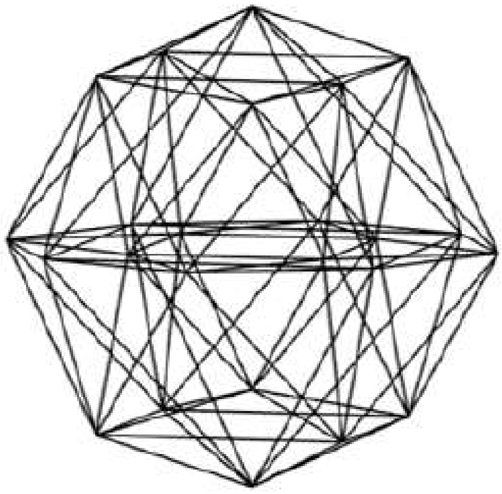
きょうの

数学

vol.24

2019年3月発行



「物体の衝突と円周率」

「高次元の図形を見る　第３回」

きょうの数字 「24」

数学の小宇宙「1=2 ですね。（その３）」

きょうの数学ブックトーク「どんな数にも物語がある」

物体の衝突と円周率

嵯峨野高校　教諭　　橋本　雄馬

1　π の近似値を得る方法

突然ですが，「3 月 14 日は何の日？」と聞かれたら，なんと答えますか。多くの人が「ホワイトデー」と答えるでしょうが，みなさんはどうでしょう。数学が好きな人が「3，1，4」の数字の並びを見て，円周率を思い浮かべるのではないしょうか。実際，3 月 14 日は「円周率の日」とか，「数学の日」とか言われています。他には何があるかというと，物理が好きな人は「アインシュタインの誕生日」と答えるかもしれません。

ところで，円周率の最初の 3 つの数字が「3，1，4」であることは小学生でも知っていることですが，みなさんは円周率の最初の 3 つの数字が「3，1，4」になることを説明できるでしょうか。「ゆとり世代の円周率は 3」とメディアで話題になったり，「3.14 の倍数を覚えなさい」という学習塾[*1]があったりする一方，3.14... となることを説明できない人の多いこと。知らないでいると，5 才の女の子に「ボーっと生きてんじゃねーよ」と叱られてしまいそうです。冗談はさておき，ある程度の数学の知識がないと，円周率は 3.14... であることを説明するのは難しい問題です。実際，円周率の値に関する問題が大学入試問題として何度か登場しました。

【東京大学入試問題 2003 年】

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

【大阪大学（挑戦枠　専門数学）入試問題 2013 年】

円周率を π とする。正の整数 n に対し

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1-x^{4n}}{1+x^2}dx$$
$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2}dx$$

とおく。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{12}$ を証明せよ。

(2)　$3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。ただし

$$1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$$

である。

どちらも円周率の値を評価する問題ですが，その手法には違いがあります。東京大学の問題はノーヒントですので，円に内接する正多角形で評価する方法を意図していると思います。実際，正 8 角形の週の長さや正 24 角形の面積を考えることで，円周率が 3.05 より大きいことを示せます。一方，大阪大学の問題はかなり詳しく円周率の値を調べていますね。大阪大学の問題は微積分を用いた手法[*2]を意図しており，3.141... 程度なら手計算で調べられるということを示しています。上の 2 つの方法は円周率を求めてきた歴史を背景としていま

[*1] 3.14 の倍数を覚えることを批判しているわけではありません。

[*2] 級数展開　$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ を意図していると思います。

す。歴史的には，円周率の値を求める方法として，

- 図形を用いる方法
- 展開式を用いる方法

が使われてきました。それぞれについて簡単に触れておきましょう。

図形を用いる方法

図形を用いる方法では，多くの数学者が円に内接する正多角形と円に外接する正多角形の周の長さを計算することで，円周率を計算しました。

（内接する正多角形の周の長さ） ＜ （円周の長さ） ＜ （内接する正多角形の周の長さ）

となることを用いています。この方法で計算した数学者として有名なのは，オランダのルドルフ (Ludolf van Ceulen，1540 〜 1610) です。彼は正 2^{62} 角形の周の長さを計算し，一生をかけて小数第 35 位まで求めたと言われています[*3]。

展開式による近似

微分積分学の発達によって，円周率が無限級数の和で表されるようになり，円周率の値の精度は飛躍的に上がってきます。例えば，1671 年にグレゴリーが，1673 年にライプニッツが別々に

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + - \cdots\cdots$$

という展開式を発見しました。この式は収束が遅く，計算には向かなかったようですが，多くの数学者が展開式を作り，よりよい円周率の近似値を求めようとしたそうです。

円周率の近似値を求める方法としては他にビュフォンの針のように確率を用いる方法などもありますが，確率なので，小数何桁まで正しいといういい方はできません。
このように，円周率の値を求める方法は様々ですが，2000 年に入ってから全く新しい〈 円周率計算機 〉が発表されました。現実にその計算機を作ることは不可能ですが，非常に驚くべきもので，初めて知ったときにはなぜそうなるのか不思議に感じました。この記事では，その新しい〈 円周率計算機 〉のしくみを説明していきます。

2　新しい〈 計算機 〉

〈 円周率計算機 〉というとすごい装置が必要かと思いますが，実は 2 つの物体と壁を用意し，物体と物体，物体と壁との衝突回数を数えるだけです。この〈 計算機 〉について論じたのは，「PLAYING POOL WITH π」(G.GALPERIN，2003) という論文です。この論文の中では，次のようなことが述べられています[*4]。

[*3] ドイツでは円周率のことをルドルフ数と呼んでいます
[*4] 元の論文では，2 つの物体ではなく，ビリヤードの球としています。

設定

1. 質量がそれぞれ M，m の 2 つの物体 X，Y がある。
2. 物体 X と物体 Y の質量の比は $M/m = 100^N$ である。（ただし，N は自然数。つまり，物体 X の方が質量が大きい。）
3. 物体 Y が，壁と物体 X の間に置かれている（図 1）。
4. 物体 Y へ向かう速度を物体 X に与える。
5. 物体 Y が壁，物体 X と衝突する回数を衝突しなくなるまで数える。
6. 摩擦や空気抵抗はなく，壁や物体との衝突は完全弾性衝突とする。（完全弾性衝突では物体 X と物体 Y の力学的エネルギーの和が保存する）
7. 物体の大きさは無視し，質点と考える。

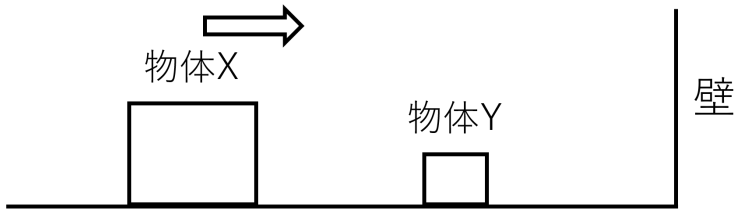


図 1　2 つの物体と壁

主張

1. 衝突しなくなるまでに，物体 Y が壁，物体 X と衝突する回数は
$$\left[\frac{\pi}{\arctan(1/10^N)}\right]$$
となる。
2.
$$\left[\frac{\pi}{\arctan(1/10^N)}\right] = [10^N\pi]$$
と予想される。

どのような状況かイメージがつかみにくいので，補足しましょう。物体 X はまず物体 Y に衝突し，物体 Y は壁と衝突し跳ね返ります。跳ね返った物体 Y が再び物体 X と衝突します。「〜と〜の衝突」を毎回書くと面倒なので，以下では「物体 X と物体 Y の衝突」を ⟨X-Y 衝突⟩，「物体 Y と壁との衝突」を ⟨ Y-壁衝突 ⟩ と呼ぶことにします[*5]。今，物体 Y は物体 X と壁に挟まれている形となるので，X-Y 衝突と Y-壁衝突が繰り返されます。そして，衝突のたび 2 つの物体の速度は変化していき，ある衝突の後，（物体 X が左に進む速さ）$>$（物体 Y が左に進む速さ）となると，その後，衝突は起こらなくなります（この条件についても後で詳しく説明します）。要するに，物体 Y が物体 X に追いつけなくなるということです。

