גיאומטריה המעגל 5 יחידות

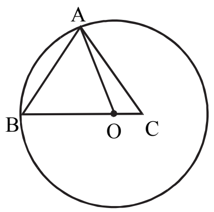
גיאומטריה – מעגל

הגדרת המעגל

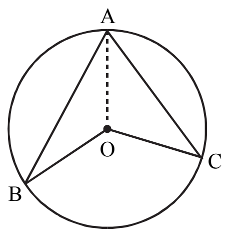
הגדרה: אוסף כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה נקרא מעגל. הנקודה הקבועה היא מרכז המעגל.

תרגילים

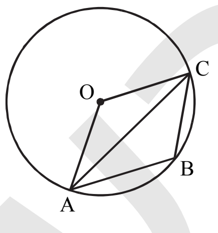
1. בציור מתואר מעגל שמרכזו O נמצא על הקטע BC.
נתון: $AB = AC$, $\angle ACB = 58^\circ$.
חשב את הזווית CAO.



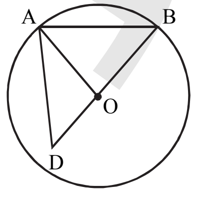
2. הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O.
נתון: $\angle ABO = 31^\circ$, $\angle BAC = 68^\circ$.
א. חשב את הזווית CAO.
ב. חשב את הזווית BCO.



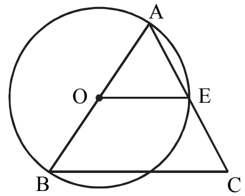
3. הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O.
נתון: $OC \parallel AB$.
הוכח: AC חוצה את הזווית OAB.



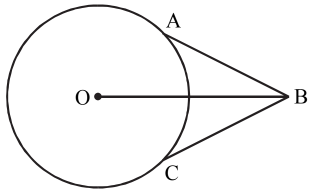
4. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו בנקודה O.
הנקודה D נמצאת על המשך הרדיוס OB.
נתון: $\angle AOB = \angle BAD$.
הוכח: $AB = AD$.



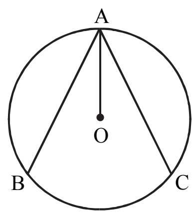
5. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O .
הנקודה E נמצאת על המעגל.
נתון: $OE \parallel BC$.
א. הוכח: $AE = EC$.
ב. הוכח: $AB = BC$.



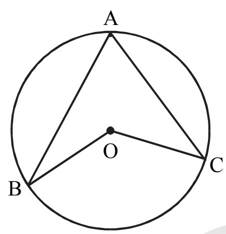
6. הנקודות A ו- C נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O .
נתון: $AB = CB$.
הוכח: הקטע BO חוצה את הזווית ABC .



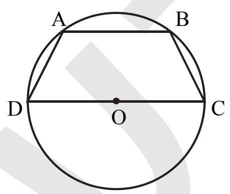
7. הנקודות A , B ו- C נמצאות
על מעגל שמרכזו בנקודה O .
נתון: $AB = AC$.
הוכח: $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO$.



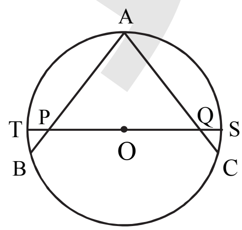
8. הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O .
נתון: $\sphericalangle ABO + \sphericalangle ACO = 58^\circ$
חשב את הזווית BAC .



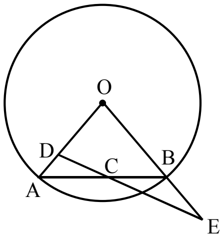
9. הנקודות A , B , C ו- D נמצאות על מעגל
שמרכזו O כך ש- DC הוא קוטר במעגל.
נתון: $AD = BC$.
הוכח: $AB \parallel DC$.



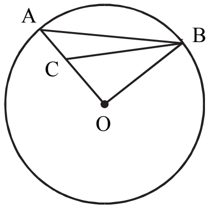
10. AB ו- AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O .
הקוטר TS חותך את המיתרים AB ו- AC
בנקודות P ו- Q בהתאמה.
נתון: $AP = AQ$, $OP = OQ$.
הוכח: $AB = AC$.



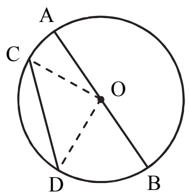
11. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O .
D נקודה על הרדיוס AO ו- E
נקודה על המשך הרדיוס OB .
נתון : $\sphericalangle DOE = 3\sphericalangle BCE$.
א. הוכח : $BC = BE$.
ב. הוכח : $0^\circ < \sphericalangle DEO < 45^\circ$.



12. הנקודות A ו- B נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O .
C היא נקודה על הרדיוס OA .
הוכח : $AC < BC$.



13. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O .
CD הוא מיתר במעגל.
הוכח : $AB > CD$.



תשובות: **1.** 6° . **2.** א. 37° . ב. 22° . **8.** 58° .

זווית מרכזית, קשתות, מיתרים

הגדרה: זווית שקדקודה נמצא במרכז המעגל ושוקיה הם רדיוסים במעגל נקראת זווית מרכזית.

משפט: במעגל, זוויות מרכזיות שוות נשענות על קשתות שוות,
ולהיפך: על קשתות שוות נשענות זוויות מרכזיות שוות.

משפט: במעגל, זוויות מרכזיות שוות נשענות על מיתרים שווים,
ולהיפך: למיתרים שווים מתאימות זוויות מרכזיות שוות.

משפט: במעגל, למיתרים שווים מתאימות קשתות שוות,
ולהיפך: על קשתות שוות נשענים מיתרים שווים.

משפט: לזוויות מרכזיות שונות מתאימות קשתות שונות, כך שלזווית המרכזית הגדולה מבין השתיים מתאימה הקשת הגדולה מבין השתיים, ולהיפך.

14. מצא את גודלה של קשת במעלות אם ידוע שהיא מהווה:

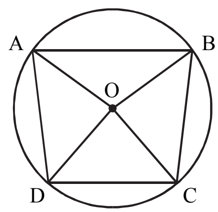
א. $\frac{1}{8}$ מהיקף המעגל. ב. $\frac{7}{10}$ מהיקף המעגל. ג. $\frac{2}{5}$ מהיקף המעגל.

15. מצא איזה חלק מהמעגל מהווה קשת:

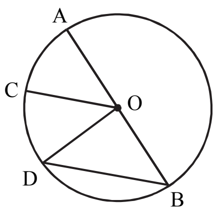
א. שגודלה 60° . ב. שגודלה 225° . ג. שגודלה 288° .

16. מחלקים מעגל ל- 3 קשתות שהיחס בין אורכיהן הוא $1:3:4$.
מהו גודלה של כל קשת במעלות?

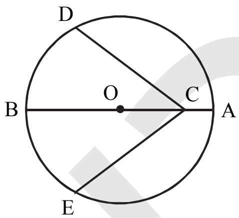
17. הנקודות A , B , C ו- D נמצאות
על מעגל שמרכזו בנקודה O .
נתון: $\overset{\frown}{AB} = 132^\circ$, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BC}$.
א. חשב את הזווית AOD .
ב. חשב את הזווית OCD .
ג. הוכח: $AB \parallel DC$.



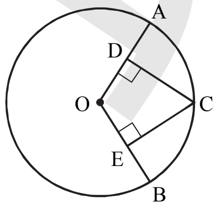
18. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O .
הנקודות C ו- D נמצאות על הקשת AB .
נתון: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DC}$.
הוכח: $CO \parallel DB$.



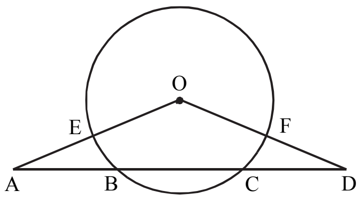
19. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
C היא נקודה על הרדיוס OA .
D ו- E הן נקודות על המעגל
כך ש- $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BE}$ (ראה ציור).
הוכח: $CD = CE$.



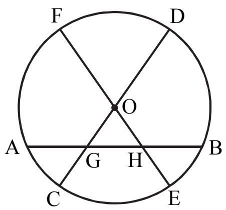
20. מנקודה C הנמצאת על הקשת AB
של מעגל O מורידים אנכים CD
ו- CE לרדיוסים OA ו- OB .
נתון: $CD = CE$.
הוכח: הנקודה C היא אמצע הקשת AB .



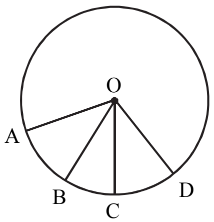
.21 הקטע AD חותך ממעגל שמרכזו O
מיתר BC. נתון: $OA = OD$.
הקטעים AO ו- DO חותכים את המעגל
בנקודות E ו- F בהתאמה.
א. הוכח: $AB = CD$.
ב. הוכח: $BE = CF$.



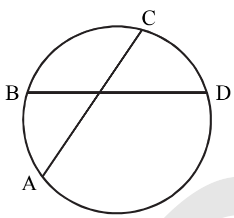
.22 המיתר AB במעגל חותך את הקוטר CD
בנקודה G, ואת הקוטר FE בנקודה H.
נתון: $AG = BH$.
א. הוכח: $GC = HE$.
ב. הוכח: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$.



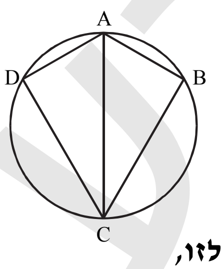
.23 הנקודות A, B, C ו- D נמצאות
על מעגל שמרכזו בנקודה O.
נתון: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$.
א. הוכח: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.
ב. הוכח: $AC = BD$.



.24 הנקודות A, B, C ו- D
נמצאות על מעגל.
נתון: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.
הוכח: $AC = BD$.



.25 במרובע $ABCD$ האלכסון AC
חוצה את הזוויות BAD ו- BCD.
הוכח: AC הוא קוטר במעגל.



.26 הוכח את המשפט: **אם שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אז המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.**

.27 הוכח את המשפט: **אם שני מיתרים שווים זה לזה, אז הזוויות המרכזיות המתאימות להם שוות זו לזו.**

28. הוכח את המשפט: **אם שתי קשתות שוות זה לזו, אז המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.**

29. הוכח את המשפט: **אם שני מיתרים שווים זה לזה, אז הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.**

30. הוכח את המשפט: **אם קשת אחת במעגל גדולה יותר מקשת שנייה, אז הזווית המרכזית המתאימה לקשת האחת גדולה יותר מהזווית המרכזית המתאימה לקשת השנייה, ולהיפך.**

תשובות: 14. א. 45°. ב. 252°. ג. 144°. **15.** א. $\frac{1}{6}$. ב. $\frac{5}{8}$. ג. $\frac{4}{5}$.
16. 45°, 135°, 180°. **17.** א. 76°. ב. 52°.

האנך ממרכז המעגל למיתר

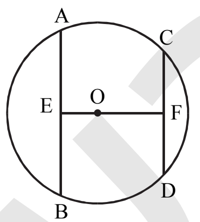
משפט: אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל – חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.

משפט: קטע המחבר את מרכז המעגל עם אמצע מיתר – מאונך למיתר.

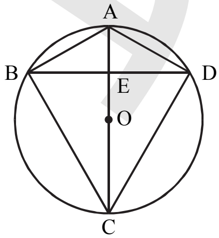
משפט: קטע ממרכז המעגל החוצה זווית מרכזית – חוצה את המיתר שעליו נשענת הזווית ומאונך לו.

משפט: אנך אמצעי למיתר במעגל עובר דרך מרכז המעגל.

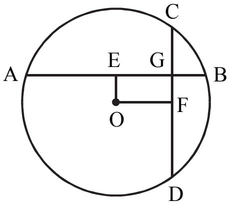
31. AB ו- CD הם מיתרים במעגל שמרכזו בנקודה O. הנקודות E ו- F הן אמצעי המיתרים AB ו- CD בהתאמה, כך שהקטע EF נמצא על קו ישר ועובר דרך הנקודה O. הוכח: $AB \parallel DC$.



32. AC הוא קוטר ו- BD הוא מיתר במעגל שמרכזו בנקודה O. נתון: $AC \perp BD$.
א. הוכח: $BC = DC$.
ב. הוכח: $AB = AD$.
ג. האם בהכרח $AE = OE$?



.33 AB ו- CD הם מיתרים במעגל O המאונכים זה לזה. הנקודות E ו- F הן, בהתאמה, אמצעי המיתרים AB ו- CD.



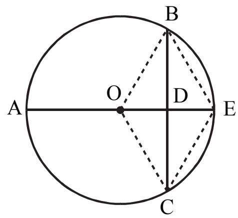
א. הוכח שהמרובע OEGF הוא מלבן.

ב. נתון: $AB = 11$ ס"מ, $CD = 9$ ס"מ, $BG = 2$ ס"מ, $OE = 1.5$ ס"מ.

(1) חשב את אורך הקטע OF.

(2) חשב את מרחק הנקודה D מהמיתר AB.

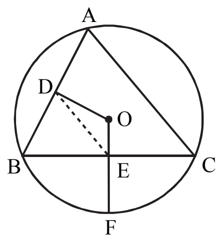
.34 AE הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O. BC הוא מיתר החוצה את הרדיוס OE בנקודה D ומאונך לו.



א. הוכח שהמרובע BOCE הוא מעוין וחשב את זוויותיו.

ב. איזה חלק מהווה הקשת BC מהיקף המעגל?

.35 הנקודות A, B ו- C נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O.

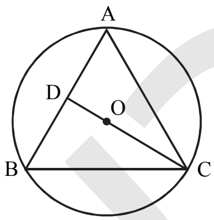


נתון: $OD \perp AB$, $DE \parallel AC$.

א. הוכח: $OE \perp BC$.

ב. נתון: $EF = 5$ ס"מ וקוטר המעגל הוא 16 ס"מ. חשב את מרחק הנקודה O מהמיתר BC.

.36 AB ו- AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו בנקודה O.

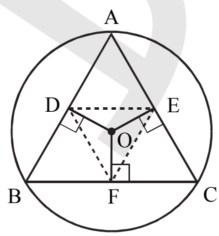


הנקודה D היא אמצע המיתר AB.

הקטע DC עובר דרך נקודה O.

הוכח: המשולש ABC הוא שווה-צלעות.

.37 המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל שמרכזו בנקודה O.

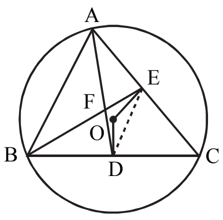


נתון: $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, $OF \perp BC$.

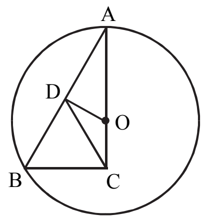
א. הוכח: המשולש DEF הוא שווה-צלעות.

ב. הוכח: היקף המשולש ABC גדול פי 2 מהיקף המשולש DEF.

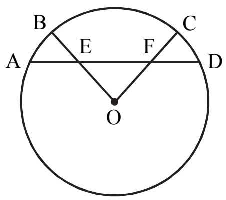
38. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו בנקודה O.
הנקודות D ו- E נמצאות על המיתרים BC ו- AC.
נתון: $OD \perp BC$, $OE \perp AC$.
הקטעים AD ו- BE נפגשים בנקודה F.
א. הוכח: $BF = 2EF$.
ב. הוכח: $AF = \frac{2}{3}AD$.



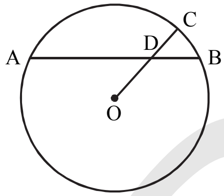
39. הנקודות A ו- B נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O.
נתון: $AC \perp BC$, $AD = DB$.
א. הוכח: $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BCD$.
ב. נתון גם $OC = OD$. חשב את הזווית A.



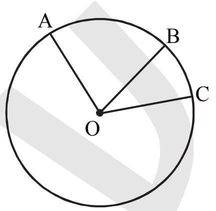
40. הנקודות A , B , C ו- D נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O. הרדיוסים OB ו- OC
חותכים את המיתר AD בנקודות E ו- F.
נתון: $AE = FD$.
א. הוכח: $OE = OF$.
ב. הוכח: $AB = CD$.



41. הנקודה C נמצאת על הקשת $\overset{\frown}{AB}$
של מעגל שמרכזו O.
המיתר AB והרדיוס OC נחתכים
בנקודה D. נתון: $AD > BD$.
הוכח: $\overset{\frown}{AC} > \overset{\frown}{BC}$.



42. הנקודות A , B ו- C נמצאות
על מעגל שמרכזו O.
נתון: $\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \overset{\frown}{BC}$.
הוכח: $AB < 2 \cdot BC$.



43. הוכח את המשפט: **האנך ממרכז המעגל למיתר – חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את קשת המתאימה למיתר.**

44. הוכח את המשפט: **קטע המחבר את מרכז המעגל עם אמצע מיתר – מאונך למיתר.**

45. הוכח את המשפט: **קטע ממרכז המעגל החוצה זווית מרכזית – חוצה את המיתר שעליה נשענת הזווית ומאונך לו.**

46. הוכח את המשפט: **אנך אמצעי למיתר במעגל עובר דרך מרכז המעגל.**

תשובות: 32. ג. לא. **33.** ב. **(1)** 3.5 ס״מ. **(2)** 6 ס״מ.

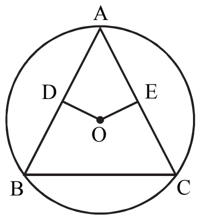
34. א. 120°, 60°, 120°, 60°. ב. $\frac{1}{3}$. **35.** ב. 3 ס״מ. **39.** ב. 30°.

מיתרים שווים ומרחקם ממרכז המעגל

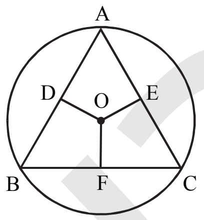
משפט: מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

משפט: מיתרים במעגל הנמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל, שווים זה לזה.

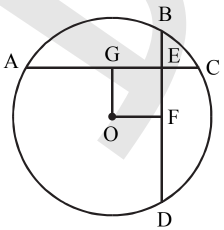
47. AB ו- AC הם מיתרים במעגל O.
הנקודות D ו- E הן אמצעי המיתרים AB ו- AC. נתון: $OD = OE$.
א. הוכח: המרובע ADOE הוא דלתון.
ב. הוכח: $\sphericalangle ODE = \frac{1}{2}\sphericalangle A$.



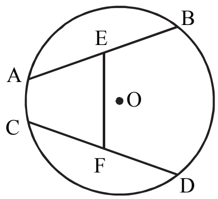
48. המשולש ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל שמרכזו בנקודה O.
הנקודות D, E ו- F הן בהתאמה אמצעי המיתרים AB, AC ו- BC.
א. הוכח: $OD = OE = OF$.
ב. הוכח: המרובע BDEF הוא מעוין.



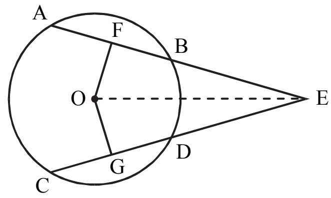
49. AC ו- BD הם שני מיתרים במעגל O הנחתכים בנקודה E. F ו- G הן נקודות על המיתרים BD ו- AC.
נתון: המרובע GEFO הוא ריבוע.
א. הוכח: $AB = DC$.
ב. הוכח: $BC \parallel AD$.



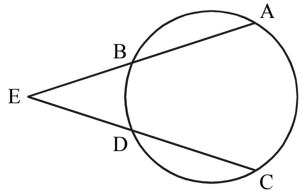
50. AB ו- DC הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O. E ו- F הן אמצעי המיתרים AB ו- CD בהתאמה.
נתון: $\sphericalangle AEF = \sphericalangle CFE$.
הוכח: $AB = DC$.



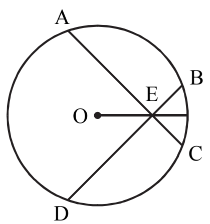
51. המשכי המיתרים AB ו- CD של מעגל שמרכזו O נפגשים בנקודה E.
נתון: $AB = CD$, $OF \perp AB$, $OG \perp CD$.
א. הוכח: $FE = GE$.
ב. הוכח: $BD \parallel FG$.



52. המשכי המיתרים AB ו- CD של מעגל נפגשים בנקודה E.
נתון: $AB = CD$.
הוכח: $AE = CE$.



53. AC ו- BD הם שני מיתרים שווים הנפגשים בנקודה E. O – מרכז המעגל.
א. הוכח: OE חוצה את הזווית AED.
ב. הוכח: המשך הקטע OE מאונך למיתר AD.



54. הוכח את המשפט: **מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.**

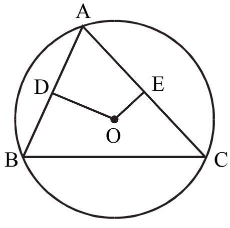
55. הוכח את המשפט: **מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו – שווים זה לזה.**

מרחקים של מיתרים ממרכז המעגל – אי-שוויונים

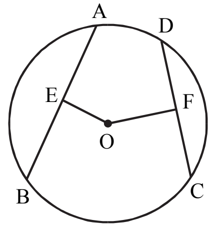
משפט: שני מיתרים במעגל שאינם שווים זה לזה, נמצאים במרחקים שונים ממרכז המעגל, כך שהמיתר הגדול מבין השניים קרוב יותר למרכז המעגל.

משפט: שני מיתרים שנמצאים במרחקים שונים ממרכז המעגל אינם שווים זה לזה. המיתר הקרוב יותר למרכז הוא המיתר הגדול מבין השניים.

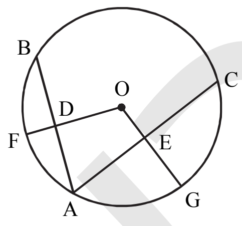
.56 הנקודות A, B ו- C נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O. הנקודות D ו- E הן אמצעי המיתרים AB ו- AC.
נתון: $OD > OE$.
הוכח: $\sphericalangle ACB < \sphericalangle ABC$.



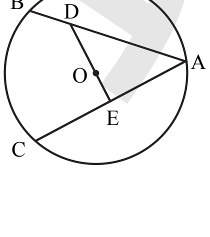
.57 AB ו- CD הם מיתרים במעגל שמרכזו בנקודה O. נתון: $AB > DC$,
$OE \perp AB$, $OF \perp DC$.
הוכח: $\sphericalangle AEF < \sphericalangle DFE$.



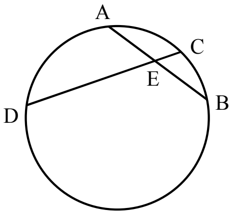
.58 הנקודות D ו- E הן אמצעי המיתרים AB ו- AC במעגל שמרכזו בנקודה O.
נתון: $DF < EG$.
הוכח: $BD < CE$.



.59 הנקודות D ו- E נמצאות על המיתרים AB ו- AC במעגל שמרכזו O.
נתון: $AB < AC$, $AE = CE$.
הנקודה O נמצאת על הקטע DE.
הוכח: $OD > OE$.



60 המיתר CD חוצה את המיתר AB בנקודה E .
נתון : DE > CE .
הוכח : AB < DC .



.61 הוכח את המשפט: **במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.**

.62 הוכח את המשפט : **במעגל, אם מיתר אחד גדול יותר ממיתר אחר, אז מרחקו ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של המיתר האחר.**

זווית היקפית

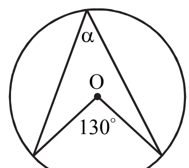
הגדרה – זווית שקדקודה נמצא על המעגל ושוקיה הם שני מיתרים במעגל נקראת זווית היקפית.

משפט: זווית היקפית במעגל שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.

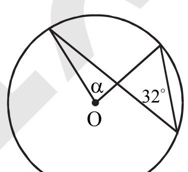
תרגילים

.1 מצא את הזווית α בכל אחד מהתרגילים הבאים (O – מרכז המעגל) :

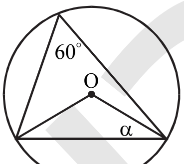
א.



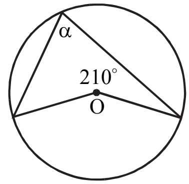
ב.



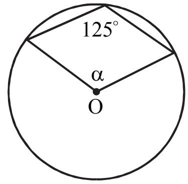
ג.



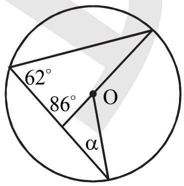
ד.



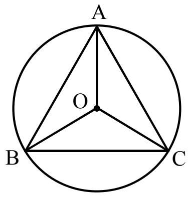
ה.



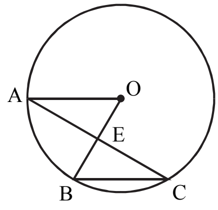
ו.



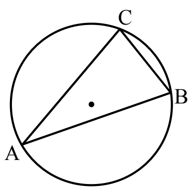
2. משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$
חסום במעגל שמרכזו O .
נתון : $\sphericalangle ABC = 65^\circ$.
חשב את זוויות המשולש BOC .



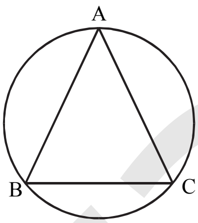
3. המיתר AC והרדיוס OB של מעגל
שמרכזו O נפגשים בנקודה E .
נתון : $\sphericalangle C = \alpha$, $\sphericalangle AEO = 75^\circ$,
$AO \parallel BC$. חשב את α .



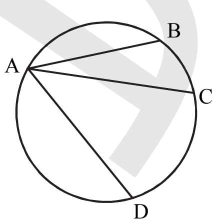
4. המשולש ABC חסום במעגל.
נתון : $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.
הוכח : אורך הצלע BC
שווה לרדיוס המעגל.

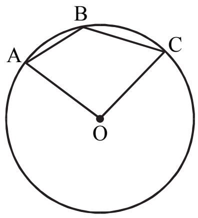


5. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים
$(AB = AC)$ החסום במעגל.
נתון : $\overset{\frown}{BC} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{AC}$.
חשב את זוויותיו של המשולש.

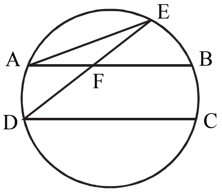


6. AB , AC ו- AD הם מיתרים במעגל.
הקשת $\overset{\frown}{BD}$ מהווה $\frac{7}{18}$ מהיקף המעגל
והקשת $\overset{\frown}{DC}$ גדולה ב- 60° מהקשת $\overset{\frown}{BC}$.
חשב את הזווית DAC .

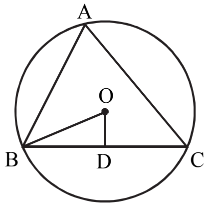




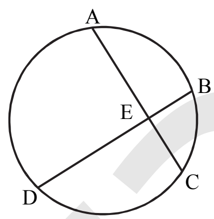
.7 הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O . נתון : $\sphericalangle AOC = \alpha$.
א. הבע באמצעות α את הזווית ABC .
ב. נתון : $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC$.
מצא את α .



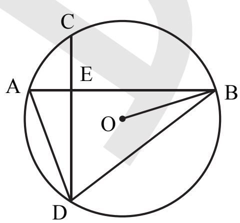
.8 AB ו- CD הם שני מיתרים
המקבילים זה לזה.
נתון : $AF = FE$.
הוכח : $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BC}$.



