平成３１年度４月・平成３０年度１０月入学
応用物理学専攻　修士課程入学試験問題 I
（応用数学 I 、力学、電磁気学）
平成 30 年 8 月 8 日 9:00〜12:00

解答上の注意

(1) 答案用紙および草案紙は各問につき１枚である。

(2) すべての答案用紙および草案紙の所定の欄に受験番号、問題番号を明記すること。

(3) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する。草案紙は回収しない。

1

[1] 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\alpha)$ を求めよ．ただし，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を使ってよい．

(1) $f(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > a) \\ 1 & (|x| \leqq a) \end{cases}$ 　（ただし，a は正の定数）

(2) $f(x) = e^{-x^2}$

[2] 偏微分方程式

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \qquad \cdots ①$$

を次の境界条件と初期条件のもとで解くことを考える．

$$U(0,t) = 0, \quad U(2,t) = 0 \qquad \cdots ②$$

$$U(x,0) = \sin \pi x + \sin 2\pi x \qquad \cdots ③$$

ただし，$t \geqq 0$ および $0 \leqq x \leqq 2$ とする．以下の問いに，導出過程も示して答えよ．

(1) 変数分離解 $U(x,t) = X(x)T(t)$ を仮定すると，λ を定数として，

$$\frac{T'(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \qquad \cdots ④$$

が成り立つことを示せ．また，境界条件②より，$X(x)$ が満たすべき条件を求めよ．

(2) ④から得られる $X(x)$ に関する常微分方程式を，(1) で求めた $X(x)$ に対する条件のもとで解くことを考える．このとき許される λ の値，およびその λ に対する $X(x)$ を求めよ．

(3) ④から得られる $T(t)$ に関する常微分方程式の一般解を，(2) で得られた λ の値を用いて求めよ．

(4) (2) と (3) でそれぞれ得られた $X(x)$ と $T(t)$ を用いた解の重ね合わせにより，境界条件②を満足する偏微分方程式①の解を求めよ．

(5) 境界条件②と初期条件③を満たす，偏微分方程式①の解を求めよ．

平成３１年度４月・平成３０年度１０月入学
応用物理学専攻　修士課程入学試験問題Ｉ
（応用数学Ｉ、力学、電磁気学）
平成 30 年 8 月 8 日 9:00～12:00

解答上の注意

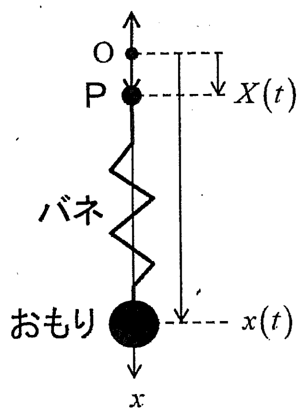
(1) 答案用紙および草案紙は各問につき１枚である。

(2) すべての答案用紙および草案紙の所定の欄に受験番号、問題番号を明記すること。

(3) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する。草案紙は回収しない。

2

図に示すように, 点Ｐに質量が無視できるバネを介しておもりが吊り下げられている. バネとおもりは鉛直方向にとった x 軸上を１次元的に運動するとし, x 軸の正の向きを下向きにとる. 点Ｐは時間 t に依存する外力 F により原点Ｏを中心として上下に振動し, その位置を $X(t)$ とする. おもりの位置を $x(t)$, おもりの質量を m, バネ定数を k, バネの自然長を ℓ, 重力加速度を g とし, 以下の問いに答えよ.



1．バネの弾性エネルギー, おもりの位置エネルギー（原点 O をエネルギーの基準にとる）およびおもりの運動エネルギーを書け.

2．$x(t)$ に対する運動方程式を求めよ.

3．点Ｐがバネから受ける力を f とすると、外力 F は $F=-f$ と表せることを使って、F を k 等を用いて表わせ. また、１で求めた３つのエネルギーの総和（力学的エネルギー）の時間微分を F と $\dot{X}\equiv \mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ を用いて表し, その意味を説明せよ.

4．$X(t)=X_0\cos\omega t$ （$X_0(>0)$ と ω は定数）のとき, $x(t)$ の運動方程式の解として $x(t)=a+x_0\cos\omega t$ を仮定し, a と x_0 を求めよ. また, 縦軸に x_0, 横軸に ω をとったグラフの概略を描き, グラフで表される現象について説明せよ.