次に主張について説明しましょう。まず，$[x]$ とは，x を超えない最大の整数を表し，[ ] の記号のことをガウス記号といいます。$[x]$ は x の整数部分ともいいます。また，$\arctan x$ とは $\tan x$ の逆関数で，arctan をアークタンジェントと読みます。逆関数は数学 III で学びますので，詳しい説明はしませんが，簡単に説明すると，$\arctan x$ とは「$\tan y = x$ となる y の値」を表します。例えば，$\arctan(1)$ は「$\tan y = 1$ を満たす y の値」です

[*5] X-Y 衝突等はこの記事での造語です。

から，arctan(1)=$\pi/4$ となります。ただし，「tan$y = 1$ を満たす y の値」は $y = 5\pi/4$ 等無限に存在しますので，arctan の値域は $-\pi/2 < y < \pi/2$ とします。arctan$x$ は x が十分小さければ，arctan$x \simeq x$ となることが知られています。これは，2 つ目の式と関係があり，2 つ目の式は

$$\frac{\pi}{\arctan(1/10^N)} \quad , \qquad 10^N\pi$$

の整数部分が一致することを表しています。1 つ目の式については論文の中で証明が述べられており，2 つ目の式は予想であると述べられています。もし，この予想が正しければ，「2 つの物体と壁を用意し，衝突回数を数える」という ⟨ 計算機 ⟩ で N 桁まで円周率の値を求められることを示しています[*6]。具体的にいうと，質量比を 100^2 とすれば，衝突回数は $[10^2\pi] = [314.15....] = 314$ 回となり，円周率の初めの 3 桁が得られます。衝突回数から円周率の値がわかるというのは非常に不思議ですが，1 つ目の式は高校で習う物理と数学の知識があれば証明できます。以下では，1 つ目の式を証明していきます。

3　衝突に関する知識

物体の動きを数学的に扱うために，設定をもう少し整理します。

設定の整理

1. 壁に向かう方向を速度の正の向きとする。
2. 物体 X，物体 Y の速度をそれぞれ V，v で表す。
3. 物体 X の初速度を V_0 とする。物体 Y は静止しているので，初速度は 0 である。

物体の速度は衝突によって変化していくので，衝突の前後で成り立つ等式，衝突後の速度の求め方を確認しておきます。

X-Y 衝突

ある X-Y 衝突の前後について，衝突前の物体 X，物体 Y の速度をそれぞれ V_b，v_b，衝突後の速度をそれぞれ V_a，v_a とするとき[*7]，力学的エネルギー保存則と運動量保存則により，次の等式が成り立ちます。

力学的エネルギー保存則と運動量保存則

$$\frac{1}{2}MV_b^2 + \frac{1}{2}mv_b^2 = \frac{1}{2}MV_a^2 + \frac{1}{2}mv_a^2 \qquad \text{（力学的エネルギー保存則）} \tag{1}$$

$$MV_b + mv_b = MV_a + mv_a \qquad \text{（運動量保存則）} \tag{2}$$

V_a と v_a の連立方程式とみることで，衝突前の速度から，V_a，v_a を得ることができるのですが，力学的エネルギーの保存から計算するのは大変です。そこで，完全弾性衝突では反発係数が 1 であることから，次の式を利用します。

反発係数

$$-\frac{V_a - v_a}{V_b - v_b} = 1 \tag{3}$$

3 つも式が出てくることを奇妙に思うかもしれませんが，数学的には，$V_a \neq V_b$，$v_a \neq v_b$ なら

$$(1), (2) \quad \Leftrightarrow \quad (2), (3)$$

*6 摩擦をなくしたり，完全弾性衝突を実現するのは現実的には無理です。
*7 a は after，b は before を意識しています。

です。式 (2)，(3) から V_a，v_a について解くと，次の関係が得られます。

X-Y 衝突

$$
\begin{aligned}
V_a &= \frac{M-m}{M+m}V_b + \frac{2m}{M+m}v_b \\
v_a &= \frac{2M}{M+m}V_b - \frac{M-m}{M+m}v_b
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Y-壁衝突

ある Y-壁衝突の前後において，衝突前の物体 Y の速度を v_b，壁と衝突したあとの速度を v_a とすると，壁は動かず，エネルギーは失われないので，

Y-壁衝突

$$
v_a = -v_b \tag{5}
$$

が成り立ちます。

4　衝突しなくなる条件

衝突による速度の変化の仕方はわかりましたが，ある衝突を最後に衝突が起こらなくなる条件を確認しておきましょう。まず，V，v のうち少なくとも一方が正であるとき，すなわち，壁に向かっているときはまだ衝突が起きることは明らかでしょう。したがって，ともに負である場合（片方が止まる場合も含む）を考えます。このとき，v と V の関係は次の 2 つの場合があります。

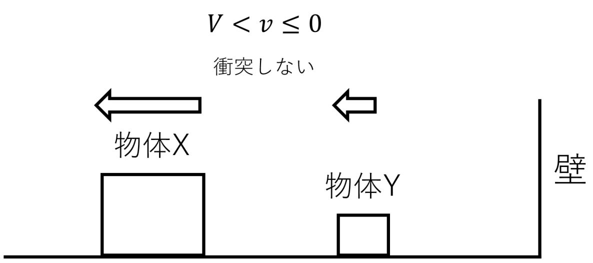


図 2　$V < v \leqq 0$ の場合：次の衝突は起こらない

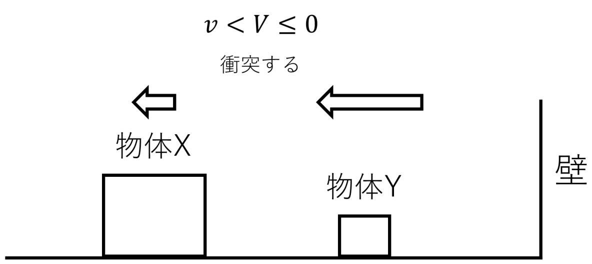


図 3　$v < V \leqq 0$ の場合：次の衝突が起こる

$V < v \leqq 0$ のときは，物体 X の方が速度の絶対値が大きいので，物体 Y は追いつくことができず，衝突が起こりません。一方，$v < V \leqq 0$ のときは，物体 Y の方が速度の絶対値が大きいので，物体 Y はいずれ追いつき，衝突が起こります。よって，衝突が起こらないための条件は次のようになります。

衝突しなくなる条件

何回かの衝突のあと，物体 Y の速度 v と物体 X の速度 V が

$$
V < v \leqq 0 \tag{6}
$$

を満たしたとき，もう衝突は起こらない。

衝突の前後で速度がどのように変化するかは式 (4)，(5) によって計算できます。したがって，条件 (6)*8を満たすまで計算を繰り返せば，衝突しなくなるまでに衝突した回数がわかります。

5　速度を平面上の点として捉える

力学的エネルギー保存則と円の方程式

一見すると，式 (4)，(5) によって計算を繰り返すのは複雑で困難なように感じますが，2 つの物体の速度の組を平面上の点と考えることで，2 つの物体の速度の変化を鮮明に捉えることができます。ここで，もう一度力学的エネルギー保存則について考えます。物体 X と物体 Y の初速度はそれぞれ V_0，0 であるので，力学的エネルギー保存則から，

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV_0^2$$

となります。そして，両辺を $\frac{1}{2}MV_0^2$ で割ると，

$$\frac{V^2}{V_0^2} + \frac{v^2}{(\sqrt{m/M}V_0)^2} = 1$$

となります。この式を V，v の方程式と考えると，実は Vv 平面において楕円を表す方程式になっています。つまり，何回衝突が起ころうとも，速度の組 (V, v) を Vv 平面上の点と考えると，この点は必ず楕円上にあることがいえます。楕円よりも円の方が扱いやすいので，適当な変数変換により，円の方程式となるように工夫します。$k = \sqrt{\frac{m}{M}}$，$u = kv$ とおくと，

$$V^2 + u^2 = V_0^2$$

となります。$u = kv$ とおきましたが，u から v を求めることは簡単にできるので，新しい変数の組 (V, u) が速度を表していると考えることができます。よって，次のことがいえます。