.9 הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O . הנקודה D
נמצאת על המיתר BC .
נתון : $OD \perp BC$.
א. הוכח : $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BOD$.
ב. נתון גם : $OD = \frac{1}{2}OB$. חשב את הזווית A .

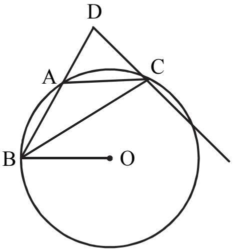


.10 המיתרים AC ו- BD נפגשים
בנקודה E .
נתון : $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC} = 180^\circ$.
הוכח : $AC \perp BD$.

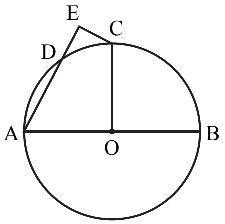


.11 המיתרים AB ו- CD של מעגל O
נחתכים בנקודה E .
נתון : $\sphericalangle ADC = \sphericalangle OBD$.
הוכח : $AB \perp DC$.

12. המשולש ABC חסום במעגל
שמרכזו בנקודה O .
D היא נקודה על המשך המיתר AB .
נתון : $\sphericalangle CBO = \sphericalangle ACD$.
הוכח : $AD \perp DC$.



13. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
C היא נקודה על המעגל כך ש- $OC \perp AB$.
E היא נקודה על המשך המיתר AD .
חשב את הזווית CDE .



14. הוכח את המשפט : **במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.**

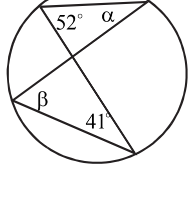
תשובות: 1. א. 65° . ב. 64° . ג. 30° . ד. 75° . ה. 110° . ו. 30° .
2. 40° , 40° , 100° . **3.** 35° . **5.** 45° , 67.5° , 67.5° . **6.** 50° . **7.** א. $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$.
ב. 120° . **9.** ב. 60° . **13.** 45° .

זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת

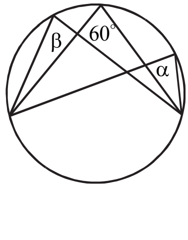
משפט: כל הזוויות ההיקפיות במעגל הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.

15. חשב את הזוויות α ו- β בכל אחד מהתרגילים הבאים :

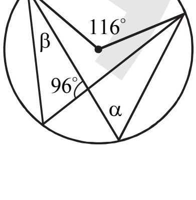
א.

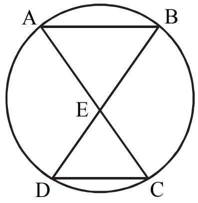


ב.

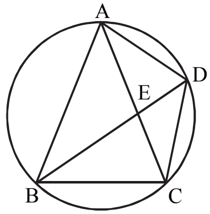


ג.

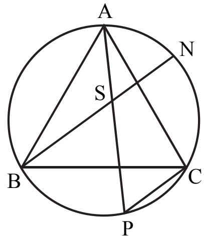




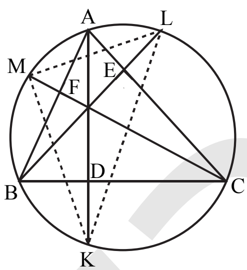
16. המיתרים AC ו- BD נפגשים
בנקודה E . נתון: $DE = CE$.
א. הוכח: $AE = BE$.
ב. הוכח: $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.



17. המיתרים AC ו- BD נפגשים
בנקודה E . נתון: $AD = DC$,
$\sphericalangle BCD = 3 \cdot \sphericalangle DAC$.
הוכח: המשולש ABC
הוא שווה-שוקיים.



18. ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל.
P ו- N הן נקודות על המעגל. BN ו- AP
נפגשים בנקודה S . נתון: $PC \parallel BN$.
א. הוכח: המשולש BSP הוא שווה-צלעות.
ב. הוכח: $AN = PC$.
ג. הוכח: המרובע SPCN הוא מקבילית.



19. המשולש ABC חסום במעגל.
AD , BE ו- CF הם גבהים במשולש.
המשכי הגבהים חותכים את המעגל
בנקודות K , L ו- M (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.
הבע באמצעות α ו- β את זוויותיו
של המשולש KLM .

20. הוכח את המשפט: **כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.**

תשובות: 15. א. $\alpha = 41^\circ$, $\beta = 52^\circ$. ב. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$. ג. $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 26^\circ$.
19. $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\beta$, $2\alpha + 2\beta - 180^\circ$.

זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות

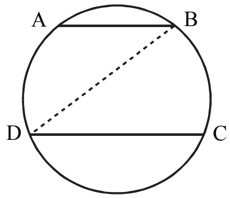
משפט: במעגל, לזוויות היקפיות במעגל שוות מתאימות קשתות שוות.

משפט: לקשתות שוות במעגל מתאימות זוויות היקפיות שוות.

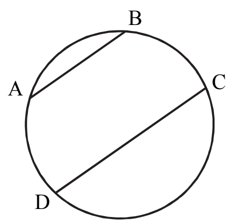
משפט: במעגל, לזוויות היקפיות שוות מתאימים מיתרים שווים.

משפט: למיתרים שווים במעגל מתאימות זוויות היקפיות שוות.

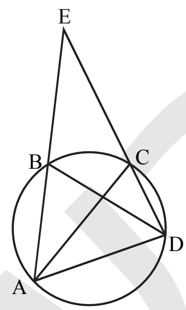
21. AB ו- CD הם מיתרים במעגל.
נתון: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$.
הוכח: $AB \parallel CD$.



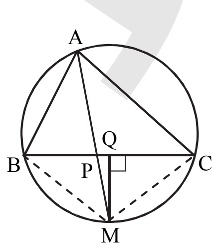
22. המיתרים AB ו- CD מקבילים זה לזה.
א. הוכח: $AD = BC$.
ב. איזה סוג מרובע יכול להיות המרובע ABCD ?

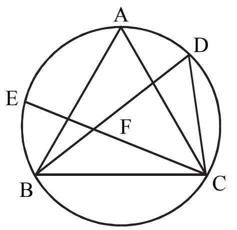


23. המשכי המיתרים AB ו- DC של מעגל נחתכים בנקודה E.
נתון: $BD = BE$.
א. הוכח: $AC = CE$.
ב. נתון: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DC}$.
הוכח: $AD = BD$.

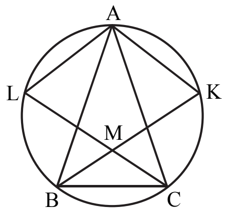


24. המשולש ABC חסום במעגל.
M היא נקודה על הקשת BC ו- Q היא נקודה על המיתר BC, כך ש- $BQ = CQ$, $MQ \perp BC$. הוכח: $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$.

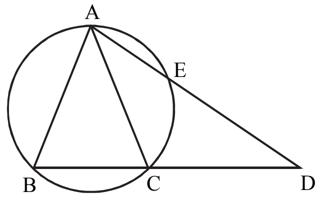




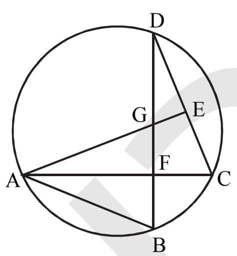
.25 המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל. הנקודות D ו- E נמצאות על היקף המעגל כך ש- $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DC}$.
BD ו- CE נחתכים בנקודה F .
הוכח : המשולש CDF הוא שווה-צלעות.



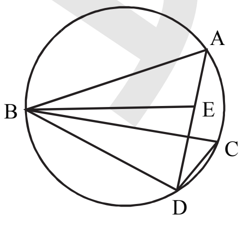
.26 משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום במעגל. חוצי זוויות הבסיס במשולש זה נפגשים בנקודה M , וחותכים את המעגל בנקודות K ו- L .
א. הוכח : $\overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{LA} = \overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{KC}$.
ב. הוכח : המרובע AKML הוא מעוין.



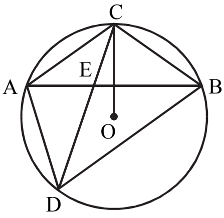
.27 המשולש ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$ החסום במעגל.
הנקודה E נמצאת באמצע הקשת AC (ראה ציור).
הוכח : $AC = CD$.



.28 המיתרים AC ו- BD נחתכים בנקודה F ומאונכים זה לזה. הנקודה E נמצאת על המיתר DC כך ש- $AE \perp DC$.
BD ו- AE נחתכים בנקודה G .
א. הוכח : $BF = GF$.
ב. המשך הקטע AE חותך את המעגל בנקודה K . הוכח : $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{KC}$.



.29 A , B , C ו- D הן נקודות על מעגל, כמתואר בציור. E היא נקודה על AD , כך ש- $AE = DC$. נתון : $AB = BC$.
א. הוכח : $\Delta ABE \cong \Delta CBD$.
ב. המשך הקטע BE חותך את המעגל בנקודה M . הוכח : $AM = DC$.



30. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O .
הרדיוס OC מאונך למיתר AB .
המיתרים AB ו- DC נפגשים בנקודה E .
הוכח : $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BED$.

31. הוכח את המשפט : **במעגל, לזוויות היקפיות שוות מתאימות קשתות שוות.**

32. הוכח את המשפט : **במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.**

33. הוכח את המשפט : **במעגל, זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים.**

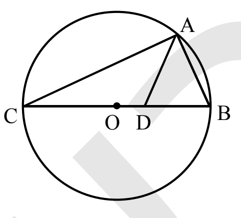
34. הוכח את המשפט : **על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות.**

תשובות: 22. טרפז שווה-שוקיים או מלבן.

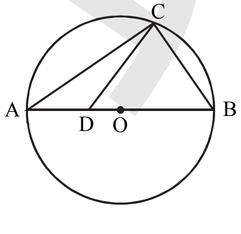
זווית היקפית הנשענת על קוטר

משפט: זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

משפט: אם זווית היקפית במעגל שווה ל- 90° , אז היא נשענת על קוטר.

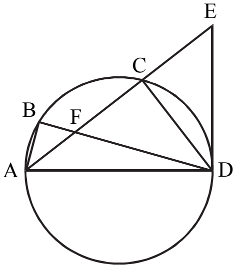


35. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O
כך ש- BC הוא קוטר במעגל.
D היא נקודה על הרדיוס OB .
נתון : $AD = AB$, $\sphericalangle ACB = 25^\circ$.
חשב את הזווית DAC .

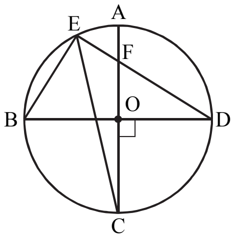


36. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O .
הנקודה D נמצאת על הרדיוס OA
והנקודה C נמצאת על המעגל.
נתון : $BC = DC$, והזווית ACD קטנה ב- 32°
מהזווית ABC .
חשב את הזווית ADC .

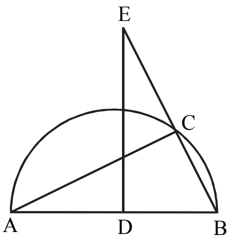
.37 הנקודות A, B, C ו- D נמצאות
על מעגל. AD הוא קוטר במעגל.
הנקודה E נמצאת על המשך
המיתר AC כך ש- $DE \perp AD$.
AC ו- BD נפגשים בנקודה F.
נתון: $CE = CF$. הוכח: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$.



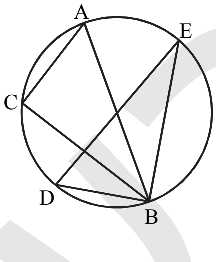
.38 AC ו- BD הם שני קטרים המאונכים
זה לזה במעגל שמרכזו O.
הנקודה E נמצאת על הקשת AB.
א. הוכח: $\sphericalangle BEC = \sphericalangle CED = \sphericalangle DEA$.
ב. הוכח: $\sphericalangle EBD = \sphericalangle AFE$.



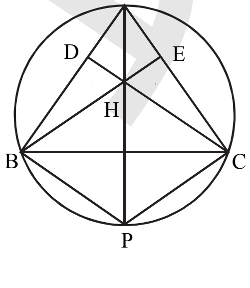
.39 המשולש ABC חסום בחצי מעגל כך ש- AB
הוא קוטר של חצי המעגל. מנקודה D הנמצאת
על הקוטר AB מעלים אנך החותך את המשך
המיתר BC בנקודה E. נתון: $AD = CE$.
א. הוכח: $AC = DE$.
ב. הוכח: $AB = BE$.
ג. נתון: $CE =$ 6 ס"מ, $BC =$ 4 ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל.



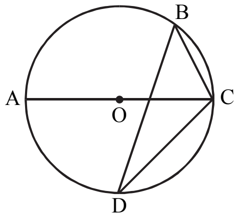
.40 AB הוא קוטר של מעגל.
הנקודות C, D ו- E נמצאות
על המעגל כך ש- $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DC}$.
הוכח: $DE \perp BC$.



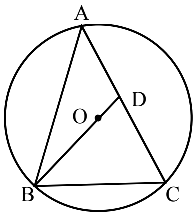
.41 המשולש ABC חסום במעגל. AP הוא קוטר
במעגל. BE הוא גובה לצלע AC ו- CD
הוא גובה לצלע AB. BE ו- CD נחתכים
בנקודה H שעל הקוטר AP.
א. הוכח: $DC \parallel BP$.
ב. הוכח שהמרובע BHCP הוא מעוין.



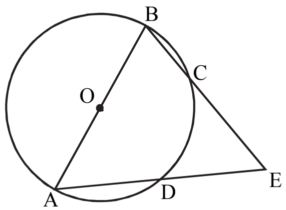
.42 AC הוא קוטר ו- BD הוא מיתר במעגל שמרכזו O .
נתון: $\sphericalangle ACB = 58^\circ$.
חשב את הזווית BDC .



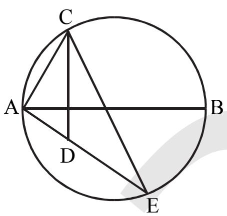
.43 המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו בנקודה O . נתון: $\sphericalangle ACB = \alpha$.
המשך הרדיוס OB חותך את AC בנקודה D .
הבע באמצעות α את הזווית ABD .



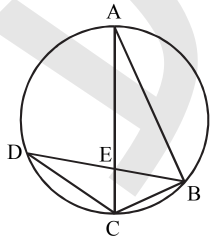
.44 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
המשכי המיתרים AD ו- BC נפגשים בנקודה E . נתון: $AD = DE$.
א. הוכח: $AB = BE$.
ב. הוכח: $DO \parallel BE$.



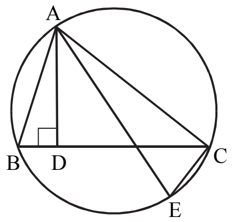
.45 AB הוא קוטר במעגל.
CE הוא מיתר במעגל. הנקודה D נמצאת על המיתר AE כך ש- $CD \perp AB$.
הוכח: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle AEC$.



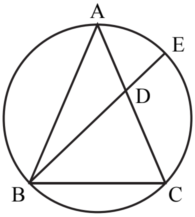
.46 המיתרים AC ו- BD נפגשים בנקודה E .
נתון: $\sphericalangle ACB = 56^\circ$, $\sphericalangle CDB = 34^\circ$.
א. הוכח: AC הוא קוטר במעגל.
ב. הוכח: $AD \perp DC$.



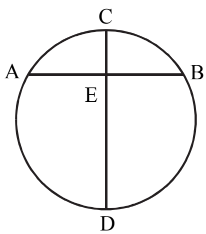
47. במעגל שבשרטוט חסום משולש ABC .
גובה המשולש AD יוצר זווית α
עם הצלע AB , ואילו המיתר AE
יוצר זווית α עם הצלע AC .
הוכח : AE הוא קוטר המעגל.



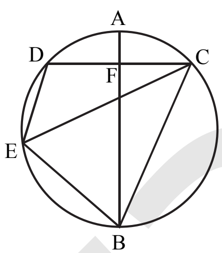
48. במעגל חסום משולש שווה-שוקיים ABC
$(AB = AC)$. מיתר העובר דרך קדקוד B
חותך את הצלע AC בנקודה D .
נתון : $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle BDC = 1\frac{1}{2}\alpha$.
הוכח : BE הוא קוטר במעגל.



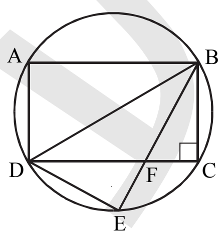
49. AB הוא מיתר במעגל. הנקודות C ו- D
נמצאות על היקף המעגל כך ש- CD
חוצה את המיתר AB בנקודה E ומאונך לו.
נתון : $\overset{\frown}{BD} = 2 \cdot \overset{\frown}{BC}$, $CE = k$.
הבע באמצעות k את אורך הקטע DE .



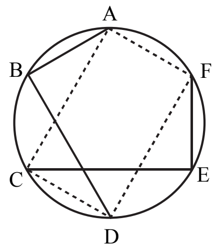
50. המיתרים AB ו- CD של מעגל נחתכים
בנקודה F ומאונכים זה לזה.
E נקודה על הקשת BD (ראה ציור).
נתון : $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC + \sphericalangle DCE$.
הוכח : AB הוא קוטר במעגל.



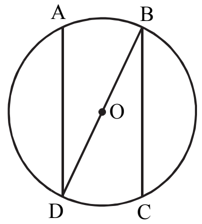
51. המלבן $ABCD$ חסום במעגל.
E היא נקודה על הקשת DC
כך ש- $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBD$.
א. הוכח : $AB = BE$.
ב. הוכח : $DE = BC$.



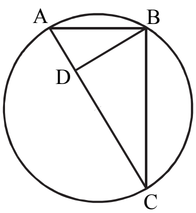
52. הנקודות A , B , C , D , E ו-F
נמצאות על היקפו של מעגל.
נתון: $AB \perp BD$, $CE \perp EF$.
הוכח: המרובע ACDF הוא מלבן.



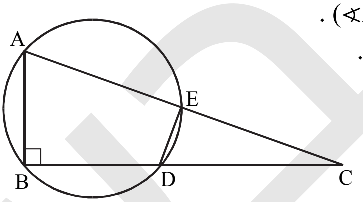
53. BD הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O .
AD ו- BC הם מיתרים שווים.
הוכח: הנקודות A , O ו- C
נמצאות על ישר אחד.



54. הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל.
הנקודה D נמצאת על המיתר AC .
נתון: $BD \perp AC$, $\sphericalangle A = \sphericalangle DBC$.
E נקודה על AC כך ש- $AE = BE$.
הוכח שנקודה E היא מרכז המעגל.



55. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$) .
הנקודות A , B , D ו- E נמצאות על מעגל.
א. הוכח: $DC > EC$.
ב. נתון: $AE = CE$, O – נקודה על AD
כך ש- $OE \parallel DC$.
הוכח שנקודה O היא מרכז המעגל.



56. הוכח את המשפט: **זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.**

57. הוכח את המשפט: **זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.**

תשובות: 35. 40° . **36.** 122° . **39.** ג. 5 ס"מ. **42.** 32° . **43.** $90^\circ - \alpha$. **49.** 3k .

זווית פנימית במעגל וזווית חיצונית למעגל

זווית פנימית במעגל

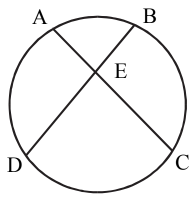
הגדרה: זווית הנוצרת בין שני מיתרים הנחתכים בתוך מעגל נקראת זווית פנימית במעגל.

משפט: זווית פנימית במעגל שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

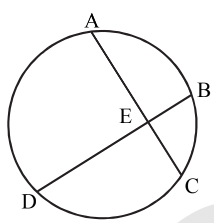
זווית חיצונית למעגל

הגדרה: זווית הנוצרת בין המשכי שני מיתרים הנפגשים מחוץ למעגל נקראת זווית חיצונית למעגל.

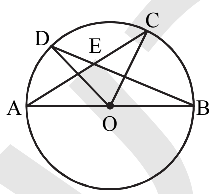
משפט: זווית חיצונית למעגל שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית.



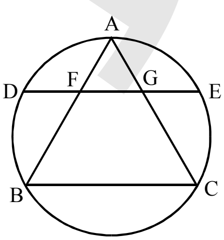
58. המיתרים AC ו- BD נחתכים בנקודה E.
נתון: $\overset{\frown}{AB}=69^\circ$, $\overset{\frown}{DC}=107^\circ$.
חשב את הזווית DEC.



59. המיתרים AC ו- BD נפגשים בנקודה E.
נתון: $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{DC}=180^\circ$.
הוכח: $AC \perp BD$.

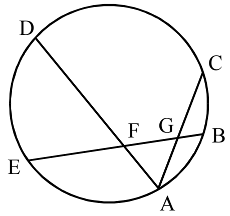


60. AB הוא קוטר של מעגל שמרכזו O.
D ו- C נקודות על אותה קשת AB
כך ש- $\sphericalangle DOC=60^\circ$.
AC ו- BD נחתכים בנקודה E.
הוכח: $\sphericalangle DEC=120^\circ$.

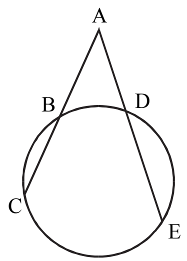


61. המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל. הנקודות D ו- E הן אמצעי הקשתות AB ו- AC בהתאמה.
א. הוכח: המשולש AFG הוא שווה צלעות.
ב. הוכח: $DF=FG=GE$.

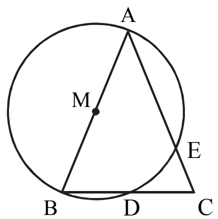
.62 הנקודות A , B , C , D ו- E נמצאות על מעגל.
נתון: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$, $AF = AG$.
הוכח: $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DE}$.



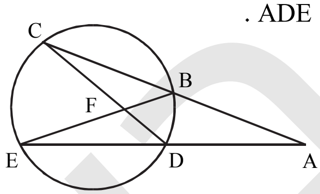
.63 מנקודה A יוצאים למעגל שני חותכים:
חותך ABC וחותך ADE .
נתון: $\overset{\frown}{BD} = 54^\circ$, $\overset{\frown}{CE} = 130^\circ$.
חשב את הזווית A .



.64 AB הוא קוטר של מעגל שמרכזו M .
המשכי המיתרים BD ו- AE נפגשים
בנקודה C . נתון: $\overset{\frown}{DE} = 42^\circ$.
חשב את הזווית C .



.65 מנקודה A יוצאים למעגל חותך ABC וחותך ADE .
CD ו- BE נחתכים בנקודה F .
נתון: $\sphericalangle A = 18^\circ$, $\sphericalangle BFD = 60^\circ$.
א. חשב את הקשת BD .
ב. חשב את הזווית CDE .



.66 הוכח את המשפט: **זווית פנימית במעגל שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.**

.67 הוכח את המשפט: **זווית חיצונית במעגל שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית.**

תשובות: **.58** 88° . **.63** 38° . **.64** 69° . **.65** א. 42° . ב. 39° .

המשיק למעגל

מבוא – מצב הדדי בין ישר למעגל

הגדרה: ישר שיש לו בדיוק נקודה אחת משותפת עם המעגל נקרא משיק למעגל.

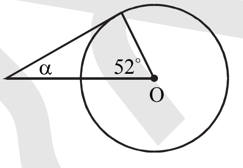
משפט: משיק למעגל מאונך לרדיוס העובר בנקודת ההשקה.

משפט: ישר המאונך לרדיוס בקצה הרדיוס שעל המעגל הוא משיק למעגל.

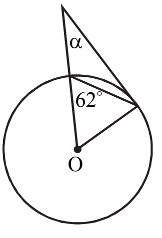
תרגילים

1. בכל אחד מהתרגילים הבאים נתון משיק למעגל O. חשב את הזווית α.

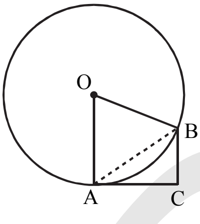
א.



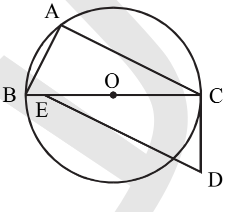
ב.



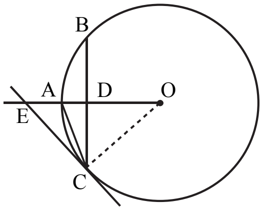
2. הנקודות A ו- B נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O.
AC משיק למעגל בנקודה A.
נתון: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABO$.
הוכח: $BC \perp AC$.



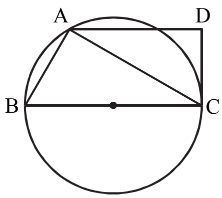
3. הנקודות A, B ו- C נמצאות על מעגל כך ש- BC הוא קוטר במעגל.
CD משיק למעגל בנקודה C.
הנקודה E נמצאת על הקוטר BC.
נתון: $AB = DC$, $DE = BC$.
הוכח: $AC \parallel DE$.



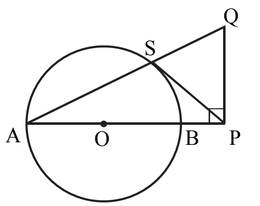
4. נתון מעגל שמרכזו O . המיתר BC
נחצה על ידי הרדיוס AO .
דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל.
הוכח: $\sphericalangle BCA = \sphericalangle ECA$.



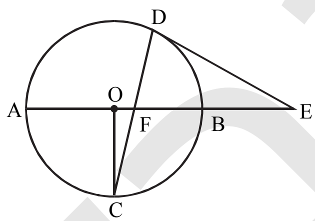
5. המשולש ABC חסום במעגל כך ש- BC
הוא קוטר במעגל. CD משיק למעגל
בנקודה C . נתון: $AD \parallel BC$.
א. האם המשולשים ADC ו- CAB
חופפים זה לזה?
ב. הוכח: $BC > AD$.



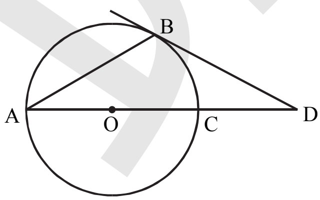
6. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
PS משיק למעגל.
נתון: $\sphericalangle BPS = 24^\circ$, $PQ \perp AP$.
א. חשב את הזווית PSQ .
ב. הוכח: $PS = PQ$.



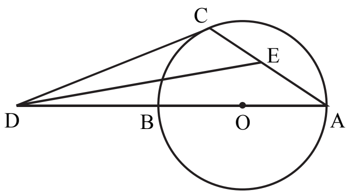
7. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
הרדיוס OC מאונך לקוטר AB .
CD הוא מיתר במעגל.
DE משיק למעגל בנקודה D .
DC ו- AB נחתכים בנקודה F .
הוכח: $DE = FE$.



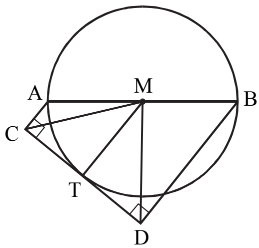
8. AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
BD משיק למעגל בנקודה B .
א. הוכח: $OD > BD$.
ב. נתון: $\sphericalangle D = 30^\circ$.
הוכח: $AD = 3 \cdot AO$.



