함 수

역함수 / 합성함수

러셀 블루 tv

MEGASTUDY - 러셀

01. 함수와 대응

(1) 함수 : 집합 X 의 각 원소에 대응하는 집합 Y 의 원소가 단 하나만인 대응을 f라 할 때, 이 대응 f를 X 에서 Y 로의 함수라고 하고, 이것을 기호로 $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 와 같이 나타낸다.

(2) 정의역 : 함수 $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 에서 집합 X , 공역 : 함수 $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 에서 집합 Y

(3) 함수의 개수 : $n(\mathrm{X}) = a$, $n(\mathrm{Y}) = b$ 일 때, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 로의 함수의 개수 : b^a 개

(4) 함숫값 : 함수 $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 에서 X 의 원소 x 에 대응하는 Y 의 원소 y가 있을 때, y를 x에 대한 함숫값 $f(x)$라 하고 $y = f(x)$ 와 같이 나타낸다.

(5) 치역 : 함수 $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 에서 x 의 각 원소에 대응하는 함숫값 전체의 집합을 함수 f 의 치역이라 한다.

(6) 함수의 상등(서로 같은 함수) : 두 함수 f, g에 대하여

① 두 함수의 정의역과 공역이 같다.

② 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$

일 때, 두 함수 f와 g는 같다고 하고 $f = g$ 와 같이 표시한다.

02. 여러 가지 함수

(1) 일대일함수와 일대일 대응 : 함수 $f : X \to Y$에서

① 일대일 함수 : 임의의 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $x_1 \neq x_2$ **이면** $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수

② 일대일 대응 : 일대일 함수이고 치역과 공역이 같은 함수

(2) 항등함수와 상수함수 : 함수 $f : X \to Y$에서

① 항등함수 : $X = Y$이고 임의의 $x \in X$에 대하여 $f(x) = x$인 함수. 기호로는 I를 주로 사용한다.

② 상수함수 : 치역의 원소가 하나인 함수로 $f(x) = a$인 함수 $(a \in Y)$

03. 합성함수

(1) 합성함수 : 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$의 합성함수 $g \circ f$는 다음과 같이 정의 한다.

$$g \circ f : X \to Z \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(2) 합성함수의 성질 : 세 함수 f, g, h에 대하여

1) $f \circ g \neq g \circ f$ 2) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

3) $f \circ I = I \circ f = f$ (I는 항등함수)

04. 역함수

(1) 역함수의 정의 : 함수 $f : X \to Y$가 일대일 대응일 때, Y의 원소 y에 대하여 $f(x)=y$가 되는 $x \in X$를 대응시키는 함수를 f의 역함수라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$f^{-1}: \ Y \to X, \quad y \to x$$

(2) 역함수를 갖기 위한 조건 : 일대일 대응이어야 한다.

(3) 역함수 구하는 방법 : x와 y를 바꾸어서 y에 대하여 푼다.

 * 주의!!! 역함수를 구할 때는 정의역과 치역에 주의한다.

(4) 역함수의 성질 :

1) $f^{-1} \circ f = I$, 2) $(f^{-1})^{-1} = f$

3) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 4) $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

(5) 역함수의 그래프 :

1) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

2) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$, $y=x$의 그래프의 교점은 일치한다.

* $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구할 때는 $y=f(x)$와 $y=x$ 또는 $y=f^{-1}(x)$와 $y=x$의 교점을 구하면 편할 때가 많다.

Exercise

1. 일차함수 $f(x)=ax+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 점 $(2, 4)$에서 만날 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$를 $f(x)=x^2-2$라 하자. 함수 f의 공역을 A, 치역을 B라 할 때, 집합 $A-B$는?

① ϕ ② $\{-2,\ -1\}$ ③ $\{-1,\ 0\}$
④ $\{0,\ 1\}$ ⑤ $\{1,\ 2\}$

3. 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 방정식 $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$의 모든 실근의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

4. 두 함수 $f(x)=3x+3$, $g(x)=x^2+6$이 있다. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ h)(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $(f\circ g)(2)+(h\circ f)(2)$의 값을 구하시오.

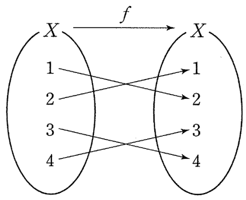
5. 일차함수 $f(x)=3x+4$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(10,\ a)$를 지날 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(b,\ a)$를 지난다. $a+b$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{4}{3}$　　③ 2

④ $\frac{8}{3}$　　⑤ $\frac{10}{3}$

6. 집합 $X=\{2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$으로의 함수 $f(x)=a-x$의 치역이 정의역과 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

7. 그림은 함수 $f : X \to X$를 나타낸 것이다.