力学的エネルギーの保存則と円の方程式

速度を表す組 (V, u) は Vu 平面において，半径 V_0 の円周上の 1 点に対応する。

Vu 平面において点 (V, u) を点 P とおくと，P は衝突によって，円 $V^2 + u^2 = V_0^2$ の周上を移動していくことになります。

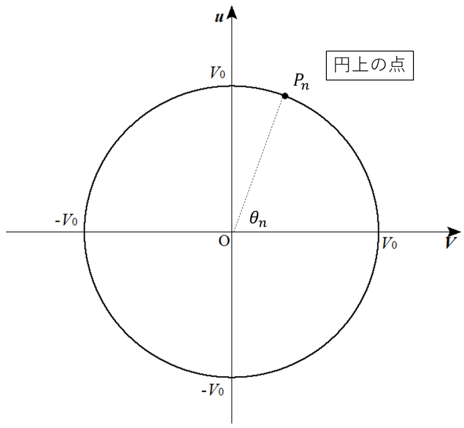


図 4　円 $V^2 + u^2 = V_0^2$

*8 ちなみに，$V = v$ の場合も考えられますが，$M/m = 100^N$ の設定では，$V = v$ とはなりません。

点 P の移動

速度を円周上の点で表せることがわかったので，次に衝突によって P が円周上をどのように移動していくかを調べていきます。衝突によって P の位置は移動するので，n 回目の衝突の後の P の位置を $\mathrm{P}_n = (V_n, u_n)$ と書くことにします。まず，簡単な Y-壁衝突について考えます。X-Y 衝突，Y-壁衝突は交互に繰り返されるので，偶数回目の衝突は Y-壁衝突になります。したがって，n が奇数のとき，(5) より

$$u_{n+1} = -u_n$$

が成り立ちます。この式は P の移動で考えると，V 軸に関する対称移動を表しています。
次に，X-Y 衝突を考えるのですが，実は（Y-壁衝突）と（X-Y 衝突）を合わせたものは，P の移動という意味ではとても簡単なものになります。n が奇数のとき，$n+1$ 回目の衝突は Y-壁衝突となるので，$V_{n+1} = V_n$，$v_{n+1} = -v_n$ となります。そして，$n+2$ 回目の衝突は X-Y 衝突になるので，式 (4) より

$$\begin{aligned} V_{n+2} &= \frac{M-m}{M+m}V_n + \frac{2m}{M+m}(-v_n) \\ v_{n+2} &= \frac{2M}{M+m}V_n - \frac{M-m}{M+m}(-v_n) \end{aligned}$$

となります。P_n の移動を考えているので，この式を k，u_n を用いて表します。上の式より

$$\begin{aligned} V_{n+2} &= \frac{1-m/M}{1+m/M}V_n - \frac{2m/M}{1+m/M}v_n = \frac{1-k^2}{1+k^2}V_n - \frac{2k^2}{1+k^2}v_n = \frac{1-k^2}{1+k^2}V_n - \frac{2k}{1+k^2}u_n \\ u_{n+2} &= kv_{n+2} = \frac{2k}{1+m/M}V_n + \frac{1-m/M}{1+m/M}kv_n = \frac{2k}{1+k^2}V_n + \frac{1-k^2}{1+k^2}u_n \end{aligned}$$

ここで，P_n は半径 V_0 の円上にあるので，線分 OP_n と V 軸の正の部分がなす角を θ_n とすると，

$$V_n = V_0\cos\theta_n \quad , \qquad u_n = V_0\sin\theta_n$$

と表せます。また

$$\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2 = 1$$

であり，$(1-k^2)/(1+k^2)$，$2k/(1+k^2)$ はともに正の値なので，$0 < \alpha < \pi/2$ である α を用いて，

$$\frac{1-k^2}{1+k^2} = \cos\alpha \quad , \qquad \frac{2k}{1+k^2} = \sin\alpha$$

と表せます。よって，

$$\begin{aligned} V_{n+2} &= V_0\cos\alpha\cos\theta_n - V_0\sin\alpha\sin\theta_n = V_0\cos(\theta_n+\alpha) \\ u_{n+2} &= V_0\sin\alpha\cos\theta_n + V_0\cos\alpha\sin\theta_n = V_0\sin(\theta_n+\alpha) \end{aligned}$$

となります。すなわち，（Y-壁衝突）+（X-Y 衝突）によって，P は原点を中心に角 α だけ回転させた点に移動することがわかります。ここまでのことをまとめると，次のようになります。

P の移動

（Y-壁衝突） $\leftrightarrow$ V 軸に関する対称移動
（Y-壁衝突） + （X-Y 衝突） $\leftrightarrow$ 原点を中心として α だけ回転する

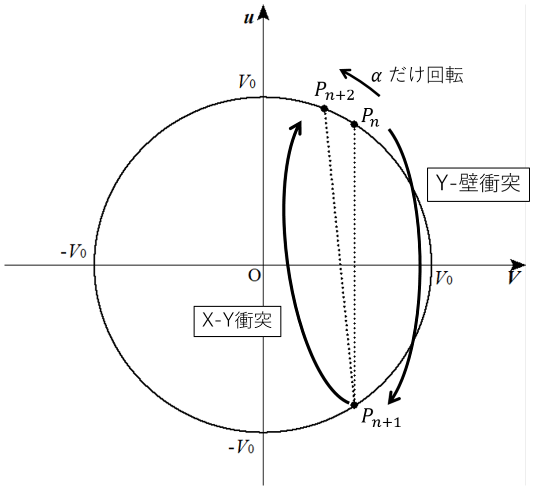


図 5　衝突による点 P の移動の仕方

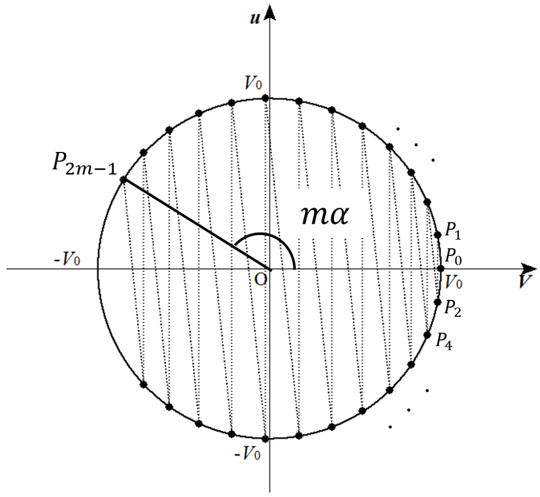


図 6　衝突による点 P の移動

点 $(V_0, 0)$ を P_0 とすると，式 (4) により，P_1 の座標は $(V_0 \cos\alpha, V_0 \sin\alpha)$ となり，上の事実を用いると，m を自然数とすると，$2m-1$ 回目の衝突で，P_{2m-1} の座標は $(V_0 \cos m\alpha, V_0 \sin m\alpha)$ となります。

衝突しなくなる条件（再考）

2 つの物体の速度を Vu 平面上の点として考えるようになったので，衝突しなくなる条件 (6) を Vu 平面上の領域として捉えなおしてみます。条件 (6) を V と u を書き換えると，

$$kV < u \leqq 0$$

となり，衝突しなくなる条件は，次のようにいい換えることができます。

衝突しなくなる条件

何回かの衝突のあと，P が

$$kV < u \leqq 0$$

の表す領域の中に入ると，もう衝突は起こらない。（図 7）

この不等式は Vu 平面において，直線 $u = kV$ と V 軸で囲まれた領域を表します。さらに，直線 $u = kV$ が V 軸の正の部分がなす角 をϕ　$(0 < \phi < \pi/2)$ とすると，加法定理により，

$$tan2\phi = \frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi} = \frac{2k}{1-k^2} = \tan\alpha$$

