平成19年度　学位論文

有限試行の無限回反復を実現する確率空間について

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻　自然系コース
M０６２２８I　桑　原　利　通

目 次

序文

目的

本研究の目的は、有限試行の無限回反復を実現する確率空間を構成することにある。ここでいう有限試行とは、サイコロや硬貨投げのような標本空間が有限集合である試行のことを指す。また、無限回反復とは、定めた有限試行のもと、その試行を独立に無限回繰り返すことを意味する。そして、構成することができたこの確率空間において、大数の強法則を定式化する。この結論を導くことが、本研究の最大のテーマである。

考察

表と裏の出る確率が 1/2 の硬貨を n 回投げる試行を考えると、表と裏の組み合わせは 2^n 通りある。そして、表と裏の出る確率は等しいので、根元事象の確率は $1/2^n$ となる。

次に、無限回硬貨を投げる試行を考える。この試行においては、表と裏の組み合わせは無限通りあるので、先ほどと同様に考えると、根元事象の確率はすべて 0 となってしまう。よって、無限回試行においては、根元事象の確率によって、事象を測ることができない。しかし、無限回試行においても確率を測ることができる事象はある。

例えば、1 回目に表が出ることは確定しているが、2 回目以降は表と裏がどのように現れてもいいという事象を考えると、この事象の確率は 1/2 となる。

次に、1 回目は表、2 回目は裏は確定しているが、3 回目以降は表と裏がどのように現れてもいいという事象を考えると、この事象の確率は 1/4 となる。以上のことから、有限回までは表と裏が確定している事象は、具体的に確率を求めることができるのである。そして、このことを出発点として、有限試行の無限回反復を実現する確率空間を構成していく。

モデル

試行の結果が有限個しかなく、それぞれの確率が定まっている状況を想定する。すなわち、S を有限集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_l\}$ とし、$0 < p_{s_i} < 1, \displaystyle\sum_{s_i \in S} p_{s_i} = 1$ となるように各 s_i に対して p_{s_i} を定める。そして、この試行を無限回反復させた試行の標本空間 Ω は

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots) : i_k \in \{s_1, \cdots, s_l\}, k \in \mathbb{N}\}$$

と表される。これが考察する標本空間である。なお、事象族、確率測度については、第 4 章 2 節で具体的に明示する。

論文の構成について述べる。

1 章では、測度空間について述べる。そして、主定理を導くために必要なホップの拡張定理を示す。§1.1 では、$\mathcal{F}$ 集合体 (有限加法的集合族) と σ 集合体 (σ 加法的集合体) につい

て定義する。そして、$\mathcal{F}$ 集合体と σ 集合体の具体的な例を紹介する。また、ボレル集合体を導入し、ルベーグ外測度、ルベーグ測度について述べる。§1.2 では、測度空間を定義し、測度空間の性質である単調性、有限加法性、劣加法性、上方連続性、下方連続性について厳密な証明を行う。§1.3 では、外測度を定義し、その性質について述べる。また、次節で行う、測度の拡張において、必要な準備もする。§1.4 では、まず有限加法的測度空間について定義する。そして、測度の拡張について述べ、ホップの拡張定理を示す。ホップの拡張定理とは、有限加法的測度から完全加法的測度へ一意的に拡張を行うための条件を与える定理である。§1.5 では 1 次元ボレル集合体上でルベーグ測度が一意的に存在することを示す。

2 章では、一般の測度空間上で、ルベーグ積分を考えることにする。また本章では、ルベーグ積分を理解する上で根幹となる部分について述べる。§2.1 では、可測関数を定義し、その性質について述べる。また、非負可測関数に各点収束する非負単純関数が存在することを示す。§2.2 では、ルベーグ積分を定義する。ルベーグ積分とは可測関数の積分であり、定義関数の積分を定めることを出発点とし、一般の可測関数まで積分を拡張させていく。§2.3 では、ルベーグ積分において、重要な結果である単調収束定理、ファトウの補題、ルベーグ収束定理を示す。

3 章では、4 章で必要となる確率論の基礎概念を測度論的立場で述べる。§3.1 では、初等確率モデルを定義する。そして、具体的に硬貨投げ試行を考察し、標本空間及び事象族を例証する。§3.2 では、確率論の基礎概念である確率空間、確率変数、独立、分布、期待値、分散について説明する。また、確率変数を可測関数、期待値を可測関数の積分値として定めることにより単調収束定理、ファトウの補題、ルベーグ収束定理が成立する。次に、大数の弱法則を示す際に必要な定理であるチェビシェフの不等式を示す。§3.3 では、大数の強法則と弱法則の違いについて述べ、大数の弱法則及び 4 次のモーメントが存在するという条件の下で大数の強法則を示す。

4 章では、有限試行の無限回反復を実現する確率空間を構成する。さらに、構成した確率空間において、大数の強法則を定式化する。§4.1 では偏りのない硬貨投げ試行を例に、有限試行の有限回反復試行と有限試行の無限回反復試行を比較する。§4.2 では、主定理について述べる。主定理とは、有限試行の無限回反復を表現する可測空間上で、有限加法的確率測度から確率測度へ一意的に拡張することができるという主張である。§4.3 では、主定理の証明を行う。§4.4 では、§4.3 で構成した確率空間において、大数の強法則を定式化する。

本論文にあたっては、志賀 徳造 著「ルベーグ積分から確率論」を参考とした。また、主定理を示す際には、Patrick Billingsley「 Probability and Measure」の記述をもとに、証明を行った。

最後になりましたが、本論文を完成させるにあたり、熱心に御指導くださった藤原司先生、そして数学教室の諸先生方にお世話になりました。心から御礼申し上げます。

第 1 章　測度空間

この章では、ルベーグ積分や確率論を展開する際に土台となる測度空間について述べる。また、外測度を定義し、主定理を示すために必要なホップの拡張定理を証明する。

1.1　$\mathcal{F}$ 集合体と σ 集合体

集合 X を固定して考える。

定義 1.1「$\mathcal{F}$ 集合体」
X の部分集合族 $\mathcal{A}$ が次の 3 条件を満たすとき、X の $\mathcal{F}$ **集合体**（または有限加法的集合族）という。
$(\mathcal{A}.1)$　$\emptyset \in \mathcal{A}$
$(\mathcal{A}.2)$　$E \in \mathcal{A}$ ならば $E^c \in \mathcal{A}$
$(\mathcal{A}.3)$　$E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ ならば $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$

命題 1.1 $(\mathcal{A}.1), (\mathcal{A}.2), (\mathcal{A}.3)$ が成り立つなら以下の $(\mathcal{A}.4), (\mathcal{A}.5)$ も成立する。
$(\mathcal{A}.4)$　$E_n \in \mathcal{A}$ ならば $\bigcup_{i=1}^{n} E_n \in \mathcal{A}$
$(\mathcal{A}.5)$　$E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ ならば $E_1 \backslash E_2 \in \mathcal{A}$

定義 1.2「σ集合体」
X の部分集合族 $\mathcal{B}$ は、$\mathcal{F}$ 集合体であってさらに次の条件を満たすとき、$\mathcal{B}$ は X の σ**集合体**という。
$(\mathcal{B}.1)$　$E_n \in \mathcal{B}$ ならば $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$

命題 1.2 $\mathcal{B}$ を X の σ 集合体とする。そのとき、$(\mathcal{B}.2)(\mathcal{B}.3)$ が成立する。
$(\mathcal{B}.2)$　$E_n \in \mathcal{B}$ ならば $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$
$(\mathcal{B}.3)$　$E_n \in \mathcal{B}$ ならば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \in \mathcal{B} \quad \text{かつ} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \in \mathcal{B}$$

命題 1.3 $\mathcal{A}$ を X のある部分集合族とする。そのとき、$\mathcal{A}$ を含む最小の σ 集合体が存在する。$\mathcal{A}$ を含む最小の σ 集合体を $\sigma(\mathcal{A})$ と表し、$\mathcal{A}$ により生成される σ 集合体という。

証明
X の $\mathcal{A}$ を含む σ 集合体全体を Λ で表す。X の部分集合全体 2^X は Λ に入っているので $\Lambda\neq\emptyset$ である。そこで、それらの交わりを

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$$

とおくと、$\sigma(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 集合体となることを示す。

まず、$\bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$ が σ 集合体であることを示す。

$(\mathcal{A}.1)$　任意の $\mathcal{B}\in\Lambda$ に対して、$\emptyset\in\mathcal{B}$ となり、$\emptyset\in\bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$ は成立する。

$(\mathcal{A}.2)$　$A\in\bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$ ならば $A^c\in\bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$ を示す。任意の $\mathcal{B}\in\Lambda$ に対して,$A\in\mathcal{B}$ なので $A^c\in\mathcal{B}$ となり、$A^c\in\bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$ は成立する。

$(\mathcal{B}.1)$　$A_n\in\bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$ となることを示す。

任意の $\mathcal{B}\in\Lambda$ に対して,$A_n\in\mathcal{B}$ なのでに対して,$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{B}$ となり、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\bigcap_{\mathcal{B}\in\Lambda} \mathcal{B}$ は成立する。

よって、$\sigma(\mathcal{A})$ は σ 集合体となる。

また、任意の $\mathcal{B}\in\Lambda$ に対して、$\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{B}$ かつ $\mathcal{A}\subset\sigma(\mathcal{A})$ より、$\sigma(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 集合体となる。

例 1.1「$\mathcal{F}$ 集合体の例」
ここでは、$X=R^d$ とする。

$$J=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_d,b_d] \qquad (-\infty\leq a_i\leq b_i\leq\infty, 1\leq i\leq d\ ) \tag{1.1}$$

の形の集合を d 次元区間という。ただし $b=\infty$ のときは $(a,b]=(a,\infty)$ とみなす。そして、d 次元区間の有限個の和集合で表される集合の全体を $\mathcal{J}$ で表す。すなわち、

$$\mathcal{J}=\{A=\bigcup_{k=1}^{n} J_k : J_k\text{は } d \text{ 次元区間 }\} \tag{1.2}$$

このとき、$\mathcal{J}$ は $\mathcal{F}$ 集合体になる。

証明
$(\mathcal{A}.1)$　$1\leq i\leq d$ に対して、$a_i=b_i$ とおけば $J=\emptyset$ となり $\emptyset\in\mathcal{J}$
$(\mathcal{A}.2)$

$(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_d,b_d]$
$=\big((a_1,b_1]\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,+\infty)\big)\cap\cdots\cap\big((-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,\infty)\times(a_d,b_d]\big)$

であるが

$$\big((a_1,b_1]\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,\infty)\big)^c$$
$$=\big((-\infty,a_1]\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,\infty)\big)\cup\big((b_1,\infty)\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,\infty)\big)$$

と 2 つの d 次元区間の和となる。また、$\big((-\infty,\infty)\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(-\infty,\infty)\big)^c$ などについても同様である。以上から

$$\big((a_1,b_1]\times\cdots\times(a_d,b_d]\big)^c$$
$$=\big((a_1,b_1]\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,\infty)\big)^c\cup\cdots\cup\big((-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,\infty)\times(a_d,b_d]\big)^c$$
$$=\big((-\infty,a_1]\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,\infty)\big)\cup\big((b_1,\infty)\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,\infty)\big)\cup$$
$$\cdots\cup\big((-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(-\infty,a_d]\big)\cup\big((-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)\times\cdots\times(b_d,\infty)\big)$$

となり、d 次元区間の和集合として表せる。
($\mathcal{A}$.3)
$\mathcal{J}$ の元は d 次元区間の有限個の和集合である。したがって、($\mathcal{A}$.3) は明らかである。

例 1.2「σ集合体の例」
(1)X のすべての部分集合の集まりを 2^X と表すと、2^X は σ 集合体となり、X の σ 集合体の中でも最大のものである。

(2) $\mathcal{B}_0=\{X,\emptyset\}$ とおくと,$\mathcal{B}_0$ は X の σ 集合体の中で最小のものになっている。また、X の空でない真部分集合 A に対して $\mathcal{B}=\{X,\emptyset,A,A^c\}$ とおくと、$\mathcal{B}$ は A を含む最小の σ 集合体である。

定義 1.3「ボレル集合体」
$X=R^d$(d 次元ユークリッド空間) とする。R^d のすべての開集合を含む最小の σ 集合体を R^d の **ボレル集合体** といい、$\mathcal{B}(R^d)$ と表す。すなわち、R^d のすべての開集合全体を $\mathcal{O}$ で表すと、

$$\mathcal{B}(R^d)=\sigma(\mathcal{O})$$

である。また、R^d のすべての閉集合全体を $\mathcal{C}$ で表すと、開集合の補集合は閉集合であり、閉集合の補集合は開集合であるから、

$$\mathcal{B}(R^d)=\sigma(\mathcal{O})=\sigma(\mathcal{C})$$

が成り立つ。そして、ボレル集合体 $\mathcal{B}(R^d)$ に属する各集合を**ボレル集合**という。次に、このボレル集合に対して、ルベーグ測度を定義するためにルベーグ外測度を導入する。

命題 1.4 (1.2) で定めた $\mathcal{F}$ 集合体 $\mathcal{J}$ に対して、$\sigma(\mathcal{J})=\mathcal{B}(R^d)$ が成立する。

証明
$\mathcal{B}(R^d)=\sigma(\mathcal{O})$ より $\sigma(\mathcal{J})=\sigma(\mathcal{O})$ を示せばよい。
そして、$\mathcal{J}\subset\sigma(\mathcal{J})$,$\mathcal{O}\subset\sigma(\mathcal{O})$ より

$$\mathcal{J}\subset\sigma(\mathcal{O}) \text{ かつ } \mathcal{O}\subset\sigma(\mathcal{J})$$

