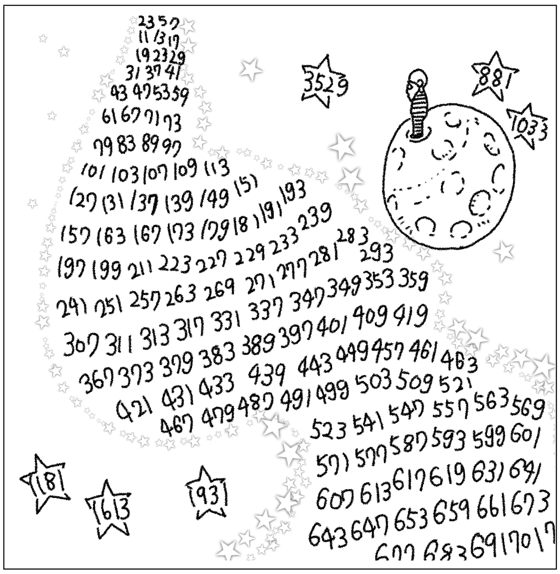
『数学セミナー』2019 年 7 月号「高校数学ではじめる整数論」

連載●第 4 回

素数は無数に　付録

谷口 隆◎神戸大学大学院理学研究科



※ 式番号などは本誌 2019 年 7 月号の連載と通しで振っています.

◎—— ルジャンドルの公式 (7) の証明

n を正の整数，p を素数とします．ルジャンドルの公式というのは

$$e_p(n!) = \sum_{k \geqq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots \tag{7}$$

のことでした．$e_p(n!)$ は，$n!$ を素因数分解したときに p が何個積に現れるか，その個数のことです．

$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ なので，$1, 2, \cdots, n$ が p を素因数に含む個数の総数 N を知ることが目標です．そこでまず，$1, 2, \cdots, n$ の中に p の倍数が何個あるか考えてみると，それは $\left[\frac{n}{p}\right]$ 個です．ですが，だから $N = \left[\frac{n}{p}\right]$ 個だとは言えません．その p の倍数の中に，p を 2 個以上素因数もつ数もあるかも知れないからです．p^2 の倍数になっているもの，あるいは p^3 の倍数になっているものなどには，より多く p が素因数として含まれます．

$1, 2, \cdots, n$ の中に p^2 の倍数は $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ 個あります．さらにその中に p^3 の倍数が $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ 個あり，…と続きます．ℓ を $p^\ell < n$ となる最大の整数とすると（$\ell = [\log_p n]$ です），$1, 2, \cdots, n$ の中には p^ℓ の倍数が $\left[\frac{n}{p^\ell}\right]$ 個あり，$p^{\ell+1}$ の倍数は存在しません．そこで，

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^\ell}\right] \tag{11}$$

という和を考えてみます．(11) は，まず $\left[\frac{n}{p}\right]$ で p の倍数をすべて数え，次に $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ で p^2 の倍数になっているものはもう一度数え，それから p^3 の倍数になっているものはさらにもう一度数え，…と続きます．最後に p^l の倍数になっているものがトータルで ℓ 度数えられて終わります．すると，1 から n までのおのおのの数が，ちょうど p を素因数にもつ個数の回数だけ数えられていることになります．だからこれは，$1, 2, \cdots, n$ が p を素因数に含む個数の総数 N そのものになります．

なお，$p^{\ell+1} > n$ であることから，$\left[\frac{n}{p^{\ell+1}}\right], \left[\frac{n}{p^{\ell+2}}\right], \cdots$ はすべて 0 になります．だから (11) は (7) と同一の和です．以上で示されました．

◎—— (10) の証明

ここでは,

$$\pi(x) < 8\log 2 \cdot \frac{x}{\log x} \tag{12}$$

を示すことにします．準備として，次の不等式を示しておきます．

命題　k を正の整数とすると，次が成り立つ．

$$1 + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{2^{\ell+1}}{\ell} < \frac{2^{k+3}}{k+1} \tag{13}$$