5．前問の解を用いて以下の問に答えよ.
点Ｐとバネの間に質量の無視できる糸を挿入する. 点Ｐを $X(t)=X_0\cos\omega t$ で振動させ, 角周波数 ω をゼロからゆっくりと大きくしていくと, ある角周波数 ω_c で糸がたるみ始める. ω_c を求めよ. また, k=100 N/m, m=0.06 kg, X_0=0.0098 m, g=9.8 m/s^2 とし, ω_c の値を計算せよ.

平成３１年度４月・平成３０年度１０月入学
応用物理学専攻　修士課程入学試験問題 I
（応用数学 I 、力学、電磁気学）
平成 30 年 8 月 8 日 9:00～12:00

解答上の注意

(1) 答案用紙および草案紙は各問につき１枚である。

(2) すべての答案用紙および草案紙の所定の欄に受験番号、問題番号を明記すること。

(3) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する。草案紙は回収しない。

3

(1) 等方的な誘電体媒質（比誘電率ε_rおよび比透磁率μ_r）中を伝播する電磁波を考える。時間をtとすると、電場$\boldsymbol{E}$ が満たす波動方程式は

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

となることを、マックスウェルの方程式から導出せよ。また速度vを、$\varepsilon_r, \varepsilon_0,\ \mu_r, \mu_0$を用いて表せ（$\varepsilon_0$, μ_0は真空中の誘電率および透磁率）。ただし電荷密度および電流密度はゼロ（$\rho = 0, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$）とし、電場$\boldsymbol{E}$、電束密度$\boldsymbol{D}$、磁場$\boldsymbol{H}$、磁束密度$\boldsymbol{B}$に以下の関係が成り立つものとする。

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H}$$

必要なら、ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = -\nabla^2 \boldsymbol{a} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a})$ を用いよ。

(2) この電磁波が直線偏光であるとし、$\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0), \boldsymbol{H} = \left(0, H_y, 0\right)$と表せる場合を考える。$+z$方向に進行する波（進行波）と$-z$方向に進行する波（後退波）の電場は、以下のように表せる。

$$E_x(z,t) = E_0 \cos(\pm kz - \omega t)$$

ここでE_0は定数、kは波数、ωは角振動数である。複号はそれぞれ、進行波・後退波に対応する。このとき、速度が$v = \omega/k$となることに注意して、磁場の変動成分が進行波・後退波について

$$H_y(z,t) = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E_0 \cos(\pm kz - \omega t)$$

と表されることを示せ。

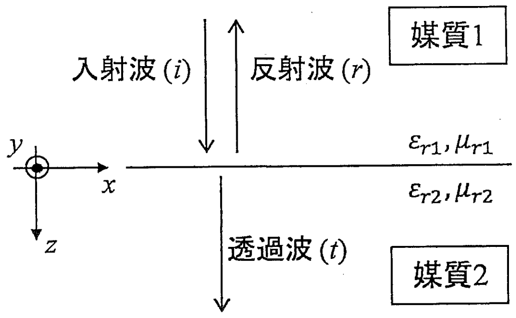
(3) 位置zおよび時間tにおけるポインティングベクトル$\boldsymbol{S}$は、$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$で与えられる。(2)で求めた進行波・後退波のポインティングベクトルの方向と大きさ$S(z,t)$を、それぞれ求めよ。

(4) 右図に示すように、この直線偏光の電磁波が比誘電率ε_{r1}の媒質 1 からε_{r2}の媒質 2 に垂直に入射する場合を考える。

このとき、入射波 i、反射波 r、透過波 t の電場成分$E(z,t)$は、k_1, k_2を媒質 1,2 における波数としたとき、それぞれ次のように表される。

$$E_i(z,t) = E_{0i} \cos(k_1 z - \omega t)$$
$$E_r(z,t) = E_{0r} \cos(-k_1 z - \omega t)$$
$$E_t(z,t) = E_{0t} \cos(k_2 z - \omega t)$$

このとき、磁場成分 $H_i(z,t), H_r(z,t), H_t(z,t)$ を求めよ。ただし、媒質 1,2 の比透磁率は$\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$とする。



