

平成 30 年度 秋季募集
(平成 31 年 4 月入学)
東北大学大学院機械系 4 専攻入学試験

試験問題冊子

数学 A MATHEMATICS A

平成 30 年 8 月 28 日(火) 9:30 - 11:00

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票が配布されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 4 題から 3 題を選び解答すること。選択した問題を選択票に記入すること。問題ごとに 2 枚の答案用紙を用いること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

数学 A MATHEMATICS A

1. a を正の定数とするとき、以下の問いに答えよ.

(1) 次の xy 平面上の領域 D_1 の面積を求めよ. ただし, (r, θ) は極座標であり, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ である.

$$D_1 = \{ (x, y) \mid r \leq a(1 + \cos \theta) \}$$

(2) 次の xy 平面上の領域 D_2 の面積を求めよ.

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{2a} \leq y \leq \frac{a^3}{x^2 + a^2} \right\}$$

(3) 次の xy 平面における曲線 C の長さを求めよ.

$$C = \{ (x, y) \mid 3ay^2 = x(x - a)^2, x \leq a \}$$

2. 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) (x+1) \frac{dy}{dx} - 3y - (x+1)^3 = 0$$

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 5y = e^x \cos x$$

$$(3) x \frac{dy}{dx} \cos \frac{y}{x} + y = y \cos \frac{y}{x}$$

数学 A MATHEMATICS A

3. 3×3 行列 A が任意の実数 x, y, z に対し

$$\begin{pmatrix} 2x & y+1 & z+6 \\ x & 2y & 3 \\ x & 2 & 2z+3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を用いて $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ と表すとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を求めよ。
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (3) A の逆行列を求めよ。
- (4) 3×3 行列 X が任意の自然数 n について $A^n X = X A^n$ をみたすとき、 X の一般形を求めよ。

4. デカルト座標系 (x, y, z) において, ベクトル場 \mathbf{A} が

$$\mathbf{A} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

により与えられる. ただし, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の基本ベクトルである. また, 曲線 C が

$$\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

により与えられる (次ページの図 1). 以下の問いに答えよ.

(1) $\nabla \cdot \mathbf{A}$ および $\nabla \times \mathbf{A}$ を求めよ.

(2) C の 2 個の端点を結ぶ線分を L とするとき (次ページの図 1), 積分

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ. ただし, L の向きは z が増加する向きとする.

(3) 曲線 C と z 軸を同じ z 座標で結ぶ線分を $0 \leq z \leq 2\pi$ の範囲で動かしたときにできる曲面を S とする. このとき, S は

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k} \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

により与えられる. 積分

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ. ただし, \mathbf{n} は S の単位法線ベクトルであり, その z 成分は非負であるとする.

(4) 積分

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ. ただし, C の向きは z が増加する向きとする.

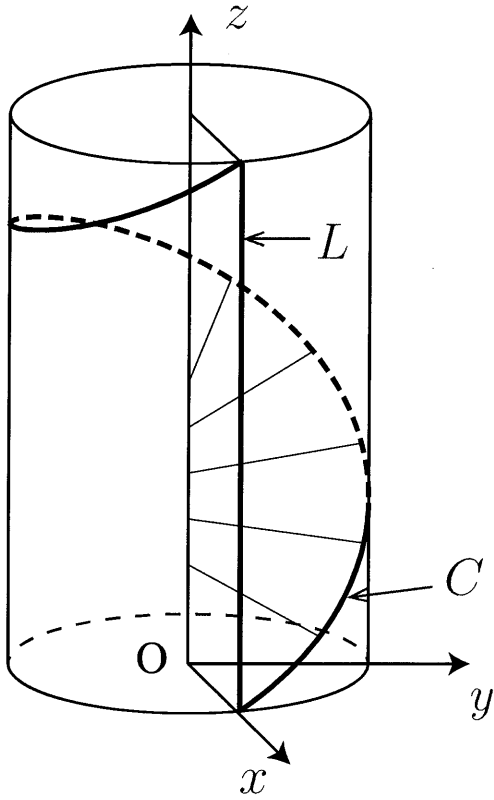


図 1

平成 30 年度 秋季募集
(平成 31 年 4 月入学)
東北大学大学院機械系 4 専攻入学試験

試験問題冊子

数学 B MATHEMATICS B

平成 30 年 8 月 28 日(火) 13:30 – 15:00

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票が配布されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 3 題から 2 題を選び解答すること。選択した問題を選択票に記入すること。問題ごとに 2 枚の答案用紙を用いること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ およびその逆変換を次のように定義する.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

以下の問いに答えよ.