$(f \circ f)(1) + f^{-1}(4)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

8. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 전체의 집합 U의 두 부분집합 A, B가 다음과 같다.

$A = \{f \mid f(1) = 1$이고 $f(2) \neq 2\}$
$B = \{f \mid f(3) \neq 3$ 또는 $f(4) = 4\}$
$n(A \cap B^C)$의 값을 구하시오.

9. 두 함수

$$f(x)=x^2+k,\quad g(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x>0) \\ -2x+4 & (x\le 0)\end{cases}$$

에 대하여 $(g\circ f)(x)=6$이 서로 다른 3개의 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

10. 세 집합

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Z=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

에 대하여 일대일 대응인 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)=g(3)$
(나) $(g \circ f)(1)=5$
(다) $f^{-1}(3)>1$
(라) $f(4)=g(f(4))-2$

$f(4)+g(6)$의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 15

11. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $(g \circ f)(x)=3x+2$, $f^{-1}(2)=1$일 때, $g(2)$의 값은?

(단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

12. 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=3x-2$에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)=ax+b$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

13. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \geq 1) \\ x & (x < 1) \end{cases}$, $g(x)=x^2$에 대하여

$(f \circ f)(2) \times (g \circ g)(\sqrt{2})$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

14. 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$일 때, $G=\{(x, y) \mid y=f(x), x \in X, y \in X\}$를 함수 $f : X \to X$의 그래프로 정의한다. 역함수가 존재하는 함수 f의 그래프를 <보기>에서 모두 고르면?

< 보기 >

ㄱ. $G_1=\{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}$
ㄴ. $G_2=\{(-1, -1), (0, 0), (1, 1)\}$
ㄷ. $G_3=\{(-1, 0), (0, 1), (1, -1)\}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $f(x)=ax+12$, $(g \circ h)(x)=x^2-3x-5$이고 $((f \circ g) \circ h)(-2)=27$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

16. 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 f가 $f\ : X \to X$ 라 할 때, $\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\} \neq 0$을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오.

Exercise

17. 정의역이 $X=\{x\,|\,0\le x\le 2,\ x\text{는 실수}\}$인 함수 $f(x)=[x]$의 치역의 원소의 개수는?

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

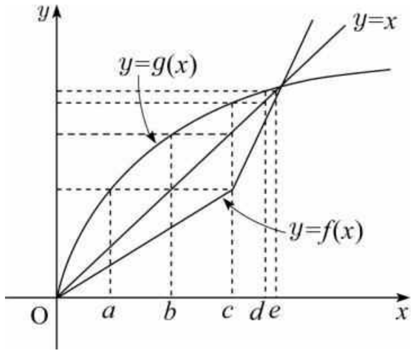
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

18. 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f(2)=10$, $f^{-1}(4)=-1$일 때, $f(ab)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 10　　② 20　　③ 30
④ 40　　⑤ 50

19. 집합 $X=\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일 대응일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $f(ab)$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

20. 그림은 $x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. $g^{-1}(f(c))$의 값은? (단, g는 역함수가 존재하는 함수이다.)



① a　② b　③ c
④ d　⑤ e

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x-[x]$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(1.5)=0.5$

ㄴ. 함수 f의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y < 1\}$이다.

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x-1)=f(x)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 음이 아닌 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 음이 아닌 정수 n과 $0 \le k \le 9$인 정수 k에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$
(나) $f(10n+k)=f(n)+k$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

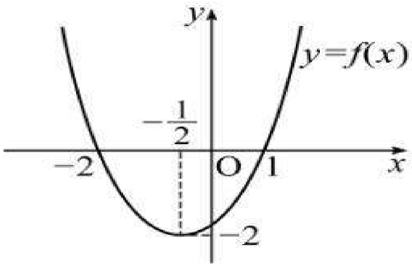
ㄱ. $f(100)=1$
ㄴ. $(f \circ f)(999)=9$
ㄷ. $f(n)$이 6의 배수이면 n은 6의 배수이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 그림은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 방정식 $f(f(x))=0$의 서로 다른 세 실근의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ 0 ⑤ 1



24. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수를 $f(x)$라 하자. $f(2)=4$일 때, $f(1)+f(3)$의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

25. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f는 일대일대응이다. (나) 집합 X의 모든 원소 a에 대하여 $f(a)\neq a$이다.