(5) (4)の条件において、電場$\boldsymbol{E}$および磁場$\boldsymbol{H}$に対する境界条件を考慮し、境界面$z = 0$における$E_i(0,t), E_r(0,t), E_t(0,t)$の間の関係、および$H_i(0,t), H_r(0,t), H_t(0,t)$の間の関係を記述せよ。

(6) (4)の入射波・反射波・透過波に対するポインティングベクトルの大きさを$S_i(z,t), S_r(z,t), S_t(z,t)$とすると、境界面$z = 0$におけるエネルギー反射率$R$および透過率$T$はそれぞれ、

$$R = S_r(0,t)/S_i(0,t),$$
$$T = S_t(0,t)/S_i(0,t)$$

で与えられる。R, Tを求め、$R + T = 1$となることを示せ。

(7) 石英ガラスの屈折率n_gは、可視光に対し室温で$n_g \cong 1.5$である。空気（屈折率$n_a = 1.0$）から石英ガラスへ電磁波が垂直に入射するとき、(6)の結果を利用し、屈折率と比誘電率の関係に注意して、R, Tの値を求めよ。

平成３１年度４月・平成３０年度１０月入学
応用物理学専攻　修士課程入学試験問題 I
（応用数学 II、熱・統計力学、量子力学）
平成 30 年 8 月 8 日　13:00～16:00

解答上の注意

(1) 答案用紙および草案紙は各問につき１枚である。

(2) すべての答案用紙および草案紙の所定の欄に受験番号、問題番号を明記すること。

(3) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する。草案紙は回収しない。

4

[1]　2 種類の 3 次元ベクトル場

$$\vec{A}=\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}},\ \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}},\ \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)$$

および

$$\vec{B}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$$

に関する以下の問に答えよ．

1) 座標 $(\pm1,\ \pm1,\ 0)$ の 4 点におけるベクトル場 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ を，xy 平面上に矢印を用いて図示せよ．$\vec{A}$ と $\vec{B}$ は別々の図に描くこと．

2) 原点を除く点 $(x,\ y,\ 0)$ における $\mathrm{div}\,\vec{A}$，$\mathrm{rot}\,\vec{A}$，$\mathrm{div}\,\vec{B}$，$\mathrm{rot}\,\vec{B}$ をそれぞれ求めよ．

3) 半径 1 で原点を中心とする円 C が $z=0$ 平面上にある．C を z 軸の正の方向から見て反時計回り方向に 1 周する線積分 $\oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ と $\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ をそれぞれ求めよ．

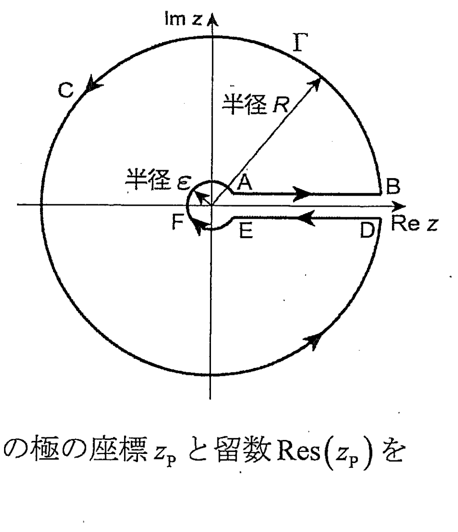
[2]　右図の積分路 Γ に沿った複素関数 $f(z)=\dfrac{z^{-3/4}}{z+1}$ の複素積分

$$J=\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_\Gamma \frac{z^{-3/4}}{z+1}\mathrm{d}z$$

を利用し，以下の問に従って積分

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{-3/4}}{x+1}\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^R \frac{x^{-3/4}}{x+1}\mathrm{d}x$$

を求めよ．ただし積分路 $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ および $\mathrm{D}\to\mathrm{E}$ はそれぞれ実軸の直上と直下に沿うものとする．



1) 積分路 Γ に囲まれた領域内に存在する $f(z)$ のすべての極の座標 z_P と留数 $\mathrm{Res}(z_\mathrm{P})$ を示せ．

2) 複素積分 J の値を求めよ．

3) 半径 $R(\to\infty)$ の円である積分路 $\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ に沿った積分

$$J_\mathrm{BCD}=\lim_{R\to\infty}\int_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}} \frac{z^{-3/4}}{z+1}\mathrm{d}z$$

