけるポインティングベクトルの平均は x 方向である。

全反射の場合、p 偏光でも s 偏光でも式 (3.30) および (3.31) が示すように、媒質 2 における波動場の振幅は z の負方向へ

$$e^{\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1 - n_2{}^2}z}$$

のように減衰する。振幅が $1/e$ まで減衰する深さを全反射におけるしみ込み深さと呼ぶ。しみ込み深さは、

$$d = \frac{c}{\omega\sqrt{n_1{}^2\sin^2\theta_1 - n_2{}^2}} \tag{3.64}$$

で与えられる。図 3.8 に、(3.64) 式で求めたしみ込み深さの入射角依存性を示す。

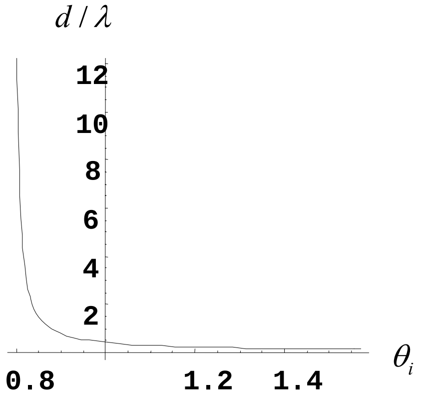

図3.8　しみこみ深さの入射角依存性