$f(1)+f(4)=7$일 때, $f(1)+f^{-1}(1)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

26. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+6 & (x<0) \\ x+6 & (x \geq 0) \end{cases}, \quad g(x)=x+10$$

에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y \geq 0\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

27. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x=1,2) \\ x+a & (x=3,4) \end{cases} \quad (a\text{는 상수}).$$

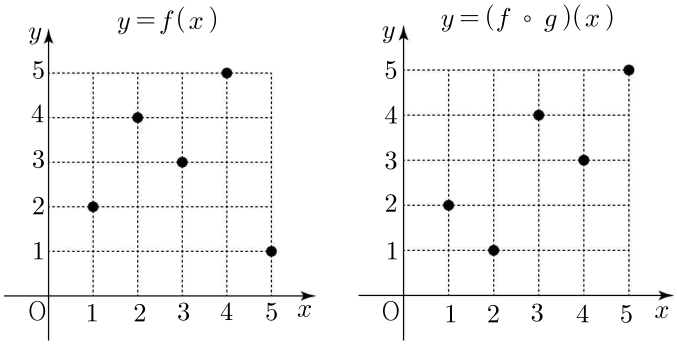
이고, 함수 f의 역함수 g가 존재한다. $g^1(x)=g(x)$, $g^{n+1}(x)=g\left(g^n(x)\right)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$라 할 때, $a+g^{10}(2)+g^{11}(2)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

28. 일차함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=4x+7$을 만족시킬 때, $f^{-1}(11)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

29. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=(f\circ g)(x)$의 그래프가 각각 그림과 같을 때, $g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

30. 일차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수

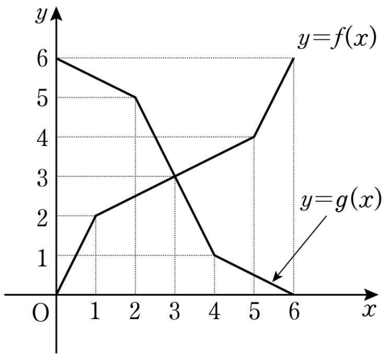
$$y=f(2x+3)$$

의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 나타내면 $y=ag(x)+b$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

31. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 6\}$인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 일대일 대응이고 그래프는 그림과 같다.



등식 $f^{-1}(a)=g(b)$를 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는?
(단, 두 함수의 그래프는 각각 세 선분으로 되어 있다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[정답 및 해설]

러셀 블루 tv

MEGASTUDY - 러셀

1. ⑤

함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$f(2)=2a+b=4$ $\cdots$㉠

함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 점 $(4, 2)$를 지난다. 즉,

$f(4)=4a+b=2$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=6$이므로 $a+b=-1+6=5$

2. ④

함수 $f : X \to X$의 공역은 X이므로 $A=X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$f(-2)=(-2)^2-2=2$, $f(-1)=(-1)^2-2=-1$

$f(0)=0^2-2=-2$, $f(1)=1^2-2=-1$,

$f(2)=2^2-2=2$이므로 함수 f의 치역은

$B=\{-2, -1, 2\}$

따라서 $A-B=\{0, 1\}$

3. ①

두 합성함수 $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$의 식을 각각 구하면

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$

$=(2x+1)^2-1=4x^2+4x$

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)$

$=2(x^2-1)+1=2x^2-1$

따라서 방정식 $(g \circ f)(x)=(f \circ g)(x)$의 실근은 이차방정식 $4x^2+4x=2x^2-1$, 즉 $2x^2+4x+1=0$의 실근과 같다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\times1=2>0$

이므로 위의 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 모든 실근의 합은

$-\frac{4}{2}=-2$

4. 61

(i) $(f \circ g)(2)=f(g(2))$

$=f(2^2+6)=f(10)$

$=3\times10+3=33$

(ii) $f(2)=3\times2+3=9$이므로

$(h \circ f)(2)=h(f(2))=h(9)$

이다.