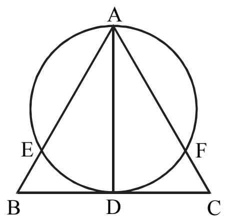
9. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
המשיק למעגל בנקודה C חותך
את המשך הקוטר AB בנקודה D.
E נקודה על המיתר AC כך ש- DE
חוצה את הזווית ADC.
הוכח: $\sphericalangle DEC = 45^\circ$.



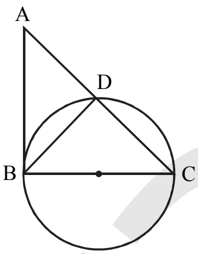
10. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו M.
הישר CD משיק למעגל בנקודה T.
נתון: $AC \perp CD$, $BD \perp CD$.
א. הוכח: $TM = \frac{AC + BD}{2}$.
ב. הוכח: $MC = MD$.



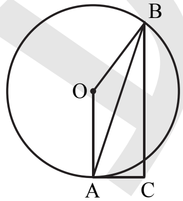
11. המשולש ABC הוא שווה-צלעות.
הצלע BC משיקה למעגל בנקודה D.
נתון: $BD = DC$.
א. הוכח: AD הוא קוטר במעגל.
ב. הוכח: $AF = 3CF$.



12. BC הוא קוטר במעגל.
AC חותך את המעגל בנקודה D.
נתון: $\sphericalangle C = \sphericalangle ABD$.
הוכח: AB משיק למעגל בנקודה B.



13. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.
נתון: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABO$, $AC \perp BC$.
הוכח: AC משיק למעגל בנקודה A.



14. הוכח את המשפט:
במעגל, המשיק מאונך לרדיוס הנפגש עימו בנקודת ההשקה.

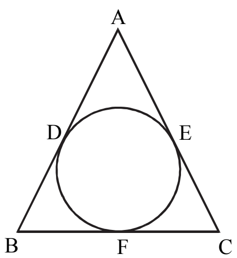
15. הוכח את המשפט: **ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.**

תשובות: 1. א. 38° . ב. 34° . **5.** א. לא. **6.** א. 57° .

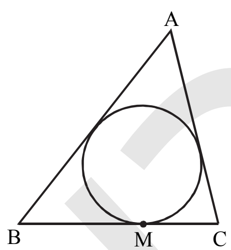
שני משיקים למעגל

משפט: שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שמחוץ למעגל שווים זה לזה.

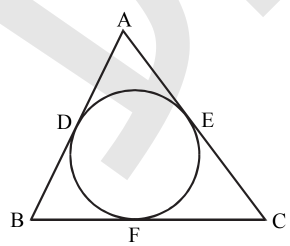
משפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני משיקים למעגל, אז הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה שממנה יוצאים שני המשיקים חוצה את הזווית שבין המשיקים.



16. ABC הוא משולש שצלעותיו משיקות למעגל בנקודות D , E ו- F .
נתון: $BF = CF$.
א. הוכח: $AB = AC$.
ב. הוכח: $DE \parallel BC$.



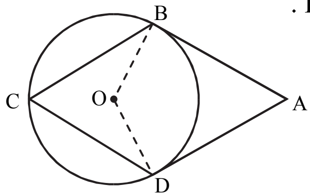
17. בציור מתואר מעגל החסום במשולש ABC .
הצלע BC משיקה למעגל בנקודה M .
נתון: $AB =$ 22 ס"מ , $AC =$ 18 ס"מ ,
$BC =$ 20 ס"מ .
חשב את אורך הקטע MC .



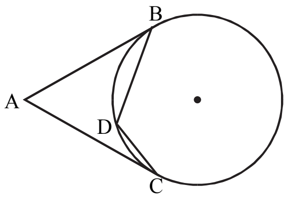
18. צלעותיו של משולש ABC משיקות למעגל בנקודות D , E ו- F .
היקף המשולש ABC הוא 21 ס"מ.
נתון: $AB =$ 6 ס"מ .
חשב את אורך הקטע CE .

19. דרך נקודה A הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, העבירו שני ישרים המשיקים למעגל בנקודות B ו- C. בנקודה D, הנמצאת על הקשת BC (הקטנה) העבירו משיק שלישי למעגל.
משיק זה חותך את המשיקים AB ו- AC בנקודות E ו- F בהתאמה.
הוכח כי היקף המשולש AEF שווה ל- $AB+AC$.

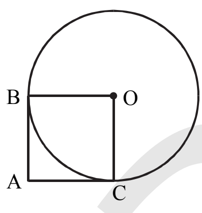
20. AB ו- AD משיקים למעגל O בנקודות B ו- D.
הנקודה C נמצאת על הקשת BD
(ראה ציור). נתון: $\sphericalangle BAD=\alpha$.
א. הבע באמצעות α את הזווית BCD.
ב. נתון: $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD$.
הוכח: $AD=BD$.



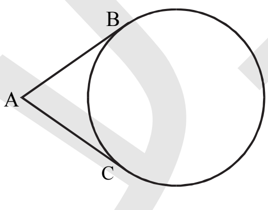
21. AB ו- AC משיקים למעגל O
בנקודות B ו- C. הנקודה D
נמצאת על הקשת BC (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC=50^\circ$.
חשב את הזווית BDC.



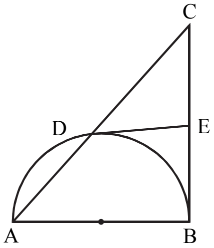
22. AB ו- AC משיקים למעגל שמרכזו
בנקודה O. נתון: $\sphericalangle BAC=90^\circ$.
א. הוכח: המרובע ABOC הוא ריבוע.
ב. D היא נקודה על הקשת הקטנה BC.
מהו גודל הזווית BDC?



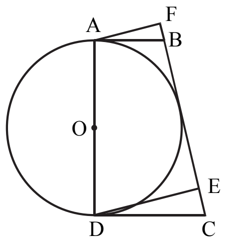
23. AB ו- AC משיקים למעגל.
א. הוכח: הזווית A שווה למחצית ההפרש בין הקשת הגדולה BC לקשת הקטנה BC.
ב. הקשת הגדולה BC מהווה $\frac{2}{3}$ מקשת המעגל. הוכח שהמשולש ABC הוא שווה-צלעות.



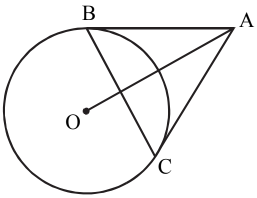
.24 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.
הניצב AB הוא קוטר של מעגל.
היתר AC חותך את המעגל בנקודה
נוספת D. DE משיק למעגל בנקודה D.
הוכח: $BE = CE$.



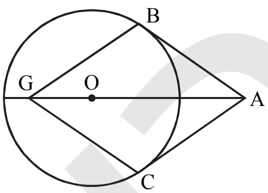
.25 המרובע $ABCD$ הוא טרפז ישר-זווית $(AB \parallel DC)$
שצלעותיו AB , BC ו- DC משיקות למעגל O.
א. הוכח: $BC = AB + DC$.
ב. מהנקודות A ו- D מעבירים אנכים
DE ו- AF לצלע BC (או להמשכה).
הוכח: $AD = AF + DE$.



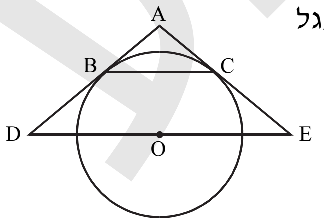
.26 AB ו- AC הם שני משיקים למעגל
שמרכזו O (ראה ציור).
א. הוכח: $AO \perp BC$.
ב. הוכח: $\sphericalangle BAO = \sphericalangle BCO$.



.27 AB ו- AC הם שני משיקים למעגל
שמרכזו בנקודה O. הנקודה G
נמצאת על המשך הקטע AO.
נתון: $AB = GB$.
הוכח: המרובע $ABGC$ הוא מעוין.



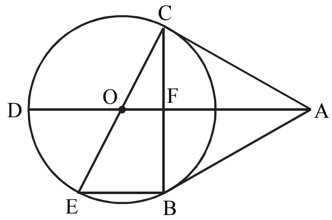
.28 נתון מעגל שמרכזו O. AB ו- AC נוגעים במעגל
בנקודות B ו- C בהתאמה.
הנקודות D ו- E נמצאות על המשכי
הקטעים AB ו- AC כך ש- $BD = CE$.
הנקודה O נמצאת על הקטע DE.
א. הוכח: $BC \parallel DE$.
ב. הוכח: $OD = OE$.



29. מנקודה A יוצאים משיקים AB ו- AC למעגל O. AD הוא חותך העובר דרך הנקודה O. המשך הרדיוס CO חותך את המעגל בנקודה E. AD ו- BC נפגשים בנקודה F.

א. הוכח: $AO \parallel BE$.

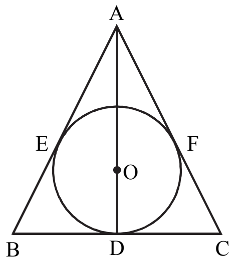
ב. הוכח: $BE = 2OF$



30. צלעותיו של משולש ABC משיקות למעגל שמרכזו בנקודה O.
D, E ו- F הן נקודות ההשקה.
הקטע AD עובר דרך הנקודה O.

א. הוכח: $BD = DC$.

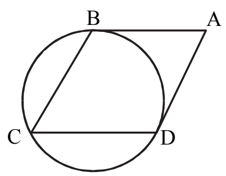
ב. הוכח: AD חוצה את EF ומאונך לו.



31. AB ו- AD משיקים למעגל O בנקודות B ו- D (ראה ציור).
המיתרים BC ו- DC שווים באורכם.

א. הוכח: $AC \perp BD$.

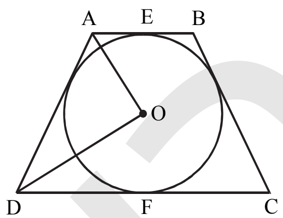
ב. הוכח: הנקודה O נמצאת על הקטע AC.



32. מעגל שמרכזו בנקודה O חסום בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$.

א. הוכח: $\sphericalangle DOA = 90^\circ$.

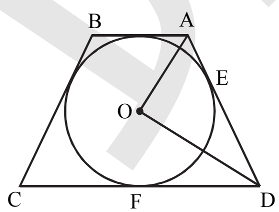
ב. E ו- F הן נקודות השקה.
הוכח: $AD = AE + DF$.



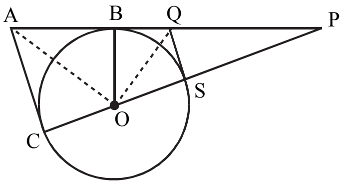
33. צלעותיו של המרובע $ABCD$ משיקות למעגל שמרכזו O. נתון: $AO \perp DO$.

א. הוכח: $AB \parallel CD$.

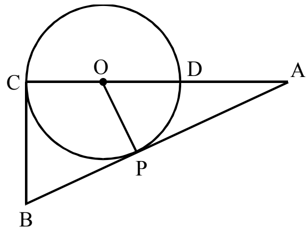
ב. E ו- F הן נקודות השקה.
הוכח: $\sphericalangle BAO = \sphericalangle EFD$.



.34 AC משיק בנקודה C למעגל שמרכזו O .
AQ משיק למעגל בנקודה B ,
ו- QS משיק למעגל בנקודה S .
הוכח : $\sphericalangle POA = \sphericalangle PQO$.



.35 BP ו- BC הם משיקים למעגל שמרכזו O .
המשכי המשיק BP והקוטר CD נחתכים
בנקודה A . נתון : $AC = 3OP$.
א. חשב את הזווית A .
ב. הוכח : $AP = BP$.



.36 הוכח את המשפט : **שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.**

.37 הוכח את המשפט: **קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.**

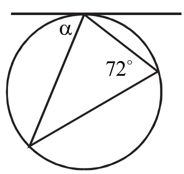
תשובות: .17 8 ס"מ. **.18** 4.5 ס"מ. **.20** א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. **.21** 115° . **.22** ב. 135° .
.35 א. 30° .

זווית בין משיק למיתר

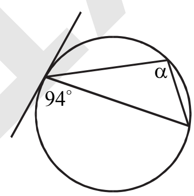
משפט: זווית בין משיק למיתר הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על הקשת שבין המשיק למיתר.

.38 בכל אחד מהציורים הבאים נתון משיק. חשב את הזווית α .

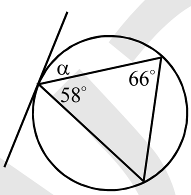
א.



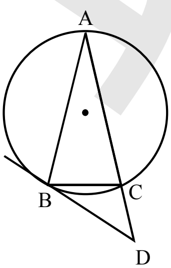
ב.



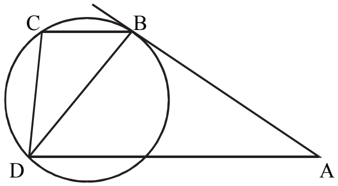
ג.



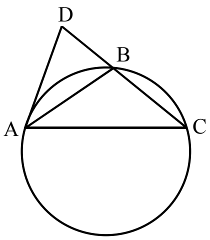
.39 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
המשולש חסום במעגל. BD משיק למעגל.
א. נתון : $\sphericalangle BAC = \alpha$ $(\alpha < 60^\circ)$.
הבע באמצעות α את הזווית BDC .
ב. הוכח : המשיק למעגל בנקודה A
המקביל למיתר BC .



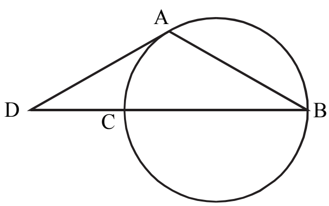
.40 המשולש BCD חסום במעגל.
דרך קדקוד B עובר משיק למעגל.
דרך הקדקוד D עובר ישר המקביל ל- BC
וחותך את המשיק בנקודה A .
הוכח : $\sphericalangle BDC = \sphericalangle A$.



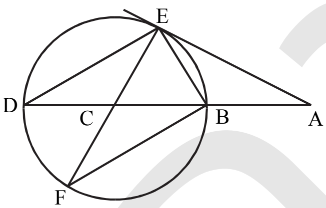
.41 המשולש ABC חסום במעגל.
המשיק למעגל בנקודה A
חותך את המשך המיתר CB
בנקודה D . נתון : $AD = AB$.
א. הוכח : $AC = DC$.
ב. נתון גם : $AB = BC$. חשב את הזווית D .



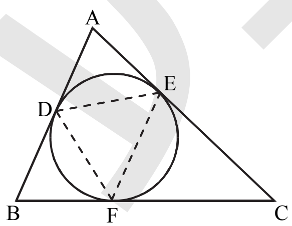
.42 הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל
כך ש- BC הוא קוטר במעגל.
המשיק למעגל בנקודה A נפגש עם
המשך המיתר BC בנקודה O .
נתון : $\sphericalangle B = \sphericalangle D + 15^\circ$.
חשב את הזווית B .



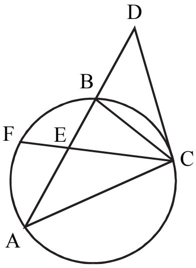
.43 BE הוא מיתר במעגל ו- AE משיק למעגל
בנקודה E כך ש- $\sphericalangle ABE = 120^\circ$.
המשך הקטע AB חותך את המעגל
בנקודה D . מיתר EF חותך את BD
בנקודה C . נתון : $BC = BE$.
א. הוכח : $\sphericalangle A = \sphericalangle FBD$.
ב. מהו גודל הזווית A , אם EF הוא קוטר במעגל?



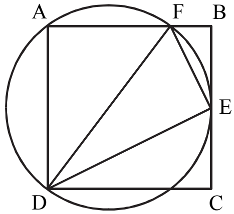
.44 צלעותיו של משולש ABC משיקות
למעגל בנקודות D , E ו- F .
נתון : $\overset{\frown}{DE} : \overset{\frown}{DF} : \overset{\frown}{EF} = 21 : 22 : 29$.
חשב את זוויותיו של המשולש ABC .



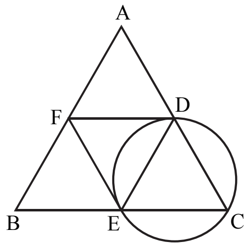
45. המשולש ABC חסום במעגל. המשיק למעגל בנקודה C והמשך המיתר AB נפגשים בנקודה D. E היא נקודה על המיתר AB. נתון: $DC = DE$.
הוכח: $AF = BF$.



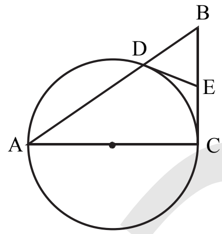
46. הקדקודים A ו-D של ריבוע ABCD נמצאים על מעגל. הצלע BC משיקה למעגל בנקודה E.
א. הוכח: FE חוצה את הזווית BFD.
ב. הוכח: $DF > DC$.
ג. הוכח: E – אמצע הצלע BC.



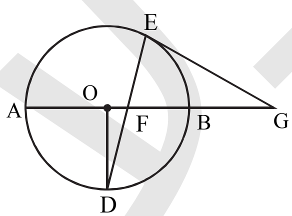
47. המשולש ABC הוא שווה-צלעות.
D, E ו-F הן אמצעי הצלעות AC, BC ו-AB בהתאמה.
המשולש DEC חסום במעגל.
הוכח: הישר EF משיק למעגל בנקודה E.



48. AC הוא קוטר במעגל.
BC משיק למעגל בנקודה C.
AB חותך את המעגל בנקודה D.
נקודה E היא אמצע הקטע BC.
א. הוכח: $\sphericalangle DEC = 2\sphericalangle B$.
ב. הוכח: DE משיק למעגל בנקודה D.



49. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. הרדיוס OD מאונך לקוטר AB. E נקודה על המעגל (ראה ציור). DE ו-AB נחתכים בנקודה F. נקודה G נמצאת על המשך הקוטר AB.
נתון: $GE = GF$. הוכח: GE הוא משיק למעגל.



תשובות: 38. א. 72°. ב. 94°. ג. 56°. **39.** א. $90^\circ - 1\frac{1}{2}\alpha$. **41.** ב. 72°.
42. 35°. **43.** ב. 30°. **44.** 75°, 70°, 35°.

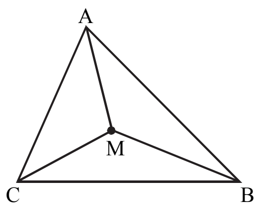
מעגל חוסם ומעגל חסום
מעגל חוסם משולש

הגדרה: מעגל העובר דרך שלושת קדקודי משולש נקרא המעגל החוסם את המשולש.

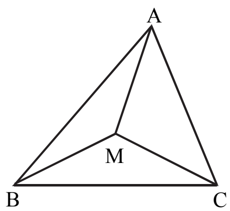
משפט: נקודת מפגש האנכים האמצעיים לצלעות המשולש היא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

תרגילים

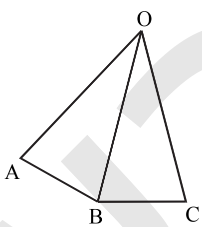
1. הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.
נתון: $\sphericalangle ABC = 40^\circ$, $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.
א. חשב את הזווית AMB .
ב. חשב את הזווית BMC .



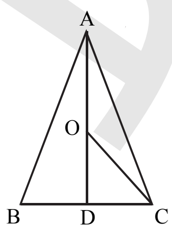
2. הנקודה M נמצאת בתוך משולש ABC .
נתון: $AM = BM = CM$.
א. הוכח: $\sphericalangle BMC = 2 \cdot \sphericalangle BAC$.
ב. הוכח: $\sphericalangle BAM + \sphericalangle ACB = 90^\circ$.



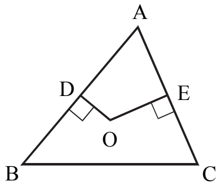
3. בציור שלפניך נתון: $AO = BO = CO$,
$\sphericalangle ABC = 148^\circ$.
א. חשב את הזווית AOC .
ב. הוכח: אם $AB > BC$, אז $\sphericalangle AOB > 2 \cdot \sphericalangle BAC$.



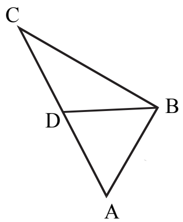
4. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$ החסום במעגל. AD הוא הגובה לבסיס BC .
נקודה O נמצאת על הקטע AD כך ש- $AO = CO$.
א. הוכח שנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .
ב. הוכח: $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACO = 90^\circ$



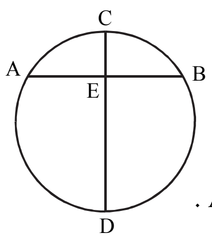
.5 נתון משולש ABC . D ו- E הן אמצעי הצלעות AB ו- AC . נתון : $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, $\sphericalangle AOB = 140^\circ$, $\sphericalangle BOC = 136^\circ$.
א. חשב את הזווית ABC .
ב. נקודה F נמצאת על המשך הקטע BO כך ש- $FO = BO$. הוכח : $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAC$.



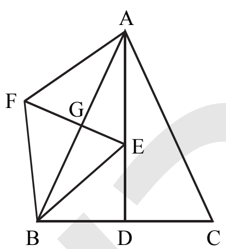
.6 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.
D היא נקודה על היתר BC . נתון : $AD = BD$
א. הוכח : הנקודה D היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .
ב. הסבר מדוע האנך האמצעי לניצב BC עובר דרך נקודה D .



.7 AB הוא מיתר במעגל. הנקודות C ו- D נמצאות על היקף המעגל כך ש- CD חוצה את המיתר AB בנקודה E ומאונך לו.
O נקודה על CD כך ש- $OC = OB$.
א. הוכח : O – מרכז המעגל.
ב. הוכח : AC משיק למעגל החוסם את המשולש ADE .



.8 AD הוא גובה לבסיס BC במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$. E היא נקודה על AD כך שהמרובע $AEBF$ הוא דלתון $(AE = BE \ , \ AF = BF)$.
א. הוכח : הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .
ב. הוכח : הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD .
ג. הסבר מדוע מרכז המעגל החוסם את המשולש ABE נמצא מחוץ למשולש.



.9 הוכח את המשפט : **נקודת מפגש האנכים האמצעיים במשולש היא מרכז המעגל החוסם את המשולש.**

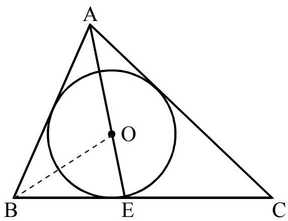
תשובות: 1. א. 120° . ב. 160° . **3**. א. 64° . **5**. א. 42° .

מעגל חסום במשולש

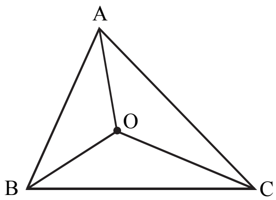
הגדרה: מעגל ששלוש צלעותיו של משולש משיקות לו נקרא המעגל החסום במשולש.

משפט: נקודת מפגש חוצי הזוויות במשולש היא מרכז המעגל החסום במשולש.

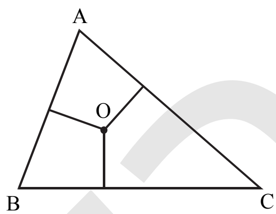
10. מעגל שמרכזו O חסום במשולש ABC .
המשך הקטע AO חותך את הצלע BC
בנקודה E . נתון: $\sphericalangle ABC = 68^\circ$, $\sphericalangle BAC = 72^\circ$.
א. חשב את הזווית BOE .
ב. חשב את הזווית COE .



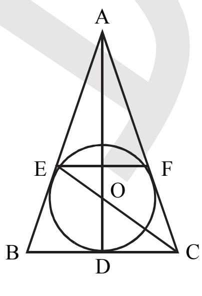
11. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום
בתוך משולש ABC . נתון: $\sphericalangle ACB = 56^\circ$.
א. חשב את הזווית AOB .
ב. הוכח: הנקודה O נמצאת במרחקים
שווים מצלעות המשולש ABC .



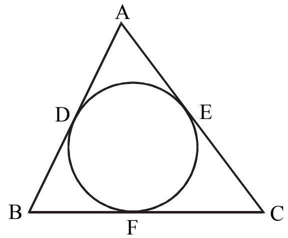
12. הנקודה O נמצאת במרחקים שווים
מצלעות המשולש ABC .
נתון: $\sphericalangle B = 64^\circ$, $\sphericalangle C = 38^\circ$.
חשב את הזווית BOA .



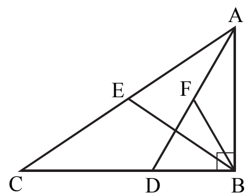
13. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
AD הוא תיכון לבסיס BC .
נתון: $EF \parallel BC$, $EF = CF$.
א. הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל
החסום בתוך המשולש ABC .
ב. הוכח: מרכז המעגל החסום במשולש AEF
נמצא באמצע הקשת EF של המעגל המקורי.



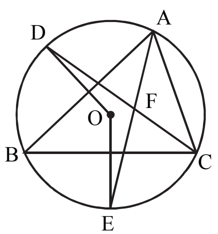
.14 המשולש ABC חוסם מעגל שמרכזו O .
נקודת ההשקה הן D , E ו- F .
היקף המשולש ABC הוא 17 ס"מ.
נתון: $AB = 5$ ס"מ .
א. חשב את אורך הקטע CF .
ב. הוכח: מרכז המעגל החסום
במשולש EFO נמצא על הקטע OC .



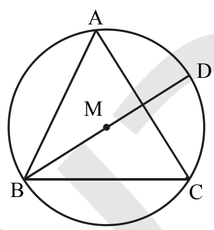
.15 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(AB \perp BC)$.
AD הוא חוצה-הזווית של $\sphericalangle BAC$.
E – אמצע הקטע AC , F – אמצע הקטע AD .
א. הוכח: הנקודה F היא מרכז המעגל
החסום במשולש ABE .
ב. הוכח: מרחקה של נקודה F מהצלע AE
שווה למרחקה מהצלע BE .



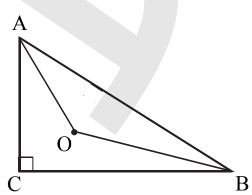
.16 המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O .
הנקודות D ו- E נמצאות, בהתאמה,
באמצעי הקשתות AB ו- BC .
א. הוכח: נקודת החיתוך (F) של AE ו- CD
היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .
ב. OD חותך את AB בנקודה L ו- OE חותך
את BC בנקודה K . הוכח: $KL \parallel AC$.



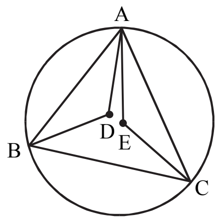
.17 משולש ABC חד-זווית חסום במעגל.
D נקודה על הקשת AC כך ש- $AD = DC$.
M נקודה על המיתר BD כך ש- $DM = DC$.
הוכח: הנקודה M היא מרכז המעגל
החסום במשולש ABC .