を示せば十分である。まず

$$J = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d] \qquad (-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty, 1 \leq i \leq d)$$

に対して

$$J_n = (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_d, b_d + \frac{1}{n}) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと、$J = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ が成立する。J_n は開集合なので $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \in \sigma(\mathcal{O})$ を満たす。よって、$\mathcal{J}$ の元は d 次元区間の有限個の和集合で表されるので、$\mathcal{J} \subset \sigma(\mathcal{O})$ となる。

次に、R^d の任意の空でない開集合 G に対して、$G \in \sigma(\mathcal{J})$ を示す。そのためには、任意の $G \in \mathcal{O}$ は d 次元区間の列 $\{J_n\}$ によって $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ と表されることを示せば十分である。d 次元区間でその端点が有理数である集合全体を $\mathcal{J}_r$ で表す。すなわち、

$$\mathcal{J}_r = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d] : \quad a_k, b_k (k = 1, 2, \cdots, d) \text{ は有理数 }\} \tag{1.3}$$

とおくと、$\mathcal{J}_r$ の要素の数は可算無限個あることに注意する。また、G は開集合なので、任意の $x \in G$ に対して、x を含むような $\mathcal{J}_r$ の中の d 次元区間 J^x で $J^x \subset G$ を満たすような J^x が存在する。したがって、$G = \bigcup_{x \in G} J^x$ が成立する。

そして、$J^x \in \mathcal{J}_r$ で $\mathcal{J}_r$ に含まれる d 次元区間は可算個であるから、G は高々可算個の $\mathcal{J}_r$ の中の d 次元区間の和集合として表される。

よって、$G \in \sigma(\mathcal{J}_r)$ が成立する。以上の結果から、$\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{J}_r) \subset \sigma(\mathcal{J})$ が分かり、題意を満たす。 ■

定義 1.4「ルベーグ外測度」
(1.1) で定めた d 次元区間 J に対して、$|J| = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_d - a_d)$ とする。
そして、$A \subset R^d$ に対して

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| : \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \supset A \quad (J_n \text{は } d \text{ 次元区間})\} \tag{1.4}$$

と定義する。この λ^* を **ルベーグ外測度** という。

(1.4) は下限をとっているので、次のことが言える。任意の A の d 次元区間の可算被覆 $\{J_n\}$ に対して

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$$

を満たし、さらに任意の $\epsilon > 0$ に対して A のある d 次元区間の可算被覆 $\{J_n\}$ で

$$\lambda^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| - \epsilon$$

を満たす $\{J_n\}$ が存在する。 ■

命題 1.5 d 次元区間 J に対して、$\lambda^*(J) = |J|$ が成立する。

証明
(1.4) で $J_1 = J, J_n = \emptyset\ (n \geq 2)$ をとると

$$\lambda^*(J) \leq |J|$$

が成立する。よって $\lambda^*(J) \geq |J|$ を示せばよい。
このためには、$\cup_{n=1}^{\infty} J_n \supset J$ を満たす任意の d 次元区間の可算被覆 $\{J_n\}$ に対して

$$|J| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$$

を示せばよい。右辺が ∞ のときには成立するので、$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < \infty$ とする。
任意の $\epsilon > 0$ に対して、d 次元開区間 I_n を

$$J_n \subset I_n \quad \text{かつ} \quad |I_n| - |J_n| < \frac{\epsilon}{2^n} \quad (n \geq 1) \tag{1.5}$$

を満たすように選ぶと、J に含まれる任意の d 次元有界閉区間 K に対して

$$K \subset J \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

よって、K のコンパクト性から $p \in \mathbb{N}$ が存在し

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{p} I_n$$

となるので、(1.5) から

$$|K| \leq \sum_{n=1}^{p} |I_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| + \epsilon$$

ここで ϵ は任意の正数、K は J に含まれる任意の d 次元閉区間だから

$$|J| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$$

が成立する。ゆえに、$\lambda^*(J) \geq |J|$ となり、命題 1.5 は証明された。 ■
　次に、ルベーグ測度を定義する。

定義 1.5「ルベーグ測度」
次の 3 条件を満たすとき $\mathcal{B}(R^d)$ 上の集合関数 λ を R^d 上の **ルベーグ測度** といい、λ は一意的に存在する。
(λ.1)　$0 \leq \lambda(E) \leq \infty \quad (E \in \mathcal{B}(R^d))$
(λ.2)　$E_n \in \mathcal{B}(R^d)\ (n = 1, 2, \cdots), E_n \cap E_m = \emptyset$ ならば

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

$(\lambda.3)$　任意の $E \in \mathcal{B}(R^d)$ に対して

$$\lambda(E) = \lambda^*(E)$$

とくに、d 次元区間 J に対して $\lambda(J) = |J|$

また、3 つの組 $(R^d, \mathcal{B}(R^d), \lambda)$ を **ルベーグ測度空間** という。

なお、ルベーグ測度の存在と一意性についての証明は、1 章 4 節で述べるホップの拡張定理を応用するので、1 章 5 節で述べる。

次の命題は、ルベーグ測度の性質を調べるのに有用である。

命題 1.6 $E \in \mathcal{B}(R^d)$ は $\lambda(E) < \infty$ とする。そのとき任意の $\epsilon > 0$ に対して、d 次元区間の有限和集合 $A = \cup_{n=1}^m J_n \in \mathcal{J}$ が存在し

$$\lambda(E \ominus A) < \epsilon$$

を満たす。ここでは $A \ominus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ を表す。

証明

$(\lambda.3)$ により任意の $\epsilon > 0$ に対して d 次元区間列 $\{J_n\}$ が存在し

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| - \lambda(E) < \epsilon$$

を満たす。次に

$$\begin{aligned} E \ominus (\bigcup_{n=1}^{m} J_n) &= (E \backslash \bigcup_{n=1}^{m} J_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{m} J_n \backslash E) \\ &\subset (E \backslash \bigcup_{n=1}^{m} J_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \backslash E) \\ &\subset (\bigcup_{n=m+1}^{\infty} J_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \backslash E) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \lambda(E \ominus (\bigcup_{n=1}^{m} J_n)) &\leq (\sum_{n=m+1}^{\infty} |J_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| - \lambda(E)) \\ &< \sum_{n=m+1}^{\infty} |J_n| + \epsilon \end{aligned}$$

以上より m を十分大きくとり、$A = \bigcup_{n=1}^{m} J_n$ とおけば E は命題の条件を満たす。　■

1.2 測度空間について

前節では、ルベーグ測度を導入し、それが R^d のボレル集合体 $\mathcal{B}(R^d)$ 上の σ 加法的集合関数として定義されることを述べたが、この節では一般的な測度空間の構成について、その基本的な性質を明らかにする。

定義 1.6「可測空間」
X をある集合、$\mathcal{F}$ を X の σ 集合体とするとき 2 つの組 $(X, \mathcal{F})$ を **可測空間** という。そして $\mathcal{F}$ の元を**可測集合**という。

定義 1.7 「測度空間」
σ 集合体上で定義された集合関数 m が次の条件を満たすとき、m を $(X, \mathcal{F})$ 上の **測度** といい、$(X, \mathcal{F}, m)$ を **測度空間** という。
$(m.1)$ $\quad m(\emptyset) = 0, 0 \leq m(E) \leq \infty \quad (E \in \mathcal{F})$
$(m.2)$ $\quad E_n \in \mathcal{F}(n = 1, 2, \cdots), E_m \cap E_n = \emptyset(n \neq m)$ ならば

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \quad (\sigma\text{加法性})$$

定義 1.8「σ有限測度」
測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ に対して、$m(X) < \infty$ を満たすとき、m を 有限測度 という。また、測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ が次の条件を満たすとき、m を σ**有限測度** という。
$m(X_n) < \infty$ を満たす $X_n \in \mathcal{F}(n = 1, 2, \cdots)$ が存在し

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

命題 1.7 測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ は次の性質を持つ。
$(m.4)$ $\quad E_1, E_2 \in \mathcal{F}, E_1 \subset E_2$ ならば $m(E_1) \leq m(E_2)$ $\quad$ (単調性)
$(m.5)$ $\quad E_j \in \mathcal{F}(1 \leq j \leq n), E_n \cap E_m = \emptyset\ (n \neq m)$ ならば

$$m(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} m(E_j) \quad (\text{有限加法性})$$

$(m.6)$ $\quad E_n \in \mathcal{F}(n = 1, 2, \cdots)$ に対して、

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \quad (\text{劣加法性})$$

$(m.7)$ $\quad E_n \in \mathcal{F}(n = 1, 2, \cdots), E_n \subset E_{n+1}(n \geq 1)$ ならば

$$\lim_{n \to \infty} m(E_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \quad (\text{上方連続性})$$

$(m.8)$ $\quad E_n \in \mathcal{F}(n=1,2,\cdots), m(E_n) < \infty$ かつ $E_n \supset E_{n+1}(n \geq 1)$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \quad \text{(下方連続性)}$$

証明

最初に $(m.5)$ から示す。

m の σ 加法性の性質を利用する。$E_n \cap E_m = \emptyset\ (n \neq m)$ とすると

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = m(\bigcup_{j=1}^{n} E_j \cup (\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j)) = \sum_{j=1}^{n} m(E_j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} m(E_j)$$

今、$n' > n$ に対して、$E_{n'} = \emptyset$ とすると $m(E_{n'}) = 0$

以上より

$$m(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} m(E_j)$$

が成立する。

$(m.4)$ を示す。

$E_1 \subset E_2$ ならば有限加法性 $(m.5)$ より

$$m(E_2) = m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1) \geq m(E_1)$$

が成立する。

$(m.6)$ を示す。

$$F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k (n \geq 2) \text{ とおくと}$$

$\{F_n\}$ は互いに素な集合列で、$\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ を満たし, また $F_n \in \mathcal{F}$ である。したがって、$(m.2)(m.4)$ より

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

となり $(m.6)$ が成立する。

$(m.7)$ を示す。

ある $j \in \mathbb{N}$ に対して、$m(E_j) = \infty$ の場合は成立する。よって、$m(E_j) < \infty$ の場合を考える。

$$F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus E_{n-1}\ (n \geq 2)$$

とおくと、$\{E_n\}$ が単調増加列より、$\{F_n\}$ は互いに素で、$\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ が成立し

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)$$

となる。そして

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) &= \lim_{n\to\infty}\{\sum_{j=2}^{n} m(F_j) + m(F_1)\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\{\sum_{j=2}^{n}(m(E_j) - m(E_{j-1})) + m(E_1)\} \\
&= \lim_{n\to\infty} m(E_n)
\end{aligned}
$$

以上より、$m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$ が成立する。
$(m.8)$ を示す。

$$
E_1 \backslash (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = E_1 \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)^c = E_1 \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} {E_n}^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1 \cap {E_n}^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1 \backslash E_n)
$$

が成立する。よって $\{E_n\}$ は単調減少列より $E_1 \backslash E_{n-1} \subset E_1 \backslash E_n (n \geq 2)$ となり

$$
\begin{aligned}
m\big(E_1 \backslash (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)\big) &= m\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1 \backslash E_n)\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} m(E_1 \backslash E_n) \qquad (\text{上方連続性より}) \\
&= m(E_1) - \lim_{n\to\infty} m(E_n)
\end{aligned}
$$

が成立する。また

$$
m(E_1 \backslash (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = m(E_1) - m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)
$$

が成立する。以上より $m(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$ が成立する。

命題 1.8 $E_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 1)$ に対して

$$
\liminf_{n\to\infty} m(E_n) \geq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m)
$$

証明
$B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \quad (n \geq 1)$ とおくと
$\{B_n\}$ は単調増加列で $B_n \in \mathcal{F}, B_n \subset E_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$ を満たす。
単調性から $m(B_n) \leq m(E_n)$ となり

$$
\lim_{n\to\infty} m(B_n) = \liminf_{n\to\infty} m(B_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(E_n) \tag{1.6}
$$

が成立する。そして、上方連続性より

$$
\lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m) \tag{1.7}
$$

(1.6), (1.7) より命題を示せた。 ■

命題 1.9 $E_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 1)$ が $m(E_n \cap E_m) = 0$ $(n \neq m)$ を満たすとき、

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

が成立する。

証明

$$F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus (\bigcup_{m=1}^{n-1} E_m) \quad (n \geq 2)$$

とおくと

$$F_m \cap F_n = \emptyset \ (m \neq n) \text{ かつ } \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

よって σ 加法性より

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)$$

仮定と劣加法性から

$$m(E_n \cap (\bigcup_{m=1}^{n-1} E_m)) \leq \sum_{m=1}^{n-1} m(E_n \cap E_m) = 0$$

ゆえに

$$m(E_n) = m(F_n) + m(E_n \cap (\bigcup_{m=1}^{n-1} E_m)) = m(F_n) \quad (n \geq 1)$$

となり成立する。 ■

1.3 外測度

この節では、まず一般的な外測度の持つ性質について述べる。そして、外測度が与えられれば、それについて可測な集合全体は σ 集合体となり、外測度はその上に制限すれば測度となることを導く。

定義 1.9「外測度」
集合 X の任意の部分集合 A に対して定義された関数 m^* が次の 3 条件を満たすとき、m^* を X 上の**外測度**という。

$(\gamma.1)$ $\quad 0 \leq m^*(A) \leq \infty, m^*(\emptyset) = 0 \quad$ (非負性)

$(\gamma.2)$ $\quad A \subset B$ ならば $m^*(A) \leq m^*(B) \quad$ (単調性)

$(\gamma.3)$ $\quad m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \quad$ (劣加法性)