$(f \circ h)(x)=g(x)$의 양변에 $x=9$을 대입하면

$(f \circ h)(9)=g(9)$

$f(h(9))=87$

$f(x)=3x+3$이므로

$3h(9)+3=87$, $h(9)=28$

(i), (ii)에서

$(f \circ g)(2)+(h \circ f)(2)=33+28=61$

[다른풀이]

$f(x)=3x+3$, $g(x)=x^2+6$이므로

$(f \circ h)(x)=g(x)$에서

$3h(x)+3=x^2+6$, $h(x)=\frac{1}{3}x^2+1$

따라서

$(h \circ f)(2)=h(9)=\frac{1}{3}\times9^2+1=27+1=28$

5. ②

역함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(10, a)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(a, 10)$을 지난다.

따라서 $10=3a+4$이므로 $a=2$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지나므로

$a=3b+4$, $2=3b+4$, $b=-\frac{2}{3}$

따라서 $a+b=2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

6. 6

함수 $f(x)=a-x$의 치역은 $\{a-2, a-3, a-4\}$이다.

이때 $a-4<a-3<a-2$이므로

치역이 정의역 $X=\{2, 3, 4\}$와 같으려면

$a-2=4$, $a-3=3$, $a-4=2$

이어야 한다.

따라서 $a=6$

7. ②

$f(1)=2$이므로

$(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=1$

$f(3)=4$이므로 $f^{-1}(4)=3$

따라서 $(f \circ f)(1)+f^{-1}(4)=1+3=4$

8. 9

조건 '$f(3)\neq3$ 또는 $f(4)=4$'의 부정은

'$f(3)=3$이고 $f(4)\neq4$'이므로

$B^C=\{f\,|\,f(3)=3$이고 $f(4)\neq4\}$

$A\cap B^C=\{f\,|\,f(1)=1$이고 $f(2)\neq2$이고 $f(3)=3$이고 $f(4)\neq4\}$

이므로 집합 $A\cap B^C$에 속하는 함수 f의 개수는

$1\times3\times1\times3=9$

따라서 $n(A\cap B^C)=9$

9. 12

(i) $f(x)>0$일 때

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+k)=2(x^2+k)-4=6$

에서 $x^2+k=5$이므로

$x^2=5-k$ $\cdots㉠$

(ii) $f(x)\le 0$일 때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+k)$

$=-2(x^2+k)+4=6$

에서 $x^2+k=-1$이므로

$x^2=-1-k$ $\cdots㉡$

이때 $5-k>-1-k$이므로 두 이차방정식 ㉠ 또는 ㉡을 만족시키는 실수 x의 개수가 3이려면 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고 ㉡은 중근을 가져야 한다.

㉡이 중근을 가질 조건은 $-1-k=0$, 즉 $k=-1$이다.

이때 ㉠에서 $x^2=6$이므로 $x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$이고, ㉡에서 $x^2=0$이므로 $x=0$(중근)이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근은 $-\sqrt{6}$, 0, $\sqrt{6}$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=6+0+6=12$

10. ④

조건 (가)에서 $f(3)=g(3)$이고

$f(3)\in Y$, $g(3)\in Z$, $Y\cap Z=\{5, 6\}$이므로

$f(3)=g(3)=5$ 또는 $f(3)=g(3)=6$

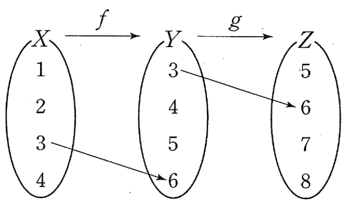
(i) $f(3)=g(3)=5$일 때

조건 (나)에서 $g(f(1))=5$이고 함수 $g(x)$는 일대일 대응이므로

$f(1)=3$

그런데 조건 (다)에서 $f(1)\ne 3$이므로 모순이다.

(ii) $f(3)=g(3)=6$일 때([그림1])



[그림 1]

조건 (다)에서 $f^{-1}(3)>1$이므로

$f(2)=3$ 또는 $f(4)=3$ $\cdots㉠$

한편 조건 (라)에서 $f(4)=g(f(4))-2$이므로

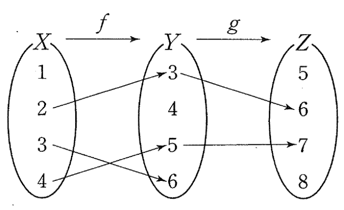
$f(4)=p$라 하면 $p=g(p)-2$

따라서 $g(p)=p+2$ $\cdots㉡$

이때 $p\in Y$이고 $p+2\in Z$이어야 하므로 [그림1]에서 ㉡을 만족시키는 p의 값은 5뿐이다.