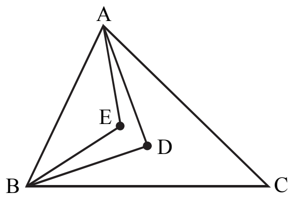
.18 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(AC \perp BC)$.
הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש.
א. הוכח: $\sphericalangle AOB = 135^\circ$.
ב. הוכח: סכום הרדיוסים של המעגל החוסם
את המשולש ABC ושל המעגל החסום
במשולש ABC שווה למחצית סכום
ניצבי המשולש ABC .



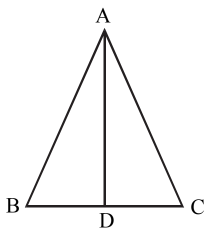
19. הנקודה D היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC והנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .
הוכח: $\sphericalangle AEC = 4 \cdot \sphericalangle ABD$.



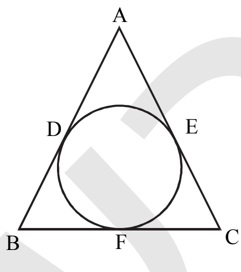
20. במשולש ABC נתון: $\sphericalangle ABC = 72^\circ$, $\sphericalangle BAC = 74^\circ$.
D היא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
E היא מרכז המעגל החסום בתוך המשולש.
חשב את הזווית DAE .



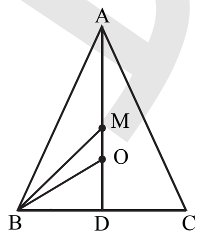
21. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
AD הוא גובה לבסיס BC . נקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC ונקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .
א. הוכח: הנקודות O ו- M נמצאות על הגובה AD .
ב. נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$. מצא באיזה תחום צריכה להיות הזווית α כדי שנקודה M: **(1)** תתלכד עם הנקודה O .
(2) תהיה **על** הקטע AO . **(3)** תהיה על **המשך** הקטע AO .



22. המשולש ABC חוסם מעגל. נקודות ההשקה הן D , E ו- F . נתון: $BF = CF$.
א. הוכח: המשולש ABC הוא שווה-שוקיים.
ב. מצא מה צריך להיות הערך של הזווית A כדי שמרכז המעגל החוסם את המשולש ABC יתלכד עם מרכז המעגל החסום במשולש ABC .



23. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$, מרכז המעגל החסום נמצא בנקודה O ומרכז המעגל החוסם נמצא בנקודה M שעל הקטע AD . נתון: $\sphericalangle ABC = \alpha$.
א. הבע את הזווית MBO באמצעות α .
ב. מהו תחום הקיום של α ?



.24 הוכח את המשפט: **מרכז המעגל החסום בתוך משולש הוא נקודת המפגש של חוצי הזוויות במשולש.**

.25 הוכח את המשפט: **במשולש שווה-צלעות – מרכז המעגל החוסם את המשולש מתלכד עם המעגל החסום במשולש.**

תשובות: 10. א. 70° ב. 56°. **11.** א. 118°. **12.** 129°. **14. א.** 3.5 ס"מ.
20. 19°. **21.** ב. **(1)** $\alpha = 60^\circ$. **(2)** $60^\circ < \alpha < 90^\circ$. **(3)** $0^\circ < \alpha < 60^\circ$. **22.** ב. 60°.
23. א. $1\frac{1}{2}\alpha - 90^\circ$. ב. $60^\circ < \alpha < 90^\circ$.

מרובע חסום במעגל

הגדרה: מרובע חסום במעגל הוא מרובע שכל ארבעת קדקודיו נמצאים על המעגל.
מרובע כזה נקרא מרובע בר-חסימה במעגל.

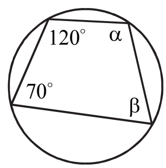
משפט: במרובע חסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות שווה ל- 180°.

משפט: אם במרובע יש זוג אחד של זוויות נגדיות שסכומן 180°, אז ניתן לחסום את המרובע במעגל, כלומר המרובע הוא בר חסימה במעגל.

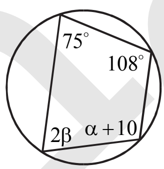
תרגילים

.1 חשב את הזוויות α ו- β בכל אחד מהציורים הבאים:

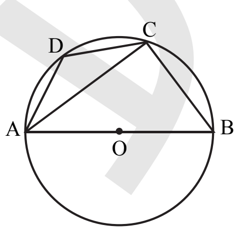
א.



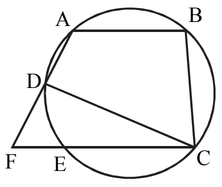
ב.



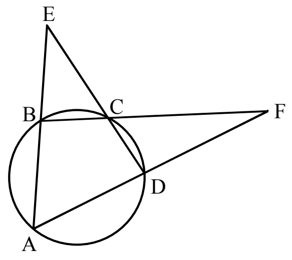
.2 המרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O כך שהצלע AB היא קוטר במעגל.
נתון: $\sphericalangle ABC = 56^\circ$, $\sphericalangle DAB = 77^\circ$.
א. חשב את הזווית DCA .
ב. חשב את הזווית DOB .



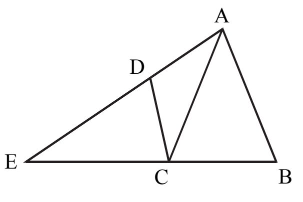
3. המרובע ABCD חסום במעגל.
הנקודה E נמצאת על הקשת DC.
המשכי המיתרים AD ו- CE
נפגשים בנקודה F. נתון: $AB \parallel CF$.
א. הוכח: $\sphericalangle AFC = \sphericalangle BCD$.
ב. נתון: $\sphericalangle BAD = 115^\circ$, $\sphericalangle DCF = 21^\circ$.
חשב את הזווית ABC.



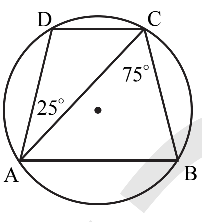
4. המרובע ABCD חסום במעגל. המשכי
הצלעות AB ו- DC נחתכים בנקודה E.
המשכי הצלעות BC ו- AD נחתכים
בנקודה F. נתון: $\sphericalangle A = 58^\circ$, $\sphericalangle F = 34^\circ$.
חשב את הזווית E.



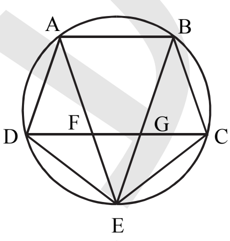
5. המרובע ABCD שבציור ניתן לחסימה
במעגל. המשכי הצלעות AD ו- BC
נפגשים בנקודה E.
נתון: $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ADC$.
הוכח: $AB = AC$.



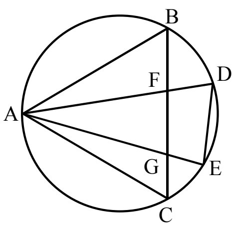
6. א. הוכח: טרפז שחסום במעגל הוא שווה-שוקיים.
ב. מעגל חוסם טרפז ABCD $(AB \parallel DC)$.
אלכסון הטרפז יוצר עם שוקי הטרפז
את הזוויות 75° ו- 25° (ראה ציור).
(1) חשב את הזווית BAC.
(2) הוכח: $BC > DC$.



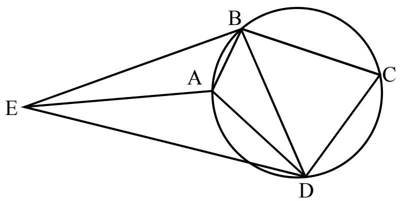
7. המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel DC)$
החסום במעגל. E היא נקודת
האמצע של הקשת DC.
א. הוכח: $AE = BE$.
ב. הוכח: $DF = CG$.



8. המשולש ABC חסום במעגל.
D ו- E נקודות על הקשת BC .
המיתר BC חותך את המיתרים AD ו- AE
בנקודות F ו- G , בהתאמה.
נתון כי המרובע DEGF ניתן לחסימה במעגל.
הוכח : $AB = AC$.

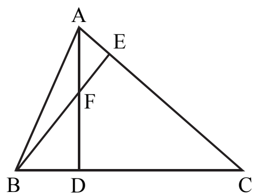


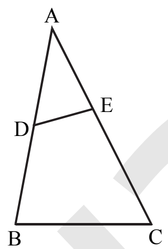
9. המרובע ABCD חסום במעגל.
את נקודה E , הנמצאת מחוץ למעגל,
מחברים ל- B ול- D כך שנקודה A
היא מרכז המעגל החסום
במשולש BDE . נתון : $\sphericalangle BED = \sphericalangle BCD$.
חשב את הזווית BAD .



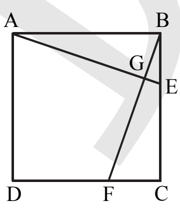
10. קבע עבור כל אחד מהמרובעים הבאים האם הוא ניתן לחסימה במעגל :
א. מלבן. ב. ריבוע. ג. מקבילית.

11. AD ו- BE הם גבהים במשולש ABC .
F היא נקודת מפגש הגבהים במשולש.
א. הוכח : המרובע CDFE ניתן לחסימה במעגל.
ב. נתון : $CF = 8$ ס״מ .
חשב את רדיוס המעגל הנ״ל.



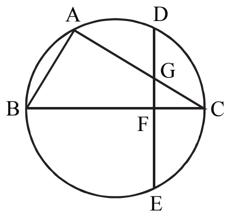


12. הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות
AB ו- AC של משולש ABC
כך שמתקיים $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACB$.
א. הוכח : המרובע DECB
ניתן לחסימה במעגל.
ב. הוכח : $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BEC$.

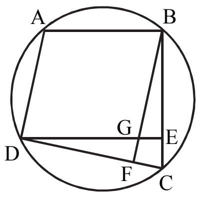


13. הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות BC
ו- DC של ריבוע ABCD . נתון : $BE = CF$.
א. הוכח : המעגל החוסם את המשולש ADG
עובר גם דרך הנקודה F .
ב. נקודה M היא אמצע הקטע AF .
הוכח : $\sphericalangle AMD = 2\sphericalangle AGD$.

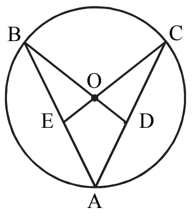
.14 המשולש ABC חסום במעגל כך ש- BC הוא קוטר במעגל. המיתר DE חותך את הצלע AC בנקודה G ואת הקוטר BC בנקודה F . נתון כי מרכז המעגל החוסם את המשולש ABF מתלכד עם מרכז מעגל החוסם את המשולש BFG . הוכח : DF = EF .



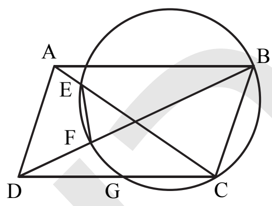
.15 המרובע ABCD חסום במעגל.
המרובע ABGD הוא מקבילית.
א. הוכח : המרובע CEGF בר חסימה במעגל.
ב. נתון גם : GE = GF .
הוכח : GC חוצה את הזווית BCD .



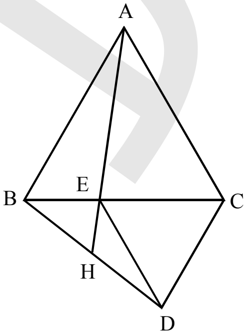
.16 AB ו- AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O .
המשכי הרדיוסים BO ו- CO חותכים את המיתרים AC ו- AB בנקודות D ו- E .
המרובע ADOE בר-חסימה במעגל.
א. חשב את הזווית BAC .
ב. הוכח : מרכז המעגל החוסם את המעגל שבסעיף א' נמצא מחוץ למשולש ADE .



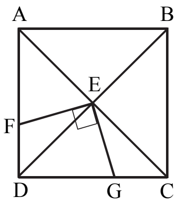
.17 הקדקודים B ו- C של מקבילית ABCD נמצאים על מעגל.
א. הוכח : המרובע AEFD בר-חסימה במעגל.
ב. הוכח : $\measuredangle AED = \measuredangle AFD$.
ג. הוכח : $\measuredangle AEF = \measuredangle FGC$.



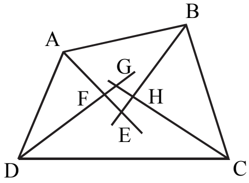
.18 המשולשים ABC ו- CDE הם שווי-צלעות.
א. הוכח : $\Delta ACE \cong \Delta BCD$.
ב. הישר AE חותך את הקטע BD בנקודה H . הוכח : $\measuredangle AHB = 60^\circ$.
ג. הוכח כי מרכז המעגל החוסם את המשולש DEH מתלכד עם מרכז המעגל החוסם את המשולש CDE .



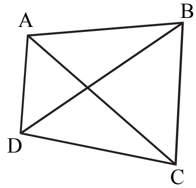
19. אלכסוני הריבוע ABCD נפגשים בנקודה E .
הנקודות F ו- G נמצאות על הצלעות
AD ו- DC בהתאמה. נתון : $EF \perp EG$.
א. הוכח : $EF = EG$.
ב. הוכח : $\sphericalangle EFG = \sphericalangle EDG$.



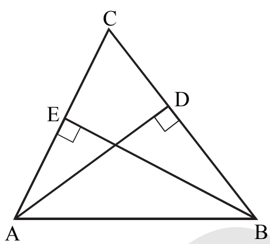
20. במרובע ABCD העבירו ארבעה חוצי-זווית :
AF , BH , CH , DF .
א. הוכח : המעגל העובר דרך הנקודות
E , F ו- G , עובר גם דרך הנקודה H .
ב. נתון : $EH = GH$. הוכח : $\sphericalangle GFH = \sphericalangle EFH$.



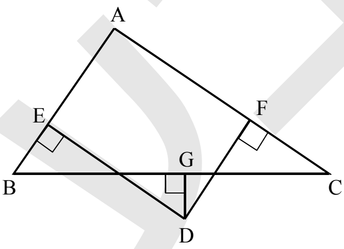
21. בציור מתואר המרובע ABCD .
נתון : $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$.
הוכח : המעגל החוסם את המשולש ADC
עובר גם דרך הנקודה B .



22. AD ו- BE הם גבהים במשולש ABC .
א. הוכח : המעגל העובר דרך הנקודות
A , B ו- E עובר גם דרך הנקודה D .
ב. הנקודה O היא אמצע הצלע AB .
הוכח : $OD = OE$.



23. מנקודה D הנמצאת מחוץ למשולש ABC
מעבירים אנכים DE , DF ו- DG
לצלעות AB , AC ו- BC בהתאמה.
א. הוכח : המרובע AEDF
הוא בר-חסימה במעגל.
ב. הוכח : המרובע BEGD
הוא בר-חסימה במעגל.



24. הוכח את המשפט : **במרובע החסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות שווה ל- 180°.**

25. הוכח את המשפט: **אם במרובע יש זוג אחד של זוויות נגדיות שסכומן 180° , אז ניתן לחסום את המרובע בתוך מעגל.**

תשובות: **1.** א. $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 60^\circ$. ב. $\alpha = 95^\circ$, $\beta = 36^\circ$. **2.** א. 13° . ב. 154° .
3. ב. 94° . **4.** 30° . **6.** ב. **(1)** 40° . **9.** 120° . **10.** א. כן. ב. כן.
ג. לא, אלא אם כן המקבילית היא מלבן. **11.** ב. 4 ס"מ. **16.** א. 60° .

מרובע חוסם מעגל

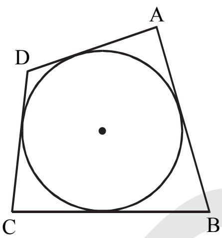
הגדרה: מרובע שכל ארבע צלעותיו משיקות למעגל נקרא מרובע חוסם מעגל.

מרובע כזה נקרא גם מרובע משיקים.

משפט: במרובע החוסם מעגל סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

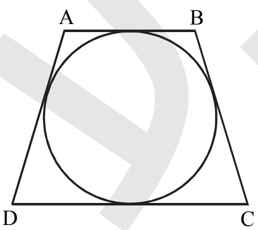
משפט: אם סכום שתי צלעות נגדיות במרובע שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות, אזי אפשר לחסום במרובע מעגל.

26. המרובע ABCD חוסם מעגל.
נתון: $AB =$ 7 ס"מ , $BC =$ 8 ס"מ ,
$DC =$ 5 ס"מ .
חשב את אורך הצלע AD .



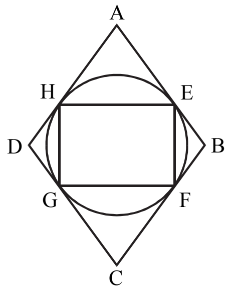
27. טרפז שווה-שוקיים חוסם מעגל.
הוכח: אורך קטע האמצעים של הטרפז שווה לשוק הטרפז.

28. המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים
($AB \parallel DC$, $AD = BC$) החוסם מעגל.
נתון: $AD =$ 12 ס"מ , $\sphericalangle ADC = 60^\circ$.
חשב את אורכי הבסיסים AB ו- DC .

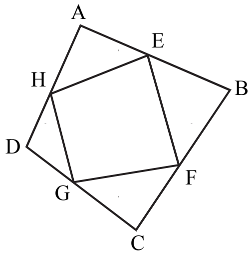


29. טרפז שווה-שוקיים שזוויתו החדה בת 30° חוסם מעגל.
היקף הטרפז הוא 48 ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.

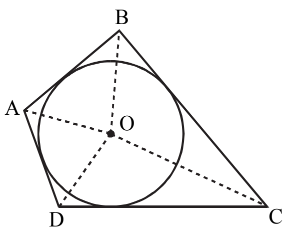
30. המעוין ABCD חוסם מעגל.
נקודות ההשקה הן E , F , G ו- H .
הוכח: המרובע EFGH
הוא מלבן.



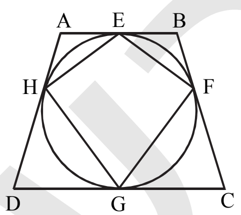
31. המרובע ABCD חוסם מעגל.
נקודות ההשקה הן E , F , G ו- H .
נתון: $\sphericalangle DAB = 100^\circ$, $\sphericalangle ABC = 120^\circ$,
$\sphericalangle BCD = 70^\circ$.
חשב את זוויותיו של המרובע EFGH .



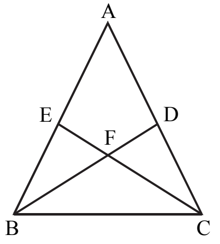
32. המרובע ABCD חוסם מעגל
שמרכזו בנקודה O .
א. הוכח: $\sphericalangle BOC + \sphericalangle AOD = 180^\circ$.
ב. הוכח: אם $AO \perp BO$, אז $CO \perp DO$.



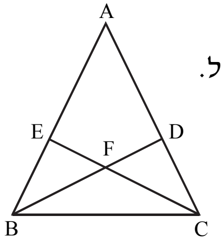
33. טרפז שווה-שוקיים ABCD $(AB \parallel DC)$ חוסם מעגל.
נקודות ההשקה הן E , F , G ו- H .
א. הוכח: EG הוא קוטר במעגל.
ב. הוכח: המרובע EFGH הוא דלתון.
ג. הוכח: מרכז המעגל החוסם את הדלתון
ומרכז המעגל החסום בדלתון נמצאים
שניהם על הקטע EG .



34. קבע בעבור כל אחד מהמרובעים הבאים אם ניתן לחסום בו מעגל:
א. ריבוע. ב. דלתון. ג. מעוין. ד. מקבילית. ה. מלבן.



35. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
BD חוצה את הזווית ABC ו- CE חוצה
את הזווית ACB . BD ו- CE נפגשים בנקודה F .
א. הוכח: במרובע ADFE אפשר לחסום מעגל.
ב. הוכח: מרכז המעגל שבסעיף א׳ נמצא
על הקטע AF .



36. BD ו- CE הם גבהים לשוקיים במשולש חד-זווית
ושווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$.
א. הוכח: אפשר לחסום את המרובע ADFE בתוך מעגל.
ב. הוכח: אפשר לחסום מעגל בתוך המרובע ADFE .
ג. נסמן ב- G את מרכז המעגל החוסם
את המרובע ADFG וב- H את מרכז המעגל
החסום במרובע ADFG .
(1) הוכח: הנקודות G ו- H נמצאות על הקטע AF .
(2) הוכח: הנקודה G נמצאת על הקטע AH .

37. הוכח את המשפט: **במרובע החוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום של זוג הצלעות הנגדיות האחרות.**

38. הוכח את המשפט: **אם במרובע סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום של זוג הצלעות הנגדיות האחרות, אז אפשר לחסום מעגל במרובע.**

תשובות: **26.** 4 ס״מ. **28.** 6 ס״מ, 18 ס״מ. **29.** 3 ס״מ.
31. 110°, 95°, 70°, 85°. **34.** א. כן. ב. כן. ג. כן. ד. לא, אלא אם כן המקבילית היא מעוין. ה. לא, אלא אם כן המלבן הוא ריבוע.

שני מעגלים

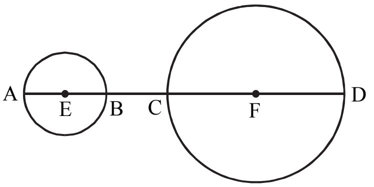
מצב הדדי בין שני מעגלים

קטע מרכזים

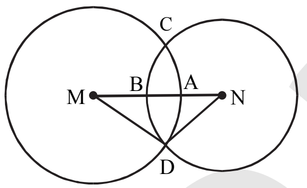
קטע המחבר את המרכזים של שני מעגלים נקרא קטע מרכזים.

משפט: קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף לשני המעגלים ומאונך לו.

תרגילים – מעגלים חותכים, מעגלים זרים



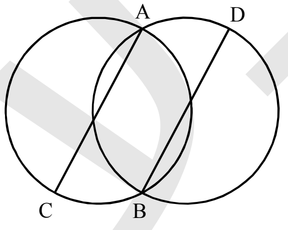
1. בציור מתוארים מעגלים שמרכזיהם בנקודות E ו- F .
נתון: $AD = 18$ ס"מ , $BC = 4$ ס"מ .
חשב את אורך קטע המרכזים (EF) .



2. מעגלים שמרכזיהם בנקודות M ו- N נחתכים בנקודות C ו- D . הקטע MN חותך את המעגלים בנקודות A ו- B .
נתון: $\measuredangle M = \alpha$, $\measuredangle N = \beta$.

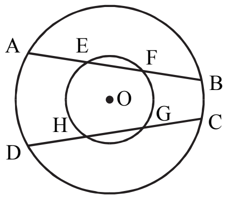
א. הוכח: $\measuredangle ADB = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

ב. נתון: $\measuredangle ADB = 32^\circ$. חשב את הזווית MDN .

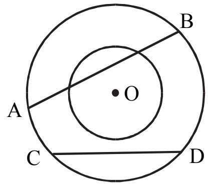


3. שני מעגלים בעלי אותו רדיוס נחתכים בנקודות A ו- B .
AC הוא קוטר במעגל אחד,
ו- BD הוא קוטר במעגל האחר (ראה ציור).
הוכח כי המרובע ACBD הוא מקבילית.

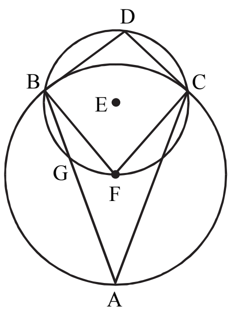
4. נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O .
AB ו- DC הם מיתרים במעגל החיצוני,
EF ו- GH הם מיתרים במעגל הפנימי.
א. הוכח: $AE = BF$.
ב. נתון גם: $EF = GH$. הוכח: $AB = CD$.



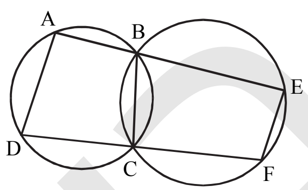
5. נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O .
AB הוא מיתר במעגל הגדול החותך את המעגל הקטן ו- CD הוא מיתר במעגל הגדול שאינו חותך את המעגל הקטן (ראה ציור).
א. הוכח: $AB > CD$.
ב. הוכח: $\measuredangle AOB > \measuredangle COD$.



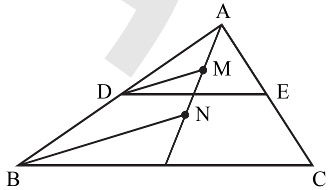
6. נתונים מעגלים שמרכזיהם בנקודות F ו- E .
המעגלים נחתכים בנקודות B ו- C . הנקודה A נמצאת על המעגל שמרכזו F והנקודות D ו- F נמצאות על המעגל שמרכזו E .
AB חותך את מעגל E בנקודה G .
נתון: זווית BDC גדולה ב- 54° מזווית A .
א. חשב את הזווית BDC .
ב. הוכח: $AG = CG$.



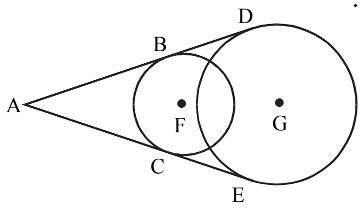
7. בציור מתוארים שני מעגלים הנחתכים בנקודות B ו- C . המרובע ABCD חסום במעגל השמאלי. הנקודות E ו- F נמצאות על המשכי הקטעים AB ו- DC כך שהמרובע BEFC חסום במעגל הימני.
א. הוכח: $AD \parallel EF$.
ב. נתון גם ש- CE הוא קוטר במעגל הימני. נתון: $AE = m$.
הבע על ידי m את אורך קטע המרכזים המחבר את מרכזי המעגלים.



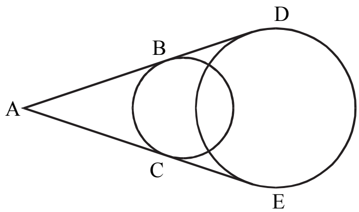
8. בציור שלפניך הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ADE והנקודה N היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .
הוכח: $DM \parallel BN$.



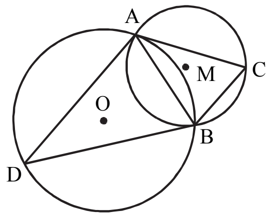
9. בציור מתוארים שני מעגלים שמרכזיהם בנקודות F ו- G .
מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגלים.
B , C , D ו- E הן נקודות השקה.
רדיוסו של מעגל F הוא 4 ס״מ
ורדיוסו של מעגל G הוא 7 ס״מ.
נתון : $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.
א. מהו אורך קטע המרכזים FG ?
ב. שני המעגלים נחתכים בנקודות K ו- L .
הוכח : $FG \perp KL$.



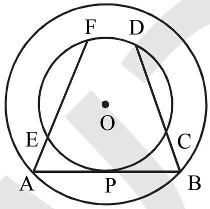
10. בציור מתוארים שני מעגלים. מנקודה A
יוצאים שני משיקים למעגלים.
B , C , D ו- E הן נקודות השקה.
א. הוכח : $BC \parallel DE$.
ב. המעגלים נחתכים בנקודות K ו- L .
הוכח : $KL \parallel BC$.