証明　k についての数学的帰納法で示します．$k = 1, 2$ のときは直接確かめられます．$m \geqq 2$ として，$k = m$ では正しいとします．$k = m+1$ とします．数学的帰納法の仮定から,

$$((13)\text{ の左辺}) = 1 + \sum_{\ell=1}^{m+1} \frac{2^{\ell+1}}{\ell} = 1 + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{2^{\ell+1}}{\ell} + \frac{2^{m+2}}{m+1} < \frac{2^{m+3}}{m+1} + \frac{2^{m+2}}{m+1} = \frac{3 \cdot 2^{m+2}}{m+1}$$

です．よって $k = m+1$ のときに (13) が成り立つには，$\dfrac{3}{m+1} \leqq \dfrac{4}{m+2}$ であればよいのですが，$m \geqq 2$ のときにこの式は成り立ちます．よって数学的帰納法により，(13) はすべての正の整数 k で成立します．■

あらためて，(12) を示します．n を正の整数とします．二項係数 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ について，不等式

$$2^{2n} > {}_{2n}\mathrm{C}_n \geqq \prod_{n<p\leqq 2n} p \tag{14}$$

が成り立ちます．この左側の不等式は，$2^{2n} = (1+1)^{2n}$ を二項展開したときの，$2n+1$ 項のうちのひとつが ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ であることからしたがいます．右側の不等式を示すために，(9) で $n < p$ のときを考えます．このとき $2n < p^2$ より $\log_p(2n) < 2$ なので，和は $k = 1$ の項だけとなります．よって

$$e_p({}_{2n}\mathrm{C}_n) = \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = \left[\frac{2n}{p}\right] = \begin{cases} 1 & (p \leqq 2n) \\ 0 & (p > 2n) \end{cases}$$

となります．したがって

$${}_{2n}\mathrm{C}_n = \prod_{p} p^{e_p({}_{2n}\mathrm{C}_n)} \geqq \prod_{n<p} p^{e_p({}_{2n}\mathrm{C}_n)} = \prod_{n<p\leqq 2n} p$$

と，示されました．

$n \geqq 2$ とし，(14) で 2 を底とする対数をとります．対数を取ると積が和になり，また $n < p$ なら $\log p > \log n$ なので,

$$2n \geqq \sum_{n<p\leqq 2n} \log_2 p \geqq \sum_{n<p\leqq 2n} \log_2 n = \log_2 n \left(\sum_{n<p\leqq 2n} 1\right) \tag{15}$$

です．この式の右側の辺の和 $\displaystyle\sum_{n<p\leqq 2n} 1$ は，$n < p \leqq 2n$ となる素数の個数です．よってそれは $\pi(2n) - \pi(n)$ となります．よって (15) より

$$\pi(2n) - \pi(n) \leqq \frac{2n}{\log_2 n} \tag{16}$$

となります．$k \geqq 1$ とし，この不等式で $n = 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^k$ としたものの和を取ります．左辺の和では途中の項がキャンセルして $\pi(2^{k+1}) - \pi(2)$ となるので，

$$\pi(2^{k+1}) - \pi(2) \leqq \sum_{\ell=1}^{k} \frac{2^{\ell+1}}{\ell} \tag{17}$$

です．$\pi(2) = 1$ なので，不等式 (13) を用いると

$$\pi(2^{k+1}) < \frac{2^{k+3}}{k+1} \tag{18}$$

が得られます．$x \geqq 2$ とします．$2^k \leqq x < 2^{k+1}$ となる $k \geqq 1$ が定まります．このとき，$\pi(x) \leqq \pi(2^{k+1})$ であり，また $\log_2 x < k+1$ より $\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{\log_2 x}$ となるから，

$$\pi(x) < \frac{2^{k+3}}{k+1} < \frac{8 \cdot 2^k}{\log_2 x} \leqq \frac{8x}{\log_2 x} = 8 \log 2 \cdot \frac{x}{\log x}$$

となり，(12) が示されました．なお $1 < x < 2$ のときは，$\pi(x) = 0$ なので (12) は明らかに成立します．

[たにぐち たかし]
[絵／森脇かみん]