따라서 $f(4)=5$

㉠, ㉡에서 $f(2)=3$, $g(5)=7$



[그림 2]

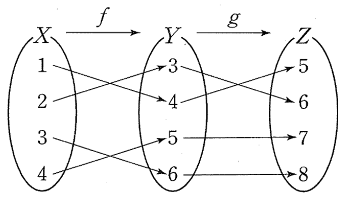
[그림2]에서 함수 f는 일대일 대응이므로

$f(1)=4$ $\cdots㉢$

조건 (나)에서 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=5$이므로 ㉢에서

$g(4)=5$

이때 함수 g는 일대일 대응이므로 $g(6)=8$



[그림 3]

이상에서 두 함수 f, g는 [그림3]과 같다.

따라서 $f(4)+g(6)=5+8=13$

11. ①

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이다.

따라서 $g(2)=g(f(1))=5$이다.

12. ②

$f(x)=x+2$ $g(x)=3x-2$

$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=(g\circ f)^{-1}(x)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(x+2)$

$=3(x+2)-2$

$=3x+4$

$y=3x+4$의 역함수를 구하면

$x=3y+4$

$y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$

이므로 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$

따라서 $a+b=-1$

13. ②

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$(g\circ g)(\sqrt{2})=g(g\sqrt{2}))=g(2)=4$

$\therefore (f\circ f)(2)\times(g\circ g)(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\times 4=2$

14. ④

역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응이다.

ㄱ은 상수함수이므로 일대일 대응이 아니고, ㄴ, ㄷ은 일대일 대응이다.

15. ②

$((f\circ g)\circ h)(-2)=(f\circ(g\circ h))(-2)$

$(g \circ h)(-2)=4+6-5=5$
$(f \circ (g \circ h))(-2)=f(5)$
$\quad\quad\quad\quad\quad =5a+12$
$5a+12=27$
$\therefore a=3$

16. 12

X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$이 대응할 수 있는 경우의 수가 각각 $2,\ 3,\ 2$가지이다.
$\therefore 2\times3\times2=12$

17. ③

ⅰ) $0 \le x < 1$인 경우 $f(x)=0$
ⅱ) $1 \le x < 2$인 경우 $f(x)=1$
ⅲ) $x=2$인 경우 $f(x)=2$
그러므로 $f(x)$의 치역의 원소의 개수는 3개다

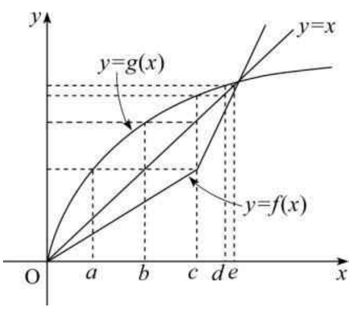
18. ③

$f(2)=10$이므로 $f(2)=2a+b=10$
$f^{-1}(4)=-1$에서 $f(-1)=4$
$f(-1)=-a+b=4$이므로 $a=2,\ b=6$
따라서 $f(x)=2x+6$
$f(ab)=f(12)=24+6=30$

19. 0

$X=\{x|-2 \le x \le 1\}$
X에서 X로의 함수 $f(x)=ax+b\ (a>0)$가 일대일대응이 되려면
$f(-2)=-2,\ f(1)=1$
$f(-2)=-2a+b=-2$
$f(1)=a+b=1$
이므로 $a=1,\ b=0$
$f(x)=x$
$f(ab)=f(0)=0$

20. ①



위의 그래프에서 $f(c)=b$이므로
$\quad g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$
$g^{-1}(b)=k$라 하면 $g(k)=b$이다.
주어진 그래프에서 $g(a)=b$이므로 $k=a$
즉, $g^{-1}(b)=a$이다.

21. ⑤

$[x]$는 x의 정수부분이다.
$f(x)=x-[x]$
x에서 x의 정수부분 $[x]$를 뺀 것이 $f(x)$이므로 $f(x)$는 x의 소수부분이다.
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

22. ③

$n=a_m\times10^m+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$일 때,
$f\left(a_m\times10^m+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0\right)$
$=f\left(a_m\times10^{m-1}+\cdots+a_2\times10+a_1\right)+a_0$
$=f\left(a_m\times10^{m-2}+\cdots+a_2\right)+a_1+a_0$
$\vdots$
$=a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0$
$\therefore f(n)=a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0$
ㄱ. $f(100)=1$ (참)
ㄴ. $(f \circ f)(999)=f(27)=9$ (참)
ㄷ. (반례) $n=15$일 때, $f(n)=6$이지만 n은 6의 배수가 아니다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