となり，$0 < \phi < \pi/2$, $0 < \alpha < \pi/2$ より，

$$\phi = \frac{\alpha}{2}$$

となります。これで，衝突回数を求めるための準備はできました。

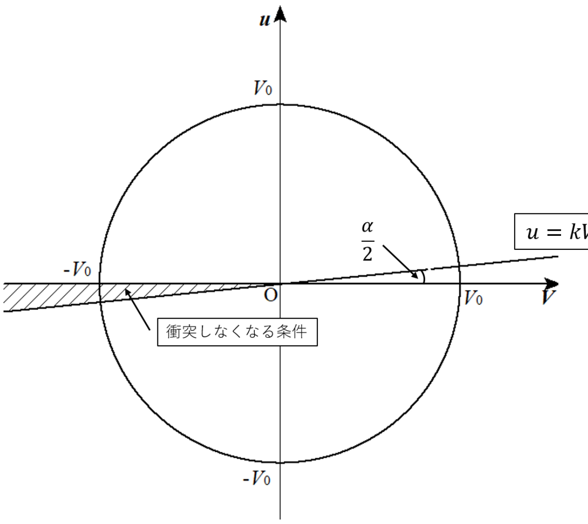


図 7　$kV < u \leqq 0$ の表す領域

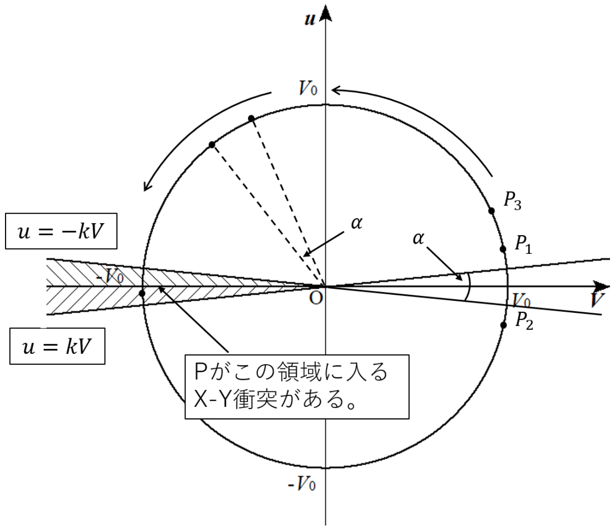


図 8　$kV < u < -kV$ の表す領域

6　衝突回数を求める

いよいよ衝突回数を求めるのですが，そもそも衝突が永遠に続く可能性はないのかと考える人がいるかもしれません。しかし，実際にはそのようなことはありません。簡単に説明しておきましょう。直線 $u = kV$ と直線 $u = -kV$ のなす角は前の結果から，α になることがわかります。そして，（Y-壁衝突）＋（X-Y 衝突）によって，P は α だけ原点を中心に回転していきます。よって，何回目かの X-Y 衝突により，P は $kV < u < -kV$ の表す領域（図 8）に入ることになります（α ずつしか回転できないので，この領域を'飛び越える'ことができないのです）。もし，X-Y 衝突で P が $kV < u \leqq 0$ の表す領域の中に入れば，それで衝突は最後になります。もし，X-Y 衝突で P が $0 < u < -kV$ の表す領域の中に入れば，次の Y-壁衝突で $kV < u \leqq 0$ の表す領域の中に入り，それで衝突は最後になります。いずれにしろ，衝突が永遠に続くことはないことがわかります。

衝突回数を求める際も，最後の X-Y 衝突で P がこの 2 つの領域のどちらに入るかで整理すると考えやすくなります。最後の X-Y 衝突が $2m-1$ 回目（m は自然数）に起こるとして，衝突回数を求めていきましょう。

最後の衝突が X-Y 衝突の場合

最後の衝突が X-Y 衝突である場合は，P_{2m-1} は $kV < u \leqq 0$ の表す領域の中にあります。線分 OP_{2m-1} が V 軸の正の部分となす角は $m\alpha$ であるので（図 6），このとき，

$$\pi \leqq m\alpha < \pi + \frac{\alpha}{2}$$

が成り立ちます（図 7）。両辺を $\alpha/2$ で割り 1 を引くと，

$$\frac{\pi}{\alpha/2} - 1 \leqq 2m - 1 < \frac{\pi}{\alpha/2}$$

よって

$$(2m-1) < \frac{\pi}{\alpha/2} \leqq (2m-1) + 1$$

この不等式から，$\frac{\pi}{\alpha/2}$ の整数部分が $2m-1$ であることがわかります。すなわち，

$$\left[\frac{\pi}{\alpha/2}\right] = 2m - 1$$

今回の場合，$2m-1$ 回目が最後の衝突となるので，求める衝突回数は $\left[\frac{\pi}{\alpha/2}\right]$ となります。

最後の衝突が Y-壁衝突の場合

最後の Y-壁衝突である場合は，P_{2m-1} は $0<u<-kV$ の表す領域の中にあります。このとき，

$$\pi-\frac{\alpha}{2}\leqq m\alpha<\pi$$

が成り立ちます（図 8）。さきほどと同じように変形していくと

$$2m<\frac{\pi}{\alpha/2}\leqq 2m+1$$

よって，

$$\left[\frac{\pi}{\alpha/2}\right]=2m$$

今回の場合，$2m-1$ 回目の衝突の後，もう一度 Y-壁衝突が起こるので，求める衝突回数は $2m$，すなわち，$\left[\frac{\pi}{\alpha/2}\right]$ となります。

衝突回数

以上より，最後の衝突がどちらの場合でも，$\left[\frac{\pi}{\alpha/2}\right]$ であることがわかりました。また，$\tan\alpha/2=k$ なので，$\arctan k=\alpha/2$ です。そして，$M/m=100^N$ なら，$k=1/10^N$ となるので，次の結果が得られます。

$M/m=100^N$ のとき，衝突しなくなるまでに，物体 Y が壁，物体 X と衝突する回数は

$$\left[\frac{\pi}{\arctan(1/10^N)}\right]$$

となる。

具体的な N を入れてみると，$N=1$ では，衝突回数は

$$\left[\frac{\pi}{\arctan(1/10)}\right]=[31.52...]=31$$

となります。

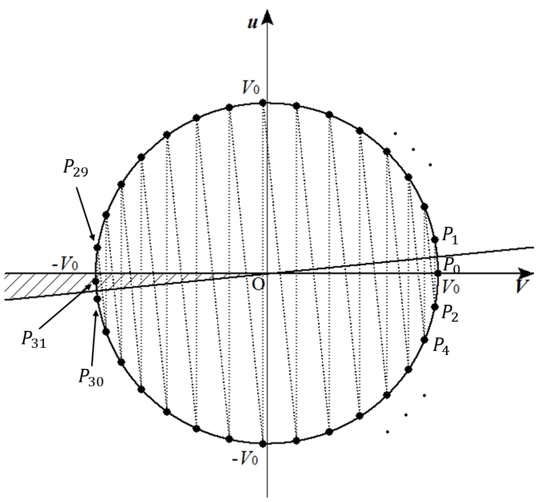


図 9　$N=1$ のときの点 P の移動

$N=2$ では

$$\left[\frac{\pi}{\arctan(1/10^2)}\right]=[314.16...]=314$$

$N=3$ では

$$\left[\frac{\pi}{\arctan(1/10^2)}\right]=[3141.59..]=3141$$

これをみると，$N=1$，2，3 の場合について，衝突回数から円周率の小数第 N 位までの値が得られることがわかります。他の N についても $N \leqq 10^8$ を満たす N については，同様に小数第 N 位まで求めることができることが確かめられているそうです。よって，このような 2 つの物体と壁を用意できれば，それを $\langle$ 円周率計算機 $\rangle$ と呼んでもいいでしょう。しかし，すべての N について，小数第 N 位までの値が得られる，すなわち，

$$\left[\frac{\pi}{\arctan(1/10^N)}\right]=\left[10^N\pi\right]$$

が成り立っているかどうかは予想で終わっています。$\arctan(1/10^N)\simeq 1/10^N$ となるので，予想は正しそうに思えるのですが，証明するのは難しいそうです。次回の記事では，このあたりのことを補足したいと思います。