(1) 次の関数 $g(t)$ のフーリエ変換を求めよ.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

(2) $X(\omega)$ および $Y(\omega)$ がそれぞれ関数 $x(t)$ および $y(t)$ のフーリエ変換であり, 次の関係を満たすとき, $x(t)$ と $y(t)$ の関係を示せ.

$$Y(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') \frac{1}{\omega - \omega'} d\omega'$$

ただし, 次の関数 $h(t)$ のフーリエ変換が $H(\omega) = \frac{2}{i\omega}$ であることを用いよ.

$$h(t) = \begin{cases} -1 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

(3) 次式を満たす $X(\omega)$ を求めよ.

$$\frac{\sin \omega}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') \frac{1}{\omega - \omega'} d\omega'$$

2. 関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

a を正の定数とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $e^{-as} F(s)$ の逆ラプラス変換を求めよ.

(2) 次の周期 $2a$ の関数 $g(t)$ のラプラス変換 $G(s)$ を求めよ.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < a) \\ -1 & (a \leq t < 2a) \end{cases}$$

(3) $\frac{1}{s} G(s)$ の逆ラプラス変換を求め, $0 \leq t \leq 4a$ の範囲で図示せよ. ただし, $G(s)$ は問(2)で得られたものである.

(4) $0 \leq t \leq 4a$ の範囲で $\frac{2e^{-as}}{s^2(1+e^{-as})}$ の逆ラプラス変換を求め, 図示せよ.

3. 関数 $u(x, t)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, \quad t > 0)$$

および境界条件

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

を満足する。ただし、 α , L は正の定数である。以下の問いに答えよ。

(1) $u(x, t)$ の一般解を求めよ。

(2) $f(x) = x(3L^2 - x^2)$ のとき、 $u(x, t)$ を求めよ。

(3) 問(2)の $u(x, t)$ について、 $t = 0$, $t = t_1$, および $t = \infty$ における $y = u(x, t)$ の概形を xy 平面に図示せよ。ただし、 $0 < t_1 < \infty$ とする。

平成 30 年度 秋季募集
(平成 31 年 4 月入学)
東北大学大学院機械系 4 専攻入学試験

試験問題冊子

【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS	P1~P2
流体力学	FLUID DYNAMICS	P3~P4
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	P5~P6
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS	P7~P8
制御工学	CONTROL ENGINEERING	P9~P10

平成 30 年 8 月 29 日(水) 9:00 - 12:00

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票 2 枚が配付されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 5 科目の中から 2 科目を選択して、選択した科目の問題すべてについて解答すること。選択した科目を選択票に記入すること。1 科目に 2 枚綴 1 組を使用すること。各科目とも 1 問につき 1 枚の答案用紙を使用すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

熱力学 THERMODYNAMICS

1. シリンダとピストンからなる閉じた系に蓄えられた理想気体の準静的圧縮過程に関する以下の問いに答えよ。ただしこの過程の初期状態 1 における圧力および比体積を p_1 , v_1 とし、この理想気体の比熱比を κ , 気体定数を R とする。
- (1) この気体が状態 1 から最終状態 2 まで等温圧縮されたとき、状態 1 と状態 2 における圧力および比体積の間に成り立つ関係を示せ。ただし最終状態 2 における圧力および比体積を p_2 , v_2 とする。
 - (2) 問 (1) の等温圧縮過程における比エントロピー変化を求めよ。
 - (3) 状態 1 から開始する断熱圧縮過程においてこの気体が受け取る仕事を求めよ。ただしこの断熱圧縮過程の最終状態 3 における圧力を p_3 とする。
 - (4) 問 (1) の等温圧縮過程と、問 (3) の断熱圧縮過程とが同じ量の仕事によって行われたとき、等温圧縮時の最終比体積 v_2 と断熱圧縮時の最終比体積 v_3 はどちらが大きいのか、理由を付して述べよ。また圧力比 p_3/p_2 を、この気体の比熱比 κ , 初期温度 T_1 , 断熱圧縮時の最終温度 T_3 を用いて表せ。

熱力学 THERMODYNAMICS

2. 熱力学の一般関係式に関する次の問いに答えよ.

(1) 比エンタルピー h の微小変化 dh を表す式を, 圧力 p , 比エントロピー s , 温度 T , 比体積 v およびそれらの微小変化 dp , ds , dT , dv の中から必要なものを用いて示せ.

(2) 以下の式を導け. ただし c_p は定圧比熱である.

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp + \frac{c_p}{T} dT$$

(3) 比ギブス自由エネルギーの式 $g = h - Ts$ を用いて, 以下のマクスウェルの熱力学的関係式を導け.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T$$

(4) 問 (1) から問 (3) までの関係式を用いて以下の式を導け.

$$dh = c_p dT + \left\{ v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right\} dp$$

(5) 理想気体の定圧比熱は圧力に依存しないことを問 (4) の式を用いて示せ.