23. ②

$f(x)=0$의 두 근이 -2와 1이므로
$f(f(x))=0$에서 $f(x)=-2$또는 $f(x)=1$
ⅰ) $f(x)=-2$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$
ⅱ) $f(x)=1$에서 $x=-\dfrac{1}{2}+a,\ x=-\dfrac{1}{2}-a$
따라서 모든 근의 합은
$-\dfrac{1}{2}+(-\dfrac{1}{2}+a)+(-\dfrac{1}{2}-a)=-\dfrac{3}{2}$

24. ③

함수 $f(x)$가 일대일함수이고 $f(2)=4$이므로 4가 아닌 집합 Y의 서로 다른 두 원소 $a,\ b$에 대하여 $f(1)=a,\ f(3)=b$로 놓을 수 있다.
$f(1)+f(3)$의 최댓값은 $a+b$의 최댓값과 같다.
그런데 $a=2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=2$일 때 $a+b$가 최대이다.
따라서 $f(1)+f(3)$의 최댓값은 5이다.

25. ③

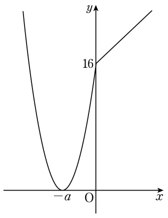
조건 (가)에 의하여 함수 f의 치역은 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고

조건 (나)와 $f(1)+f(4)=7$에 의하여
$f(1)=4,\ f(2)=1,\ f(3)=2,\ f(4)=3$
따라서 $f(1)+f^{-1}(1)=4+2=6$

26. 4

합성함수
$(g \circ f)(x)=\begin{cases} x^2+2ax+16 & (x<0) \\ x+16 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이다.

$a \leq 0$이면
합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y \mid y \geq 16\}$이므로 문제의 치역과 달라 $a>0$이어야 한다.
$y=x^2+2ax+16$의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로
합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y \mid y \geq 0\}$이기 위해서는 꼭짓점의 y좌표가 0이다.



$y=x^2+2ax+16=(x+a)^2+16-a^2$ 에서
$16-a^2=0,\ a=\pm 4$
$a>0$이므로 $a=4$

27. ③

$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3+a,\ f(4)=4+a$이고 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
그러므로 $a=-1$
역함수 $g(x)$는
$g(1)=1,\ g(2)=3,\ g(3)=4,\ g(4)=2$이므로
$g^3(x)=g^6(x)=g^9(x)=x$이다.
$\therefore\ g^{10}(x)=g(g^9(x))=g(x),$
$g^{11}(x)=g(g^{10}(x))=g(g(x))=g^2(x)$
따라서 $a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=a+g(2)+g^2(2)$
$=-1+3+4=6$

28. ③

$f(2x+1)=4x+7$이므로 역함수
$f^{-1}(4x+7)=2x+1$이다.
따라서 $x=1$일 때, $f^{-1}(11)=3$

29. ⑤

$f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$
이와 같은 방법으로
$g(2)=5,\ g(3)=2,\ g(4)=3,\ g(5)=4$
$g(2)+(g \circ f)^{-1}(1)=5+f^{-1}(g^{-1}(1))=10$

30. ④

$y=f(2x+3)$에서 x, y를 서로 바꾸어 쓰면
$x=f(2y+3)$이다.
그러므로
$2y+3=g(x)$
역함수는 $y=\dfrac{1}{2}g(x)-\dfrac{3}{2}$ 이다.
따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$ 이다.
$\therefore a+b=-1$

31. ⑤

등식 $f^{-1}(a)=g(b)$에서 $f(g(b))=a$이고 a가 자연수이므로 가능한 $g(b)$의 값은 $\dfrac{1}{2}$, 1, 3, 5, $\dfrac{11}{2}$, 6이다.
$g(b)=\dfrac{1}{2}$에서 $b=5$이고 $f(g(b))=1$
$g(b)=1$에서 $b=4$이고 $f(g(b))=2$
$g(b)=3$에서 $b=3$이고 $f(g(b))=3$
$g(b)=5$에서 $b=2$이고 $f(g(b))=4$
$g(b)=\dfrac{11}{2}$ 에서 $b=1$이고 $f(g(b))=5$
$g(b)=6$에서 $b=0$이고 $f(g(b))=6$
이므로 등식 $f(g(b))=a$를 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍은
$(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$
의 5개다.