の値を求めよ．

4) 半径 $\varepsilon(\to 0)$ の円である積分路 $\mathrm{E}\to\mathrm{F}\to\mathrm{A}$ に沿った積分

$$J_\mathrm{EFA}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathrm{E}\to\mathrm{F}\to\mathrm{A}} \frac{z^{-3/4}}{z+1}\mathrm{d}z$$

の値を求めよ．

5) 積分路 $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ に沿った積分 J_AB を I を用いて表せ．

6) 積分路 $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ と $\mathrm{D}\to\mathrm{E}$ における z の偏角の違いを考慮して，積分路 $\mathrm{D}\to\mathrm{E}$ に沿った積分 J_DE を I を用いて表せ．

7) 以上の結果を用いて，積分 I の値を求めよ．

平成３１年度４月・平成３０年度１０月入学
応用物理学専攻　修士課程入学試験問題 I
（応用数学 II、熱・統計力学、量子力学）
平成 30 年 8 月 8 日 13:00〜16:00

解答上の注意

(1) 答案用紙および草案紙は各問につき１枚である。
(2) すべての答案用紙および草案紙の所定の欄に受験番号、問題番号を明記すること。
(3) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する。草案紙は回収しない。

5

1-1 一辺の長さ L、体積 $V=L^3$ の立方体中にある質量 m の自由電子のエネルギーは

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$$

によって与えられる。ここで、n_x, n_y, n_z は任意の正の整数であり、$h=2\pi\hbar$ はプランク定数である。自由電子気体の状態密度が

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}$$

となることを示せ。

1-2 温度 T、化学ポテンシャル μ の状態 i にある電子気体の平均粒子数は

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_i-\mu)/k_\mathrm{B}T]+1}$$

によって与えられる。k_B はボルツマン定数、ε_i は状態 i のエネルギーである。N 個の電子が体積 V の中にあるとき、絶対零度 ($T=0$ K) での電子気体のフェルミエネルギー $\mu(T=0)=\varepsilon_F$ を $\hbar, m, N,$ そして V の関数として求めよ。ただし、$N\gg 1$ とする。

1-3 温度 $T=0$ K での電子気体の全エネルギーが $E=(3/5)N\varepsilon_F$ となることを示せ。

1-4 金の伝導電子が、電子密度 $N/V=5.90\times10^{28}$ m^{-3} の自由電子気体として振る舞うと仮定したとき、金のフェルミエネルギー（単位 eV）を求めよ。ここで、$m=9.1\times10^{-31}$ kg、$\hbar=1.05\times10^{-34}$ Js とする。また電気素量は $e=1.6\times10^{-19}$ C とする。さらに必要であれば $1.75^{(2/3)}=1.45$ として良い。

2-1 一辺 L の立方体の箱に入った電磁波の波数ベクトル $\mathbf{k}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$$

ここで n_x, n_y, n_z は整数 0, 1, 2... であり、これらのうち少なくとも一つは 0 でない。光子気体の状態密度が次式によって与えられることを示せ。

$$g(\varepsilon) = \frac{V\varepsilon^2}{\pi^2\hbar^3c^3}$$

ここで、ε は光子のエネルギー、c は真空中の光の速度である。

2-2 温度 T の状態 i にある光子気体の平均粒子数は

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp(\varepsilon_i/k_\mathrm{B}T)-1}$$

によって与えられる。ここで、ε_i は光子の一粒子状態 i のエネルギーである。体積 V の箱が温度 T にあるとき、熱平衡にある箱の中の光子の全エネルギーが、次式で与えられることを示せ。

$$E = V\frac{\pi^2k_\mathrm{B}^4T^4}{15\hbar^3c^3}$$

ここで、$\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx=\frac{\pi^4}{15}$ の関係を使ってよいものとする。

3 上記より、温度 $T=300$ K、体積 $V=1$ m^3 にある真空中の光子気体のエネルギーと、温度 $T=300$ K、体積 $V=1$ m^3 にある金の電子気体のエネルギーを比較せよ。温度 $T=300$ K での電子気体のエネルギーは、$T=0$ K での電子気体のエネルギーとほぼ同じものとし、また、$m=9.1\times10^{-31}$ kg, $\hbar=1.05\times10^{-34}$ Js, $k_\mathrm{B}=1.38\times10^{-23}$ J K^{-1}, そして $c=3.0\times10^8$ m s^{-1} とする。

