平成 24 年度 応用数学 B 試験問題 (2013.1.31)

注意　問題用紙は持ち帰り, 解答用紙のみを提出せよ. 答だけのものは零点. 計算途中も記せ (部分点あり).

問題 1 $[0, +\infty)$ 上で定義された関数 $f(t)$ のラプラス積分は

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

で定義される. 次の関数のラプラス積分を計算して, 増加指数と合わせて答えよ. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $f(t) = t$

(2) $f(t) = e^{at}$ (a は複素数の定数)

問題 2 $f(t)$ のラプラス変換を $F(p)$ とするとき, $f(t)$ を $F(p)$ の原関数という. $F(p)$ が多項式 $G(p)$, $H(p)$ (ただし, $\deg G(p) < \deg H(p)$) によって $F(p) = \dfrac{G(p)}{H(p)}$ と表されているとき,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p) e^{pt}$$

が成り立つ. ただし, $p_1, \ldots, p_n$ は $F(p)$ の極である. 上の公式に現れる Res とは何か? その定義と計算方法を $\operatorname*{Res}_{p=1} \dfrac{p}{(p+1)(p-1)^2}$ を例にとって説明せよ. (10 点)

問題 3 次の問に答えよ. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $f'(t)$ と $f''(t)$ のラプラス変換を $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ を用いて表せ.

(2) ラプラス変換を用いて次の方程式を解け.

$$f''(t) + f'(t) - 2f(t) = 6t - 3, \qquad f(0) = 3, \qquad f'(0) = -3$$

裏面にも問題があります

問題 4 ガンマ関数 $\Gamma(z)$ とベータ関数 $B(z,\zeta)$ は

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad B(z,\zeta)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}dt, \qquad \mathrm{Re}\, z>0, \quad \mathrm{Re}\,\zeta>0$$

によって定義される．$(10\times 2=20$ 点$)$

(1) 関数等式 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ を導出し, $\Gamma\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ を計算せよ．ただし, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ は既知としてよい.

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^2(\sin\theta)^3d\theta$$

をベータ関数を用いて表し, その値を計算せよ．ただし, ベータ関数の公式 $B(z,\zeta)=\dfrac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}$ は既知としてよい.

問題 5 ルジャンドル多項式はロドリゲスの公式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right), \qquad n=0,1,2,\ldots$$

によって与えられる．$n=3,4,5,\ldots$ に対して, $P_2(x)$ と $P_n(x)$ の直交性

$$\int_{-1}^{1}P_2(x)P_n(x)\,dx=0$$

を示せ．(15 点)

問題 6 次の 1 次元波動方程式を重ね合わせの原理を利用して解け．(15 点)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0\le x\le\pi, \quad t\ge 0,$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0, \qquad u(x,0)=3\sin 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$$

応用数学 B 期末試験解説 (2013.1.31 実施)

問題 1 (1) 定義にあてはめて計算するだけ．部分積分によって，

$$F(p)=\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt=\left[t\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\left[te^{-pt}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{p^2}\left[e^{-pt}\right]_0^{+\infty}$$

が得られる．$t\to+\infty$ とするとき収束するためには, e^{-pt} において $\mathrm{Re}\,p>0$ が必要十分条件である．したがって, 増加指数は $s_0=0$ であって, $F(p)=\dfrac{1}{p^2}$ がわかる．

(2) 定義によって，

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}dt=\left[-\frac{1}{p-a}\,e^{-(p-a)t}\right]_0^{+\infty}$$

である．$t\to+\infty$ とするとき収束するためには, $\mathrm{Re}\,(p-a)>0$, つまり, $\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,a$ が必要十分である．これより, 増加指数は, $s_0=\mathrm{Re}\,a$ であって, $F(p)=\dfrac{1}{p-a}$ がわかる．

問題 2 関数 $f(p)$ を $p=a$ のまわりでローラン展開して得られる $(p-a)^{-1}$ の係数を $f(p)$ の $p=a$ における留数といい, $\mathrm{Res}_{\,p=a}\,f(p)$ で表す．たとえば,

$$f(p)=\frac{p}{(p+1)(p-1)^2}$$

における $p=1$ の留数を求めるためには, 右辺の $p=1$ の周りのローラン展開を求めればよい．

$$f(p)=\frac{p+1-1}{(p+1)(p-1)^2}=\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{(p+1)(p-1)^2}$$

とするとよい．無限等比級数の公式を用いれば,

$$\frac{1}{p+1}=\frac{1}{2+(p-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{p-1}{2}\right)^n$$