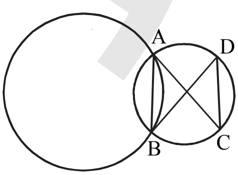
11. בשרטוט מתוארים מעגל O ומעגל M .
BD משיק למעגל M בנקודה B
ו- AC משיק למעגל O בנקודה A .
א. הוכח : $AD \parallel BC$.
ב. הוכח : חוצה הזווית של $\sphericalangle ADB$
מאונך לחוצה הזווית של $\sphericalangle DBC$.



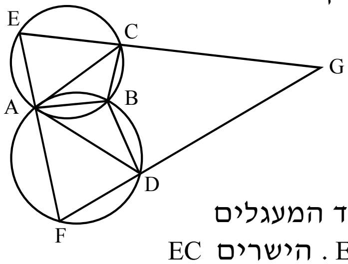
12. נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O .
AB הוא מיתר במעגל הגדול, המשיק
למעגל הקטן בנקודה P . AF חותך את
המעגל הקטן בנקודות E ו- F ,
ו- BD חותך אותו בנקודות C ו- D .
א. הוכח : $AP = BP$.
ב. נתון גם : $CD = EF$. הוכח : $BC = AE$.



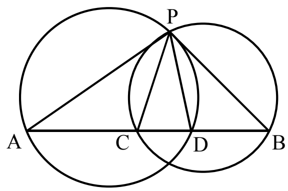
13. נתונים שני מעגלים הנחתכים בנקודות A ו- B .
המשיק למעגל השמאלי בנקודה A
חותך את המעגל הימני בנקודה C .
D נקודה על המעגל הימני כך ש- $AB \parallel DC$.
הוכח : BD משיק למעגל השמאלי בנקודה B .



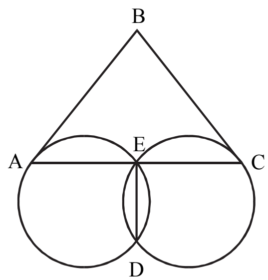
.14 שני מעגלים לא שווים חותכים זה את זה בנקודות A ו- B.
המשיק לאחד המעגלים בנקודה A
חותך את המעגל האחר בנקודה C.
המשיק למעגל האחר בנקודה A
חותך את המעגל האחר בנקודה D.
א. הוכח: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$.
ב. ישר העובר דרך הנקודה A חותך את אחד המעגלים בנקודה F ואת המעגל האחר – בנקודה E. הישרים EC ו- FD נפגשים בנקודה G. הוכח: המשולש EFG הוא שווה-שוקיים.



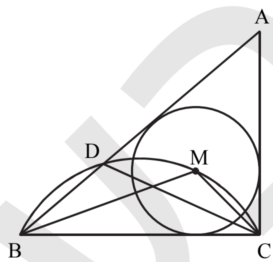
.15 בשרטוט שלפניך BP הוא מיתר במעגל הימני ו- AP הוא מיתר במעגל השמאלי המשיק בנקודה P למעגל הימני. הקטע AB חותך את המעגלים בנקודות C ו- D (ראה ציור).
נתון: $CP = DP$.
הוכח: BP משיק למעגל השמאלי בנקודה P.



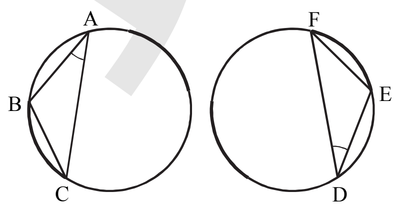
.16 שני מעגלים בעלי אותו רדיוס נחתכים בנקודות D ו- E. הקטע AC עובר דרך הנקודה E ומאונך לקטע ED. הישרים המשיקים למעגלים בנקודות A ו- C נפגשים בנקודה B (ראה ציור).
א. הוכח: $AE = EC$. ב. הוכח: $AB = BC$.
ג. הוכח: הנקודה E נמצאת על הקטע BD.



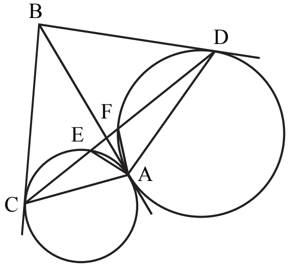
.17 המשולש ABC חוסם מעגל שמרכזו M.
המעגל העובר דרך הנקודות C, B ו- M, חותך את הצלע AB בנקודה D.
נתון: $\sphericalangle A = \alpha$.
א. הוכח: $\sphericalangle BMC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.
ב. הוכח: $AD = AC$.



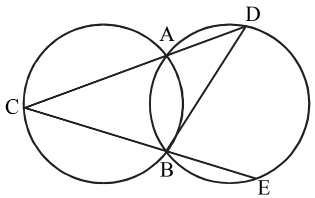
.18 בציורים שלפניך מתוארים שני מעגלים (M ו- N) בעלי רדיוסים שווים.
א. הוכח: אם $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, אז $BC = EF$.
ב. הוכח: אם $BC = EF$, אז $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.



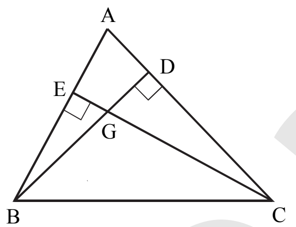
19. נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה A . AB הוא המשיק המשותף לשני המעגלים. BC משיק למעגל אחד בנקודה C , ו- BD משיק למעגל האחר בנקודה D .
CD חותך מעגל אחד בנקודה E ,
ואת המעגל האחר בנקודה F .
הוכח: א. $BC = BD$.
ב. $\sphericalangle CAE = \sphericalangle FAD$.
ג. אם שני המעגלים בעלי רדיוסים שווים, אז $CE = FD$.



20. בציורים מתוארים שני מעגלים שווים הנחתכים בנקודות A ו- B . C נקודה על המעגל השמאלי. המשכי המיתרים CA ו- CB של המעגל השמאלי חותכים את המעגל הימני בנקודות D ו- E בהתאמה.
א. הוכח: $BC = BD$.
ב. הוכח: $AC = AE$.



21. הגבהים BD ו- CE של משולש ABC נפגשים בנקודה G .
הוכח: רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה לרדיוס המעגל החוסם את המשולש GBC .



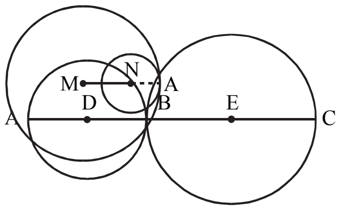
תשובות: 1. 11 ס"מ. **2.** ב. 116° . **6.** א. 96° . **7.** ב. $\frac{1}{2}m$. **9.** א. 6 ס"מ.

מעגלים משיקים

משפט: קטע המרכזים של שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ עובר דרך נקודת ההשקה שבין שני המעגלים.

משפט: כאשר שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים, אז המשכו של קטע המרכזים עובר דרך נקודת ההשקה שבין שני המעגלים.

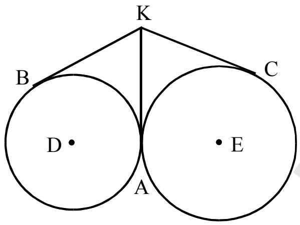
22. שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ.
קוטר המעגל הימני הוא 8 ס"מ
ואורך קטע המרכזים הוא 7 ס"מ.
א. מהו אורך הרדיוס של המעגל השמאלי?
ב. מה יהיה אורך קטע המרכזים אם שני
המעגלים הנ"ל ישיקו מבפנים זה לזה?



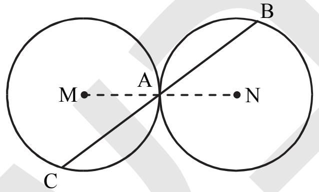
23. נתונים שני מעגלים שרדיוסיהם R_1 ו- R_2 $(R_1 > R_2)$.
כאשר המעגלים משיקים זה לזה מבפנים, אורך קטע המרכזים
הוא 7 ס"מ, וכאשר המעגלים משיקים זה לזה מבחוץ, אורך קטע
המרכזים הוא 15 ס"מ. מצא את R_1 ו- R_2.

24. נתונים שני מעגלים. מרכזו של מעגל הראשון בנקודה O ורדיוסו 4 ס"מ.
מרכזו של המעגל השני בנקודה P ורדיוסו 10 ס"מ.
מצא את המצב ההדדי בין שני המעגלים אם אורכו של קטע המרכזים OP
הוא: א. 6 ס"מ. ב. 14 ס"מ. ג. 7 ס"מ ד. 24 ס"מ. ה. 2 ס"מ.

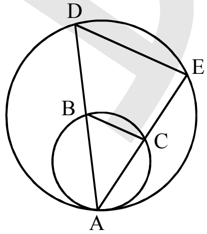
25. המעגלים D ו- E משיקים זה לזה בנקודה A.
הקטע BK משיק למעגל D.
הקטע CK משיק למעגל E.
הקטע AK משיק לשני המעגלים.
א. הוכח: $BK = CK$.
ב. הוכח: הנקודה A נמצאת על הקטע DE.



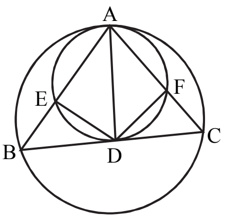
26. המעגלים M ו- N הם בעלי אותו
רדיוס. המעגלים משיקים זה לזה
בנקודה A.
הוכח: $AB = AC$.



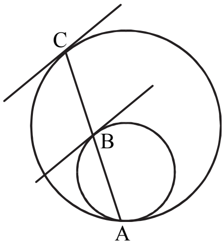
27. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A.
AB ו- AC הם מיתרים במעגל הקטן.
AD ו- AE הם מיתרים במעגל הגדול
(נקודה B נמצאת על הקטע AD
ונקודה C נמצאת על הקטע AE).
הוכח: $BC \parallel DE$.



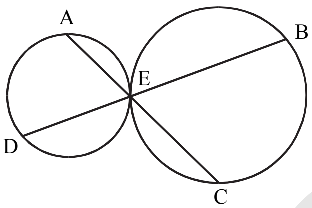
.28 שני מעגלים משיקים מבפנים בנקודה A .
BC הוא מיתר במעגל הגדול המשיק
למעגל הקטן בנקודה D .
המיתרים AB ו- AC חותכים את המעגל
הקטן בנקודות E ו- F בהתאמה.
א. הוכח: $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABC$.
ב. הוכח: $\sphericalangle EAF = \sphericalangle BDE + \sphericalangle CDF$.



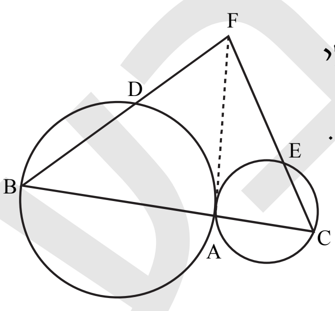
.29 שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A .
AB הוא מיתר במעגל הקטן.
AC הוא מיתר במעגל הגדול.
בנקודה B מעבירים משיק למעגל הקטן.
בנקודה C מעבירים משיק למעגל הגדול.
הוכח: שני המשיקים מקבילים זה לזה.



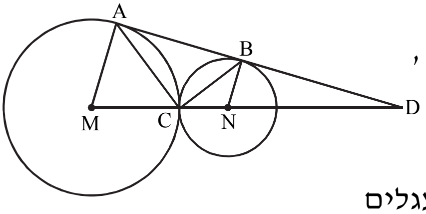
.30 בציור מתוארים שני מעגלים המשיקים
זה לזה מבחוץ בנקודה E .
A ו- D הן נקודות על המעגל השמאלי.
המשכי הקטעים AE ו- DE חותכים
את המעגל הימני בנקודות C ו- B .
א. הוכח: $AD \parallel BC$.
ב. הוכח: המשיק למעגל הימני בנקודה B
מקביל למשיק למעגל השמאלי בנקודה D .



.31 המעגלים שבציור משיקים זה לזה בנקודה A .
AF הוא משיק משותף לשני המעגלים.
דרך A עובר ישר החותך את המעגל השמאלי
בנקודה B ואת המעגל הימני בנקודה C .
את הנקודה F מחברים עם הנקודות B ו- C .
BF ו- CF חותכים את המעגלים בנקודות
D ו- E , בהתאמה (ראה ציור).
א. הוכח: המרובע $ADFE$ ניתן
לחסימה במעגל.
ב. נתון: $\sphericalangle DAE > 90^\circ$.
הוכח: מרכז המעגל שמצאת בסעיף א' נמצא בתוך המשולש DEF .



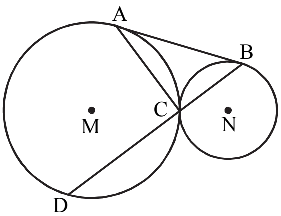
32. המעגלים M ו- N המתוארים בציור משיקים זה לזה בנקודה C. המשיק המשותף לשני המעגלים, העובר דרך נקודה D, נוגע במעגל N בנקודה B ובמעגל M בנקודה A.



א. הוכח: $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

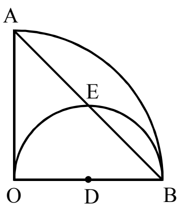
ב. הוכח: המשיק המשותף לשני המעגלים העובר דרך נקודה C חוצה את הקטע AB.

33. המעגלים M ו- N המתוארים בציור משיקים זה לזה בנקודה C. AB הוא המשיק המשותף לשני המעגלים. המשך המיתר BC חותך את מעגל M בנקודה D.



הוכח: נקודה M נמצאת על הקטע AD.

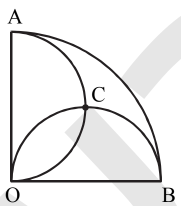
34. על הרדיוס OB של רבע מעגל AOB בנו מעגל D שקוטרו הוא הקטע OB.



א. הוכח: המעגלים משיקים זה לזה בנקודה B.

ב. AB חותך את המעגל D בנקודה E.
הוכח: $AE = BE$.

35. על כל אחד מהרדיוסים OA ו- OB של רבע עיגול בנו חצי מעגל. חצאי מעגלים אלה נפגשים בנקודה C.



א. הוכח: המעגל O משיק לאחד המעגלים בנקודה A ולמעגל האחר בנקודה B.

ב. הוכח כי הנקודות B, A ו- C נמצאות על ישר אחד.

36. הוכח את המשפט: **קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף לשני המעגלים ומאונך לו.**

37. הוכח את המשפט: **נקודות ההשקה של שני מעגלים המשיקים מבחוץ נמצאת על קטע המרכזים.**

38. הוכח את המשפט: **נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים מבפנים נמצאת על המשכו של קטע המרכזים.**

39. שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה A. דרך A מעבירים ישר המשיק לאחד המעגלים. הוכח שהישר הנ"ל משיק גם למעגל השני.

40. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A. דרך A מעבירים ישר המשיק לאחד המעגלים. הוכח שהישר הנ"ל משיק גם למעגל השני.

תשובות: 22. א. 3 ס"מ. ב. 1 ס"מ. **23.** 11 ס"מ $=R_1$, 4 ס"מ $=R_2$.
24. א. משיקים (מפנים). ב. משיקים (מבחוץ). ג. נחתכים. ד. זרים (חיצוניים). ה. זרים (פנימיים).

מצולעים, מצולע משוכלל

משפט: סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור בעל n צלעות הוא $180^\circ(n-2)$.

הגדרה: מצולע שכל צלעותיו שוות באורכן וכל זוויותיו שוות זו לזו נקרא מצולע משוכלל.

מכיוון שבמצולע משוכלל כל הזוויות הפנימיות שוות, הרי גודל כל זווית פנימית במצולע זה הוא $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

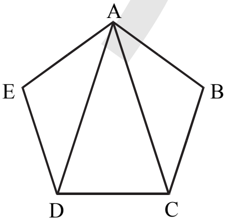
משפט: כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

משפט: בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

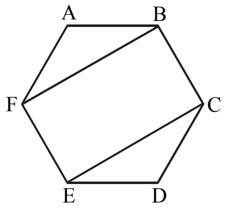
1. חשב את סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור:
א. בעל 5 צלעות. ב. בעל 8 צלעות.
ג. בעל 10 צלעות. ד. בעל 12 צלעות.

2. חשב את גודל הזווית הפנימית במצולע משוכלל שמספר צלעותיו:
א. 8. ב. 10. ג. 12. ד. 5.

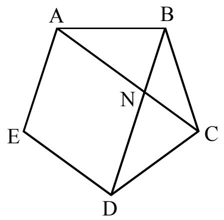
3. AC ו- AD הם אלכסונים במחומש משוכלל.
א. הוכח: $AD = AC$.
ב. הוכח: המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים.



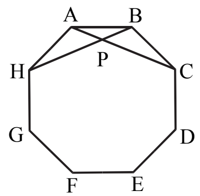
4. ABCDEF הוא משושה משוכלל.
הוכח: המרובע BCEF
הוא מלבן.



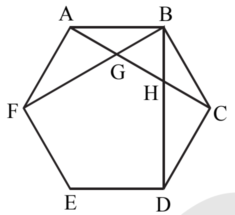
5. ABCDE הוא מחומש משוכלל.
האלכסונים BD ו- AC נחתכים
בנקודה N .
א. חשב את הזווית BNC .
ב. הוכח: המרובע AEDN הוא מעוין.



6. ABCDEFGH הוא מתומן משוכלל.
האלכסונים AC ו- BH נחתכים
בנקודה P .
הוכח: $\sphericalangle CPH = \sphericalangle ABC$.



7. ABCDEF הוא משושה משוכלל.
AC , BD ו- BF הם אלכסונים במשושה.
הוכח שהמשולש BGH
הוא שווה-צלעות.

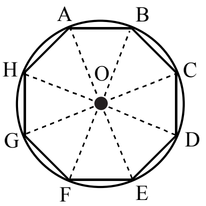


8. הנקודה F נמצאת באמצע הצלע AB של מחומש משוכלל ABCDE .
הוכח: $FD \perp EC$.

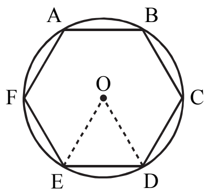
9. סכום זוויותיו פנימיות של מצולע משוכלל הוא 1800° .
מהו גודל כל זווית פנימית במצולע?

10. א. במצולע משוכלל יש n צלעות.
הבע באמצעות n את גודלה של כל זווית פנימית במצולע.
ב. נתונים שני מצולעים משוכללים. מספר הצלעות במצולע הראשון
גדול פי 2 ממספר הצלעות במצולע השני וכל זווית פנימית במצולע
הראשון גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מכל זווית פנימית במצולע השני.
כמה צלעות יש בכל מצולע?

11. מתומן משוכלל ABCDEFGH
חסום במעגל שמרכזו בנקודה O .
א. חשב את הזווית AOB .
ב. חשב את הזווית ABC .

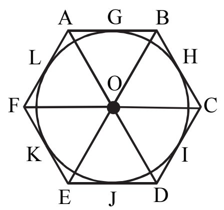


12. א. הוכח: רדיוס המעגל החוסם משושה
משוכלל שווה לצלע המשושה.
ב. ABCDEF הוא משושה החסום במעגל
שמרכזו בנקודה O ורדיוסו 5 ס"מ.
חשב את היקף המשושה.

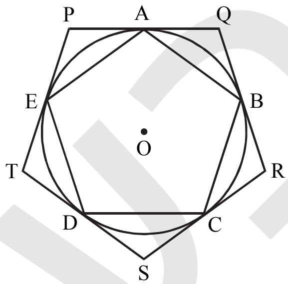


13. ABCDEFGH הוא מתומן (לא משוכלל) החסום במעגל.
הוכח: $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E + G = 540^\circ$.

14. ABCDEF הוא משושה משוכלל החוסם
מעגל שמרכזו בנקודה O . הנקודות
G , H , I , J , K , L הן נקודות השקה.
א. חשב את זוויותיו של המשולש BGH .
ב. חשב את זוויותיו של המשולש AOF .
ג. חשב את זוויותיו של המשולש OJE .



15. מעגל שמרכזו O חסום בתוך מחומש
משוכלל PQRST . מחיבור נקודות
ההשקה מתקבל מחומש משוכלל
ABCDE , החסום במעגל O .
א. חשב את הזווית ABQ .
ב. הוכח: $OR \perp CB$.

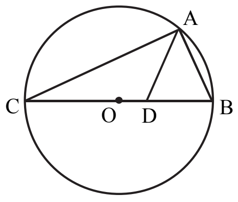


תשובות: 1. א. 540° . ב. 1080° . ג. 1440° . ד. 1800° . **2.** א. 135° . ב. 144° .
ג. 150° . ד. 108° . **5.** א. 108° . **9.** 150° . **10.** א. $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. ב. 10, 5 .
11. א. 45° . ב. 67.5° . **12.** ב. 30 ס"מ. **14.** א. 120°, 30°, 30° .
ב. 60°, 60°, 60° . ג. 30°, 90°, 60° . **15.** א. 36° .

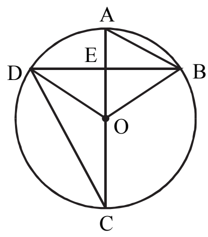
מעגל – בעיות עם שטחים של משולשים ומרובעים

תרגילים

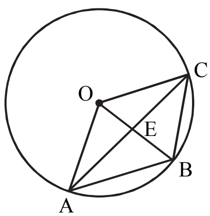
1. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O
כך ש- BC הוא קוטר במעגל.
D היא נקודה על הרדיוס OB.
נתון: $BD = 2\cdot OD$, $S_{\Delta ADC} =$ 12 סמ"ר.
חשב את $S_{\Delta ABD}$.



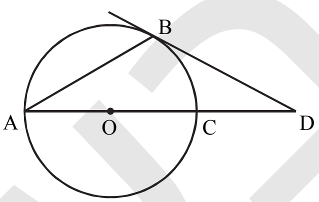
2. AC הוא קוטר ו- BD הוא מיתר
במעגל שמרכזו O.
נתון: $BD \perp AC$.
א. הוכח: $S_{ABO} = S_{DOC}$.
ב. הוכח: $S_{ABOD} = S_{ADC}$.



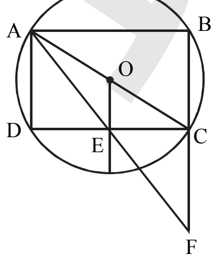
3. הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O.
AC חוצה את הזווית OAB.
א. הוכח: $OC \parallel AB$.
ב. הוכח: $S_{AOB} = S_{ACB}$.
ג. הוכח: $S_{AOE} = S_{BCE}$.



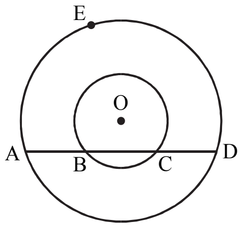
4. AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
BD משיק למעגל בנקודה B.
נתון: $\angle D = 30^\circ$, $S_{\Delta ABD} =$ 15 סמ"ר.
חשב את $S_{\Delta BCD}$.



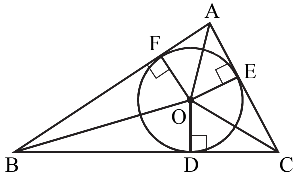
5. קדקודיו של מלבן ABCD נמצאים
על מעגל שמרכזו O. הנקודה E
נמצאת על הצלע DC כך ש- $OE \perp DC$.
המשכי הקטעים AE ו- BC
נפגשים בנקודה F.
הוכח: $S_{\Delta ACF} = 4\cdot S_{\Delta OCE}$.



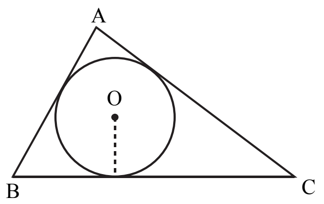
6. נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
AD הוא מיתר במעגל החיצוני
ו- BC הוא מיתר במעגל הפנימי.
E נקודה כלשהי על המעגל החיצוני
(ראה ציור). הוכח: $S_{\Delta ACE} = S_{\Delta BDE}$.



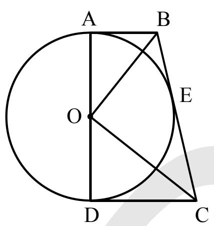
7. במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו בנקודה O.
א. הוכח: שטח המשולש שווה למחצית
מכפלת היקף המשולש ברדיוס המעגל.
ב. נתון שהיקף המשולש הוא 18 ס"מ
ושטחו 12 סמ"ר. מהו רדיוס המעגל?



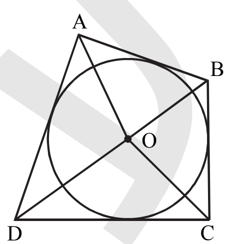
8. היקפו של משולש ABC הוא 15 ס"מ.
רדיוס המעגל החסום במשולש
שווה ל- 2 ס"מ.
חשב את שטח המשולש.



9. AD הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
AB ו- DC הם משיקים למעגל.
הקטע BC משיק למעגל בנקודה E.
א. הוכח: $S_{BOC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.
ב. הוכח: $S_{ABCD} = OB \cdot OC$.

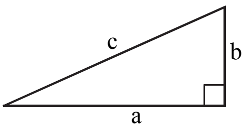


10. בתוך מרובע ABCD חסום מעגל שמרכזו
בנקודה O.
א. הוכח: $S_{AOB} + S_{DOC} = S_{AOD} + S_{BOC}$.
ב. נתון כי שטח המרובע הוא S
ורדיוס המעגל הוא r.
הבע באמצעות S ו- r את היקף המרובע.



תשובות: 1. 6 סמ"ר. **4.** 5 סמ"ר. **7.** ב. $1\frac{1}{3}$ ס"מ. **8.** 15 סמ"ר. **10.** ב. $\frac{2S}{r}$.

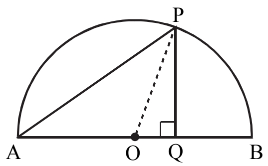
מעגל – בעיות עם משפט פיתגורס



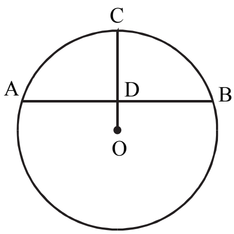
משפט פיתגורס: במשולש ישר-זווית
סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
אם a ו- b הם הניצבים ו- c הוא היתר,
אז מתקיים: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

המשפט ההפוך למשפט פיתגורס: אם סכום ריבועי שתי צלעות במשולש שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש הוא ישר-זווית והזווית שמול הצלע השלישית (הצלע גדולה) היא זווית ישרה.

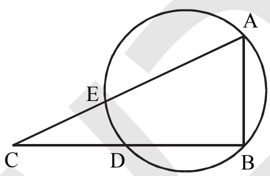
1. לפניך חצי עיגול שרדיוסו 6 ס"מ,
ומרכזו בנקודה O.
נתון: $AQ = 8$ ס"מ, $PQ \perp AB$.
חשב את שטח המשולש AOP.



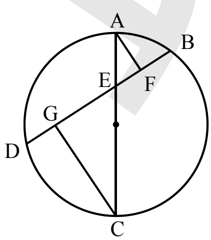
2. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו בנקודה O.
הרדיוס OC מאונך למיתר AB.
נתון: $AB = 12$ ס"מ, $DC = 4$ ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל.