平成３１年度４月・平成３０年度１０月入学
応用物理学専攻　修士課程入学試験問題 I
（応用数学 II、熱・統計力学、量子力学）
平成 30 年 8 月 8 日 13:00〜16:00

解答上の注意

(1) 答案用紙および草案紙は各問につき１枚である。

(2) すべての答案用紙および草案紙の所定の欄に受験番号、問題番号を明記すること。

(3) 試験終了後はすべての答案用紙を回収する。草案紙は回収しない。

6

空間的・時間的に一様な磁場中の電子の運動について考えよう。
磁場 $\vec{B}$ (大きさ $B = |\vec{B}|$、ここでは磁束密度のことを単に磁場と呼ぶ) のベクトルポテンシャルを $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z = (A_x, A_y, A_z)$ で表す。ただし、$\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$ はそれぞれ x、y、z 方向の単位ベクトルである。この一様な定磁場中の自由電子に対する古典的なラグランジアン $\mathcal{L}$ は、スピンを無視した場合、

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + q\left(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z\right)$$

で与えられる。m は電子の質量、q は電子の電荷、(x, y, z) は電子の位置座標である。また、ドットは時間微分を表す。例えば、$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$、$\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ などである。このとき、次の問いに答えよ。

(1) この系の一般化運動量 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ は、

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \quad (j = 1, 2, 3)$$

で定義される。ただし、$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$、$(p_1, p_2, p_3) = (p_x, p_y, p_z)$ とする。$\vec{p}$ を求めよ。

(2) オイラー・ラグランジュの方程式より、磁場中の電子が、運動方程式

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

を満たすことを示せ。ここで、$\vec{r} = (x, y, z)$ は電子の位置ベクトル、$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ は電子の速度ベクトルである。

(3) この系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2$$

と表せることを示せ。ただし、$\vec{a}^{\,2}$ の表記は、$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a}$ を意味する。

(4) 以下、量子力学的に取り扱うために、運動量の成分 p_j を $p_j = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ なる演算子で表すことにする。ただし、$\hbar$ はプランク定数を 2π で除したもの、i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(a) 位置 x と運動量 p_x の交換関係 $[x, p_x] = xp_x - p_x x$ を求めよ。

(b) 磁場の向きを z 軸方向にとると、$\vec{B}$ は、$\vec{B} = B\vec{e}_z$ で表される。ベクトルポテンシャル $\vec{A} = -By\vec{e}_x$ が、一様な磁場 $B\vec{e}_z$ を表していることを示せ。

(c) (b) のベクトルポテンシャルを用いた場合、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ が運動量演算子 $\vec{p}$ の x 成分 p_x および z 成分 p_z と交換可能、すなわち、$[p_x, \mathcal{H}] = 0$ および $[p_z, \mathcal{H}] = 0$ であることを示せ。

(d) (c) の結果から、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有状態は、同時に、運動量 p_x と p_z の固有状態でもあることを示している。運動量演算子 $\vec{p}$ の x 成分 p_x および z 成分 p_z の固有値をそれぞれ、$\hbar k_x$、$\hbar k_z$ とするとき、これらに対応する固有関数が、$C_x \exp(ik_x x)$、$C_z \exp(ik_z z)$ となることを示せ。ただし、C_x、C_z は任意定数である。

(e) (d) の結果から、定常状態における Schrödinger 方程式 $\mathcal{H}\psi = E\psi$ の固有関数は、

$$\psi = f(y)\exp\left[i\left(k_x x + k_z z\right)\right]$$

とおくことができる。これを、Schrödinger 方程式に代入して、$f(y)$ についての微分方程式を導け。

(f) (e) の結果より、$f(y)$ は、角振動数 ω_c、中心位置 $y = Y_c$ の１次元調和振動子の微分方程式を満たすことがわかる。ω_c および Y_c を q、B、m、k_x を用いて表せ。また、１次元調和振動子のエネルギー固有値は、$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ (ω は角振動数) となることを用いて、この系の固有エネルギー E を求めよ。