が得られるので,

$$f(p)=\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{(p-1)^2}\times\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{p-1}{2}\right)^n=\frac{1}{(p-1)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(p-1)^{n-2}.$$

これが, $f(p)$ の $p=1$ の周りのローラン展開である．$(p-1)^{-1}$ の係数は $1/4$ であるから,

$$\operatorname*{Res}_{p=1}\frac{p}{(p+1)(p-1)^2}=\frac{1}{4}$$

問題 3 (1) 教科書参照

$$\mathcal{L}[f'(t)]=pF(p)-f(0)$$
$$\mathcal{L}[f''(t)]=p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$$

(2) 両辺のラプラス変換を計算する ($F=\mathcal{L}[f]$ とおく)．左辺は,

$$\mathcal{L}[f''+f'-2f]=(p^2F-3p+3)+(pF-3)-2F=(p^2+p-2)F-3p.$$

右辺は,

$$\mathcal{L}[6t-3]=6\mathcal{L}[t]-3\mathcal{L}[1]=\frac{6}{p^2}-\frac{3}{p}$$

($\mathcal{L}[t]$ は問題 1(1) で計算してある．$\mathcal{L}[1]$ は問題 1(2) で $a=0$ とおくか, あるいは改めてラプラス積分を計算すればよい.) したがって, 与えられた微分方程式は,

$$(p^2+p-2)F-3p=\frac{6-3p}{p^2}$$

と同値. これは簡単に解けて,

$$F = \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p+2)(p-1)}$$

ここで, 逆変換を用いると,

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{p=0} \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p+2)(p-1)}\, e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=-2} \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p+2)(p-1)}\, e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=1} \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p+2)(p-1)}\, e^{pt}$$

後は, 右辺の留数を計算すればよい.

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{p=0} \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p+2)(p-1)}\, e^{pt} &= \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp} \frac{(3p^3 - 3p + 6)e^{pt}}{(p+2)(p-1)} = -3t \\
\operatorname*{Res}_{p=-2} \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p+2)(p-1)}\, e^{pt} &= \lim_{p\to -2} \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p-1)}\, e^{pt} = e^{-2t} \\
\operatorname*{Res}_{p=1} \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p+2)(p-1)}\, e^{pt} &= \lim_{p\to 1} \frac{3p^3 - 3p + 6}{p^2(p+2)}\, e^{pt} = 2e^t
\end{aligned}$$

したがって,

$$f(t) = 2e^t + e^{-2t} - 3t$$

問題 4 (1) 部分積分によって,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[t^z(-e^{-t})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} z t^{z-1}(-e^{-t}) dt \\
&= z\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

この式は, $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ のときに成り立つが, 解析接続によって $\Gamma(z)$ は $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \dots\}$ に拡張され, そこで関数等式が成り立つ. 関数等式から

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

が得られるので,

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+2\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,.$$

(2) ベータ関数の定義の積分において, 変数変換 $t = \cos^2\theta$ を施せば,

$$B(z, \zeta) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2\zeta-1} d\theta$$

が得られる. そうすれば, $\Gamma(1) = 1$ に注意して,

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^2(\sin\theta)^3 d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2}+2)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{(\frac{3}{2}+1)(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{15}$$

問題 5 $P_n(x)$ の表示式を代入すると,

$$\int_{-1}^{+1} P_2(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{+1} P_2(x) \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) dx.$$

右辺の積分を考えよう. 部分積分によって,

$$\int_{-1}^{+1} P_2(x) \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) dx = \left[P_2(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} P_2'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n) dx$$

ここで, $\dfrac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^n)$ を考えよう.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}((x^2-1)^n) = n(x^2-1)^{n-1}\times 2x = f_1(x)(x^2-1)^{n-1}, \qquad (f_1(x) \text{ は } x \text{ の 1 次式})\\
&\frac{d^2}{dx^2}((x^2-1)^n) = f_1'(x)(x^2-1)^{n-1} + f_1(x)(n-1)(x^2-1)^{n-2}\times 2x = f_2(x)(x^2-1)^{n-2}, \quad (f_2(x) \text{ は } x \text{ の 2 次式})\\
&\frac{d^3}{dx^3}((x^2-1)^n) = f_2'(x)(x^2-1)^{n-1} + f_2(x)(n-2)(x^2-1)^{n-3}\times 2x = f_3(x)(x^2-1)^{n-3}, \quad (f_3(x) \text{ は } x \text{ の 3 次式})\\
&\cdots\\
&\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n) = f_{n-1}(x)(x^2-1), \quad (f_{n-1}(x) \text{ は } x \text{ の } n-1 \text{ 次式})\\
&\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) = f_n(x), \quad (f_n(x) \text{ は } x \text{ の } n \text{ 次式})
\end{aligned}$$