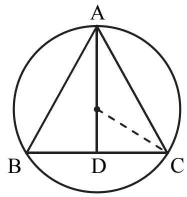
3. הנקודות A, B ו- D נמצאות על מעגל.
נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BD = 8$ ס"מ,
$AD = 10$ ס"מ, $CD = 7$ ס"מ.
א. הוכח: AD הוא קוטר במעגל.
ב. חשב את היקף המשולש ADC.



4. במעגל שרדיוסו 6 ס"מ המיתר BD
חותך את הקוטר AC בנקודה E.
מהנקודות A ו- C מורידים אנכים AF
ו- CG למיתר BD. נתון: $\sphericalangle GCE = 30^\circ$.
נתון: $GE = 2EF$. חשב את שטח המשולש CGE.

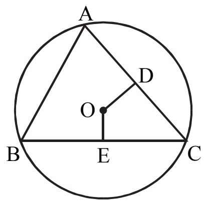


.5 ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$
שאורך בסיסו הוא 24 ס״מ.
אורכו של הגובה לבסיס המשולש הוא 18 ס״מ.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

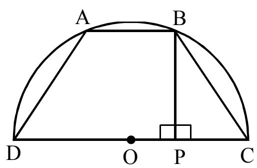


.6 הגובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא h .
רדיוס המעגל החוסם את המשולש הוא R .
הבע באמצעות h ו- R את אורכי צלעות המשולש.

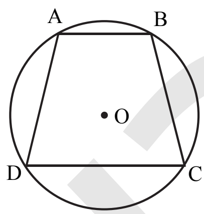
.7 משולש חד זווית ABC חסום במעגל O .
אורך הצלע AC הוא 21 ס״מ ומרחקה
ממרכז המעגל הוא 8 ס״מ. מרחק הצלע
BC ממרכז המעגל הוא 4.5 ס״מ.
חשב את אורך הצלע BC .



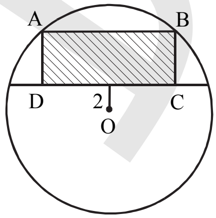
.8 בחצי עיגול שקוטרו 18 ס״מ חוסמים
טרפז $ABCD$. BP הוא אנך לקוטר CD .
O – מרכז המעגל. נתון: $BC =$ 10 ס״מ .
א. חשב את אורך הקטע OP .
ב. חשב את שטח הטרפז.



.9 הטרפז $ABCD$ $(AB \| DC)$ חסום במעגל
שמרכזו בנקודה O ורדיוסו 10 ס״מ.
נתון: $AB =$ 12 ס״מ , $DC =$ 16 ס״מ .
חשב את גובה הטרפז.



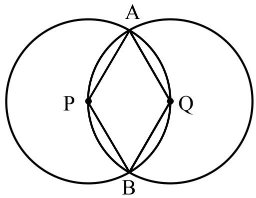
.10 במעגל שרדיוסו 12 ס״מ עובר מיתר
במרחק 2 ס״מ מהמרכז. במקטע שנוצר
חסום מלבן $ABCD$. נתון: $AB =$ 16 ס״מ .
חשב את שטח המלבן $ABCD$.



11. שני מעגלים שווים, שמרכזיהם בנקודות P ו- Q, נחתכים בנקודות A ו- B כך שמרכזו של כל מעגל נמצא על היקף המעגל האחר.

א. הוכח שהמרובע APBQ הוא מעוין וחשב את זוויותיו.

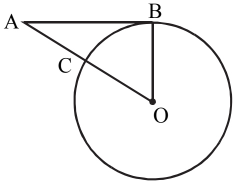
ב. נתון שרדיוס כל אחד מהמעגלים הוא 8 ס״מ. חשב את שטח המרובע APBQ.



12. AB משיק למעגל שמרכזו בנקודה O.

נתון: AB = 12 ס״מ, AC = 6 ס״מ.

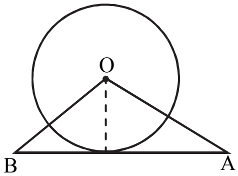
חשב את רדיוס המעגל.



13. הקטע AB משיק למעגל שמרכזו בנקודה O.

נתון: OB = 10 ס״מ, OA = 14 ס״מ, AB = 16 ס״מ.

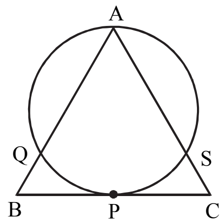
מצא את רדיוס המעגל.



14. המשולש ABC הוא שווה-צלעות.

הצלע BC משיקה למעגל בנקודה P,
והצלעות AB ו- AC חותכות את המעגל בנקודות Q ו- S בהתאמה.

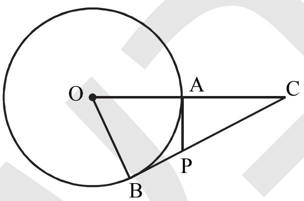
נתון: BP = CP. הוכח: AQ = 1.5PC.



15. PA ו- PB הם שני משיקים למעגל שמרכזו O. המשכי המשיק BP והרדיוס OA נחתכים בנקודה C.

נתון: AC = 12 ס״מ, BP = 5 ס״מ.

חשב את רדיוס המעגל.



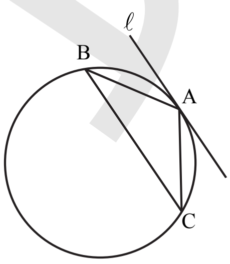
16. הישר ℓ משיק למעגל בנקודה A.

המיתר BC מקביל לישר ℓ.

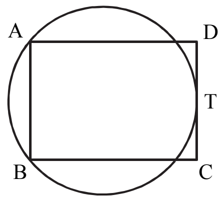
אורך הקוטר של המעגל הוא 13 ס״מ.

המרחק בין הישר המשיק למיתר המקביל לו הוא 4 ס״מ.

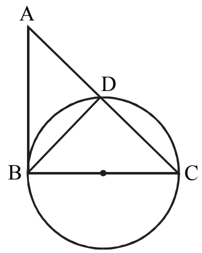
חשב את שטח המשולש ABC.



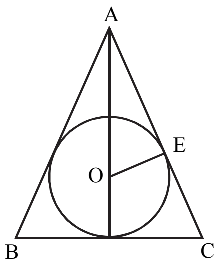
.17 למעגל שרדיוסו 5 ס״מ מעבירים משיק בנקודה T .
המיתר AB מקביל למשיק זה.
מהנקודות A ו- B מורידים אנכים
למשיק כך שנוצר מלבן ABCD .
נתון: $AB = 6$ ס״מ .
חשב את שטח המלבן ABCD .



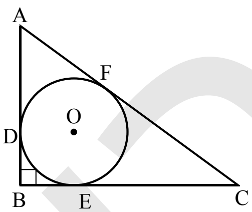
.18 BC הוא קוטר במעגל.
AB משיק למעגל בקודה B .
נתון: $AB = 6$ ס״מ , $BC = \sqrt{45}$ ס״מ .
חשב את אורך הקטע AD .



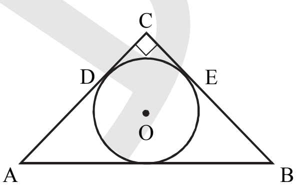
.19 במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$
נתון: $AB = 39$ ס״מ , $BC = 30$ ס״מ .
בתוך המשולש חסום מעגל שמרכזו O .
חשב את רדיוס המעגל.



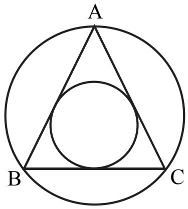
.20 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(AB \perp BC)$.
הנקודה O היא מרכז המעגל החסום בתוך
המשולש. D , E ו- F הן נקודות ההשקה.
נתון: $AB = 12$ ס״מ , $BC = 16$ ס״מ .
חשב את רדיוס המעגל.



.21 המשולש ABC הוא ישר-זווית ושווה-שוקיים
$(AC = BC)$. בתוך המשולש חסום מעגל
שמרכזו O . D ו- E הן נקודות השקה.
נתון: $BC = 10$ ס״מ .
חשב את רדיוס המעגל.

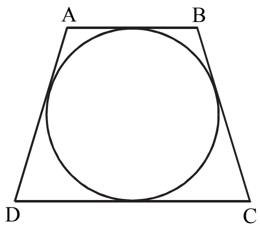


22. ABC הוא משולש שווה-צלעות שצלעו 30 ס"מ.
א. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.
ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

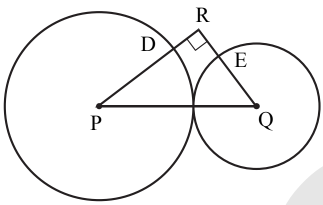


23. במעוין שאורכי אלכסוניו 16 ס"מ ו- 12 ס"מ חסום מעגל.
חשב את רדיוס המעגל.

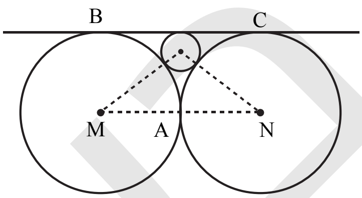
24. המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה-שוקיים $(AD = BC \ , \ AB \parallel DC)$ החוסם מעגל.
נתון: $AB = k \ , \ DC = m$.
הבע את רדיוס המעגל באמצעות k ו- m.



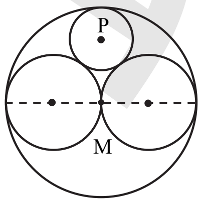
25. שני מעגלים, שמרכזיהם P ו- Q, משיקים מבחוץ זה לזה.
R היא נקודה מחוץ לשני המעגלים כך ש- $PR \perp QR$. נתון: $PQ =$ 10 ס"מ, $RD = RE =$ 2 ס"מ. חשב את הרדיוס של כל אחד משני המעגלים.



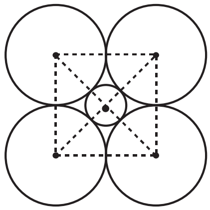
26. שני מעגלים שווים שמרכזיהם M ו- N ורדיוסם 8 ס"מ, משיקים זה לזה בנקודה A. הישר BC הוא משיק משותף לשני המעגלים. מעגל שלישי משיק לשני המעגלים הנתונים ולמשיק המשותף להם.
חשב את רדיוס המעגל השלישי.



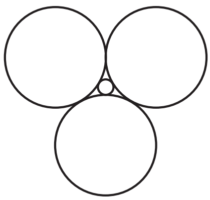
27. על קוטר במעגל M שרדיוסו R בנויים שני מעגלים שווים המשיקים זה לזה ומשיקים למעגל M. מעגל שלישי P משיק לשני המעגלים הבנויים ולמעגל M.
הבע באמצעות R את רדיוס המעגל P.



28. ארבעה מעגלים שווים, שמחוגו של כל אחד מהם 6 ס״מ, משיקים האחד לשני. מצא את המחוג של המעגל הפנימי המשיק לכל אחד מארבעת המעגלים.



29. שלושה מעגלים שווים, שמחוגו של כל אחד מהם R , משיקים האחד לשני. הבע באמצעות R את המחוג של המעגל הפנימי המשיק לכל אחד משלושת המעגלים.



תשובות: **1.** $3\sqrt{32}$ סמ״ר. **2.** 6.5 ס״מ. **3.** ב. 33.155 ס״מ. **4.** $8\sqrt{3}$ סמ״ר. **5.** 13 ס״מ. **6.** $2\sqrt{2Rh-h^2}$, $\sqrt{2Rh}$, $\sqrt{2Rh}$. **7.** 24.82 ס״מ. **8.** א. $3\frac{4}{9}$ ס״מ. ב. 103.47 סמ״ר. **9.** 14 ס״מ. **10.** 111.11 סמ״ר. **11.** א. 120° , 60° , 120° , 60° . ב. $32\sqrt{3}$ סמ״ר. **12.** 9 ס״מ. **13.** $5\sqrt{3}$ ס״מ. **15.** 7.5 ס״מ. **16.** 24 סמ״ר. **17.** 54 סמ״ר. **18.** 4 ס״מ. **19.** 10 ס״מ. **20.** 4 ס״מ. **21.** 2.929 ס״מ. **22.** א. $\sqrt{75}$ ס״מ. ב. $\sqrt{300}$ ס״מ. **23.** 4.8 ס״מ. **24.** $\frac{1}{2}\sqrt{mk}$. **25.** 6 ס״מ, 4 ס״מ. **26.** 2 ס״מ. **27.** $\frac{R}{3}$. **28.** $6(\sqrt{2}-1)$ ס״מ. **29.** 0.1547R .

היקף מעגל ושטחו, אורך קשת ושטח גיזרה

היקף עיגול שרדיוסו R נתון בנוסחה: $\mathbf{P = 2\pi R}$ **היקף עיגול**

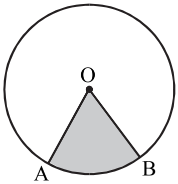
שטח עיגול שרדיוסו R נתון בנוסחה: $\mathbf{S = \pi R^2}$ **שטח עיגול**

תרגילים

1. א. חשב את היקפו ואת שטחו של עיגול שרדיוסו 5 ס״מ.
ב. חשב את היקפו ואת שטחו של עיגול שרדיוסו 3 ס״מ.

2. א. היקפו של עיגול הוא 20π ס״מ. חשב את שטח העיגול.
ב. שטחו של עיגול הוא 81π סמ״ר. חשב את היקף העיגול.

3. בציור מתואר מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו 8 ס"מ. נתון: $\sphericalangle AOB = 70^\circ$.
חשב את שטח הגיזרה הנוצרת (השטח האפור).



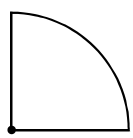
4. נתון מעגל שרדיוסו 3 ס"מ. חשב את שטח הגיזרה המתאימה לזווית מרכזית שגודלה: א. 45°. ב. 120°. ג. 225°.

5. נתון מעגל שרדיוסו 4 ס"מ. חשב את אורך הקשת המתאימה לזווית מרכזית שגודלה: א. 60°. ב. 150°. ג. 270°.

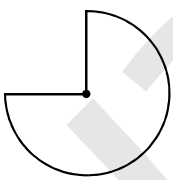
6. נתון מעגל שרדיוסו 6 ס"מ. חשב את הזווית המרכזית המתאימה לקשת:
א. שאורכה 10 ס"מ. ב. שאורכה 21 ס"מ. ג. שאורכה 30 ס"מ.

7. הרדיוס של מעגל הוא 5 ס"מ. חשב את הזווית המרכזית המתאימה לגיזרה: א. ששטחה 20 סמ"ר. ב. ששטחה 45 סמ"ר.

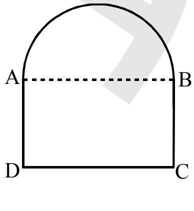
8. רדיוסו של $\frac{1}{4}$ עיגול הוא 8 ס"מ.
א. חשב את היקפו של $\frac{1}{4}$ העיגול (הקשת + שני הרדיוסים).
ב. חשב את שטחו של $\frac{1}{4}$ העיגול.



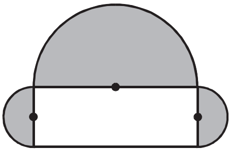
9. היקפו של $\frac{3}{4}$ עיגול (הקשת + שני הרדיוסים) הוא 53.7 ס"מ.
א. חשב את רדיוס העיגול.
ב. חשב את השטח של $\frac{3}{4}$ העיגול.



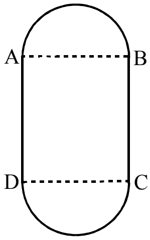
10. חלון מורכב מחצי עיגול וממלבן ABCD.
נתון: $AD = 10$ ס"מ.
שטח החלון הוא 653.25 סמ"ר.
חשב את היקף המסגרת החיצונית של החלון.



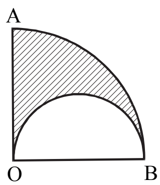
.11 חלון מורכב ממלבן ומשלושה חצאי עיגולים.
שני חצאי עיגולים בנויים על רוחב המלבן
וחצי עיגול נוסף בנוי על אורך המלבן.
במלבן שמו זכוכית שקופה, ובשלושת חצאי
העיגולים שמו זכוכית אטומה. אורך המלבן
הוא 18 ס״מ. שטח הזכוכית האטומה הוא
56.5π סמ״ר. חשב את רוחב המלבן.



.12 חלון מורכב ממלבן ומשני חצאי עיגול (ראה ציור).
אורך הצלע AD גדול פי 2 מאורך הצלע AB.
שטח החלון הוא 278.5 סמ״ר.
חשב את היקף המסגרת החיצונית
של החלון.



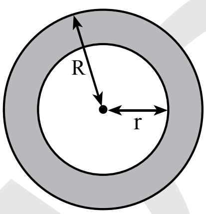
.13 בתוך רבע עיגול שרדיוסו $OB = R$
חסום חצי מעגל ש- OB הוא קוטרו.
השטח המקווקו הוא 4.5π סמ״ר.
חשב את R.



טבעת

טבעת – צורה הכלואה על ידי שני מעגלים בעלי אותו מרכז.

שטח הטבעת הוא ההפרש בין שטחי העיגולים.
כאשר הרדיוסים של המעגלים הכולאים
את הטבעת הם R ו- r $(R > r)$,
שטח הטבעת הוא: $S = \pi R^2 - \pi r^2$ **שטח טבעת**

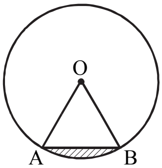


.14 טבעת בנויה משני עיגולים בעלי אותו מרכז. רדיוס העיגול הפנימי
הוא 10 ס״מ. שטח הטבעת הוא 44π סמ״ר.
חשב את רדיוס העיגול החיצוני.

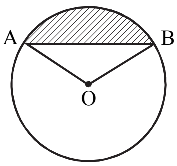
.15 היקף טבעת (כולל החלק הפנימי) הוא 34π ס״מ ושטחה 51π סמ״ר.
חשב את הרדיוסים של כל אחד משני המעגלים שיוצרים את הטבעת.

מקטע – חלק מהעיגול המוגבל על-ידי קשת והמיתר המתאים לה.

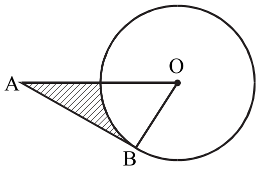
16. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו בנקודה O.
נתון: $AO=8$ ס״מ , $\sphericalangle AOB=60^\circ$.
א. חשב את שטח המשולש AOB.
ב. חשב את שטח המקטע הנוצר (השטח המקווקו).



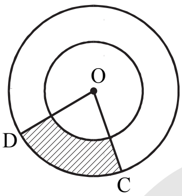
17. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו בנקודה O.
נתון: $AO=R$ ס״מ , $\sphericalangle AOB=120^\circ$.
שטח המקטע הנוצר (השטח המקווקו) הוא 22 סמ״ר. מצא את R.



18. AB משיק למעגל O בנקודה B.
נתון: $AO=10$ ס״מ , $AB=5\sqrt{3}$ ס״מ.
חשב את השטח המקווקו.



19. נתונים שני מעגלים בעלי אותו מרכז.
רדיוס המעגל הפנימי הוא 6 ס״מ
ורדיוס המעגל החיצוני הוא 10 ס״מ.
נתון: $\sphericalangle DOC=80^\circ$.
חשב את השטח המקווקו.

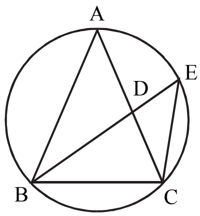


תשובות: 1. א. 10π ס״מ, 25π סמ״ר. ב. 6π ס״מ, 9π סמ״ר.
2. א. 100π סמ״ר. ב. 18π ס״מ. **3.** 39.1 סמ״ר. **4.** א. 3.534 סמ״ר.
ב. 9.425 סמ״ר. ג. 17.67 סמ״ר. **5.** א. 4.189 ס״מ. ב. 10.47 ס״מ.
ג. 18.85 ס״מ. **6.** א. 95.49°. ב. 200.54°. ג. 286.48°. **7.** א. 91.67°. ב. 206.26°.
8. א. $4\pi+16$ ס״מ. ב. 16π סמ״ר. **9.** א. 8 ס״מ. ב. 48π סמ״ר. **10.** 97.1 ס״מ.
11. 8 ס״מ. **12.** 71.4 ס״מ. **13.** 6 ס״מ. **14.** 12 ס״מ. **15.** 10 ס״מ, 7 ס״מ.
16. א. 27.71 סמ״ר. ב. 5.8 סמ״ר. **17.** 5.985 ס״מ. **18.** 8.561 סמ״ר.
19. 44.68 סמ״ר.

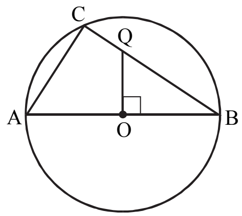
מעגל – בעיות עם דמיון משולשים

בפרק זה נדון בבעיות הכוללות מעגלים ודמיון משולשים.

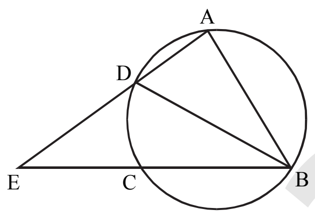
1. הנקודות A , B , C ו- E נמצאות על מעגל כך ש- BE חוצה את הזווית ABC .
AC ו- BE נפגשים בנקודה D .
א. הוכח: $\Delta EBC \sim \Delta ABD$.
ב. נתון: $BC = 6$ ס״מ , $AB = 8$ ס״מ , $BE = 9$ ס״מ . חשב את אורך הקטע DE .



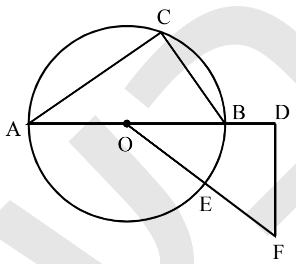
2. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
נתון: $OQ \perp AB$.
א. הוכח: $OQ \cdot BC = AO \cdot AC$.
ב. נתון: $BQ = 8$ ס״מ , $CQ = 1$ ס״מ .
חשב את רדיוס המעגל.



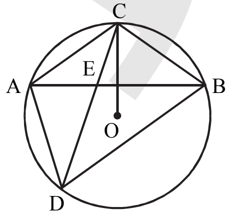
3. הנקודות A , B , C ו- D נמצאות על מעגל.
D היא אמצע הקשת AC , $\measuredangle E = \frac{1}{2}\measuredangle ABE$.
א. הוכח: $AB^2 = AD \cdot AE$.
ב. נתון: $AD = 4$ ס״מ , $DE = 5$ ס״מ .
חשב את אורכי הקטעים AB ו- BE .



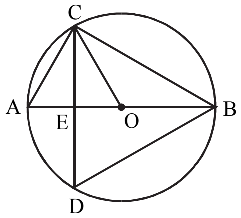
4. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O .
AB הוא קוטר במעגל.
נתון: $\overset{\frown}{BC} = 2 \cdot \overset{\frown}{BE}$, $OD \perp DF$.
א. הוכח: $\Delta ACB \sim \Delta ODF$.
ב. נתון: $BC = 6$ ס״מ , $AC = 8$ ס״מ , $AD = 13$ ס״מ . הוכח: $\Delta ACB \cong \Delta ODF$.



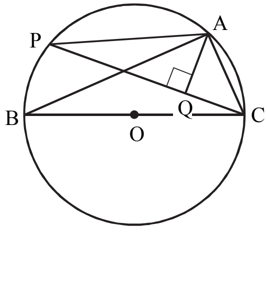
5. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O .
הרדיוס OC מאונך למיתר AB .
המיתרים AB ו- DC נפגשים בנקודה E .
א. הוכח: $\Delta DCA \sim \Delta DBE$.
ב. הוכח: אם $\measuredangle DAE = \measuredangle DEA$, אז $AC = BE$.



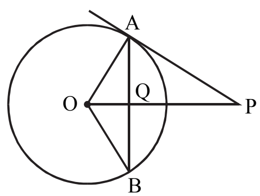
6. הקוטר AB של מעגל שמרכזו בנקודה O
חוצה את המיתר CD בנקודה E.
א. הוכח: $\Delta DBC \sim \Delta AOC$.
ב. נתון גם: $AC = AO$.
הוכח: $S_{\Delta BDE} = 1\frac{1}{2} S_{\Delta AOC}$.



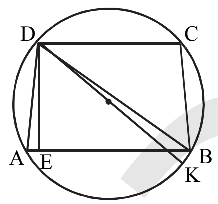
7. BC הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
נתון: $AQ \perp PC$, $AQ = 8$ ס"מ,
$AC = 12$ ס"מ, $AP = 16$ ס"מ.
א. חשב את רדיוס המעגל.
ב. מהו גודל הזווית ABC?



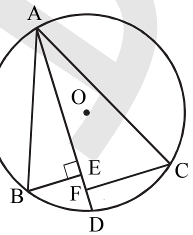
8. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.
הנקודה Q היא אמצע המיתר AB.
נתון: $BQ^2 = QO \cdot PQ$.
א. הוכח: AP משיק למעגל בנקודה A.
ב. הוכח: $BO^2 = PO \cdot QO$.



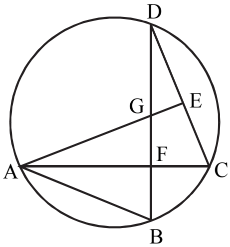
9. טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ חסום במעגל.
נתון: $CD = 6$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ.
גובה הטרפז הוא $DE = 7$ ס"מ.
DK הוא קוטר במעגל.
א. הוכח: $\Delta ADE \sim \Delta KDB$.
ב. חשב את רדיוס המעגל.



10. הנקודות A, B ו-C מונחות על מעגל שמרכזו O.
הנקודה D היא אמצע הקשת BC (הקטנה)
הנקודה A מונחת על הקשת BC (הגדולה).
נתון: $CF \perp AD$, $BE \perp AD$.
הנקודה E מונחת בין הנקודות A ו-F.
א. הוכח: $\Delta ABE \sim \Delta ACF$.
ב. הוכח: $BE < CF$.



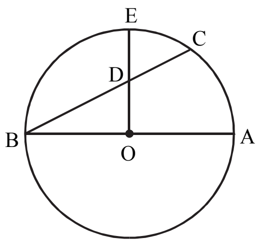
.11 A, B, C ו- D הן נקודות על מעגל. AC ו- BD נחתכים בנקודה F. G היא נקודה על BD כך ש- $AG = AB$. המשך AG חותך את DC בנקודה E. נתון: $BF = GF$.



א. הוכח: $\Delta AEC \sim \Delta DFC$.

ב. נתון: $EC = a$, $DF = c$, $AE = m$.
הבע את שטח המשולש DFC באמצעות a, c ו- m.

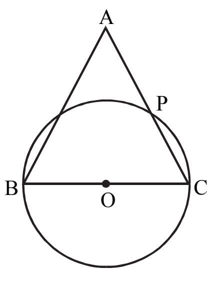
.12 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. D היא נקודת החיתוך של הרדיוס EO עם המיתר BC. נתון: $EO \perp AB$.



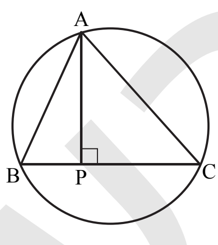
א. הוכח: $R^2 = \frac{BD \cdot BC}{2}$.