定義 1.10「有限加法的測度」
$\mathcal{A}$ は集合 X の $\mathcal{F}$ 集合体とする。$(X,\mathcal{A})$ 上で定義された有限加法的な非負集合関数 m_0 を **有限加法的測度** という。すなわち
$(m_0.1)$　　$m_0(\emptyset)=0, 0\leq m_0(E)\leq\infty$　　$(E\in\mathcal{A})$
$(m_0.2)$　　$n\geq 2$ に対して、$E_j\in\mathcal{A}(1\leq j\leq n)E_j\cap E_k=\emptyset(j\neq k)$ ならば

$$m_0(\bigcup_{j=1}^{n}E_j)=\sum_{j=1}^{n}m_0(E_j)$$

を満たす。このとき、$(X,\mathcal{A},m_0)$ を **有限加法的測度空間** という。

定理 1.1 集合 X 上の $\mathcal{F}$-集合体 $\mathcal{A}$ に有限加法的測度 m が与えられているとき、任意の $A\subset X$ について

$$m^*(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n):A_n\in\mathcal{A},\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset A\}\tag{1.8}$$

は外測度になる。

証明
外測度の 3 条件を満たすことを確かめる。
$(\gamma.1)$ 空集合の部分集合は空集合なので $m^*(\emptyset)=0$ であり、$m(A_n)\geq 0$ より $0\leq m^*(A)\leq\infty$ となる。
$(\gamma.2)$ を示す。
$m^*(B)=\infty$ のときは $(\gamma.2)$ は成立する。
$m^*(B)<\infty$ のとき、任意の $\epsilon>0$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n)-m^*(B)<\epsilon$$

を満たす B の被覆 $\{B_n\}$ が存在する。
$A\subset B$ ならば $\{B_n\}$ は A の被覆にもなっているので

$$m^*(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n)\leq m^*(B)+\epsilon$$

$\epsilon>0$ は任意より $(\gamma.2)$ は成立する。
$(\gamma.3)$ を示す。
$\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A_n)=\infty$ のときは $(\gamma.3)$ は成立する。
$\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A_n)<\infty$ のとき、任意の $\epsilon>0, n\geq 1$ に対して、$\{F_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ が存在し

$$A_n\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}F_{n,m}\text{かつ}\ m^*(A_n)\geq\sum_{m=1}^{\infty}m(F_{n,m})-\frac{\epsilon}{2^n}\tag{1.9}$$

を満たす。また

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}F_{n,m}$$

も成立。よって、(1.8), (1.9) より

$$
\begin{aligned}
m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m(F_{n,m}) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) - \epsilon
\end{aligned}
$$

$\epsilon > 0$ は任意より $(\gamma.3)$ は成立する。したがって、m^* は外測度となる。 ■

定義 1.11「$\boldsymbol{m^*}$ 可測」
外測度 m^* が集合 X 上で定義されているとき、任意の $E \subset X$ に対して

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E)$$

を満たす集合 A を $\boldsymbol{m^*}$ **可測** ということにする。

補題 1.1 A が任意の $E \subset X$ に対して

$$m^*(E) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) \tag{1.10}$$

を満たせば A は m^* 可測である。

証明 $(A \cap E) \cup (A^c \cap E) = E$ より $m^*(E) \le m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E)$ が成立。よって補題 1.1 の条件を満たせば A は m^* 可測である。

定理 1.2 $\mathcal{F}$ 集合体 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度 m から作られる m^* について、$\mathcal{A}$ の元は m^* 可測である。

証明
$A \in \mathcal{A}$ を任意に一つ選ぶ。そして、任意の $E \subset X$ を考える。任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\mathcal{A}$ による可算個の被覆 $\{A_n\}$ が存在して

$$m^*(E) \ge \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - \epsilon$$

を満たす。また $\{A_n \cap A\}$ は $A \cap E$、$\{A_n \cap A^c\}$ は $E \cap A^c$ の被覆なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cap A) \ge m^*(A \cap E)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cap A^c) \ge m^*(A^c \cap E)$$

成立する。したがって $m(A_n \cap A) + m(A_n \cap A^c) = m(A)$ であるから

$$
\begin{aligned}
m^*(E) &\ge \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - \epsilon \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n^c \cap A) - \epsilon \\
&\ge m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) - \epsilon
\end{aligned}
$$

$\epsilon > 0$ は任意より $A \in \mathcal{A}$ は m^* 可測である。 ■

定理 1.3 $\mathcal{B}$ を m^* 可測集合全体とする。そのとき、$\mathcal{B}$ は σ 集合体となり、$(\Omega, \mathcal{B}, m^*)$ は測度空間になる。

証明
まず $\mathcal{B}$ が σ 集合体になることを示す。
$A=\emptyset$ ととれば $A\cap E=\emptyset, A^c\cap E=E$ および $m^*(\emptyset)=0$ より (1.10) を満たすので $\emptyset\in\mathcal{B}$ となる。
$A\in\mathcal{B}$ ならば $A^c\in\mathcal{B}$ であることは、(1.10) を見れば明らかである。
　残っているのは互いに素な集合の可算和に対する条件だけだが、まず有限和について成立することを示す。$A, B\in\mathcal{B}$ とする。

$$(A\cup B)\cap E=(A\cap E)\cup(A^c\cap B\cap E)$$

に注意すると、任意の集合 E に対して

$$\begin{aligned}
&m^*\big((A\cup B)\cap E\big)+m^*\big((A\cup B)^c\cap E\big)\\
=&m^*\big((A\cap E)\cup(A^c\cap B\cap E)\big)+m^*(A^c\cap B^c\cap E)\\
\leq&m^*(A\cap E)+m^*(A^c\cap B\cap E)+m^*(A^c\cap B^c\cap E)\\
=&m^*(A\cap E)+m^*\big(B\cap(A^c\cap E)\big)+m^*\big(B^c\cap(A^c\cap E)\big)\\
=&m^*(A\cap E)+m^*(A^c\cap E)\\
=&m^*(E)
\end{aligned}$$

したがって、$m^*\big((A\cup B)\cap E\big)+m^*\big((A\cup B)^c\cap E\big)\leq m^*(E)$ が成立する。
補題 1.1 より $A\cup B\in\mathcal{B}$ が示せた。
　そして、$\mathcal{B}$ 上で外測度 m^* の有限加法性を示す。
まず、$A, B\in\mathcal{B}$ が互いに素ならば、任意の $E\subset X$ に対して

$$m^*\big(E\cap(A\cup B)\big)=m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B) \tag{1.11}$$

が成立することを示す。

$$\begin{aligned}
m^*\big((A\cup B)\cap E\big) &= m^*\Big(\big((A\cup B)\cap E\big)\cap B\Big)+m^*\Big(\big((A\cup B)\cap E\big)\cap B^c\Big)\\
&= m^*(B\cap E)+m^*(A\cap E\cap B^c)
\end{aligned}$$

A,B は互いに素だから、$A\cap E\cap B^c=A\cap E$ となり

$$m^*\big((A\cup B)\cap E\big)=m^*(B\cap E)+m^*(A\cap E)$$

が成立する。このことから $E=A\cup B$ ととれば、$A, B\in\mathcal{A}$ が互いに素のとき

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$$

を得る。

$\mathcal{B}$ が σ 集合体になること、および $\mathcal{B}$ 上の σ 加法性を示す。$\{A_n\} \subset \mathcal{B}$ を互いに素とする。まず、$\cup_{i=1}^n A_n \in \mathcal{B}$ より

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*\big(E \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i)\big) + m^*\big(E \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c\big) \\ &= \sum_{i=1}^n m^*(E \cap A_i) + m^*\big(E \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c\big) \\ &\geq \sum_{i=1}^n m^*(E \cap A_i) + m^*\big(E \cap (\bigcup_{i=1}^\infty A_i)^c\big) \end{aligned} \tag{1.12}$$

すべての n について成立するので、無限和にできて、さらに $(\gamma.3)$ より

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq \sum_{i=1}^\infty m^*(E \cap A_i) + m^*\big(E \cap (\bigcup_{i=1}^\infty A_i)^c\big) \qquad (1.13) \\ &\geq m^*\big(E \cap (\bigcup_{i=1}^\infty A_i)\big) + m^*(E \cap (\bigcup_{i=1}^\infty A_i)^c\big) \end{aligned}$$

したがって

$$m^*(E) = m^*\big(E \cap (\bigcup_{i=1}^\infty A_i)\big) + m^*\big(E \cap (\bigcup_{i=1}^\infty A_i)^c\big) \tag{1.14}$$

が成立するので、$\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{B}$ となる。さらに $E = \cup_{i=1}^\infty A_i$ を (1.13) に代入すると

$$m^*(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty m^*(A_i)$$

を得る。互いに素でない $\{A_n\}$ について $\cup_{i=1}^\infty A_i$ が m^* 可測であることは

$$B_1 = A_1, B_n = A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i)^c \quad (n \geq 2)$$

とおけば $\{B_n\}$ は互いに素で、$\cup_{i=1}^n B_i = \cup_{i=1}^n A_i$ が成り立つことから分かる。 ■

1.4 ホップの拡張定理

定義 1.12 「拡張について」
有限加法的測度空間 $(X, \mathcal{A}, m)$ に対して、$\mathcal{A}$ を含む最小の σ集合体を$\sigma(\mathcal{A})$ と表す。ここで $\big(X, \sigma(\mathcal{A})\big)$ 上の完全加法的測度 m' が有限加法的測度 m の拡張であるとは次の条件を満たすことである。

$$m'(B) = m(B) \quad (B \in \mathcal{A}) \tag{1.15}$$

m^* を定理 1.1 で定めた外測度とし、$\mathcal{B}$ を m^* 可測集合全体とすると、$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ を満たすので m に対応する外測度 m^* は m の拡張となる候補であるが、定義 1.12 から

$$m^*(B) = m(B) \quad (B \in \mathcal{A}) \tag{1.16}$$

が成立すればよい。次に述べるホップの拡張定理では (1.16) が成り立つための条件を与える。

定理 1.4 「ホップの拡張定理」
$\mathcal{F}$ 集合体 $\mathcal{A}$ 上に有限加法的測度 m が存在するとき
(1) m が $\sigma(\mathcal{A})$ 上に拡張できるための必要かつ十分条件は、任意の互いに素な $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ に対して、$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ならば

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

を満たすことである。
(2) さらに、$\{X_n\} \subset \mathcal{A}$ で $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ かつ $m(X_n) < \infty$ をみたすものがあれば、その拡張は一意的である。

証明
(1) の必要性を示す。m が $\sigma(\mathcal{A})$ 上に測度を拡張できるなら、$\mathcal{A}$ 上で完全加法性を満たさなければならないので必要性は言える。
(1) の十分性を示す。
m^* について可測な集合全体 $\mathcal{B}$ は σ 集合体になり、$\mathcal{A}$ を含んでいるから、$\mathcal{A}$ から生成される σ 集合体も含んでいる。つまり $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ が成立する。このことから m^* は $\sigma(\mathcal{A})$ 上で完全加法性を満たす。

次に、$m^*(A) < \infty$ を満たすような任意の $A \in \mathcal{A}$ について、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$ を満たす $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ が存在して

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - \epsilon$$

が成立する。今

$$B_1 = A_1 \cap A, B_n = (A_n \cap A) \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i)^c \quad (n \geq 2)$$

とおく。そうすると、$\{B_n\} \subset \mathcal{A}$ は互いに素で、$B_i \subset A_i$ かつ $\cup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ を満たす。よって、$n \to \infty$ をとって、m の完全加法性を用いると

$$\begin{aligned} m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) - \varepsilon &= m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) - \epsilon \\ &= m(A) - \epsilon \end{aligned}$$

となる。$\epsilon > 0$ は任意より $m^*(A) \geq m(A)$ となる。また、A 自身が A の被覆であることから、$m^*(A) \leq m(A)$ となり、任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $m^*(A) = m(A)$ となる。

次に (2) の一意性を示す。

外測度から導かれる m^* の他に m' があるとする。任意の $A \in \sigma(\mathcal{A})$ に対して、A の被覆 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ で

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - \epsilon$$

を満たすものを考えると、$m'(A_n) = m^*(A_n)$ であることから

$$\begin{aligned} m'(A) \leq m'(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \\ &\leq m^*(A) + \epsilon \end{aligned}$$

を満たす。$\epsilon > 0$ は任意より

$$m'(A) \leq m^*(A)$$

を得る。

仮定より、$X_n \in \mathcal{A}$ かつ $m(X_n) < \infty$ が存在する。$A \subset X_n$ ならば

$$m'(A) \leq m^*(A), m'(X_n \cap A^c) \leq m^*(X_n \cap A^c) \tag{1.17}$$

を得るが、$X_n \in \mathcal{A}$ より

$$\begin{aligned} m'(X_n \cap A^c) &= m'(X_n) - m'(A) \\ &= m^*(X_n) - m'(A) \\ &\geq m^*(X_n) - m^*(A) \\ &= m^*(X_n \cap A^c) \end{aligned} \tag{1.18}$$

よって、(1.17), (1.18) から $m'(A) = m^*(A)$ となる。

次に、一般の A について示す。一般の A については

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap A)$$

と選べば $X_n \cap A$ は互いに素なので

$$\begin{aligned} m'(A) &= m'(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap A)) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(X_n \cap A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(X_n \cap A) = m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap A)) \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

■

定理 1.5 「σ 加法性と同値な条件」
任意の互いに素な $A_1, A_2 \cdots \in \mathcal{A}$ に対して、$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ならば