【参考文献・資料】

【1】 G.GALPERIN，「PLAYING POOL WITH π」，2003　（元の論文）

【2】 平山　諦，「円周率の歴史」，大阪教育図書株式会社，1980

【3】 「2 つのボールをぶつけると円周率がわかる」のをしつこく確かめてみた・・・解析的に」（https://wasan.hatenablog.com/entry/2014/04/15/045611）最終閲覧日 2019 年 2 月 20 日（衝突回数の評価の仕方を参考にしました。）

【4】 「So why do colliding blocks compute pi?」（https://www.youtube.com/watch?v=jsYwFizhncE&t=793s）最終閲覧日 2019 年 2 月 20 日（youtube の動画ですが，物体の動きが非常にわかりやすいです。）

高次元の図形を見る　第 3 回

正則分割と空間充填

洛北高校教諭　藤岡翼

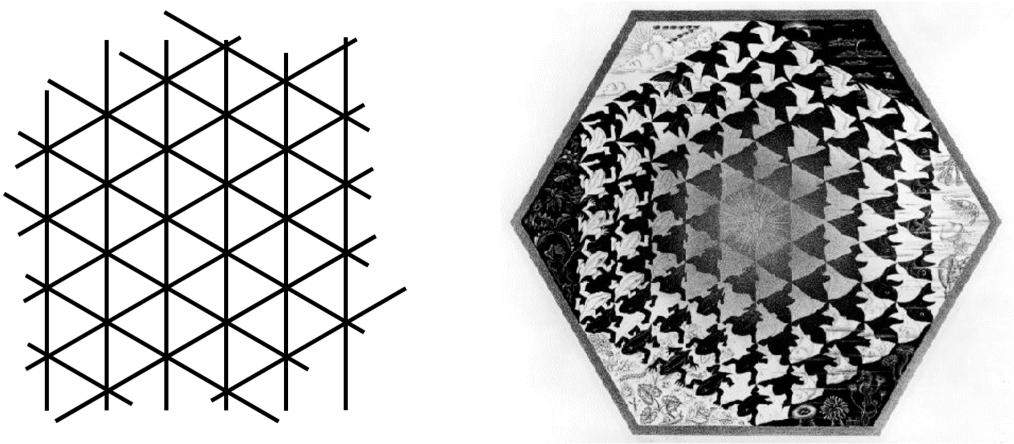


図 1　左：正三角形による平面の正則分割　　　　右：エッシャーによる作品「Verbum」

前回[*1]、正多胞体とは何か、および正多胞体は何種類かという話をしました。今回は正多面体と正多胞体の関係を扱うつもりだったのですが、予定を変えて正則分割（regular division）というものについて見ていきたいと思います。

今回はあまり資料を参考にしないで書いているので、話半分に読んでくれると助かります。

1　正多面体と球面の正則分割

前回、正多面体をうまく組み合わせたものが正多胞体であるという話をしました。おさらいをすると、

- 合同な線分を、頂点が合同になるように[*2]貼り合わせた図形が正多角形（二次元）
- 合同な正多角形を、頂点が合同になるように貼り合わせた図形が正多角形（三次元）
- 合同な正多面体を、頂点が合同になるように貼り合わせた図形が正多胞体（四次元）
- 合同な正多胞体（四次元）を、頂点が合同になるように貼り合わせた図形が正多胞体（五次元）
- 以下同様

です。正多面体、正多胞体が何種類あるかを求めるのに、前回は二面角というものを導入して計算してしまいました。今回は、別の切り口から攻める方法も紹介したいと思います。

実は正多面体にはこのような特徴があります。

正多面体と正則分割

> 正多面体は、2 次元の球面の正多角形による正則分割を作る。

ここでいう正則分割とは、すべての頂点が合同である分割のこととします[*3]。図 1 の左を見ると、平面が正三角形で

---

*1 第 23 号に掲載。この冊子はインターネットにすべて載っていますので、「きょうの数学」で検索してください。

*2 ここでいう合同とは、回転させたら一致することとする。多角形の場合は角が等しいことが必要十分条件で、多面体、多胞体の場合はその他の形状（頂点に集まる面の数や二面角など）も同じになる必要がある。

*3 一般的に使われている定義がなんなのか調べたのですが、時間不足でわかりませんでした。これが今回の記事を話半分で聞いてほしい最大の

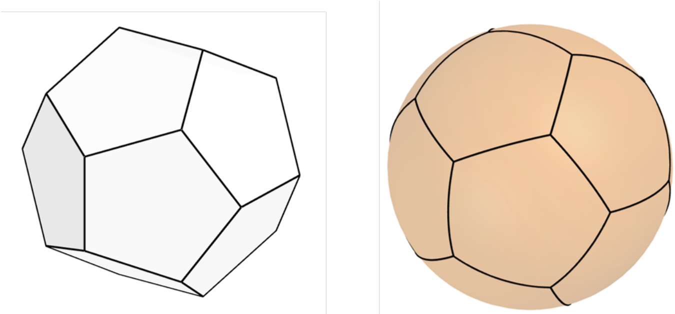


図 2　正 12 面体から作られる球面の正則分割

等しく分割されており、すべての頂点が合同です。よって、これは**平面の正則分割**です。

対して、図 2 の右は正 12 面体から作られる**球面の正則分割**です。球面における正多角形は平面のときとほぼ同じですが、直線の定義がやや異なります[*4]。

これを用いて、正多角形による球面の正則分割が何種類あるかを考えれば正多面体が何種類あるかを逆算することができます。そのために、まず正則分割に記号を割り当てましょう。図 2 の分割は 5 角形が各頂点周りに 3 つ集まっているので、$\{5, 3\}$ という記号を割り当てることにします。これを**シュレーフリ記号**と言います。

さて、シュレーフリ記号が $\{p, q\}$ である球面の正則分割があったとき、その p 角形をさらに $2p$ 個に分割して直角三角形を作ることができます。それが図 3 です。このとき、この直角三角形の内角の和は

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q}$$

となります[*5]。図 3 は $\{5, 3\}$ の場合なので、和は

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5} = \frac{31}{30}\pi > \frac{\pi}{2}$$

となり、**三角形の内角の和が 180° を超える**という変なことが起こりました。実はこれは球面三角形の性質で、こんなことが成り立ちます。

球面三角形の内角の和

球面上の三角形は、内角の和が 180° より大きい。

ここから $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q}$ が従うため、正多角形による球面の分割は

$\{p, q\} = \{2, n\}$　…　（対応するものはない）

$\{p, q\} = \{3, 4\}$　…　正八面体

$\{p, q\} = \{4, 3\}$　…　正六面体

$\{p, q\} = \{n, 2\}$　…　（対応するものはない）

$\{p, q\} = \{3, 3\}$　…　正四面体

$\{p, q\} = \{3, 5\}$　…　正二十面体

$\{p, q\} = \{5, 3\}$　…　正十二面体

の 7 種類となり[*6]、正多面体は 5 種類であることが言えました。

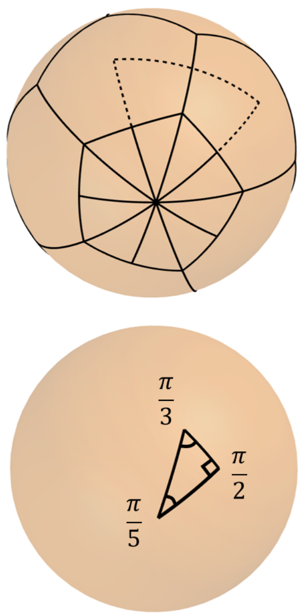


図 3

理由です。シュレーフリによる原論文を読めばわかるのでしょうが・・・

[*4] 直線のかわりに円弧を使うことになるが、大円と呼ばれる、円の中心が球の中心になっている円の弧のみを直線とする

[*5] 単位はラジアン。数学 II で学習

[*6] 球面上では 2 角形を考えることができる。$\{2, n\}$ の図を書いてみましょう

ところで $\{3,5\}$ と $\{5,3\}$ において、図 3 のように直角三角形に分割したときの形（直角三角形の形）が等しいことに気がついたでしょうか。これは正十二面体と正二十面体が本質的に同じ正則分割をしていることを意味します。ここで「本質的に」とは、分割の構造[*7]が等しいということです。ここから正十二面体と正二十面体が双対であることが言えます。