ב. נתון גם $OD = DE$.
הבע באמצעות R את אורך הקטע DC.

.13 BC הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O. המשולש ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
הוכח: $2 \cdot AB \cdot PC = BC^2$.



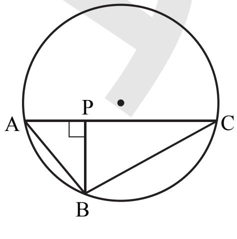
.14 משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R. AP הוא הגובה לצלע BC. הצלעות במשולש הן a, b ו- c.



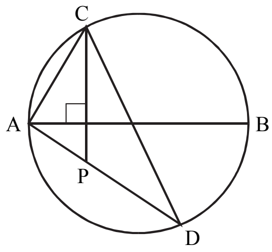
א. הוכח: $\frac{AP}{b} = \frac{c}{2R}$.

ב. הוכח ששטח המשולש ABC הוא $S = \frac{abc}{4R}$.

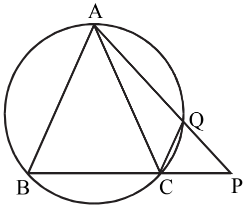
.15 משולש ABC חסום במעגל. BP הוא הגובה לצלע AC.
נתון: $BP = 16$ ס"מ, $AP = 12$ ס"מ, $PC = 30$ ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל.



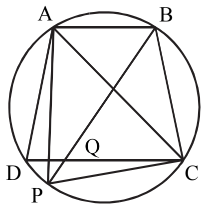
16. AB הוא קוטר במעגל. C ו- D נקודות על המעגל. P נקודה על AD.
CP מאונך לקוטר AB.
א. הוכח: $AC^2 = AP \cdot AD$.
ב. נתון: $AP =$ 18 ס״מ, $AD =$ 32 ס״מ, $CD =$ 40 ס״מ.
חשב את רדיוס המעגל.



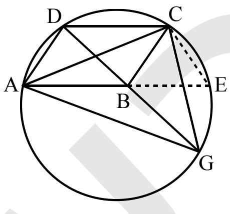
17. המשולש ABC הוא משולש שווה-שוקיים החסום במעגל $(AB = AC)$.
המשכי המיתרים AQ ו- BC נפגשים בנקודה P.
הוכח: $\Delta ACQ \sim \Delta APC$.



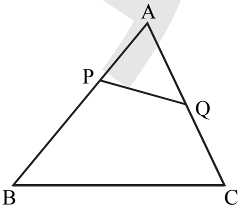
18. המרובע $ABCD$ הוא טרפז החסום במעגל $(AB \parallel CD)$. Q היא נקודת החיתוך של המיתרים BP ו- CD.
הוכח: $\Delta APC \sim \Delta BCQ$.



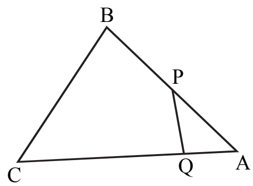
19. המרובע $ABCD$ הוא מקבילית, שזוויתו A היא זווית חדה. המעגל, העובר דרך הקדקודים C, A ו- D חותך את המשך הצלע AB בנקודה E, ואת המשך האלכסון BD בנקודה G.
א. הוכח: $CE = AD$.
ב. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta GAC$.



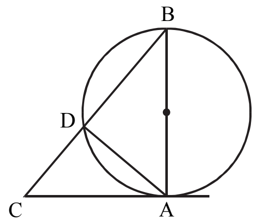
20. בציור נתון: $AQ =$ 10 ס״מ, $AP =$ 8 ס״מ, $AB =$ 25 ס״מ, $AC =$ 20 ס״מ.
א. הוכח: $\Delta APQ \sim \Delta ACB$.
ב. הוכח כי ניתן לחסום במעגל את המרובע $BPQC$.



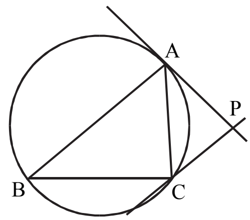
.21 בציור שלפניך נתון: $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$.
א. הוכח כי ניתן לחסום במעגל
את המרובע BPQC .
ב. הוכח: $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC$.



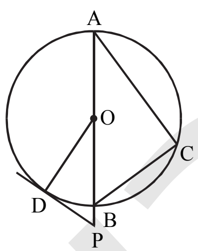
.22 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ,
ו- AC משיק למעגל בנקודה A .
א. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta CAD$.
ב. הוכח: $AD^2 = BD \cdot CD$.



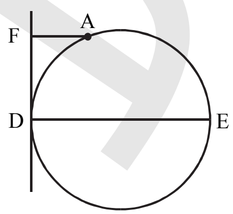
.23 המשולש ABC חסום במעגל.
AP משיק למעגל בנקודה A .
CP מקביל לצלע AB .
א. הוכח: $AC^2 = AB \cdot PC$.
ב. נתון: $AC > PC$.
הוכח: $BC > AP$.



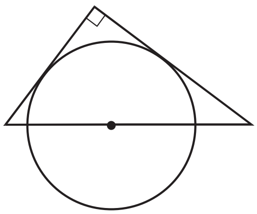
.24 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
PD משיק למעגל בנקודה D .
נתון: $\frac{DP}{BC} = \frac{OD}{AC}$
א. הוכח: $\frac{DP}{BC} = \frac{OP}{AB}$.
ב. הוכח: $\overset{\frown}{BC} = 2 \cdot \overset{\frown}{BD}$.



.25 DE הוא קוטר במעגל. בנקודה D
מעבירים משיק למעגל. נתון: $AF \parallel DE$.
א.הוכח: $AD^2 = AF \cdot DE$.
ב. נתון: $AF =$ 4 ס"מ , $DE =$ 9 ס"מ .
חשב את שטח הטרפז AFDE .



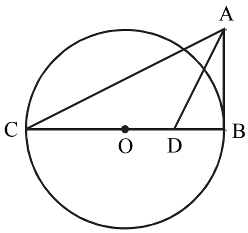
.26 אורכי ניצביו של משולש ישר-זווית הם 3 ס״מ ו- 4 ס״מ. מעגל שמרכזו על היתר משיק לשני ניצבי המשולש. מהו אורך מחוג המעגל?



.27 BC הוא קוטר במעגל שמרכזו O. הקטע AB משיק למעגל ואורכו שווה לרדיוס המעגל. הנקודה D נמצאת באמצע הרדיוס OB.

א. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta CBA$.

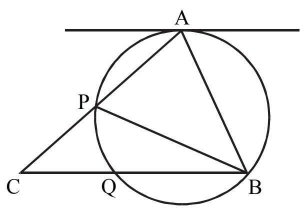
ב. הוכח: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BAC$.



.28 המשכי המיתרים AP ו- BQ נפגשים בנקודה C. BC מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה A.

א. הוכח: $AB^2 = AP \cdot AC$.

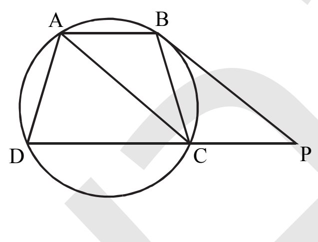
ב. הוכח: אם $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta BCP}$, אז $AC = \sqrt{2} \cdot AB$.



.29 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$ החסום במעגל. BP משיק למעגל בנקודה B. הנקודות D, C ו- P נמצאות על ישר אחד.

נתון: $AB = a$, $CP = b$.

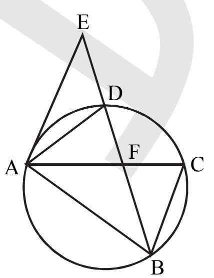
הבע באמצעות a ו- b את אורך השוק AD.



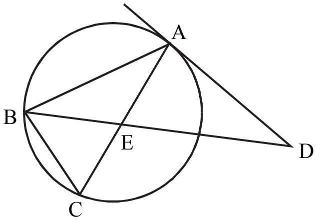
.30 הנקודות A, B, C ו- D נמצאות על מעגל כך שהנקודה C היא אמצע הקשת DB. המשיק למעגל בנקודה A נפגש עם המשך המיתר BD בנקודה E.

א. הוכח: $DE \cdot AB = AD \cdot AE$.

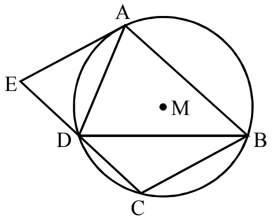
ב. הוכח: $BC^2 = AC \cdot CF$.



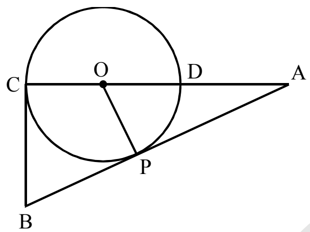
.31 ABC הוא משולש החסום במעגל.
AD משיק למעגל בנקודה A .
BD חותך את AC בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDA$.
הוכח: $AB \cdot AE = AD \cdot BE$.



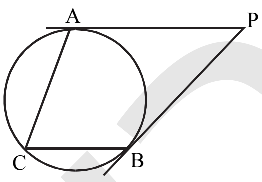
.32 המרובע $ABCD$ חסום במעגל שמרכזו M .
AE משיק למעגל בנקודה A .
נתון: $AE \parallel BC$.
הוכח: $\frac{DE}{AE} = \frac{AD}{AB}$.



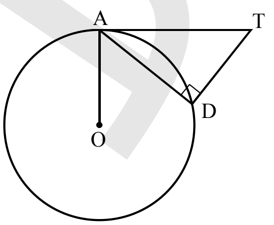
.33 BP ו- BC הם משיקים למעגל שמרכזו O .
המשכי המשיק BP והקוטר CD
נחתכים בנקודה A .
נתון: $CB = 8$ ס"מ , $AP = 9$ ס"מ .
חשב את רדיוס המעגל.



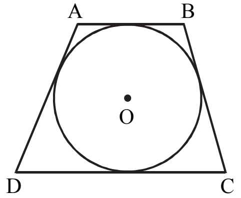
.34 PA ו- PB הם שני משיקים למעגל.
BC מקביל למשיק AP .
א. הוכח: $AC^2 = BC \cdot AP$.
ב. הוכח: אם $AP = 2 \cdot BC$,
אז $S_{APBC} = 3S_{ABC}$.



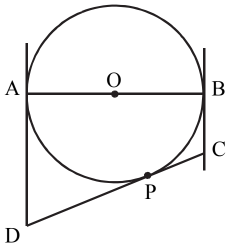
.35 OA הוא רדיוס במעגל, ואורכו 10 ס"מ.
בנקודה A העבירו ישר משיק למעגל.
T היא נקודה על המשיק, ו- D היא נקודה
על המעגל, כך ש- $\sphericalangle ADT = 90^\circ$, $TD = 9$ ס"מ .
חשב את אורך הקטע AT .



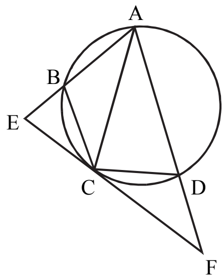
.36 מעגל שמרכזו בנקודה O חסום בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$. נקודת השקה של המעגל לשוק מחלקת את השוק לשני קטעים (ראה ציור). הוכח כי מכפלת שני הקטעים שווה לריבוע הרדיוס של המעגל.



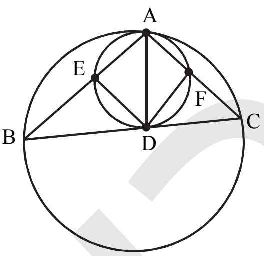
.37 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
AD משיק למעגל בנקודה A ,
BC משיק למעגל בנקודה B
הוכח : $AD \cdot BC = AO^2$.



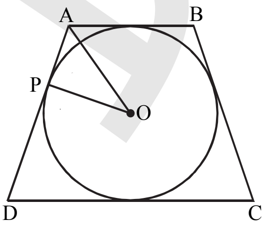
.38 מרובע $ABCD$ חסום במעגל. האלכסון AC חוצה את הזווית BAD . בנקודה C מעבירים משיק למעגל. המשכי הצלעות AB ו- AD חותכים את המשיק בנקודות E ו- F בהתאמה.
א. הוכח : $\Delta EBC \sim \Delta CDA$.
ב. נתון : $BE = 2$ ס"מ , $AD = 8$ ס"מ .
חשב את אורך הקטע BC .



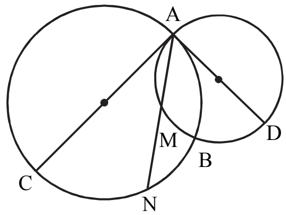
.39 שני מעגלים משיקים מבפנים בנקודה A .
BC הוא מיתר במעגל הגדול המשיק למעגל הקטן. המיתרים AB ו- AC חותכים את המעגל הקטן בנקודות E ו- F .
א. הוכח : AD חוצה את הזווית BAC .
ב. הוכח : $DF^2 = BE \cdot AF$.



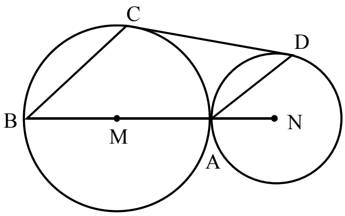
.40 טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$
חוסם מעגל שמרכזו O .
השוק AD נוגעת במעגל בנקודה P .
נתון : $AO = 6$ ס"מ , $PO = 4.8$ ס"מ .
חשב את היקף הטרפז.



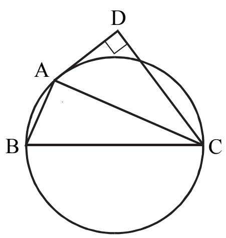
41. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
הקטרים AC ו-AD מאונכים זה לזה.
ישר העובר דרך A, חותך את המעגל
האחד בנקודה M ואת המעגל האחר
בנקודה N.
א. הוכח: $AM \cdot AN = CN \cdot DM$.
ב. הוכח: $AB^2 = CB \cdot BD$.



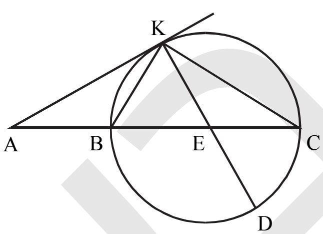
42. המעגלים M ו-N משיקים זה לזה
(מבחוץ) בנקודה A.
AB הוא קוטר במעגל M.
DC משיק למעגל M בנקודה C
ולמעגל N בנקודה D.
הוכח: $AD \cdot BC = AC^2$.



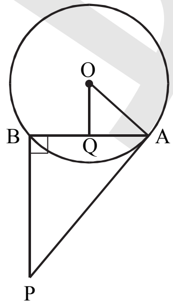
43. המשולש ABC חסום במעגל כך ש-BC
הוא קוטר במעגל. נתון: $AD \perp DC$,
$AD \cdot AC = AB \cdot DC$.
א. הוכח: AD משיק למעגל בנקודה A.
ב. הוכח: $BC^2 = AB^2 + AD^2 + DC^2$.



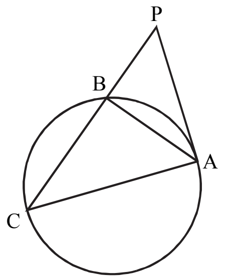
44. KB הוא מיתר במעגל, ו-KA משיק למעגל
בנקודה K כך ש-$\measuredangle ABK = 120^\circ$. המשך
הקטע AB חותך את המעגל בנקודה C.
מיתר KD חותך את המיתר BC
בנקודה E כך ש-$BK = BE$ (ראה ציור).
א. הוכח כי $\Delta KEC \cong \Delta BED$.
ב. הוכח כי $KE^2 = AB \cdot EC$.



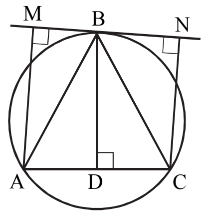
45. PA משיק בנקודה A למעגל שמרכזו O.
נקודה Q היא אמצע המיתר AB.
נתון: $PB \perp AB$. R רדיוס המעגל.
א. הוכח: $OQ \cdot BP = 2 \cdot AQ^2$.
ב. נסמן ב-R את רדיוס המעגל.
הוכח: $2R^2 = OQ(2OQ + BP)$.



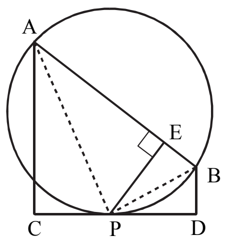
46. PA הוא משיק למעגל ו- PC חותך את המעגל בנקודות B ו- C.
הוכח: $\frac{PC}{PB}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$.



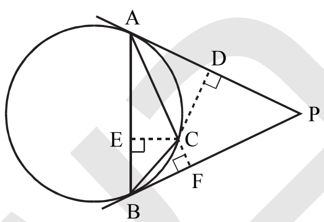
47. משולש ABC חסום במעגל. דרך נקודה B מעבירים משיק למעגל. מנקודות A ו- C מורידים אנכים למשיק, החותכים אותו בנקודות M ו- N. מנקודה B מורידים אנך BD לצלע AC. הוכח:
א. $\frac{AM}{BD}=\frac{AB}{BC}$. ב. $\frac{AM}{BD}=\frac{BD}{CN}$.



48. CD משיק למעגל בנקודה P, ו- AB הוא מיתר במעגל זה. BD ו- AC הם אנכים למשיק. PE הוא אנך מנקודת ההשקה P למיתר AB.
א. הוכח: $\Delta ACP \sim \Delta PEB$.
ב. הוכח: $AC\cdot BD=PE^2$.



49. PA ו- PB הם שני משיקים למעגל. C היא נקודה על המעגל.
נתון: $CD\perp AP$, $CF\perp BP$,
$CE\perp AB$.
הוכח: $CE^2=CD\cdot CF$.

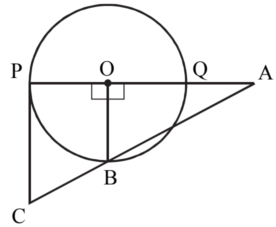


תשובות: **1.** ב. $3\frac{2}{3}$ ס״מ. **2.** ב. 6 ס״מ. **3.** ב. 6 ס״מ, 7.5 ס״מ. **7.** א. 12 ס״מ.
ב. 30°. **9.** ב. 16 סמ״ר. **11.** ב. $\frac{ac^2}{2m}$. **12.** ב. 0.6708R. **15.** 21.25 ס״מ.
16. ב. 20 ס״מ. **25.** ב. 29.07 סמ״ר. **26.** $1\frac{5}{7}$ ס״מ. **29.** $\sqrt{ab}$. **33.** 4.8 ס״מ.
35. 15 ס״מ. **38.** ב. 4 ס״מ. **40.** 40 ס״מ.

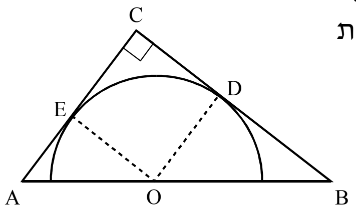
מעגל – בעיות עם משפט תלס

בסעיף זה נעסוק בבעיות עם מעגלים הכוללות: משפט תלס, ההרחבות של משפט תלס והמשפטים ההפוכים למשפט תלס והרחבותיו.

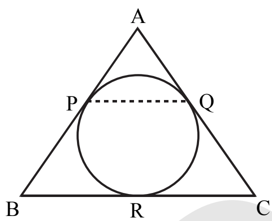
1. PQ הוא קוטר של מעגל שמרכזו O.
CP הוא משיק למעגל. נתון: $BO \perp PQ$,
$AP = 30$ ס"מ, $PC = 20$ ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל.



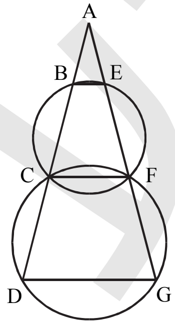
2. במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle C = 90^\circ)$ חסום חצי מעגל שמרכזו O. המעגל משיק לצלעות AC ו- BC בנקודות E ו- D בהתאמה.
א. הוכח כי המרובע CDOE הוא ריבוע.
ב. נתון: רדיוס חצי המעגל הוא 4.8 ס"מ, $DB = 6.4$ ס"מ.
חשב את אורך הצלע AB.



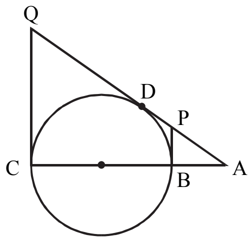
3. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
שוקי המשולש משיקות למעגל החסום במשולש בנקודות P ו- Q.
נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 24$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע PQ.



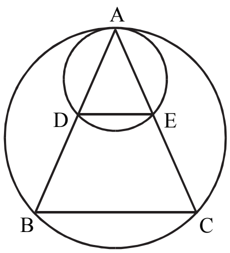
4. שני מעגלים חותכים זה את זה בנקודות C ו- F.
מהנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגלים, יוצאים למעגל העליון חותכים ABC ו- AEF, החותכים את המעגל התחתון בנקודות D ו- G.
הוכח: $AB \cdot GE = AE \cdot BD$.



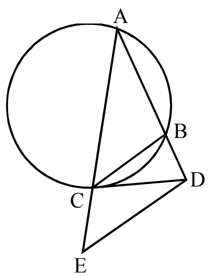
5. CB הוא קוטר של מעגל. CQ משיק למעגל בנקודה C, AQ משיק למעגל בנקודה D ו- BP משיק למעגל בנקודה B.
נתון: $AP = 10$ ס"מ, $AQ = 40$ ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל.



6. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A. AB ו- AC הם מיתרים במעגל הגדול החותכים את המעגל הקטן בנקודות D ו- E.
נתון: $BC = 2.5DE$, $BD = 6$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע AD.



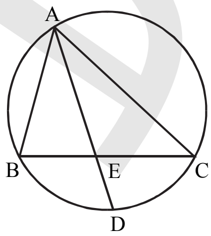
7. המשולש ABC חסום במעגל.
DC משיק למעגל בנקודה C.
נתון: $DE \parallel BC$, $DE = 30$ ס"מ, $CE = 18$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע CB.



תשובות: **1.** 12 ס"מ. **2.** ב. 14 ס"מ. **3.** 9.6 ס"מ. **5.** 12 ס"מ.
6. 4 ס"מ. **7.** 19.2 ס"מ.

המעגל – בעיות עם משפט חוצה-זווית (והמשפט ההפוך)

8. המשולש ABC חסום במעגל.
הנקודה D נמצאת באמצע הקשת BC.
AD ו- BC נפגשים בנקודה E.
נתון: $BC = 10$ ס"מ, $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$.
חשב את אורכי הקטעים BE ו- CE.

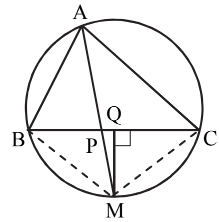


9. המשולש ABC חסום במעגל.

נתון: $MQ \perp BC$, $BM = MC$, $AB =$ 20 ס"מ ,
$AC =$ 25 ס"מ , $BC =$ 36 ס"מ .

א. חשב את אורך הקטע PQ .

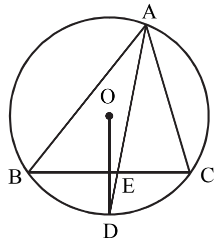
ב. נתון: $S_{BPM} =$ 96 סמ"ר .
חשב את S_{CPM} .



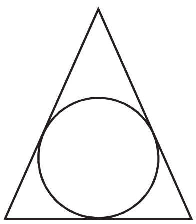
10. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו בנקודה O .
D היא נקודה על הקשת BC .
AD חותך את BC בנקודה E .
נתון: $AB \cdot EC = AC \cdot BE$.

א. הוכח: $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$

ב. הוכח: $OD \perp BC$.



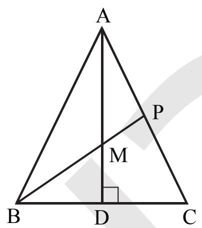
11. נתון משולש שווה-שוקיים
שבו אורך השוק הוא 20 ס"מ
ואורך הבסיס הוא 24 ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל החסום
במשולש.



12. ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
AD הוא הגובה לבסיס. נתון: $AP =$ 25 ס"מ ,
$CP =$ 30 ס"מ , $BD =$ 33 ס"מ .

א. הוכח שנקודה M היא מרכז המעגל
החסום במשולש ABC .

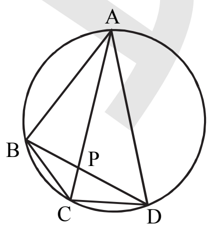
ב. חשב את רדיוס המעגל החסום הנ"ל.



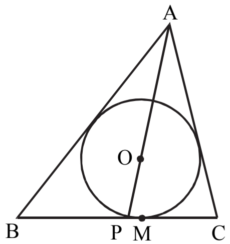
13. המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: $AB =$ 20 ס"מ , $AD =$ 30 ס"מ ,
$BP =$ 8 ס"מ , $PD =$ 12 ס"מ .

א. הוכח: $BC = CD$.

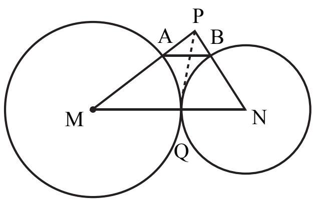
ב. נסמן: O – מרכז המעגל החסום במשולש ABD .
חשב את היחס $AO : OP$.



14. הנקודה O היא המרכז של המעגל החסום במשולש ABC. המשך הקטע AO חותך את הצלע BC בנקודה P. הצלע BC משיקה למעגל בנקודה M. נתון: $AB = 22$ ס"מ, $AC = 18$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע PM.



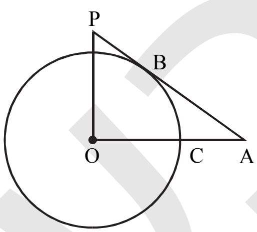
15. המעגלים M ו- N משיקים זה לזה בנקודה Q.
P היא נקודה מחוץ לשני המעגלים.
PM ו- PN חותכים את המעגלים בנקודות A ו- B, בהתאמה.
נתון: PQ הוא חוצה-זווית $\measuredangle MPN$.
א. הוכח: $AB \parallel MN$.
ב. הוכח: אם PQ הוא משיק משותף לשני המעגלים, אז המעגלים הם בעלי רדיוסים שווים.



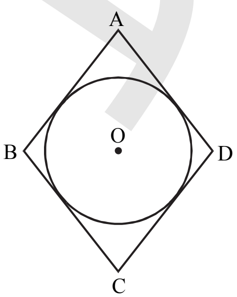
תשובות: 8. 4 ס"מ, 6 ס"מ. **9.** א. 2 ס"מ. ב. 120 סמ"ר. **11.** 6 ס"מ.
12. ב. 16.5 ס"מ. **13.** ב. 5:2. **14.** 1 ס"מ.

המעגל – בעיות עם פרופורציות במשולש ישר-זווית

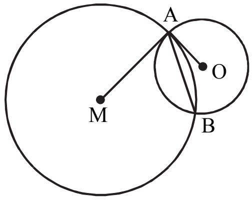
16. המשולש APO הוא ישר-זווית ($\measuredangle POA = 90^\circ$).
AP משיק בנקודה B למעגל שמרכזו בנקודה O.
נתון: $AB = 16$ ס"מ, $PB = 9$ ס"מ.
א. חשב את רדיוס המעגל.
ב. חשב את אורך הקטע AC.