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

を満たすことは、次の 2 条件を満たすことと同値である。
(1) $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots (A_n \in \mathcal{A})$ が $m(A_1) < \infty$ かつ $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ ならば

$$\lim_{n \to \infty} m(A_n) = 0$$

(2) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots (A_n \in \mathcal{A})$ が $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ かつ $m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$ ならば

$$\lim_{n \to \infty} m(A_n) = \infty$$

証明
m が $\mathcal{A}$ 上で完全加法的ならば、$\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ が単調減少で、$m(A_1) < \infty$ を満たせば、$B_n = A_n \cap A_{n+1}^c$ ととると、$\{B_n\} \subset \mathcal{A}$ は互いに素であり

$$\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n = A_m$$

を満たすので

$$m(A_1) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \infty$$

よって、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{n=m}^{\infty} m(B_n) < \epsilon$$

が成立。以上より

$$m(A_m) = \sum_{n=m}^{\infty} m(B_n) < \epsilon$$

したがって

$$\lim_{n \to \infty} m(A_n) = 0 \text{ となる。}$$

単調増加列 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ については、

$$A_0 = \emptyset, B_1 = A_1, B_n = A_n \cap A_{n-1}^c \quad (n \geq 1)$$

とおくと,$\{B_n\} \subset \mathcal{A}$ は互いに素であり、また

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n$$

を満たす。よって

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= m(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \infty \end{aligned}$$

となる。

次に、逆を示す。$\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ が互いに素で、$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ とする。
$m(A) < +\infty$ のときには,

$$B_n = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$$

とおくと、$\{B_n\} \subset \mathcal{A}$ は単調減少で、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \Big)^c = A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = A \cap A^c = \emptyset$$

である。したがって $\{B_n\}$ は (1) の条件を満たす集合列である。よって

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n) = 0$$

また

$$m(B_n) = m(A) - \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

以上より

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = m(A) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$m(A) = \infty$ のときには、

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

とおけば、$\{B_n\} \subset \mathcal{A}$ は単調増加である。したがって、$\{B_n\}$ は (2) の条件を満たす集合列であるから

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n) = \infty$$

また

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n) = \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

以上より

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \infty$$

■

1.5 ルベーグ測度の存在について

定義 1.5 でルベーグ測度 λ を次の条件を満たす $\big(R^d, \mathcal{B}(R^d)\big)$ 上の測度として導入した。

$$d \text{ 次元区間 } J \text{ に対して} \quad \lambda(J) = |J|$$

このルベーグ測度が存在することをホップの拡張定理を応用して証明する。ここではルベーグ測度より一般的なルベーグ・スティルチェス測度を構成する。なお、ここでは 1 次元の場合に限定して考えることにする。

$f : R^1 \mapsto R^1$ を右連続かつ単調非減少関数とする。この f に対して、次の条件を満たす $\big(R^1, \mathcal{B}(R^1)\big)$ 上の測度 λ_f を f に対応する**ルベーグ・スティルチェス測度**という。

$$\lambda_f\big((a,b]\big) = f(b) - f(a) \qquad (-\infty < a < b < +\infty) \tag{1.19}$$

とくに、R^1 上のルベーグ測度は $f(t) = t$ に対応するルベーグ・スティルチェス測度である。

定理 1.6 任意の右連続かつ単調非減少関数 $f : R^1 \to R^1$ に対して、(1.19) を満たす $\big(R^1, \mathcal{B}(R^1)\big)$ 上の測度 λ_f は一意的に存在する。

証明

有限または無限区間の有限和集合からなる集合全体を $\mathcal{F}_0$ で表す。すなわち

$$\mathcal{F}_0 = \{E = \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i] : -\infty \le a_i < b_i \le +\infty\}$$

ただし $(a, \infty]$ は (a, ∞) とみなす。例 1.1 より $\mathcal{F}_0$ が R^1 上の $\mathcal{F}$ 集合体である。そこで区間 $(a, b]$ に対して

$$m_0\big((a,b]\big) = f(b) - f(a)$$

とおく。ただし、

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) \le \infty, f(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} f(t) \ge -\infty$$

とする。次に、$E \in \mathcal{F}_0$ を互いに交わりのない半開区間の和集合

$$E = \bigcup_{k=1}^m I_k \tag{1.20}$$

と表し、

$$m_0(E) = \sum_{k=1}^m m_0(I_k) \tag{1.21}$$

とおく。このとき、$m_0(E)$ を定義する (1.21) の右辺の値は E を構成する区間の半開区間の和集合としての表し方によらず定まる。また、m_0 は $\big(R^1, \mathcal{F}_0\big)$ 上の有限加法的測度になる。そこで、ホップの拡張定理を適用するために m_0 が $\mathcal{F}_0$ 上で σ 加法性をもつことを示せばよい。そのために次の補題 1.2 を準備する。

補題 1.2 $\{(\alpha_n, \beta_n]\}$ は互いに交わらない区間列で

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, \beta_n] = (a, b]$$

を満たすとき、任意の右連続かつ単調非減少関数 f に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) = f(b) - f(a) \tag{1.22}$$

証明

$(a, b]$ が無限区間の場合でも同様に示せるので、ここでは、$(a, b]$ を有限区間として考えることにする。f の右連続性から任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$\beta_n < \beta'_n \text{かつ} \ |f(\beta'_n) - f(\beta)| \leq \frac{\epsilon}{2^n} \ (n \geq 1) \tag{1.23}$$

を満たすような $\{\beta'_n\}$ 選ぶと

$$[a + \epsilon, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, \beta'_n)$$

が成立する。よって、$[a + \epsilon, b]$ のコンパクト性より、ある $M \in \mathbb{N}$ が存在し

$$[a + \epsilon, b] \subset \bigcup_{n=1}^{M}(\alpha_n, \beta'_n) \subset \bigcup_{n=1}^{M}(\alpha_n, \beta'_n]$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned}
f(b) - f(a + \epsilon) &\leq \sum_{n=1}^{M}(f(\beta'_n) - f(\alpha_n)) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}(f(\beta'_n) - f(\alpha_n)) \qquad (1.23) \text{ より} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) + \epsilon
\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意であり、f は右連続であるから

$$f(b) - f(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(f(\beta_n) - f(\alpha_n))$$

が成り立つ。また, 任意の $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{l}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) \leq f(b) - f(a)$$

より $l \to \infty$ すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) \leq f(b) - f(a)$$

を得る。よって、補題 1.2 が成立する。 ■

さて、$\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_0$ は $E_n \cap E_m = \emptyset (n \neq m)$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_0$ を満たす集合列とする。すると、$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_0$ であるから、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{M}(a_k, b_k]$$

と表される。ここでの $\{(a_k, b_k]\}$ は互いに交わりのない区間である。

よって、各 k に対して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap (a_k, b_k]) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \cap (a_k, b_k] = \big(\bigcup_{k=1}^{M}(a_k, b_k]\big) \cap (a_k, b_k] = (a_k, b_k]$$

が成立する。また、$\{E_n \cap (a_k, b_k]\}_{n=1,2,\cdots}$ は互いに素であり、区間の有限和集合なので補題 1.2 の仮定を満たすから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_0\big(E_n \cap (a_k, b_k]\big) = m_0(a_k, b_k] \qquad (1 \leq k \leq m)$$

が成立する。よって、k について和をとると、左辺は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{M}\big\{\sum_{n=1}^{\infty} m_0(E_n \cap (a_k, b_k])\big\} = \sum_{n=1}^{\infty}\big\{\sum_{k=1}^{M} m_0(E_n \cap (a_k, b_k])\big\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m_0\big(\bigcup_{k=1}^{M}(E_n \cap (a_k, b_k])\big) = \sum_{n=1}^{\infty} m_0(E_n \cap \bigcup_{k=1}^{M}(a_k, b_k]) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m_0(E_n \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m_0(E_n)
\end{aligned}$$

右辺は

$$(\text{右辺}) = \sum_{k=1}^{m} m_0(a_k, b_k] = m_0(\bigcup_{k=1}^{M}(a_k, b_k]) = m_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$$

となり

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_0(E_n) = m_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$$

よって、m_0 は $\mathcal{F}_0$ 上で σ 加法的であることが分かる。

さらに、$f(\alpha_n) < \infty, f(\beta_n) < \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(\beta_n) = \infty, \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = -\infty$ を満たす $(\alpha_n, \beta_n]$ をとると

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, \beta_n] = R^1$$

かつ、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$m_0\big((\alpha_n, \beta_n]\big) < \infty$ が成立する。また、命題 1.4 から、$\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}(R^1)$ が分かる。したがって、ホップの拡張定理から、m_0 は $\big(R^1, \mathcal{B}(R^1)\big)$ 上の測度 λ_f に一意的に拡張される。 ■

さらに命題 1.6 において $f(t) = t$ の場合、1 次元半開区間 $J = (a, b]$ に対して、

$$\lambda(J) = f(b) - f(a) = b - a = |J| = \lambda^*(J) \qquad (\lambda^*\text{はルベーグ外測度})$$

が成立する。このことから、任意の $E \in \mathcal{B}(R^1)$ に対して

$$\lambda(E) = \lambda^*(E)$$

となり、定義 1.5 (λ.3) を満たすことが分かる。

第 2 章　ルベーグ積分

前章では、d 次元ユークリッド空間 R^d 上にボレル集合体 $\mathcal{B}(R^d)$ とルベーグ測度 λ を導入した。このルベーグ測度をもとにして R^d 上で定義された関数に積分が定義される。この積分をルベーグ積分という。本章では、一般の測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上でルベーグ式積分を構成していく。さらに、ルベーグ積分で重要とされている収束定理 (単調収束定理、ファトウの補題、ルベーグ収束定理) について述べ、証明も与える。なお、本章では、記載が長くなるため、積分の基本的な性質の証明については割愛する。

2.1　可測関数

ルベーグ積分は可測関数に対して定義される。本節では、可測関数の定義および、その基本的な性質について述べる。

定義 2.1 「可測関数」
$(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間とする。関数 $f : X \longmapsto [-\infty, \infty]$ が次の条件を満たすとき、fを**可測関数**という。

$$\text{任意の } a \in R^1 \text{ に対して} \quad [f > a] = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F}$$

命題 2.1 関数 $f : X \longmapsto [-\infty, \infty]$ に対し、次の条件は同値である。
(1) f は可測関数である。
(2) 任意の実数 a に対し　$[f \geq a] \in \mathcal{F}$
(3) 任意の実数 a に対し　$[f < a] \in \mathcal{F}$
(4) 任意の実数 a に対し　$[f \leq a] \in \mathcal{F}$
(5) 任意の $B \in \mathcal{B}(R^1)$ に対して $[f \in \mathcal{B}] \in \mathcal{F}$ かつ $[f = \infty] \in \mathcal{F}$

証明に関しては、参考文献 [2] p.33 を参照のこと。

定義 2.2 「単純関数」
X の部分集合 $A \in \mathcal{F}$ に対して,A の定義関数 I_A を次で定義する。

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

また、可測関数 $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty)$ が有限個の値しかとらないとき、**単純関数**という。このとき f は次の形で表すことができる。

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x) \qquad (-\infty < a_i < \infty, A_i \in \mathcal{F})$$

ここでは $a_i \neq a_j, A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$
このように定めると定義関数、単純関数は可測関数である。

命題 2.2 $f(x), g(x)$ を単純関数とし、α, β を実数とする。このとき

$$\alpha f(x) + \beta g(x), f(x)g(x), |f(x)|$$

もまた単純関数である。

証明に関しては参考文献 [6] p.135 を参照のこと。

命題 2.3 非負関数 $f : X \longmapsto [0, \infty]$ が可測ならば非負単純関数列 $\{f_n\}$ が存在し、各点 $x \in X$ で $\{f_n(x)\}(n \geq 1)$ は単調非減少かつ $f(x)$ に収束する。

証明

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{[(k-1)2^{-n} \leq f(x) < k \cdot 2^{-n}]} + nI_{[f(x) \geq n]} \quad (n \geq 1)$$

とおくとき、この非負単純関数は題意を満たすことを示す。まず $f_n(x)$ が n に関して単調非減少であることを示す。

任意の $x \in [\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}] \quad (k = 1, 2, \cdots, n \cdot 2^n)$ に対して $f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$ となる。

(1) 任意の $x \in [\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}] \quad (k = 1, 2, \cdots, n \cdot 2^n)$ に対して

$$f_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^n} = f_n(x)$$

(2) 任意の $x \in [\frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}] \quad (k = 1, 2, \cdots, n \cdot 2^n)$ に対して

$$f_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} > f_n(x)$$

(1), (2) より任意の $x \in [0 \leq f(x) < n]$ に対して、$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

(3) 任意の $x \in [\frac{k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k}{2^{n+1}}] \quad (k = n \cdot 2^{n+1} + 1, n \cdot 2^{n+1} + 2, \cdots, (n+1) \cdot 2^{n+1})$ に対して

$$f_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^{n+1}}$$
$$f_n(x) = n$$

よって 任意の $x \in [n \leq f(x) < n+1]$ に対して $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$
(4) 任意の $x \in [n+1 \leq f(x)]$ に対して
$f_n(x) = n, f_{n+1}(x) = n+1$ より $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

(1)(2)(3)(4) から $f_n(x)$ $(x \in X)$ は n に関して単調非減少である。
次に, $x{\in}X$ に対して $f_n(x) \to f(x)(n \to \infty)$ を示す。
$f(x_0) < n \quad$ (x_0を固定) ならば

$$\frac{k_0 - 1}{2^n} \leq f(x_0) < \frac{k_0}{2^n}$$

を満たすある k_0 が存在する。よって

$$f(x_0) - f_n(x_0) = f(x_0) - \frac{k_0 - 1}{2^n} < \frac{k_0}{2^n} - \frac{k_0 - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