2　正多胞体と 3 次元球面の正則分割

正多角形による 2 次元球面[*8]の正則分割と 3 次元の正多面体が対応するように、同様の次のことを考えられます。

正多胞体と正則分割

$n+1$ 次元正多胞体は、n 次元の球面の n 次元正多胞体による正則分割を作る。

これを用いて 4 次元の正多胞体を考えることができます。つまり、3 次元球面の正多面体による正則分割を考えれば、4 次元正多胞体が何種類あるかを求めることができます。

ただ、ここでは「3 次元球面（つまり 4 次元の球体）がイメージしづらい」「2 次元球面のときと比べて、角度に関する条件が難しい」などの障害があるので扱いません。興味のある人はまわりの数学の先生に聞くか、シュレーフリ記号で検索してください。

3　空間充填

まだ途中ですが、この記事のまとめを書いておきたいと思います。

正多角形、正多面体、…を用いた正則充填について、

- n 次元球面の正則充填で、$n+1$ 次元の正多面体を考えることができる。
- 一方で、n 次元空間（平面、空間、…）の正則分割も面白い。
- 4 次元空間の正則分割はほかの次元と比べて特殊で、正二十四胞体による分割が存在する。

正則分割は空間充填の問題でもあります。つまり平面や空間を 1 種類の多胞体で充填できるか？を考えているわけです。図 1 は、正三角形を用いた 2 次元平面[*9]の正則分割（つまり平面の充填）です。

1 種類の正多角形を用いた平面の正則分割は、正三角形・正方形・正六角形の 3 パターンがあります[*10]（図 4）。正三角形と正六角形による分割は三角格子を、正方形による分割は正方格子を作ります。

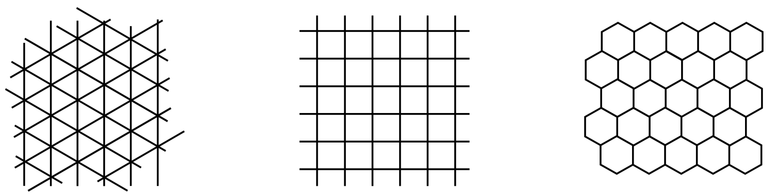


図 4　二次元平面の正則分割は 3 種類。シュレーフリ記号は順に $\{3,6\}$, $\{4,4\}$, $\{6,3\}$

[*7] 分割を保存するような球面の回転のなす群。参考文献 [2]4.10 などを参照

[*8] 球は 3 次元では？という質問がよくあると思うのですが、今考えているのは球「面」で、2 次元です。我々は地球という 2 次元球面に住んでいるので、地面は 2 次元であるように感じますよね。

[*9] 通常我々が考える空間のことをユークリッド空間といいます。2 次元平面は 2 次元ユークリッド空間

[*10] 2 種類以上の正三角形を用いてよいなら、「正三角形と正六角形」「正方形と正八角形」など 8 種類の分割方法があります。

では、3 次元空間の正則分割、つまり空間の充填はどうなるでしょう。3 次元の立方体を並べる*11ことで空間の充填ができます (図 5 の左)。これ以外の正多面体では空間の充填ができません。

図 5 の右は、正八面体を並べた例です。正八面体だけでは空間の充填ができませんが、隙間に正四面体を詰めることで充填ができ、これは正則分割になっています。正多面体を用いた正則分割（空間充填）はこの 2 種類のみで、1 つの正多面体のみを用いる分割は 1 種類しか存在しないのです。

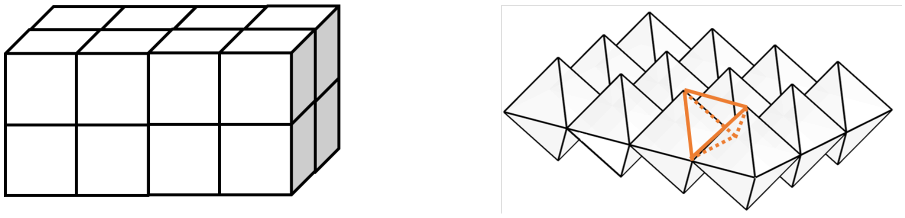


図 5　三次元空間の立方体による正則分割 $\{4,3,4\}$ と、正八面体と正四面体による正則分割

最後に、4 次元以上の話をします。4 次元では 4 次元立方体（正八胞体）を用いた空間充填 $\{4,3,3,4\}$ が存在するほか、正十六胞体と正二十四胞体を用いた空間充填 $\{3,3,4,3\}$, $\{3,4,3,3\}$ が可能です。

正十六胞体（図 6 左・図 6 中央）は正八胞体の双対ですので、充填が可能なことにあまり違和感がありません。実際、参考文献 [1] によればこの充填は 3 次元空間で正八面体と正四面体の 2 種類を用いた充填（図 5 右）に対応するとのことです。また視点を変えれば正十六胞体は図 6 の中央のようにも見えるので、充填ができそうな感じがしますよね。

対して正二十四胞体（図 6 右）の充填はけっこう異質な感じがしますね。

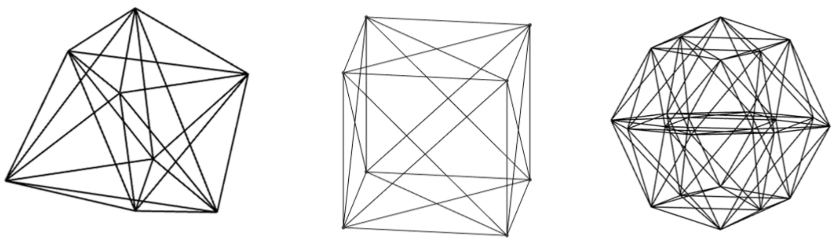


図 6　左と中央：正十六胞体　　右：正二十四胞体

そして 5 次元以上ですが、なんと n 次元立方体による充填 $\{4,3,3,\ldots,3,4\}$ しか存在しないのです。1 種類の正多胞体による n 次元空間の正則分割（充填）の個数は次のようになり、4 次元の場合がかなり特別に見えてきますね。正二十四胞体自体がなかなか奇妙な性質を持っているので、次回以降のお話できるときにじっくり話したいと思います。

次元	正則分割の数
2	3 種類
3	1 種類
4	3 種類
5	1 種類
6	1 種類
7 以上	1 種類

参考文献

[1]　宮崎興二・山口哲・石井源久，『高次元図形サイエンス』，京都大学学術出版会，2005.

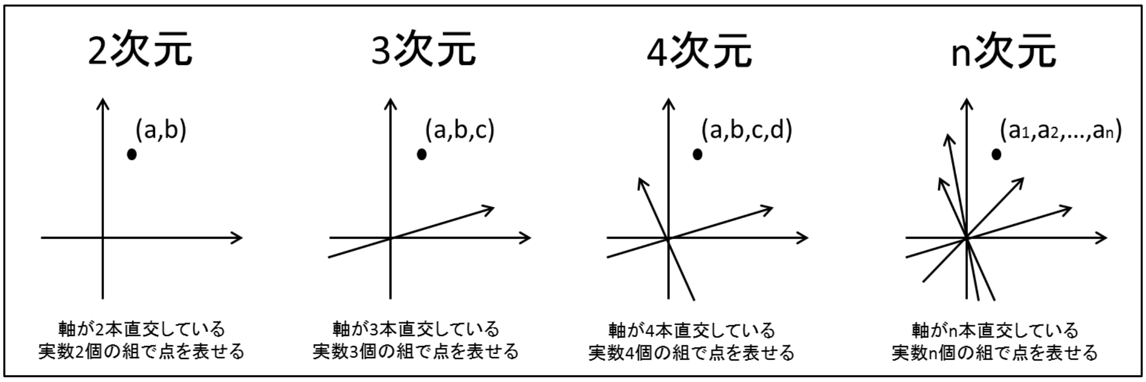
[2]　雪江明彦，『代数学 1 群論入門』，日本評論社，2010.