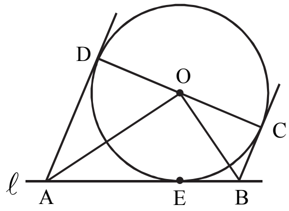
17. מעגל שמרכזו O חסום במעוין $ABCD$.
א. הסבר מדוע אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה O.
ב. נתון: $AC = 80$ ס"מ, $AB = 50$ ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל.



18. שני מעגלים שמרכזיהם בנקודות O ו- M
נחתכים בנקודות A ו- B .
הרדיוס AO משיק למעגל M .
נתון: AB = 8 ס״מ , AO = 5 ס״מ .
חשב את אורך הרדיוס AM .



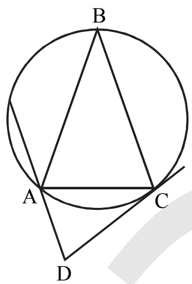
19. מעגל O שרדיוסו 6 ס״מ משיק לישר ℓ
בנקודה E . CD הוא קוטר במעגל.
BC משיק למעגל בנקודה C
ו- AD משיק למעגל בנקודה D .
נתון: AB = 13 ס״מ , BE < AE .
חשב את אורכי הקטעים BE ו- AE .



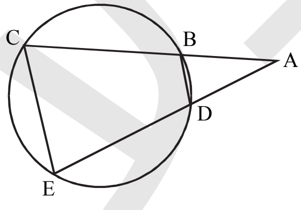
תשובות: 16. א. 12 ס״מ. ב. 8 ס״מ. **17.** ב. 24 ס״מ. **18.** $6\frac{2}{3}$ ס״מ.
19. 4 ס״מ, 9 ס״מ.

המעגל – בעיות עם יחסי שטחים של משולשים דומים

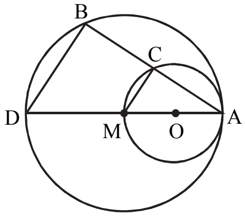
20. משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = BC)$
חסום במעגל. דרך קדקוד C עובר
משיק למעגל. נתון: $AD \parallel BC$.
א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta DCA$.
ב. היחס בין שטח המשולש ADC לשטח
המשולש CAB הוא $\frac{4}{9}$. נתון: AB = 18 ס״מ .
חשב את אורך הקטע AD .



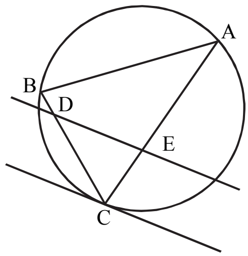
21. ABC ו- ADE הם שני חותכים למעגל.
א. הוכח: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.
ב. נתון: $AD = k$, $DE = m$,
$S_{BDEC} = 8 \cdot S_{ABD}$.
הבע באמצעות k ו- m את אורך הקטע AB .



22. על הרדיוס MA של מעגל שמרכזו M ,
בנו מעגל שקוטרו MA ומרכזו O .
AB הוא מיתר במעגל שמרכזו M ,
החותך את המעגל שמרכזו O בנקודה C .
הוכח : $S_{BDMC} = 3 \cdot S_{AMC}$.



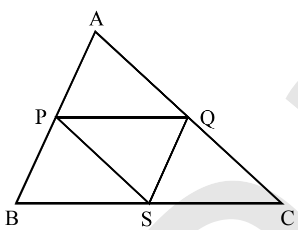
23. המשולש ABC חסום במעגל. E היא נקודה
על צלע AC . דרך הנקודה E העבירו
מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה C .
א. הוכח : $\Delta DEC \sim \Delta ABC$.
ב. נתון : $BD = 2$ ס"מ , $DC = 6$ ס"מ , $AE = 2EC$,
שטח המשולש ABC הוא S .
הבע באמצעות S את שטח המשולש DEC .



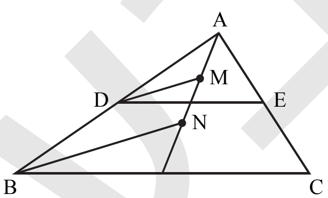
יחסי רדיוסים חוסמים/חסומים של משולשים דומים

24. הוכח : הרדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים מתייחסים
זה לזה כמו הצלעות המתאימות.

25. P , Q ו- S הן נקודות האמצע של צלעות
המשולש ABC . נתון כי רדיוס המעגל העובר
דרך הנקודות S , Q ו- P הוא 10 ס"מ.
א. הוכח : $\Delta ABC \sim \Delta SQP$.
ב. חשב את רדיוס המעגל העובר
דרך הנקודות A , B ו- C .



26. הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם
את המשולש ADE והנקודה N היא
מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .
א. הוכח : $\Delta ADM \sim \Delta ABN$.
ב. נתון : $DE \parallel BC$. הוכח : $\frac{AM}{AN} = \frac{DE}{BC}$.

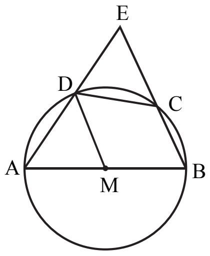


27. הוכח : הרדיוסים של מעגלים החסומים במשולשים דומים מתייחסים
זה לזה כמו הצלעות מתאימות.

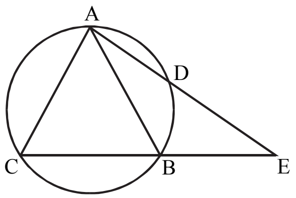
תשובות: 20. ב. 8 ס"מ. **21.** ב. $\frac{k+m}{3}$. **23.** $\frac{1}{4}S$. **25.** ב. 20 ס"מ.

גיאומטריה – בעיות לחזרה עם מעגלים

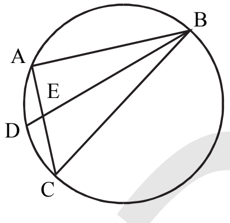
1. הצלע AB של המרובע ABCD החסום במעגל היא קוטר באותו מעגל. M מרכז המעגל.
המשכי הצלעות AD ו- BC נפגשים בנקודה E .
א. הוכח: $\sphericalangle MDC = \sphericalangle AEB$.
ב. הוכח: הישר MD משיק בנקודה D למעגל החוסם את המשולש DCE .



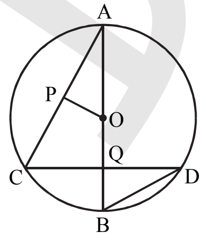
2. המיתרים AB ו- AC שווים לזה לזה.
הנקודה D היא אמצע הקשת AB .
א. הוכח: $AB^2 = AE \cdot AD$.
ב. נתון: 4 ס"מ $= AD$, 5 ס"מ $= DE$.
חשב את אורך המיתר BC .



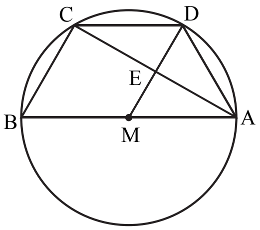
3. AB ו- AC הם שני מיתרים במעגל, הניצבים זה לזה. הנקודה D היא אמצע הקשת AC .
המיתר BD חותך את המיתר AC בנקודה E .
אורך המיתר AC הוא 18 ס"מ.
רדיוס המעגל הוא 15 ס"מ.
א. חשב את האורך של CE .
ב. חשב את האורך של EB ואת האורך של ED .



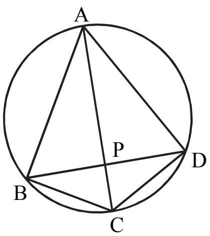
4. AB הוא קוטר במעגל O .
AC ו- CD הם מיתרים שווים במעגל.
נתון: P אמצע המיתר AC ,
Q אמצע המיתר CD .
א. הוכח: $OQ = BQ$.
ב. חשב את הזווית BDC .



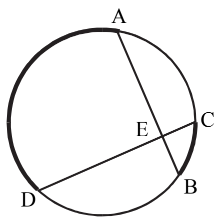
5. מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו M.
AB הוא קוטר במעגל.
AC ו- DM נפגשים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $AD = AM$, $CD = CB$.
א. הוכח: $ME = DE$.
ב. הוכח: $CB \parallel DM$.



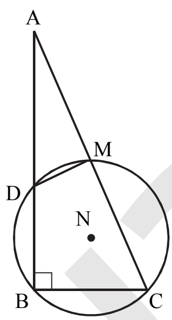
6. המיתרים AC ו- BD נפגשים
בנקודה P. הנקודה C
היא אמצע הקשת BD.
א. הוכח: $CP \cdot AC = CD^2$.
ב. הוכח: $\frac{AB}{AD} = \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ADP}}$.



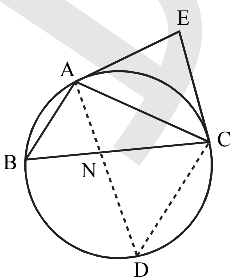
7. AB ו- CD הם מיתרים במעגל הנחתכים בנקודה E
בתוך המעגל. הסכום במעלות של הקשתות $\overset{\frown}{AD}$
ו- $\overset{\frown}{BC}$ (הקשתות המודגשות בציור) הוא 180°.
א. הוכח כי $AB \perp CD$.
ב. נתון: $DE =$ 8 ס"מ , $DC =$ 9.5 ס"מ ,
$EB =$ 2 ס"מ. חשב את אורך המיתר AD.



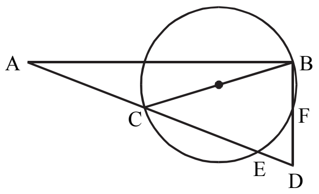
8. משולש ABC הוא ישר זווית ($\measuredangle B = 90^\circ$).
נקודה M היא אמצע הצלע AC,
ונקודה D נמצאת על הצלע AB.
הנקודות B, C, M ו- D נמצאות
על מעגל שמרכזו N (ראה ציור).
א. הוכח: אורך הקטע AD שווה לקוטר המעגל.
ב. הוכח: $MN \parallel AD$.



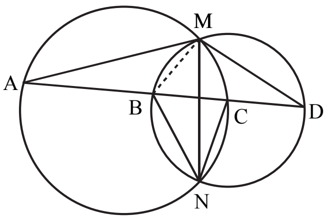
9. המשולש ABC חסום במעגל. המיתר CD
מקביל לצלע AB. AE ו- CE משיקים למעגל
בנקודות A ו- C בהתאמה. המשולש ACE
הוא חד-זווית. AD ו- BC נחתכים בנקודה N.
נתון: $AE =$ 9 ס"מ , $BN =$ 5 ס"מ , $AD =$ 12 ס"מ.
שטח המשולש ACE שווה ל- S.
הבע את שטח המשולש NDC בעזרת S.



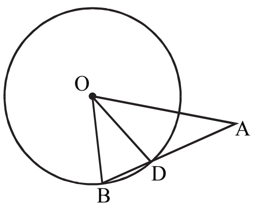
.10 המשולש ABD הוא ישר-זווית $(\sphericalangle ABD = 90^\circ)$.
הצלע BC היא קוטר במעגל.
א. נתון: $BD = a$, $AB = d$. הבע את אורך
הקטע ED באמצעות a ו- d .
ב. נתון: $DF = 1.5 \cdot BF$. הבע באמצעות a ו- d
את אורך המיתר CE .



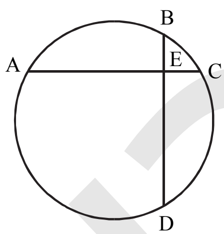
.11 שני מעגלים נחתכים בנקודות M ו- N .
ישר חותך את שני המעגלים
בנקודות A , B , C , D ,כמתואר בציור.
נתון: $\sphericalangle BNC = \alpha$.
א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle AMD$.
ב. האם המרובע $AMDN$ הוא בר חסימה
במעגל? נמק.



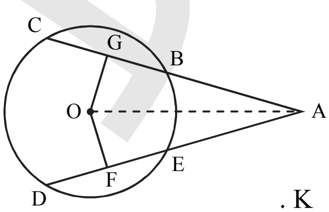
.12 המשולש ABO הוא שווה שוקיים $(AB = AO)$.
הנקודה O היא מרכז המעגל.
נתון: $OD = 12$ ס"מ , $AD = 10$ ס"מ .
חשב את היחס בין שטח המשולש BOD
לשטח המשולש AOD .



.13 AC ו- BD הם שני מיתרים במעגל O
הנחתכים בנקודה E ומאונכים זה לזה.
בנקודות A , B , C ו- D מעבירים
משיקים למעגל O .
הוכח: ארבעת המשיקים יוצרים
מרובע הניתן לחסימה במעגל.



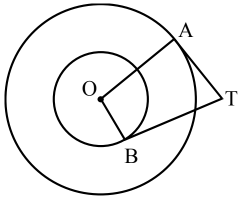
.14 הנקודות E , D , B , C נמצאות על מעגל
שמרכזו O . המשכי המיתרים DE ו- CB
נפגשים בנקודה A . מהמרכז העבירו אנך
OF ל- DE , ואנך OG ל- CB
(ראה ציור). נתון: $\sphericalangle DAO = \sphericalangle CAO$.
א. הוכח כי $EA = BA$.
ב. המשך AO חותך את המיתר DC בנקודה K .
הוכח כי AK מאונך ל- DC .



15. נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. רדיוס המעגל החיצוני גדול פי 2 מרדיוס המעגל הפנימי. מנקודה T שמחוץ מעגלים יוצא משיק TB למעגל הקטן, והמשיק TA למעגל הגדול. נתון: $TA=\sqrt{69}$ ס"מ, $TB=12$ ס"מ.

א. הראה שהמרובע $AOBT$ הוא בר חסימה במעגל וחשב את רדיוס המעגל החוסם אותו.

ב. הוכח: $\sphericalangle ATO=\sphericalangle OBA$.



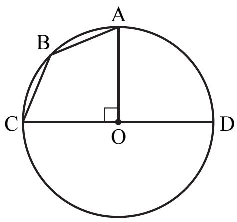
16. במעגל שמרכזו O הרדיוס AO מאונך לקוטר CD.

א. מצא את גודל הזווית ABC. נמק.

נתון גם כי $\sphericalangle BCA=\sphericalangle BAC$.

ב. הוכח כי $BO\perp AC$.

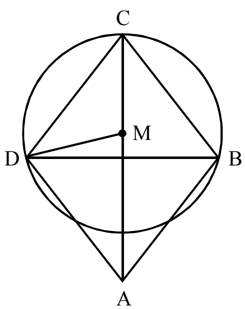
ג. BO ו- AC נחתכים בנקודה M. הוכח כי $CM=OM$.



17. נתון מעוין $ABCD$. נקודה M נמצאת על האלכסון AC, כך ש- $MD=MC$ (ראה ציור).

א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש DBC.

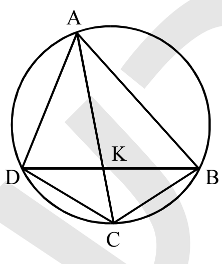
ב. נתון: רדיוס המעגל החוסם את המשולש DBC הוא 10 ס"מ, ומרחק המרכז M מהאלכסון DB הוא 1.5 ס"מ. חשב את שטח המעוין $ABCD$.



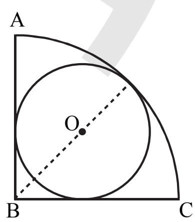
18. AC ו- DB הם מיתרים במעגל הנחתכים בנקודה K. נתון: $DC=BC$.

א. הוכח: $AB\cdot DK=AK\cdot DC$.

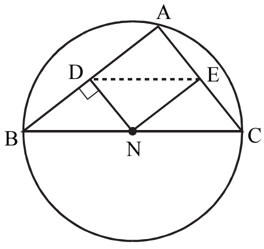
ב. הוכח: $AB\cdot DK=AD\cdot KB$.



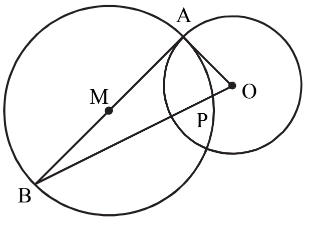
19. בתוך רבע מעגל שרדיוסו 4 ס"מ חסום מעגל שמרכזו בנקודה O. חשב את רדיוס המעגל החסום.



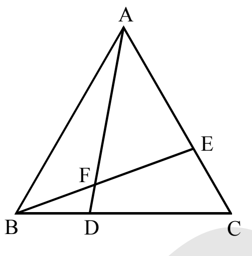
20. BC הוא קוטר במעגל שמרכזו N .
A היא נקודה על מעגל זה. נתון כי ND
הוא אנך ל- AB , ו- DE מקביל לקוטר BC .
א. הוכח כי $NE \perp AC$.
ב. רדיוס המעגל הוא 16 ס"מ.
נקודה G היא אמצע BN .
מצא את האורך של הקטע DG . נמק.



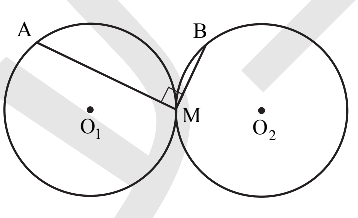
21. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו M .
AO הוא רדיוס המעגל O והוא
משיק למעגל M . הקטע OB
חותך את המעגל O בנקודה P .
נתון: $AO = 13$ ס"מ , $AM = 15.6$.
חשב את אורך הקטע AP .



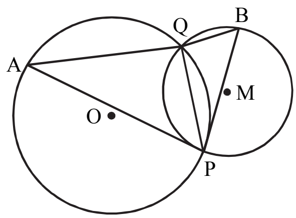
22. המשולש ABC הוא שווה-צלעות. הנקודות D ו- E
נמצאות על הצלעות BC ו- AC כך ש- $DC = AE$.
א. הוכח: $\Delta ACD \cong \Delta BAE$.
ב. חשב את הזווית DFE .
ג. הוכח שהמרובע CDFE בר-חסימה במעגל.
ד. הוכח: $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DEC$.



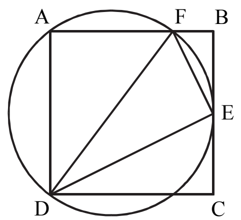
23. שני מעגלים, שיש להם אותו רדיוס R ,
משיקים זה לזה בנקודה M .
מעבירים מיתר MB במעגל שמרכזו O_2 ,
ומיתר MA במעגל שמרכזו O_1
כך ש- $\sphericalangle AMB = 90^\circ$ (ראה ציור).
א. (1) נמק מדוע $\sphericalangle O_1MO_2 = 180^\circ$.
(2) הוכח כי $AO_1 \parallel BO_2$.
ב. במשולש AMB העבירו תיכון לצלע AB .
הבע באמצעות R את אורך התיכון. נמק.



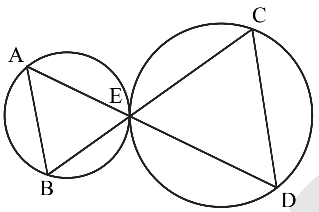
24. בשרטוט: BP משיק למעגל O,
AP משיק למעגל M ו- PQ
הוא מיתר משותף לשני המעגלים.
א. היעזר בציור והסבר מדוע הנקודות
A, Q ו- B אינן על ישר אחד.
ב. הוכח: $PQ^2 = AQ \cdot BQ$.



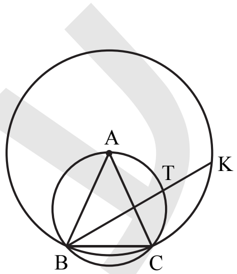
25. הקדקודים A ו- D של מלבן ABCD
נמצאים על מעגל. הצלע BC משיקה
למעגל בנקודה E.
נתון: $BF = 3$ ס"מ, $DF = 12$ ס"מ.
א. חשב את אורך הצלע AB.
ב. הוכח: DE ו- DF מחלקים את הזווית
ADC ל- 3 זוויות שוות.



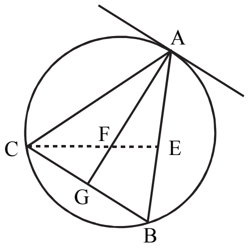
26. לשני מעגלים יש משיק משותף FG,
המשיק לשניהם בנקודה E.
נקודות C ו- D נמצאות על מעגל אחד
ונקודות A ו- B נמצאות על המעגל האחר
כך שהקטעים AD ו- CB נפגשים בנקודה E
(ראה ציור).
א. הוכח כי $\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$.
ב. נמק מדוע אורך הגובה לצלע CD במשולש BCD שווה לאורך הגובה
לצלע CD במשולש ACD.



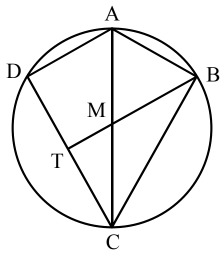
27. המשולש ABC חסום במעגל. מקדקוד A
חגו מעגל נוסף, שבו A הוא מרכז המעגל,
והנקודות B ו- C נמצאות על המעגל.
ישר העובר דרך B חותך את המעגל החוסם
בנקודה T, ואת המעגל האחר בנקודה K.
א. הוכח: $TC = TK$.
ב. המשך הקטע CT חותך את המעגל שמרכזו A
בנקודה L.
הוכח: המרובע CKLB הוא טרפז שווה-שוקיים.



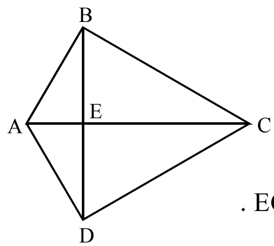
.28 בציור שלפניך משולש ABC חסום במעגל.
המשיק למעגל בנקודה A מקביל לצלע BC.
במשולש ABC, הישר AG הוא גובה לצלע BC.
הנקודה F היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC. נתון: $BC = 10$ ס"מ, $AC = 13$ ס"מ.
א. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC
ב. חשב את רדיוס המעגל הנתון.



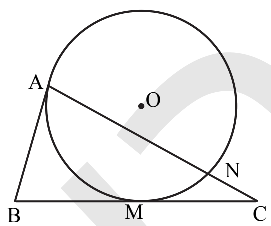
.29 דלתון $ABCD$ חסום במעגל. BT מאונך ל- DC.
BT ו- AC נחתכים בנקודה M.
א. הוכח כי המשולש ABM הוא שווה-שוקיים.
ב. נתון כי שטח המשולש ABM שווה לשטח המשולש CBM.
מצא את גודל הזווית BCD.



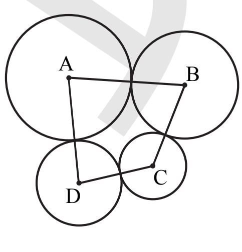
.30 $ABCD$ הוא דלתון, שהאלכסון הראשי בו הוא AC. E - נקודת המפגש של האלכסונים (ראה ציור). נתון: $CD = BD$, $AD = 2AE$.
א. הוכח כי אפשר לחסום את הדלתון במעגל.
ב. F היא נקודה על המעגל החוסם את הדלתון,
כך ש- DF הוא קוטר במעגל וחותך את הקטע EC.
הוכח: $\Delta CFD \sim \Delta EAB$.



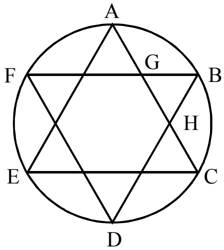
.31 נתון מעגל שמרכזו O. מנקודה C שמחוץ למעגל יוצא ישר החותך את המעגל בנקודות N ו- A.
מנקודה B שמחוץ למעגל יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל בנקודות A ו- M.
הנקודה M נמצאת על הישר BC.
נתון: $AB = 12$ ס"מ, $CN = 1$ ס"מ,
$AC = BC$. נתון גם כי $\sphericalangle BOC = 90^\circ$.
חשב את רדיוס המעגל.



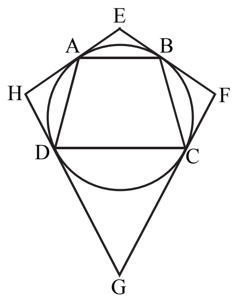
.32 בציור מתוארים 4 מעגלים.
מרכזי המעגלים בנקודות A, B, C ו- D.
א. הוכח: בתוך המרובע $ABCD$
אפשר לחסום מעגל.
ב. הוכח: חוצי זוויות המרובע $ABCD$
נפגשים כולם בנקודה אחת.



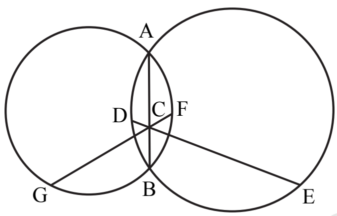
33. הנקודות A, B, C, D, E ו-F
נמצאות על מעגל.
נתון: $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$.
א. הוכח: המשולש ACE
הוא שווה-צלעות.
ב. הוכח: המשולש BGH הוא שווה-צלעות.



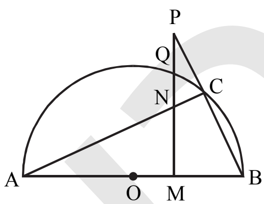
34. הטרפז ABCD חסום במעגל.
בנקודות A, B, C ו-D מעבירים
משיקים למעגל. המשיקים יוצרים
את המרובע EFGH.
א. הוכח: המרובע EFGH הוא דלתון
שאלכסונו הראשי עובר דרך מרכז המעגל.
ב. הוכח: $AB \parallel FH$.



35. בציור מתוארים שני מעגלים נחתכים.
על המיתר המשותף AB בוחרים
נקודה כלשהי C. דרך C מעבירים
ישר DE החותך את המעגל הימני
בנקודות D ו-E וישר FG החותך
את המעגל השמאלי בנקודות F ו-G.
א. הוכח: $DC\cdot EC=FC\cdot GC$.
ב. הוכח: המרובע DGEF ניתן לחסימה במעגל.



36. המשולש ABC חסום בחצי מעגל שמרכזו O.
הצלע AB היא קוטר במעגל. מנקודה M,
על הצלע AB, מעלים אנך החותך את הצלע
AC בנקודה N, את המשך הצלע BC
בנקודה P ואת חצי המעגל בנקודה Q.
א. הוכח: $QM^2=MA\cdot MB$.
ב. הוכח: $QM^2=MN\cdot MP$.



תשובות: **2.** ב. 1.5 ס״מ. **3.** א. 10 ס״מ. ב. $\sqrt{640}$ ס״מ, $\sqrt{10}$ ס״מ. **4.** ב. 30°.
7. ב. 10 ס״מ. **9.** $\frac{49}{81}S$. **10.** א. $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+d^2}}$. ב. $\frac{2a^2+3d^2}{5\sqrt{a^2+d^2}}$. **11.** א. $180^\circ-\alpha$.
ב. לא. **12.** 4:5. **15.** א. 6.5 ס״מ. **16.** א. 135°. **17.** ב. 227.40 סמ״ר.
19. 1.657 ס״מ $=4(\sqrt{2}-1)$. **20.** ב. 8 ס״מ. **21.** 12 ס״מ. **22.** ב. 120°. **23.** ב. R.
25. א. 9 ס״מ. **28.** א. $3\frac{1}{3}$ ס״מ. ב. $7\frac{1}{24}$ ס״מ. **29.** ב. 60°. **31.** $\sqrt{48}$ ס״מ.