が成立する。以上より $f(x) < \infty$ を満たす点 x については,$x \in [f(x) < n]$ なので

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

となり、$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ となる。$f(x) = \infty$ となる点は $x \in [f \geq n]$ なのでそういう点 x に対して

$$f_n(x) = n \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

したがって、題意を満たす非負単純関数 f_n は存在する。 ■

命題 2.4 $f, g : X \mapsto (-\infty, \infty)$ が可測関数ならば、
cf(c は実数)$, f + g, |f|, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$
は可測関数である。

証明
(1) 任意の $a \in R$ に対して $[cf > a] \in \mathcal{F}$ を示す。
c=0 のとき,

$$[cf > a] = \begin{cases} \emptyset & (a > 0 \text{ のとき}) \\ X & (a \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$c \neq 0$ のとき

$$[cf > a] = [f > \frac{a}{c}]$$

よって、$[cf > a] \in \mathcal{F}$ となり cf は可測関数である。
(2) 有理数は実数のなかで稠密で可算個しかないことより
　任意の $a \in R$ に対して,

$$[f + g > a] = \bigcup_{r:\text{有理数}} ([f > r] \cap [g > a - r])$$

右辺に現れる 2 つの集合はともに $\mathcal{F}$ に属し、それらの可算和はであるから $\mathcal{F}$ に属す。
(3) $a < 0$ の場合、$[|f| > a] = X$ であり、$a < 0$ のときは

$$[|f| > a] = [f > a] \cup [f < -a] \in \mathcal{F}$$

となる。よって、f が可測ならば $|f|$ は可測となる。
(4)$f \cdot g = \frac{1}{4}\{(f + g)^2 - (f - g)^2\}$ であるから、f が可測ならば f^2 も可測であることを

示めせば十分である。

$$[f^2 > a] = \begin{cases} [|f| > \sqrt{a}] & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ X & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

どちらの場合も、$\mathcal{F}$ に属しているので f^2 は可測関数である。

(5)(6) に関しては　$\max\{f, g\} = \frac{(f+g+|f+g|)}{2}$,$\min\{f, g\} = \frac{(f+g-|f+g|)}{2}$ であるから
(1)(2)(3) より、可測性が分かる。 ■

また、$f^+ = \max(f, 0), f^- = \max(-f, 0)$ とおくとき、$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f-$ であり、したがって、f が可測であることと、f^+ と f^- がともに可測であることは同値である。

命題 2.5 $f, g : X \longmapsto [-\infty, \infty]$ はともに可測ならば
(1) $[f > g], [f = g] \in \mathcal{F}$ となる。

証明
(1)$[f > g] = [f - g > 0]$ であるが、f, g が可測ならば、$f - g$ も可測なので $[f > g] \in \mathcal{F}$ となる。
(2)　(1) と同様に $f - g$ が可測であるので $f - g$ が 0 に等しい集合も可測となる。 ■

命題 2.6 $\{f_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ は可測関数列とするとき
(1) $\sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \cdots\}, \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \cdots\}$ は可測関数である。
(2) $\limsup_{n\to\infty} f_n(x), \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ は可測関数である。
(3) $\{f_n\}$ がある関数 f に各点収束すれば、f は可測関数である。

証明
(1) $a \in R$ について、上限が a より大きいためにはどれかひとつが a より大きくなればいいので

$$\big\{x \in X : \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \cdots\} > a\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\}$$

より関数の上限が可測であることに従う。下限についても同様に、下限が a より大きいためにはすべてが a より大きくなければならないことから

$$\big\{x \in X : \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \cdots\} \geq a\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq a\}$$

となり、可測であることが分かる。
(2) 上極限、下極限の定義より、$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_n(x)$ であり $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_n(x)$ だから (1) より $\limsup_{n\to\infty} f_n(x), \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ は可測関数である。

(3)　$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ の値が存在するなら、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ より $f(x)$ は可測関数である。 ■

2.2　積分の定義

測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ を固定して考える。$(X, \mathcal{F})$ 上で定義された可測関数に対して、測度 m をもとにしたルベーグ式積分を定義する。その方法とはまず定義関数の積分を定め、これをもとに、一般の可測関数まで積分の定義を拡張していく。

定義 2.3 「定義関数の積分」
$A \in \mathcal{F}$ に対する定義関数 $f = I_A$ の積分を

$$\int_X f(x)m(dx) = m(A)$$

と定める。

定義 2.4 「非負単純関数の積分」
非負単純関数

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} \quad (a_i \geq 0, A_i \in F)$$

に対しては

$$\int_X f(x)m(dx) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i)$$

と定める。

命題 2.7 f, g を 2 つの非負単純関数とする。
(1)　定数 $c > 0$ に対して

$$\int_X cf(x)m(dx) = c\int_X f(x)m(dx)$$

(2)

$$\int_X (f+g)(x)m(dx) = \int_X f(x)m(dx) + \int_X g(x)m(dx)$$

(3)

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{ならば} \int_X f(x)m(dx) \geq \int_X g(x)m(dx)$$

定義 2.5 「非負可測関数の積分」
$f : X \mapsto [0, \infty]$ を非負可測関数とすると、$f(x)$ に各点収束する非負単純関数列 $\{f_n(x)\}$ が存在し, その積分値の数列

$$\left\{ \int_X f_n(x)m(dx) \right\}_{n=1,2,\cdots}$$

は単調非減少列だから、その極限値が有限値または、∞ として確定する。この値を

$$\int_X f(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)m(dx)$$

と表し、f の X 上の積分という。しかし、この定義が意味をもつためには、右辺の極限値が f を近似する非負単純関数列 $\{f_n\}$ の選び方に依存しないことを示す必要がある。そして、そのことを次の命題 2.8 で確かめる。

命題 2.8 $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}, \{g_n\}_{n=1,2,\cdots}$ はともに非負単純関数の非減少列で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \leq \infty \qquad (x \in X)$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)m(dx) \leq \infty$$

命題 2.8 を証明するために、補題 2.1 を用意する。

補題 2.1 $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は非負単純関数の非減少列で,$b > 0, B \in \mathcal{F}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq bI_B(x)$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)m(dx) \geq bm(B)$$

証明

仮定から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n > b - \epsilon] \supset B \text{ を満たす。}$$

なぜなら任意の $x \in B$ をとると

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq b$$

が成立する。よって任意の $\epsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \geq N$ に対して

$$f_n(x) > b - \epsilon$$

が成立するので

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n > b - \epsilon]$$

また、任意の $x \in [f_n > b - \epsilon]$ をとると

$b - \epsilon < f_n(x)$ を満たし, $f_n(x)$ は単調非減少なので $b - \epsilon < f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ が成立する。

よって $x \in [f_{n+1}(x) > b - \epsilon]$

このことから $\Big\{[f_n > b - \epsilon]\Big\}(n = 1, 2, \cdots)$ は単調増加列より極限値が存在し

$$\lim_{n\to\infty} m\Big([f_n > b - \epsilon]\Big) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n > b - \epsilon]\Big)$$

が成立する。また、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$f_n(x) \geq (b-\epsilon) I_{([f_n > b-\epsilon])}$$

より

$$\int_X f_n(x) m(dx) \geq (b-\epsilon) m([f_n > b-\epsilon])$$

となり、$n \to \infty$ すれば、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) m(dx) &\geq (b-\epsilon) \lim_{n\to\infty} m([f_n > b-\epsilon]) \\ &\geq (b-\epsilon) m(B) \end{aligned}$$

よって示せた。 ■

命題 2.8 の証明

各 $m \geq 1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) m(dx) \geq \int_X g_m(x) m(dx)$$

を示せば十分。今、g_m をを互いに素な可測集合 $\{B_1, \cdots, B_l\}$ を用いて

$$g_m = \sum_{j=1}^{l} b_j I_{B_j} \quad (x \in X)$$

と表し

$$f_{n,j} = f_n I_{B_j}$$

とおく。仮定から

$$\lim_{n\to\infty} f_{n,j}(x) \geq g_m(x) I_{B_j}(x) = b_j I_{B_j}(x)$$

補題 2.1 より

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_{n,j}(x) \geq b_j m(B_j)$$

また

$$f_n(x) \geq \sum_{j=1}^{l} f_{n,j}(x) \quad (x \in X)$$

が成立するから

$$\int_X f_n(x) m(dx) \geq \int_X \sum_{j=1}^{l} f_{n,j}(x) m(dx) \quad (x \in X)$$

よって

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) &\geq \lim_{n\to\infty}\int_X \sum_{j=1}^{l} f_{n,j}(x)m(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{l}\int_X f_{n,j}(x)m(dx) \\
&\geq \sum_{j=1}^{l} b_j m(B_j) \\
&= \int_X g_m(x)m(dx)
\end{aligned}$$

ゆえに成立する。 ■

以上の結果から任意の非負可測関数 f の積分は f を近似する任意の非負単純関数の積分値の極限をとることによって定められる。

定義 2.6 「一般の可測関数の積分」
$f : X \mapsto [-\infty,\infty]$ を可測関数とする。

$$\int_X |f(x)|m(dx) < \infty \text{ のとき、} m \text{ 可積分という。}$$

このとき、$f^+(x) = \max\{f(x),0\}, f^-(x) = \max\{-f(x),0\}$ の積分値も有限だから f の積分値を次のように定める。

$$\int_X f(x)m(dx) = \int_X f^+(x)m(dx) - \int_X f^-(x)m(dx)$$

命題 2.9 2つの可測関数 f,g はともに m 可積分ならば
(1) 任意の実数 a,b に対して、$af+bg$ も m 可積分で

$$\int_X (af+bg)(x)m(dx) = a\int_X f(x)m(dx) + b\int_X g(x)m(dx)$$

(2) さらに $f(x) \geq g(x) \quad (x \in X)$ ならば

$$\int_X f(x)m(dx) \geq \int_X g(x)m(dx)$$

定義 2.7 「部分集合上の積分」
可測関数 $f : X \mapsto [-\infty,\infty]$ および $E \in \mathcal{F}$ に対して、$I_E f$ が m 可積分ならば

$$\int_E f(x)m(dx) = \int_X I_E f(x)m(dx)$$

と表し,f の E 上の積分という。

命題 2.10 $E_1 \in \mathcal{F}, E_2 \in \mathcal{F}, E_1 \cap E_2 = \emptyset$ とする。f は $E_1 \cup E_2$ 上 m 可積分ならば,f は E_1 および E_2 上で m 可積分で

$$\int_{E_1\cup E_2} f(x)m(dx) = \int_{E_1} f(x)m(dx) + \int_{E_2} f(x)m(dx)$$

2.3　収束定理

　本節では、単調収束定理、ファトウの補題、ルベーグの収束定理などのいわゆる収束定理とよばれている諸定理を紹介する。

定理 2.1　「単調収束定理」
$\{f_n\}$ は非負可測関数の非減少列とする。すなわち

$$0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \qquad (x \in X, n \ge 1)$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)m(dx)$$

証明
各 $n \ge 1$ に対して f_n に各点収束する非負単純関数の非減少列 $\{f_{n,m}\}_{m=1,2,\cdots}$ をとってくると定義 2.5 によって次の式が成立する。

$$\lim_{m\to\infty}\int_X f_{n,m}(x)m(dx) = \int_X f_n(x)m(dx)$$

また、$g_m(x) = \max\limits_{1\le n\le m} f_{n,m}(x)$ とおくと $g_m(x)$ は非負単純関数となる。よって

$$g_m(x) \le \max_{1\le n\le m} f_{n,m}(x) \le \max_{1\le n\le m} f_{n,m+1}(x) = g_{m+1}(x)$$

から、$g_m(x)$ は m に関して単調非減少である。さらに

$$f_{n,m}(x) \le g_m(x) \le \max_{1\le n\le m} f_n(x) = f_m(x) \qquad (1 \le n \le m) \tag{2.1}$$

よって $m \to \infty$ すると (2.1) は

$$f_n(x) \le \lim_{m\to\infty} g_m(x) \le f(x)$$

だから $\{g_m\}$ は $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ に各点収束する非負単純関数の非減少列である。よって命題 2.8 と (2.1) より

$$\begin{aligned}\int_X f(x)m(dx) &= \lim_{m\to\infty}\int_X g_m(x)m(dx)\\ &\le \lim_{m\to\infty}\int_X f_m(x)m(dx)\end{aligned}$$

他方 $f(x) \ge f_m(x) \qquad (x \in X, m \ge 1)$ から

$$\int_X f_m(x)m(dx) \le \int_X f(x)m(dx)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_m(x)m(dx) \le \int_X f(x)m(dx)$$

以上より定理 2.1 が成立する。　■

定理 2.2 「ファトウの補題」
$\{f_n\}$ は非負可測関数の列とするとき

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) \geq \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)m(dx)$$

証明
$g_n(x) = \inf_{m\geq n} f_m(x)$ とおくと $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ は非負可測関数の非減少列で

$$g_n(x) = \inf_{m\geq n} f_m(x) \leq f_n(x) \qquad (x\in X)$$

を満たす。また

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty}\inf_{m\geq n} f_m(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x\in X)$$

となる。以上より

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) &\geq \liminf_{n\to\infty}\int_X g_n(x)m(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_X g_n(x)m(dx) \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)m(dx) \qquad (\text{定理 2.1 より}) \\
&= \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)m(dx)
\end{aligned}$$

よって定理 2.2 が示せた。 ■

定理 2.3 「ルベーグ収束定理」
m 可積分関数列 $\{f_n\}$ と可測関数 f は次の条件を満たす。
(1) 各点 $x\in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
(2) 非負 m 可積分関数 g が存在し、

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad (x\in X, n\geq 1) \tag{2.2}$$

そのとき f も m 可積分で

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) = \int_X f(x)m(dx)$$

証明
(2.2) から

$$|f(x)| \leq g(x) \qquad (x\in X, n\geq 1)$$

が成立するので

$$\int_X |f(x)|m(dx) \leq \int_X g(X)m(dx) = \int_X |g(x)|m(dx) < \infty$$

となる。よって、f は m 可積分である。そこで $h_n(x) = g(x) - f_n(x)$ とおくと、$\{h_n\}$ も非負可測関数列である。ここで、ファトウの補題を用いると

