# Vzorce pro derivace

<u>DEFINICE DERIVACE FUNKCE $y = f(x)$</u>

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

## Tabulka derivací

| $f(x)$ | $f'(x)$ | **poznámka** |
|---|---|---|
| $x^a$ | $ax^{a-1}$ | $a$ je konstantní, speciálně pro $a = 0$ je $x^0 = 1$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | |
| $\operatorname{cotg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $\operatorname{arccotg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $a > 0$ je konstanta, $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ |
| $\ln \lvert x\rvert$ | $\frac{1}{x}$ | |
| $\log_a \lvert x\rvert$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | pro $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ | $\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ |
| $\operatorname{tgh} x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ | $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ |
| $\operatorname{cotgh} x$ | $-\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$ |
| $\operatorname{argsinh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ |
| $\operatorname{argcosh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ |
| $\operatorname{argtgh} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{argtgh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ |
| $\operatorname{argcotgh} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{argcotgh} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ |

## Další vztahy pro derivace

<u>Linearita derivace:</u> Když jsou $a$, $b$ konstanty, je

$$\big(af(x) + bg(x)\big)' = af'(x) + bg'(x)\,.$$

<u>Derivace součinu:</u>

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

<u>Derivace podílu:</u>

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,.$$

<u>Derivace složené funkce:</u> Pro složenou funkci $h(x) = g\big(f(x)\big)$ je

$$h'(x) = g'\big(f(x)\big)\, f'(x)\,.$$

Zkráceně lze pro funkci $z(x) = z\big(y(x)\big)$ zapsat derivaci složené funkce jako

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

<u>Derivace inverzní funkce:</u> Je-li $y = f(x)$ inverzní funkce k funkci $x = g(y)$, pak je

$$f'(x) = \frac{1}{g'\big(f(x)\big)} \quad \text{nebo zkráceně} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{-1}.$$

<u>Derivace obecné mocniny funkcí:</u> Derivace funkce $y = \big(f(x)\big)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\,\ln f(x)}$ je

$$\Big(\big(f(x)\big)^{g(x)}\Big)' = \big(f(x)\big)^{g(x)} \left(g'(x)\,\ln f(x) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

<u>Logaritmická derivace funkce $y = f(x)$:</u> je derivace funkce $\ln f(x)$, tj.

$$\big(\ln f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$