*11 シュレーフリ記号は $\{4,3,4\}$。これは $\{4,3\}$ をひとつの辺のまわりに 4 つ並べたということ

きょうの数字：「２４」

今月の「きょうの数学」は第 24 号ということで、24 についての話をしたいと思います。

24 と言えば 24 次元です。4 次元，5 次元，…がどのようなものかについては、この冊子の第８号[1]に多少載っていますが、簡単に言うと下の図で説明できます。



さて、24 次元といえば**接吻数**です。接吻数とは簡単に言うと「n 次元の球を、１つの球の周りにどれだけ集めることができるか？」で、図のようになります。

接吻数は一次元で２，二次元で６なのは自明なのですが、三次元では 12 であることはまったく自明でなく、解決に 50 年近くかかったといいます。12 個あつめても隙間が残るのが問題であるようです。

では、4 次元の接吻数はどうなっているかというと、なんと 24 なのです。これは 4 次元の正多面体にあたる図形、正二十四胞体の中心に球の中心をおけばよいです。興味のある人は周りの数学の先生に聞いてください。

そして 5 次元については現在でも未解決です！実は接吻数問題が解決している次元というのは非常に少なく、右の表のようなことしかわかっていません。つまり 24 は**《四次元の接吻数》**であり、**《接吻数がわかっている最大の次元》**でもあるということです。

n	接吻数
1	2
2	6
3	12
4	24
8	240
24	196560
他	未解決

というわけで、24 が特別な数だということがわかりました。24 を見かける機会があったら、ぜひ周りの人に教えてあげてくださいね。

---

[1] 2017 年 11 月発行。インターネットから読むことができます。「きょうの数学」で検索しましょう。

1＝2　ですね。（その3）

京都学園高等学校非常勤講師
中　井　保　行

このシリーズも最終回となりました。第1回は定義に関わるものなど、第2回は言葉遊びでした。今回は、なかなか強敵と思われます。あなたは、ここがおかしいと指摘できますか？ぜひチャレンジを！

$\boxed{1}$　$a>0$, $b>0$ のとき、不等式 $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\geqq 4$ が成り立つことを証明せよ。

この問題を解きましょう。

Aくんは、$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ とし、

$\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{b}>0$ ですから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4 \qquad \text{よって} \qquad \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)\geqq 4$$

としました。Bくんは、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{1+\dfrac{b}{a}}{2}\geqq\sqrt{1\cdot\frac{b}{a}} \qquad \text{また、} \qquad \frac{1+\dfrac{a}{b}}{2}\geqq\sqrt{1\cdot\frac{a}{b}}$$

両式の両辺の値はどちらも正なので、辺々掛け合わせて

$$\frac{1+\dfrac{b}{a}}{2}\cdot\frac{1+\dfrac{a}{b}}{2}\geqq\sqrt{1\cdot\frac{b}{a}}\sqrt{1\cdot\frac{a}{b}}=1$$

両辺を4倍しますと $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\geqq 4$ と、解きました。

それでは、同じようにして $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{4a}{b}\right)$ について考えてみましょう。

Aくんは、$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{4a}{b}\right)=5+\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}$ とし、

$\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{4a}{b}>0$ ですから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqq 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=5+4=9 \qquad \text{よって} \qquad \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)\geqq 9$$

としました。Bくんは、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{1+\dfrac{b}{a}}{2}\geqq\sqrt{1\cdot\frac{b}{a}} \qquad \text{また、} \qquad \frac{1+\dfrac{4a}{b}}{2}\geqq\sqrt{1\cdot\frac{4a}{b}}$$

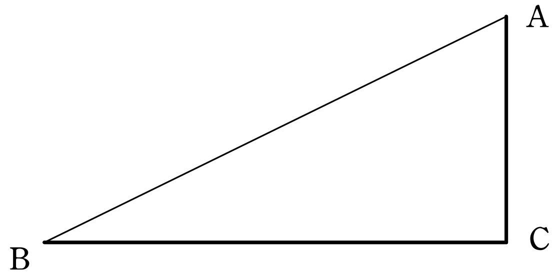
両式の両辺の値はどちらも正なので、辺々掛け合わせて

$$\frac{1+\dfrac{b}{a}}{2}\cdot\frac{1+\dfrac{4a}{b}}{2}\geqq\sqrt{1\cdot\frac{b}{a}}\sqrt{1\cdot\frac{4a}{b}}=2$$

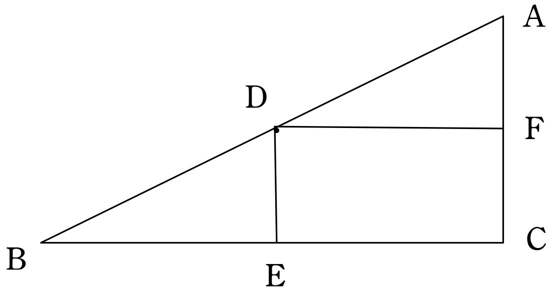
両辺を4倍しますと、$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\geqq 8$

どちらも正しいはずですから、9＝8　ですね。両辺から7を減じると2＝1が得られます。

$\boxed{2}$　下の図のような、３つの辺の長さが3、4、5の直角三角形があります。



$AC=3$、$BC=4$、$AB=5$です。ここで、辺ABの中点をとりDとし、他の辺へ垂線をおろし、図のようにE、Fとします。そうしますと、$BC=BE+DF$、$AC=AF+DE$ですから、
$BC+CA=BE+ED+DF+FA$となります。



この操作を繰り返します。すなわち、ADの中点と、DBの中点をとって、同様の操作を行います。この操作を無限に繰り返しますと、最初は階段状だった折れ線が、極限ではぴたりと辺ABに重なりますね。ということは、長さは $3+4=5$ となります。両辺から 3 を減じますと、$4=2$ です。2で割って、$2=1$ が得られます。

$\boxed{3}$

$$
\begin{aligned}
2&=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1+2}{2}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{2+2^2}{2^2}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1+2^2}{2^2}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2+2^3}{2^3}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1+2^3}{2^3}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2+2^4}{2^4}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1+2^4}{2^4}\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

同様の変形を繰り返していきますと

$$2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

が得られます。

他方、右辺は無限等比級数（初項$\frac{1}{2}$、公比$\frac{1}{2}$）の和と考えられますので、等比数列の和の公式から

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=1 \qquad \cdots\cdots②$$

となります。

①、②の値は等しいので、$1=2$　が得られます。

$\boxed{4}$

$$\begin{aligned}4&=\sqrt{16}\\&=\sqrt{1+15}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+\frac{221}{4}}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\frac{221}{36}}}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\frac{221}{36}}}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\frac{185}{36}}}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\frac{185}{36\cdot16}}}}}\end{aligned}$$

の変形を続けていきますと

$$4=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{\cdots\cdots}}}}} \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

となりますね。

他方、

$$\begin{aligned}3&=\sqrt{9}\\&=\sqrt{1+8}\\&=\sqrt{1+8}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{16}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+15}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\frac{225}{9}}}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\frac{216}{9}}}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\frac{216}{16\cdot9}}}}}\end{aligned}$$