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int_X \{g(x) + f_n(x)\}m(dx) &\geq \int_X \liminf_{n\to\infty} \{g(x) + f_n(x)\}m(dx) \\
&= \int_X \{g(x) + \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\}m(dx) \\
&= \int_X \{g(x) + f(x)\}m(dx)
\end{aligned}$$

よって

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)m(dx) \geq \int_X f(x)m(dx)$$

が成立する。また、$k_n(x) = g(x) - f_n(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int_X \{g(x) - f_n(x)\}m(dx) &\geq \int_X g(x)m(dx) - \int_X f(x)m(dx) \\
\liminf_{n\to\infty} \int_X \{-f_n(x)\}m(dx) &\geq -\int_X f(x)m(dx) \\
-\liminf_{n\to\infty} \int_X \{-f_n(x)\}m(dx) &\leq \int_X f(x)m(dx) \\
\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)m(dx) &\leq \int_X f(x)m(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)m(dx)
\end{aligned}$$

以上より

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)m(dx) = \int_X f(x)m(dx)$$

が成立する。 ■

定理 2.4 (1) 非負可測関数の列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ に対して、

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)m(dx)$$

(2) m 可積分関数の列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n(x)|m(dx) < \infty$$

を満たせば $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も m 可積分で

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)m(dx)$$

(3)m 可積分関数 f と $E_n \cap E_m = \emptyset (n \neq m)$ を満たす可測集合の列 $\{E_n\} n \geq 1$ に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_n(x) m(dx) = \int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f(x) m(dx)$$

定義 2.8 「概収束」
$(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間上で定義された関数 f や可測関数の列 $\{f_n\}$ に関する命題が $m(E) = 0$ をみたすある集合 $E \in \mathcal{F}$ の点をのぞくすべての点 x で成り立つとき、その命題は m に関してほとんど到るところで成立するといい $m - a.e.x \in X$ と表す。例えば

$$f(x) = 0 \quad m - a.e.x$$

は

$$m([f \neq 0]) = m(x \in X : f(x) \neq 0) = 0$$

の意味である。
可測関数列 $\{f_n\}$ がほとんど到るところで f に収束するとき

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad m - a.e.x \in X$$

と表し、$\{f_n\}$ は f に m-$a.e$ 収束 (**概収束**) するという。この正確の意味は

$$m\big(x \in X : \lim_{n \to \infty} f_n(x) \neq f(x)\big) = 0$$

である。

単調収束定理 (定理 2.1)、ルベーグ収束定理 (定理 2.3) において可測関数の列 $\{f_n\}$ は各点収束することを仮定したが、概収束に置き換えても成立する。証明に関しては参考文献 [3] p.99,p.102-104 を参照のこと。

命題 2.11 (1) m 可積分関数 f が

$$\int_X |f(x)| m(dx) = 0$$

となるための必要十分条件は

$$f(x) = 0 \quad m - a.e.x \in X$$

(2) f は m 可積分, g は可測関数で

$$g(x) = f(x) \quad m - a.e.x$$

ならば g も m 可積分で

$$\int_X f(x) m(dx) = \int_X g(x) m(dx)$$

命題 2.12

$$\int_X |f(x)|m(dx) < \infty \text{ ならば } |f(x)| < \infty \quad m - a.e.x \in X$$

証明

$M > 0$ に対し

$$E_M = [|f| \geq M]$$

とおくと

$$MI_{E_M} \leq |f|$$

なので両辺の積分を比べると

$$m(E_M) \leq \frac{1}{M} \int_X |f(x)|m(dx)$$

ゆえに

$$m(|f| = \infty) = \lim_{M \to \infty} m(E_M) = 0$$

となり $|f(x)| < \infty \quad m - a.e.x$ が成立する。 ■

命題 2.13 X 上の 2 つの m 可積分関数 f,g に対して, 次の (1), (2) は同値である。

(1)$f(x) = g(x) \quad m - a.e.x{\in}X$

(2) 任意の $E \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_E f(x)m(dx) = \int_E g(x)m(dx)$$

定義 2.9 「測度収束」

$\{f_n\}$ は可測関数列で f は可測関数とする。任意の$\epsilon > 0$ 対して、

$$\lim_{n \to \infty} m(x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon) = 0$$

をみたすとき $\{f_n\}$ は f に**測度収束**するという。

第3章　確率論の基本的な概念

本章では、まず初等確率モデル、確率空間を述べる。第1章で測度空間を定義したが、確率空間は全測度1の測度空間として定義されている。そして、可測関数を確率変数とし、可測関数の積分値を期待値として扱うことから、ルベーグ積分で得られた結果を利用することができる。

3.1　初等確率モデル

ランダムな実験 (試行) において出現する結果全体の集合を Ω で表し、**標本空間** という。そして、標本空間 Ω の各要素を**標本**といい、標本空間の部分集合を**事象**という。また、事象の集まりを $\mathcal{F}$ で表し、$\mathcal{F}$ を**事象族**という。
一般に標本空間 Ω が有限集合の場合には、$\mathcal{F}$ として Ω の部分集合全体としてとることができる。

ここで、硬貨投げ試行について考える。硬貨を投げて表が出れば1、裏が出れば0と表すことにする。また、n 回硬貨投げ試行の標本空間を Ω_n、事象族を $\mathcal{F}_n$ とする。

例 3.1 硬貨を1回投げる試行の標本空間は

$$\Omega_1 = \{0, 1\}$$

である。また、硬貨を2回投げる試行の標本空間は

$$\Omega_2 = \{\omega = (i, j) : i, j \in \{0, 1\}\}$$

である。

例 3.2 硬貨を n 回投げる試行の標本空間は

$$\Omega_n = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n) : i_k \in \{0, 1\}, 1 \leq k \leq n\} \tag{3.1}$$

である。

例 3.3 無限回硬貨投げ試行の標本空間は

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots) : i_k \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}\} \tag{3.2}$$

である。

例 3.4 硬貨投げ 1 回試行における事象族 $\mathcal{F}_1$ は

$$A_1 = \{0,1\}, A_2 = \{1\}, A_3 = \{0\}, A_4 = \emptyset$$

とおくと

$$\mathcal{F}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

となる。

命題 3.1 $\mathcal{F}_n$ の元の個数は 2^{2^n} である。

証明

Ω_n の要素の個数は 2^n である。よって Ω_n のすべて部分集合の個数は、$m = 2^n$ とおくと、

$$\sum_{k=0}^{m} {}_mC_k = (1+1)^m = 2^m = 2^{2^n}$$

となる。 ■

また、偏りがない硬貨を n 回投げた時、各事象 $A \in \mathcal{F}_n$ の確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{A\text{ の要素の数}}{\Omega_n\text{の要素の数}} = \frac{A\text{ の要素の数}}{2^n} \tag{3.3}$$

と定められる。

このように定めた確率 P は事象族 $\mathcal{F}_n$ 上で定義された関数で次の性質をもつ。

($\mathcal{P}$.1)　$0 \leq P(A) \leq 1 \quad ({}^\forall A \in \mathcal{F}_n), \quad P(\Omega) = 1$

($\mathcal{P}$.2)　$A \in \mathcal{F}_n, B \in \mathcal{F}_n, A \cap B = \emptyset$ ならば

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{（有限加法性）}$$

一般的に、有限標本空間 Ω, 事象族 $\mathcal{F}$ および ($\mathcal{P}$.1), ($\mathcal{P}$.2) を満たす P の組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を **初等確率モデル** とする。そして、標本空間のそれぞれの元 ω に対し実数 $X(\omega)$ を対応させたものを **確率変数** という。

次に、確率変数 X のとりうる値の集合 (値域) を $\mathcal{R}_X$ で表す。このとき、次の関係により $\mathcal{R}_X$ 上の非負関数 $\mu_X : \mathcal{R}_X \to [0, \infty)$ が定まる。

$$\mu_X(a) = P(X = a) \qquad (a \in \mathcal{R}_X)$$

この μ_X を X の **分布** という。また X の **期待値** $E(X)$ および **分散** $V(X)$ は次の式により定義する。

$$E(X) = \sum_{a \in \mathcal{R}_X} aP(X = a) = \sum_{a \in \mathcal{R}_X} a\mu_X(a)$$

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{a \in \mathcal{R}_X} (a - E(X))^2 \mu_X(a)$$

3.2　確率空間について

定義 3.1 「有限加法的確率空間」
$\mathcal{A}$ は集合 X の $\mathcal{F}$ 集合体とする。$(X, \mathcal{A})$ 上で定義された有限加法的な非負集合関数 P を有限加法的測度という。すなわち、

$(p.1)$　$P(\emptyset) = 0, P(X) = 1, \leq P(E) \leq 1$　$(E \in \mathcal{A})$

$(p.2)$　$n \geq 2$ に対して、$E_j \in \mathcal{A}(1 \leq j \leq n), E_j \cap E_k = \emptyset(j \neq k)$ ならば

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)$$

を満たす。このとき、$(X, \mathcal{A}, P)$ を **有限加法的確率空間** という。

定義 3.2 「確率空間」
$P(\Omega) = 1$ を満たす測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を **確率空間** という。すなわち、

$(\mathcal{F}.1)$　$\Omega \in \mathcal{F}$

$(\mathcal{F}.2)$　$A \in \mathcal{F}$ ならば　$A^c \in \mathcal{F}$

$(\mathcal{F}.3)$　$A_n \in \mathcal{F}$ ならば　$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

さらに P は $\mathcal{F}$ 上で定義された関数で

$(P.1)$　$0 \leq P(A) \leq 1$　$({}^{\forall} A \in \mathcal{F})$,　$P(\Omega) = 1$

$(P.2)$　$A_n \in \mathcal{F}$　$(n = 1, 2, \cdots), A_n \cap A_m = \emptyset$ ならば,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{加法性})$$

を満たす。このとき、Ω を**標本空間**、$\mathcal{F}$ を**事象族**、P を**確率測度**という。また、命題 1.7 の性質が、確率 P に対しても成立する。

定義 3.3 「確率変数」
Ω　上で定義された関数 $X : \Omega \to R^1$ が $\mathcal{F}$ 可測のとき、X を **確率変数** という。
すなわち、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で関数 X が任意の $a \in R$　に対して

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > a\} \in \mathcal{F}$$

を満たすとき、関数 X を確率変数という。

定義 3.4 「独立 · 分布」
$X_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数とする。このとき $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ が**独立**であるとは、任意の $a_1, \cdots, a_n \in R^1$ に対して、次式が成り立つときにいう。

$$P(X_1 \leq a_1, \cdots, X_n \leq a_n) = P(X_1 \leq a_1) \cdots P(X_n \leq a_n) \tag{3.4}$$

さらに n が無限のとき $\{X_k\}_{k \geq 1}$ が独立であるとは、任意の $N \geq 1$ に対して $\{X_k\}_{k=1}^{N}$ が独立であるときにいう。
特に,X_k が可算個の値 $S = \{a_j\}_{j \geq 1}$ しかとらないとき、(3.4) は次の条件と同値である。

$$P(X_1 = b_1, \cdots, X_n = b_n) = P(X_1 = b_1) \cdots P(X_n = b_n) \quad (b_k \in S, k = 1, \cdots, n)$$

また $\mu_X(A) = P(X \in A)$ を X の **分布** という。

定義 3.5 「期待値」
確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で $\int_\Omega |X(\omega)|P(d\omega) < \infty$ (P 可積分) のとき、

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$$

とおき、$E(X)$ を X の**期待値**という。また、非負確率変数 X に対しては

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \infty$$

のとき X の期待値は無限大といい

$$E(X) = \infty$$

と表す。

命題 2.9(1) から次の命題が得られる。

命題 3.2 「期待値の線形性」
X, Y が P 可積分な確率変数のとき実数 a, b に対して $aX + bY$ も P 可積分な確率変数となり

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

命題 3.3 $\{X_n\}$ を次の条件を満たす確率変数列とする。

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(|X_n|) < \infty$$

このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < \infty \quad P - a.s \quad \text{かつ} \quad E(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)$$

定理 2.4(2) と命題 2.12 から示される。

命題 3.4 「期待値の積公式」
確率変数 X_1, X_2 は独立でかつ P 可積分であるなら、その積 X_1X_2 も P 可積分となり、以下の等式が成立する。

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$$

証明
まず、X_1, X_2 がともに、非負の確率変数の場合を示す。命題 2.3 より $X_1(\omega), X_2(\omega)$ に各点収束するような単調非減少な非負単純関数 $f_n(\omega), g_n(\omega)$ を以下のようにおく。

$$f_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{[(k-1)2^{-n} \leq X_1(\omega) < k\cdot 2^{-n}]} + nI_{[X_1(\omega) \geq n]} \quad (n \geq 1)$$

$$g_n(\omega) = \sum_{l=1}^{n\cdot 2^n} \frac{l-1}{2^n} I_{[(l-1)2^{-n} \le X_2(\omega) < l\cdot 2^{-n}]} + nI_{[X_2(\omega)\ge n]} \quad (n \ge 1)$$