となっていることがわかる. したがって,

$$\left[P_2(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)\right]_{-1}^{+1} = \left[P_2(x)f_{n-1}(x)(x^2-1)\right]_{-1}^{+1} = 0.$$

よって,

$$\int_{-1}^{+1} P_2(x)\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)dx = -\int_{-1}^{+1} P_2'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)dx$$

がわかる. 部分積分を繰り返して, 同様の論法を用いると,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} P_2(x)\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)dx &= -\int_{-1}^{+1} P_2'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)dx\\
&= -\left[P_2'(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}((x^2-1)^n)\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} P_2''(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}((x^2-1)^n)dx\\
&= \int_{-1}^{+1} P_2''(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}((x^2-1)^n)dx\\
&= \left[P_2''(x)\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}((x^2-1)^n)\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} P_2'''(x)\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}((x^2-1)^n)dx\\
&= \int_{-1}^{+1} P_2'''(x)\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}((x^2-1)^n)dx.
\end{aligned}$$

ここで, $P_2(x)$ は 2 次多項式なので, $P_2'''(x)=0$. よって, 最後の積分は 0.

問題 6 両端 $(x=0,\pi)$ が固定され, $t=0$ においての形状が $3\sin 2x$, 初速がいたるところ 0 となっている波動を表す方程式である.

まず, $u(x,t)=X(x)T(t)$ の形の解を求めよう. このとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \iff X''T = XT''.$$

さらに,

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

と変形することで, これらは定数であることが分かる. それを $-\lambda^2$ とすれば,

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \qquad \frac{T''}{T} = -\lambda^2$$

となる. これらは容易に解けて,

$$\begin{aligned}
X(x) &= a\sin\lambda x + b\cos\lambda x,\\
T(t) &= c\sin\lambda t + d\cos\lambda t,
\end{aligned}$$

とおける. ただし, a, b, c, d は任意定数である. (λ は複素数なので, X, Y をともに指数関数で表してもよいし, ともに三角関数で表してもよいし, また, 指数関数と三角関数を逆に用いてもよい. オイラーの公式などによって, 結果的に同じことになる.)

境界条件 $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ から,

$$X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$$

したがって,

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

まず, $X(x) = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x$ が $X(0) = X(\pi) = 0$ を満たすために,

$$b = 0, \qquad a\sin\lambda\pi + b\cos\lambda\pi = 0.$$

がわかる. $a = 0$ とすると, $X(x) = 0$ となり $u(x,t) = 0$ となってしまう. これは, 残っている条件を満たさないので解にならない. よって, $a \neq 0$ である. そうすれば, $\lambda = n$ は整数でなければならない. $\sin x$ が奇関数であることと, $\lambda = 0$ では求めるべき解にならないことから, $n = 1, 2, \ldots$ に限られる. こうして, $X(x)$ の形は,

$$X(x) = a\sin nx, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad a\text{: 任意定数}$$

となる. このとき, $T(t)$ の形は,

$$T(t) = c\sin nt + d\cos nt,$$

である. したがって,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

を満たす解で $u(x,t) = X(x)T(t)$ を満たすものは,

$$u(x,t) = \sin nx(c_n\sin nt + d_n\cos nt), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad c_n,\ d_n\text{: 任意定数}$$

の形であることが分かった. さらに, 初速についての条件 $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ から

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = c_n n\sin nx = 0$$

が得られ, $n = 1, 2, \ldots$ に対して $c_n = 0$ がわかる. つまり,

$$u(x,t) = d_n\sin nx\cos nt, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad d_n\text{: 任意定数}$$

が得られた. 重ね合わせの原理によって, 一般解は,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\sin nx\cos nt \tag{S}$$

で与えられる (フーリエ級数論を用いて導出してもよい).

$t = 0$ とおくと,

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\sin nx$$

となり, これが初期条件 $u(x,0) = 3\sin 2x$ と一致するのは,

$$d_2 = 3, \qquad d_n = 0, \quad n \neq 2.$$

したがって, (S) より求めるべき解は,

$$u(x,t) = 3\sin 2x\cos 2t.$$