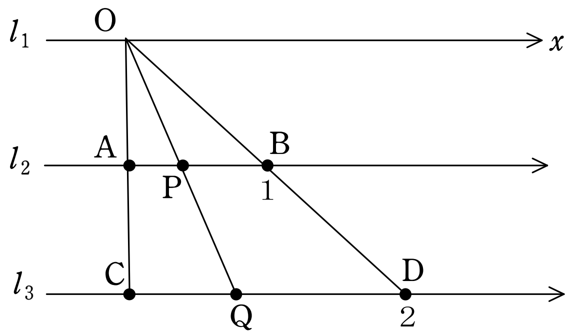
の変形を続けていきますと

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots\cdots}}}} \qquad \cdots\cdots②$$　となりますね。

よって、$4=3$　です。両辺から2を減じて　$2=1$　が得られます。

5　右の図は、３本の数直線 l_1，l_2，l_3 です。いずれも原点付近の正の部分を表しています。線分ABは原点から１の部分を、線分CDは原点から２の部分を表しています。

OA＝OCとなるように、数直線 l_1 を平行移動したものが、それぞれ l_2，l_3 です。このとき、△OAB∽△OCDです。



いま、線分AB上に任意の有理数を示す点Ｐをとり、直線OPと l_3 の交点をＱとします。点Ｐの有理数を p としますと、Ｑは $2p$ ですから有理数です。いま、線分AB上に存在する有理数の個数をN、線分CD上に存在する有理数の個数をMとしますと、線分CD上には、このように線分AB上の点から定まるもの以外の有理数が存在するかもしれないことになり、N≦M……①　が成り立ちます。

他方、線分CD上に任意の有理数を示す点Ｑをとり、直線OQと l_2 の交点をＰとします。点Ｑの有理数を q としますと、Ｐは $\dfrac{p}{2}$ ですから有理数です。線分AB上には、このように線分CD上の点から定まるもの以外の有理数が存在するかもしれないことになり、N≧M……②　が成り立ちます。

①と②から、N＝M……③　です。すなわち、0 から 1 までの数直線上の有理数の個数と、0 から 2 までの有理数の個数が等しいことになります。

ところが、線分CDの長さは線分ABの長さの２倍ありますから、明らかにM＝2N……④　です。

③と④から、N=2N が得られます。ここで、N≒0 ですから、両辺を N で割ると　1＝2　ですね。

6　値の違う２数を a、b とし、これら２数の相加平均を c とします。すなわち、$c=\dfrac{a+b}{2}$ です。

$a+b=2c$ ですから、この両辺に $a-b$ をかけても成り立ち、

$(a+b)(a-b)=2c(a-b)$ です。

展開しますと、$a^2-b^2=2ac-2bc$ です。

移項して、$a^2-2ac=b^2-2bc$。

c^2を両辺に加えて、$a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2$で、$(a-c)^2=(b-c)^2$です。

２乗が等しいのですから、$a-c=b-c$ ですね。

いま、$a=2$、$b=4$としますと、$c=3$です。

この値を代入しますと、$2-3=4-3$で、$-1=1$となります。

両辺に３を加えて、$2=4$ 。更に、両辺を２で割って、$1=2$ となります。

7　値の違う２数を a、b とし、$c=a-b$ とします。

この両辺に$a-b$をかけますと、$c(a-b)=(a-b)^2$。

展開して、$ca-cb=a^2-2ab+b^2$。

両辺にabを加えて、$ab+ca-cb=a^2-ab+b^2$。

b^2、 ac を移項して、$ab-cb-b^2=a^2-ab-ac$。

左辺をb、右辺をaでくくりますと、$b(a-b-c)=a(a-b-c)$です。

ここで、両辺を$a-b-c$で割りますと、$b=a$となりますね。

a と b は、値の違った２数ですから、$a=1$、$b=2$としますと、$1=2$ となります。

$\boxed{8}$　1 を $1+x$ で割ることを考えます。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots \\
\hline
1+x & 1 \\
 & \underline{1+x} \\
 & \quad -x \\
 & \quad \underline{-x-x^2} \\
 & \qquad x^2 \\
 & \qquad \underline{x^2-x^3} \\
 & \qquad\quad x^3
\end{array}
$$

ですから、$1\div(1+x)=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots$

となります。ここで、x に 1 を代入してみますと

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}=1+(-1+1)+(-1+1)\cdots$$

$$\frac{1}{2}=1+0+0+\cdots\cdots$$

右辺の値は 1 ですから、この式は結局 $\frac{1}{2}=1$　となりますね。両辺を2 倍しますと、$1=2$　ですね。

$\boxed{9}$　$x=\sqrt{2}$ とします。当然、$x^2=2$　…①　です。

①式を、自分自身に代入します。$x^{x^2}=2$　…②

この操作を続けますと、$x^{x^{x^{\cdots}}}=2$　…③ が得られます。

他方、$x^4=4$…④　ですから、上と同様に自分自身に代入して　$x^{x^4}=4$　…⑤

この操作を続けますと、$x^{x^{x^{\cdots}}}=4$　…⑥ が得られます。

③式と⑥式の左辺は、同じですから、右辺が等しいことになります。

よって、$2=4$ ですね。

この両辺を2で割りますと、$1=2$ となります。

$\boxed{10}$　x は、方程式 $e^x=-1$ …①の解とします。

この両辺を2乗しますと、$(e^x)^2=(-1)^2$ から、$e^{2x}=1$　ですね。

一般に、指数の性質から、 $e^0=1$ …②ですから、指数を比較して　$2x=0$　から、$x=0$ …③となります。①式に代入しますと、 $e^0=-1$ …④ですね。

②、④の両式を比較しますと $-1=1$ です。

両辺に1を加えて、$0=2$

2で割って、$0=1$

両辺に1を加えて、$1=2$ となります。

$\boxed{11}$ $\log(1+x)$ をテーラー展開しますと、

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots \quad \cdots ①$$

となります。$x=1$ を代入しますと$\log 2$ が求まります。

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots \quad \cdots ②$$

②の両辺を2倍しますと

$$2\log 2=2-1+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{6}+\cdots\cdots$$

約分して

$$=2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots$$

分母が同じ項をまとめて

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots \quad \cdots ③$$

上式の右辺は②式と同じですから

$$2\log 2=\log 2$$

ですね。ここで、$\log 2\fallingdotseq 0$ ですから、両辺を$\log 2$で割りますと

$$2=1$$

が得られます。

きょうの数学ブックトーク「どんな数にも物語がある」

嵯峨野高校教諭

森　田　勝　也

今回紹介する本は、**アレックス・ベロス著『どんな数にも物語がある 驚きと発見の数学』（SB Creative）**です。数学史について豊富な話題で面白く語った本で、それほど難しい内容ではないので誰でも読みやすいと思います。どのように数学が日常生活に活用されているか取り上げているので、単に歴史的な発展の経緯を知るだけでなく、先人たちが築き上げてきた数学の有用性を感じることができます。例えば、２次曲線を用いて建築物のデザインを考えたり、微分を用いて道路や線路の曲がり方を決めたり、指数関数を用いて人口と凶悪犯罪の件数に関するモデルをつくったりすることができるのです。

筆者は「数学はジョークだ。」と言います。数学はジョークと同じように、理解できたら楽しむことができてやみつきになるものです。皆さんの数学のイメージと同じでしょうか？私は今、楽しむために数学を学んでいるのでとても共感できました。

–編集後記–

「きょうの数学」第 24 号です。意見・感想・寄稿など、「きょうの数学」編集部（kyomath31415@gmail.com）までお送りください。

twitter アカウントもつくりました。→ @kyomath31415

今月号の洛北算額はお休みです。先月号の問題の解答は 3 月中も受け付けています。

数学川柳

平均値　そうかそうかと生徒言う

絶対値　絶対にこれ　わかりません

無理関数　グラフを書くのは　無理で－す

なんとなく　かすかに分かった　微分学

苦労して　分かったつもりの　積分法

愛はまた　空想の中に　あるべきか　　おいら

バックナンバーを「京都府高等学校数学研究会」の HP にアップしています。
ご覧ください。→　http://www2.hamajima.co.jp/kyoto-math/