とおく。まず、$E(f_n g_n) = E(f_n)E(g_n)$ となることを示す。

$$\begin{aligned}
&E(f_n g_n)\\
&= E\Big(\sum_{k=1,l=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \frac{l-1}{2^n} I_{[(k-1)2^{-n} \le X_1(\omega) < k\cdot 2^{-n}]}(\omega) \cdot I_{[(l-1)2^{-n} \le X_2(\omega) < l\cdot 2^{-n}]}(\omega)\\
&+ n \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{[(k-1)2^{-n} \le X_1(\omega) < k\cdot 2^{-n}]}(\omega) \cdot I_{[X_2(\omega)\ge n]}(\omega)\\
&+ n \sum_{l=1}^{n\cdot 2^n} \frac{l-1}{2^n} I_{[(l-1)2^{-n} \le X_2(\omega) < l\cdot 2^{-n}]}(\omega) \cdot I_{[X_1(\omega)\ge n]}(\omega)\\
&+ n^2 I_{[X_1(\omega)\ge n]}(\omega) \cdot I_{[X_2(\omega)\ge n]}(\omega)\Big)\\
&= \sum_{k=1,l=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \frac{l-1}{2^n} P\Big((k-1)2^{-n} \le X_1(\omega) < k\cdot 2^{-n}, (l-1)2^{-n} \le X_2(\omega) < l\cdot 2^{-n}\Big)\\
&+ n \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} P\Big((k-1)2^{-n} \le X_1(\omega) < k\cdot 2^{-n}, X_2(\omega) \ge n\Big)\\
&+ n \sum_{l=1}^{n\cdot 2^n} \frac{l-1}{2^n} P\Big((l-1)2^{-n} \le X_2(\omega) < l\cdot 2^{-n}, X_1(\omega) \ge n\Big)\\
&+ n^2 P\Big(X_1(\omega) \ge n, X_2(\omega) \ge n\Big)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

X_1, X_2 の独立性から (3.5) は

$$\begin{aligned}
&E(f_n g_n)\\
&= \sum_{k=1,l=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \frac{l-1}{2^n} P\Big((k-1)2^{-n} \le X_1(\omega) < k\cdot 2^{-n}\Big) P\Big((l-1)2^{-n} \le X_2(\omega) < l\cdot 2^{-n}\Big)\\
&+ n \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} P\Big((k-1)2^{-n} \le X_1(\omega) < k\cdot 2^{-n}\Big) P\Big(X_2(\omega) \ge n\Big)\\
&+ n \sum_{l=1}^{n\cdot 2^n} \frac{l-1}{2^n} P\Big((l-1)2^{-n} \le X_2(\omega) < l\cdot 2^{-n}\Big) P\Big(X_1(\omega) \ge n\Big)\\
&+ n^2 P\Big(X_1(\omega) \ge n\Big) P\Big(X_2(\omega) \ge n\Big)\\
&= E(f_n)E(g_n)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる。f_n, g_n は単調非減少の非負単純関数なので単調収束定理が適用でき、

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n g_n) = E\Big(\lim_{n\to\infty} f_n g_n\Big) = E(X_1 X_2)$$

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n)E(g_n) = E(X_1)E(X_2)$$

となり

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$$

が成立する。
一般の確率変数 X_1, X_2 に関しては

$$X_1 = X_1^+ - X_1^-, X_2 = X_2^+ - X_2^-$$

と考えれば

$$\begin{aligned}
E(|X_1X_2|) &= E\big((X_1^+ + X_1^-)(X_2^+ + X_2^-)\big) \\
&= E(X_1^+)E(X_2^+) + E(X_1^+)E(X_2^-) \\
&+ E(X_1^-)E(X_2^+) + E(X_1^-)E(X_2^-) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

となり,X_1X_2 は P 可積分となる。さらに

$$\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= E\big((X_1^+ - X_1^-)(X_2^+ - X_2^-)\big) \\
&= E(X_1^+)E(X_2^+) - E(X_1^+)E(X_2^-) \\
&- E(X_1^-)E(X_2^+) + E(X_1^-)E(X_2^-) \\
&= \big(E(X_1^+) - E(X_1^-)\big)\big(E(X_2^+) - E(X_2^-)\big) \\
&= E(X_1^+ - X_1^-)E(X_2^+ - X_2^-) = E(X_1)E(X_2)
\end{aligned}$$

が成立する。よって、命題 3.4 が示された。 ■

定理 3.1 「チェビシェフの不等式」
$E(|X|^p) = \int_\Omega |X(\omega)|^p P(d\omega) < \infty$ のとき、任意の $a > 0$ に対して、

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a^p}\int_\Omega |X(\omega)|^p P(d\omega) \qquad (p \geq 1)$$

証明
任意の $a > 0$ に対して、

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |X(\omega)|^p P(d\omega) &= \int_{X\geq a} |X(\omega)|^p P(d\omega) + \int_{X<a} |X(\omega)|^p P(d\omega) \\
&\geq \int_{X\geq a} |X(\omega)|^p P(d\omega) \\
&\geq \int_{|X|\geq a} a^p P(d\omega) \\
&= a^p \int_\Omega I_{|X|\geq a}(\omega) P(d\omega) \\
&= a^p P(|X| \geq a)
\end{aligned}$$

■

定義 3.6 「モーメント・分散」
確率変数 X および整数 $m \geq 1$ に対して、$E(|X|^m) < \infty$ のとき,$E(X^m)$ を X の $\boldsymbol{m}$ **次モーメント**という。特に、$E(X^2) < \infty$ のとき

$$V(X) = E\big((X-m)^2\big) \quad (m = E(X))$$

を X の **分散** という。

命題 3.5 以下の等式が成立する。

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

証明

$$\begin{aligned} V(X) &= E\big((X-m)^2\big) = \int_\Omega (X-m)^2 P(d\omega) \\ &= \int_\Omega (X^2 - 2mX + m^2) P(d\omega) \\ &= \int_\Omega X^2 P(d\omega) - 2m \int_\Omega X P(d\omega) + m^2 \int_\Omega P(d\omega) \\ &= E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \end{aligned}$$

■

定義 3.7「*P-a.s.*」
ある確率的な命題が確率 1 で成立するとき、その命題はほとんど確実に成立する (または ***P-a.s.*** に成立する) という。例えば、確率変数 X に対し,$P(X \in E) = 1$ ならば

$$X \in E \ \ P - a.s.$$

と表す。また確率変数列 $\{X_n\}$ と確率変数 X に対し

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

ならば $\{X_n\}$ は X に $P - a.s.$ 収束するといい

$$X_n \to X \ (n \to \infty) \ P - a.s$$

と表す。

定理 3.2 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots}$ および確率変数 X に対して
(1) 単調収束定理

$$0 \leq X_n \leq X_{n+1} \ (n \geq 1) \text{ かつ } X_n \to X \quad P - a.s$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$$

(2) ファトウの補題

$$X_n \geq 0 \quad P - a.s \quad (n \geq 1)$$

ならば

$$\liminf_{n\to\infty} E(X_n) \geq E(\liminf_{n\to\infty} X_n)$$

(3) ルベーグ収束定理

$$X_n \to X \qquad (n \to \infty)\ P - a.s.$$

と仮定する。このとき期待値をもつ非負確率変数 Y が存在して

$$|X_n| \leq Y \qquad P - a.s.\ (n \geq 1)$$

を満たせば、X も期待値をもち

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$$

3.3 大数の法則

独立で同分布をもつ確率変数列 $\{X_n\}$ に対して、その算術平均

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は $n{\to}\infty$ のとき、X_1 の期待値に収束するという主張を大数の法則という。この大数の法則には強法則と弱法則があり、強法則では、算術平均の極限が期待値に収束する確率は 1 であると主張する。一方、弱法測では、n 回の算術平均が試行回数を増やすことで期待値に測度収束するという主張である。本章では、大数の弱法則及び 4 次のモーメントが存在する条件の下で強法則が成立することを示す。

定理 3.3 「大数の弱法則」
独立、同分布をもつ確率変数列 $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は分散をもつと仮定する。すると、同分布より $m = E(X_n), \sigma^2 = V(X_n)$ とおくことができる。
そのとき、以下の等式が成立する。
任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m| \geq \epsilon) = 0 \quad i.e. \quad \lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m| < \epsilon) = 1$$

証明
$\{X_n\}$ が独立であるから、m が定数なので $\{\widetilde{X_n} = X_n - m\}$ も独立となる。よって

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{X_k}$$

から、X_n の代わりに、$\{\widetilde{X_n}\}$ を考えることにより、初めから $m=0$ すなわち、$E(X_n)=0$ として良い。このとき、$V(X_n)=E(X_n{}^2)$ が成り立つ。また、独立性から $i \neq j (i,j \in \mathbb{N})$ のとき、$E(X_i X_J)=E(X_i)E(X_j)$ を満たす。このことから

$$E((\sum_{k=1}^{n} X_k)^2)=\sum_{k=1}^{n} E(X_k{}^2)=\sum_{k=1}^{n} V(X_k)=n\sigma^2$$

が成立する。よって、任意の $\epsilon>0$ に対して、

$$\begin{aligned} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k| \geq \epsilon) &= P(|\sum_{k=1}^{n} X_k| \geq \varepsilon n) \\ &\leq \frac{E(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2}{\epsilon^2 n^2} \qquad (\text{チェビチェフの不等式より}) \\ &\leq \frac{n\sigma^2}{\epsilon^2 n^2}=\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \end{aligned}$$

であるから $n \to \infty$ とすれば示される。 ■

定理 3.4 「大数の強法則」
$\{X_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を独立、同分布の確率変数列で $E(X_n{}^4)<\infty$ を仮定する。そのとき、$m=E(X_1)$ とおくと

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k=m)=1$$

が成立する。

ここでは 4 次のモーメントが存在する条件の下で大数の強法則を証明する。一般的には独立、同分布の確率変数列 $\{X_n\}$ に対する大数の強法則は、X_n の期待値の存在を仮定するだけで成立することが知られている。参考文献 [1] p.282 を参照のこと。

証明
X_n の代りに、$\{\widetilde{X_n}=X_n-m\}$ を考えることにより、初めから $m=0$ と仮定して証明すればよい。

$$Y_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$

とおいて、

$$\begin{aligned} E(Y_n{}^4) &= \frac{1}{n^4}E((\sum_{j=1}^{n} X_j)^4) \\ &= \frac{1}{n^4}\sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} E(X_iX_jX_kX_l) \\ &= \frac{1}{n^4}\{nE(X_1{}^4)+3n(n-1)E(X_1^2)^2\} \\ &\leq \frac{1}{n^2}C \qquad (C;\text{定数}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

なぜなら、独立性の仮定と $m = E(X_n) = 0$ を用いれば、j, k, l, m が異なるならば、
$E({X_j}^3 X_k), E({X_j}^2 X_k X_l), E(X_j X_k X_l X_m)$ の値はすべて 0 になる。
ゆえに、0 でない項は、
$E({X_j}^4) = E({X_1}^4)$ の形のものが n 個ある。
そして、$E({X_j}^2 {X_k}^2)$ を満たす j, k の組み合わせは ${}_nC_2$ 通りあり、j, k を固定すると、
$E({X_j}^2 {X_k}^2)$ の組み合わせは ${}_4C_2$ 通りある。
よって、$E({X_j}^2 {X_k}^2) = E({X_j}^2)E({X_k}^2) = E({X_1}^2)^2$ の形のものが ${}_nC_2 \times {}_4C_2 = 3n(n-1)$ 個ある。
また,$S_N = \sum_{n=1}^{N} Y_n^4$ として単調収束定理を適用すると $\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^4$ で

$$\lim_{N\to\infty} E(S_N) = E(\lim_{N\to\infty} S_N)$$

が成立する。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} E({Y_n}^4) = E(\sum_{n=1}^{\infty} {Y_n}^4)$$

が成立する。そして (3.7) より

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} {Y_n}^4) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2} < \infty$$

が成立する。よって、命題 3.3 より

$$\sum_{n=1}^{\infty} {Y_n}^4 < \infty \qquad P-a.s$$

となり

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} {Y_n}^4 < \infty) = 1$$

成立する。したがって、

$$P(\lim_{n\to\infty} Y_n = 0) = 1$$

となり、大数の強法則が示される。 ■

第4章　有限試行の無限回反復を実現する確率空間について

4.1　導入

偏りのない硬貨を n 回投げる試行を考える。表が出れば 1 裏が出れば 0 とすれば、標本空間は例 3.2 で示した標本空間となる。そして、$\mathcal{F}_n$ を Ω_n の部分集合全体とすると、$\mathcal{F}_n$ の任意の要素 A に対して,

$$P(A) = \frac{A\text{の要素の個数}}{\Omega_n\text{の要素の個数}} = \frac{A\text{の要素の個数}}{2^n}$$

とすると、初等確率モデル $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P)$ を構成することができた。

次に偏りのない硬貨を無限回投げる試行を考える。標本空間 Ω は

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots) : i_k \in \{0, 1\}, k \geq 1\}$$

で表される。また、任意の $\omega \in \Omega$ に対して $A = \{\omega\}$ をとる。初等確率モデルと同様に $P(A)$ の値を定めると以下のようになる。

$$P(A) = \frac{A\text{の要素の個数}}{\Omega\text{の要素の個数}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

よって、このような方法では、1 点集合の確率はすべて 0 となってしまう。すなわち 1 点集合の確率を規定しても、事象を測ることは無理となる。また、標本空間が有限集合である時、事象族は標本空間の部分集合全体としてとれる一方、標本空間が無限集合である時、標本空間の部分集合全体としてとることができない。このことから、事象族及び確率測度を定めることは容易ではない。

そこで本章では、より一般化し、有限試行を無限回反復させる試行を考える。第 1 章で示したホップの拡張定理を応用し、有限試行の無限回反復を実現する確率空間を構成する。

4.2　主定理

今、S を有限集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_l\}$ とし、$0 < p_{s_i} < 1, \displaystyle\sum_{s_i \in S} p_{s_i} = 1$ となるように各 s_i に対して p_{s_i} を定める。また、標本空間 Ω を

$$\Omega = S^{\mathbb{N}} = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots) : i_k \in \{s_1, \cdots, s_l\}, k \in \mathbb{N}\}$$

とする。
さらに、任意の $\omega \in \Omega$, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$z_k(\omega)$ を無限列 ω の第 k 座標の値とすると ω は次のように表される。

$$\omega = \big(z_1(\omega), z_2(\omega), \ldots\big)$$

次に

$$A = \{\omega \in \Omega : \big(z_1(\omega), \ldots, z_n(\omega)\big) \in H\} \quad (H \subset S^n) \tag{4.1}$$

という集合を考える。この形の集合を長さ n のシリンダー集合という。また、

$$\mathcal{C}_0 = \Big\{\{\omega \in \Omega : \big(z_1(\omega), \ldots, z_n(\omega)\big) \in H\} : \ n \in \mathbb{N} \ , H \subset S^n\Big\} \tag{4.2}$$

とする。そして (4.1) で定めた集合 A に対して

$$P(A) = \sum_{(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in H} p_{u_1} \cdots p_{u_n} \tag{4.3}$$

とする。
　$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_l\}$ が与えられたとき、上のように定めた $p_{s_i}(1 \leq i \leq l)$,$\Omega, \mathcal{C}_0, P$ に対して、次の主定理が成立する。

主定理

(4.3) で定義した P を可測空間 $\big(\Omega, \sigma(\mathcal{C}_0)\big)$ 上の確率測度 P として一意的に拡張できる。

4.3 主定理の証明

　ホップの拡張定理 (定理 1.4) と σ 加法性と同値の条件 (定理 1.5) から後に述べる命題 4.1 を示せば,(4.3) で定義した P を可測空間 $\big(\Omega, \sigma(\mathcal{C}_0)\big)$ 上の確率測度 P として一意的に拡張できる。まず、命題 4.1 の条件である $(\Omega, \mathcal{C}_0, P)$ が有限加法的確率空間であることを示す。

補題 4.1 $(\Omega, \mathcal{C}_0, P)$ は有限加法的確率空間である。

証明
最初に、$\mathcal{C}_0$ が $\mathcal{F}$ 集合体であることを示す。
(1) $H = \emptyset$ とおけば $\emptyset \in \mathcal{C}_0$ である。
(2) $A = \{\omega \in \Omega : \big(z_1(\omega), \ldots, z_n(\omega)\big) \in H\}$ ならば

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \big(z_1(\omega), \ldots, z_n(\omega)\big) \in S^n \cap H^c\} \ (S^n \cap H^c \subset S^n) \tag{4.4}$$

となる。よって、$A^c \in \mathcal{C}_0$ となる。
(3) $A, B \in \mathcal{C}_0$ ならば $A \cup B \in \mathcal{C}_0$ を示す。

$$A = \{\omega \in \Omega : \big(z_1(\omega), \ldots, z_n(\omega)\big) \in H\} \tag{4.5}$$

$$B = \{\omega \in \Omega : \bigl(z_1(\omega), \ldots, z_m(\omega)\bigr) \in I\} \tag{4.6}$$

とすると (4.5) の A は以下の A' として表現できる。
$n \leq m$ に対して

$$A' = \{\omega \in \Omega : \bigl(z_1(\omega), \ldots, z_m(\omega)\bigr) \in H'\} \ (H' = H \times S^{(m-n)}) \tag{4.7}$$

よって

$$A \cup B = A' \cup B = \{\omega \in \Omega : \bigl(z_1(\omega), \ldots, z_m(\omega)\bigr) \in H' \cup I\} \ (H' \cup I \subset S^m)$$

から $A \cup B \in \mathcal{C}_0$ となり、$m \leq n$ のときも同様に考えると $A \cup B \in \mathcal{C}_0$ を満たす。
$(1), (2), (3)$ より、$\mathcal{C}_0$ は $\mathcal{F}$ 集合体となる。
次に,(4.5) で定めた A と (4.7) で定めた A' に対して、$P(A) = P(A')$ となることを示す。さきほどと同様に、$n \leq m$ のときを示せば十分である。

$$\begin{aligned}
P(A') &= \sum_{(u_1,\ldots,u_m)\in H'} p_{u_1}\cdots p_{u_m} \\
&= \sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in H \text{ かつ } (u_{n+1},\ldots,u_m)\in S^{(m-n)}} p_{u_1}\cdots p_{u_n} \times p_{u_{n+1}}\cdots p_{u_m} \\
&= \sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in H} p_{u_1}\cdots p_{u_n} \times \sum_{(u_{n+1},\ldots,u_m)\in S^{(m-n)}} p_{u_{n+1}}\cdots p_{u_m} \\
&= \sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in H} p_{u_1}\cdots p_{u_n} \\
&= P(A)
\end{aligned}$$

となる。よって、(4.5),(4.6) で定めた A, B に対して、互いに素なら

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) = P(A' \cup B) &= \sum_{H' \cup I} P_{u_1}\cdots P_{u_m} \\
&= \sum_{H'} P_{u_1}\cdots P_{u_m} + \sum_{I} P_{u_1}\cdots P_{u_m} \\
&= P(A') + P(B) = P(A) + P(B)
\end{aligned}$$

となる。また、(4.3) で $H = S^n$ とおくと $P(\Omega) = 1$ となる。よって、P は $\mathcal{C}_0$ 上で有限加法的確率測度である。以上の結果から、$(\Omega, \mathcal{C}_0, P)$ は有限加法的確率空間となる。 ■

そして次に述べる命題 4.1 を示せば 定理 1.5 より有限加法的確率 P は $\sigma(\mathcal{C}_0)$ 上に確率測度 P として拡張できる。また、P は有限加法的確率測度よりホップの拡張定理 1.4 (2) は成立するので、拡張は一意的となる。このことから命題 4.1 を示せば主定理が成立する。

命題 4.1 有限加法的確率空間 $(\Omega, \mathcal{C}_0, P)$ に対して、
$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots (A_n \in \mathcal{C}_0)$ かつ $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ ならば $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

命題 4.1 を示すために、補題 4.2 を用意する。

補題 4.2 $A_n \neq \emptyset$ で、$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots (A_n \in \mathcal{C}_0)$ ならば $\lim_{n\to\infty} A_n \neq \emptyset$

補題 4.2 の証明

任意の $t \in \mathbb{N}$ に対して、A_t を長さ m_t のシリンダー集合とする。

$$A_t = \{\omega \in \Omega : \bigl(z_1(\omega), \ldots, z_{m_t}(\omega)\bigr) \in H_t\} \ (H_t \subset S^{m_t}) \tag{4.8}$$

と表される。次にシリンダー集合 A_n の要素 ω_n を 1 つ選ぶ。下の図のように、n 列目に ω_n の要素となるように並べる。

$$\begin{array}{cccccc} z_1(\omega_1) & z_1(\omega_2) & z_1(\omega_3) & \cdots & z_1(\omega_n) & \cdots \\ z_2(\omega_1) & z_2(\omega_2) & z_2(\omega_3) & \cdots & z_2(\omega_n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \tag{4.9}$$

S は有限集合より、ある $u_1 \in S$ が存在し、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$z_1(\omega_{n_{1,k}}) = u_1$$

を満たす増加整数列 $\{n_{1,k}\}_{k=1,2,\cdots}$ が存在する。同様に考えると、ある $u_2 \in S$ が存在し、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$z_2(\omega_{n_{2,k}}) = u_2$$

を満たす $\{n_{1,k}\}$ の部分列 $\{n_{2,k}\}_{k=1,2,\cdots}$ が存在する。以上のことから、
$\{n_{l-1,k}\}_k$ の部分列 $\{n_{l,k}\}_k$ が存在し、$z_l(\omega_{n_{l,k}}) = u_l \quad (u_l \in S)$ を満たす。

また $n_k = n_{k,k}$ とおくと $k \geq r$ に対して

$$z_r(\omega_{n_{k,k}}) = z_r(\omega_{n_k}) = u_r \tag{4.10}$$

を満たす。したがって

$$\bigl(z_1(\omega_{n_k}), \ldots, z_r(\omega_{n_k})\bigr) = (u_1, \ldots, u_r)$$

となる。また

$$k \geq t \text{ なら } n_k \geq t \text{ かつ } \quad \omega_{n_k} \in A_{n_k} \subset A_t$$

を満たす。よって、$\omega_{n_k} \in A_t$ より

$$\bigl(z_1(\omega_{n_k}), \ldots, z_{m_t}(\omega_{n_k})\bigr) \in H_t \subset S^{m_t} \tag{4.11}$$

が成立する。

次に $\omega_o = (u_1, u_2, \ldots) = \bigl(z_1(\omega_o), z_2(\omega_o), \ldots\bigr)$ とおくと、$\omega_o \in S^{\mathbb{N}}$ となる。
そして、任意の $t \in \mathbb{N}$ に対して、$k \geq m_t$ となる k を選ぶと

$$\bigl(z_1(\omega_{n_k}), \ldots, z_{m_t}(\omega_{n_k})\bigr) = (u_1, \ldots, u_{m_t}) = \bigl(z_1(\omega_o), \ldots, z_{m_t}(\omega_o)\bigr) \in H_t \tag{4.12}$$

となる。よって、$\omega_o \in A_t$ が成立するので

$$\omega_o \in \cap_{t=1}^{\infty} A_t = \lim_{t\to\infty} A_t \tag{4.13}$$

となる。以上より補題 4.2 は成立する。

次に命題 4.1 を証明する。

命題 4.1 の証明

命題 4.1 の仮定は、$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots (A_n \in \mathcal{C}_0)$ かつ $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ ということなので補題 4.2 から $A_{n_0} = \emptyset$ となるような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。

実際、そのような n_0 が存在しないとすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n \neq \emptyset$ となるので、補題 4.2 より $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n \neq \emptyset$ となり、これは命題 4.1 の仮定に反する。

したがって、任意の $n \geq n_0$ に対して $A_n = \emptyset$ となることから $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ となり命題 4.1 を示せた。

以上より、(4.3) で定義した P は可測空間 $\big(\Omega, \sigma(\mathcal{C}_0)\big)$ 上の確率測度 P として一意的に拡張される。

■

4.4 大数の強法則を定式化しうる確率空間

本節では前節で定めた確率空間 $\big(\Omega,\sigma(\mathcal{C}_0),P\big)$ 上で考えることにする。ただし S は有限集合 $\{s_1,s_2,\cdots,s_l\}$ としたが、ここでは、各 s_i $(1\leq i\leq l)$ は実数とする。
また、(4.3) より

$$P\big(z_1(\omega)=u_1,\ldots,z_n(\omega)=u_n\big)=P\big(z_1(\omega)=u_1\big)\cdots P\big(z_n(\omega)=u_n\big)\ \ ({}^{\forall}u_k\in S,k=1,2,\cdots,n)$$

が成立するので、$\{z_i(\omega)\}_{i=1}^n$ が独立となり、任意の $N\geq 1$ に対しても、$\{z_i(\omega)\}_{i=1}^N$ が独立であることから、$\{z_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ は独立となる。
また、z_n の分布は

$$P(z_n(\omega)=u_k)=p_{u_k}\ (u_k\in S)$$

より、n に依存しないので $\{z_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ は同分布である。
次に以下の命題を示す。

命題 4.2

$$A=\{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}\frac{z_1(\omega)+z_2(\omega)+\cdots+z_n(\omega)}{n}=m\}$$

とおくと、$A\in\sigma(\mathcal{C}_0)$ となる。ただし、m は z_n の期待値とする。

証明

$$d_n(\omega)=z_1(\omega)+z_2(\omega)+\cdots+z_n(\omega)$$

とおくことにする。また、A は以下の式で表すことができる。

$$\begin{aligned}
A &= \{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}\frac{d_n(\omega)}{n}=m\}\\
&= \{\omega\in\Omega:{}^{\forall}k>0\ (k\in\mathbb{Z}),{}^{\exists}N,{}^{\forall}l>N,\quad \frac{d_l(\omega)}{l}\in[m-\frac{1}{k},m+\frac{1}{k}]\ \}\\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty}\{\omega\in\Omega:{}^{\exists}N,{}^{\forall}l>N,\quad \frac{d_l(\omega)}{l}\in[m-\frac{1}{k},m+\frac{1}{k}]\ \}\\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{N=1}^{\infty}\{\omega\in\Omega:{}^{\forall}l>N,\quad \frac{d_l(\omega)}{l}\in[m-\frac{1}{k},m+\frac{1}{k}]\ \}\Big)\\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty}\Big[\bigcup_{N=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{l=N+1}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\frac{d_l(\omega)}{l}\in[m-\frac{1}{k},m+\frac{1}{k}]\ \}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

よって、$A\in\sigma(\mathcal{C}_0)$ となり、A は (4.3) で定めた確率 P で測ることができる。

以上の結果から、大数の強法則の仮定を満たすので、確率空間 $\big(\Omega,\sigma(\mathcal{C}_0),P\big)$ 上で、

$$P(\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}\frac{z_1(\omega)+z_2(\omega)+\cdots+z_n(\omega)}{n}=m)=1$$

が成立する。よって、確率空間 $\big(\Omega,\sigma(\mathcal{C}_0),P\big)$ において、大数の強法則を正確に定式化することができた。 ■

参考文献

[1] Patrick Billingsley, Probability and Measure (Third Edition)

[2] 志賀 徳造, ルベーグ積分から確率論, 共立出版, 2000

[3] 森 真, ルベーグ積分超入門, 共立出版, 2004

[4] 盛田 健彦, 実解析と測度論の基礎, 培風館, 2004

[5] 伊藤 清, 確率論の基礎 [新版], 岩波書店, 2004

[6] 志賀 浩二, ルベーグ積分 30 講, 朝倉書店, 2004