流体力学 FLUID DYNAMICS

1. 水平に置かれた二枚の平板間に誘起される非圧縮粘性流体の二次元定常流れについて考える。上側の板は静止し、下側の板は一定の速度 U で水平方向に動いている。下側の板の運動方向に x 軸、板に垂直上向きに y 軸をとり、下側の板の表面の位置を $y = 0$ とする。流速は至るところで x 軸に平行で、圧力 p は y 軸方向に変化しないものとする。また、流体の粘度は μ で一定である。このとき、ナビエ・ストークス方程式は次式に帰着する。

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

ここで、 u は流速の x 成分で、 y のみの関数となる。以下の問いに答えよ。

- (1) 図1に示すように、二枚の平板が十分に大きく、距離 h だけ離れている場合を考える。

a) u が次式で与えられることを導け。

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h-y)y + \frac{U}{h} (h-y)$$

b) x 軸に垂直な断面を横切る、単位奥行きあたりの体積流量 Q が次式で与えられることを導け。

$$Q = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2}Uh$$

- (2) 図2に示すように、上側の板の長さが L で、中央に段差がある場合を考える。上側の板の左端を $x = 0$ とし、上下の板の間の距離は $0 \leq x < L/2$ の領域で H で一定であり、 $L/2 \leq x \leq L$ の領域で $H/2$ で一定である。簡単のため、いずれの領域においても、段差の近傍を含めて、問(1)で与えた流速 u および流量 Q の式が適用できるものとする。また、 $x = 0$ および $x = L$ における圧力は p_a である。

a) 体積流量 Q を U 、 H を用いて表せ。ここで、 $x = L/2$ において圧力 p が連続であることに留意せよ。

b) 流体の圧力により上側の板の底面に働く、単位奥行きあたりの力の y 成分 F_y を L 、 U 、 H 、 μ 、 p_a を用いて表せ。

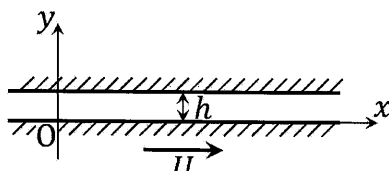


図1

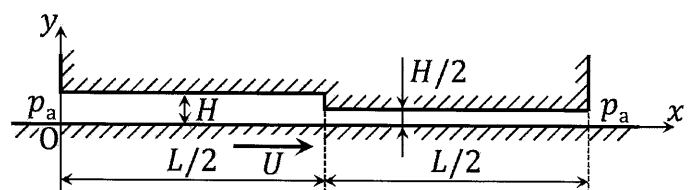


図2

2. 非粘性・非圧縮性流体の二次元定常渦なし流れに関する以下の問いに答えよ。

(1) 原点にある渦糸まわりの流れは複素速度ポテンシャル

$$W(z) = i k \ln z$$

で表される。ここで、 k は正の実数、 i は虚数単位、 \ln は自然対数、 z は $z = r e^{i\theta}$ の極形式で表される複素変数で、 r および θ は半径方向および周方向の極座標を表す。

- a) 速度ポテンシャル $\Phi(r, \theta)$ と流れ関数 $\Psi(r, \theta)$ を求めよ。
- b) 原点を中心とする半径 r の円周に沿う反時計まわりの循環 Γ を求めよ。
- c) この渦糸のまわりの旋回流は自由渦か、強制渦か、答えよ。

(2) 図3に示すように、循環が Γ_A , Γ_B , Γ_C である3つの渦糸 A, B, C が等間隔 h で一列に並んでいる。流体は無限に広がり、かつ、無限遠で流速は 0 に漸近するものとする。このとき、渦糸は他の渦糸の誘導する速度により移動する。流れ場中で全ての渦糸が静止するために必要な循環 Γ_A , Γ_B , Γ_C が満たすべき関係を求めよ。ただし、 Γ_A は 0 ではない。

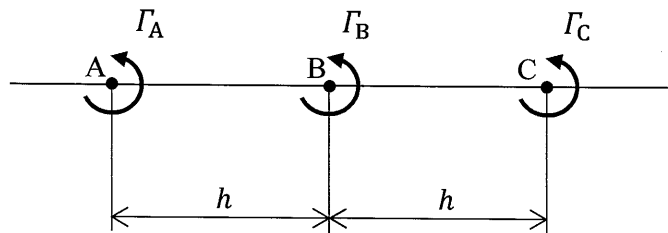


図3

1. 図1に示すように、水平な剛体壁に一端がピンで固定された4本の一様な棒 AF, BF, CF, DF を点 F でピン結合した同一平面内にあるトラス構造を考える。点 F と剛体壁の距離は h とする。BF および CF の鉛直方向からの角度を θ_1 , AF および DF の鉛直方向からの角度を θ_2 とする。ただし、 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$ である。これらの棒の縦弾性係数および断面積はそれぞれ E および S とする。点 F に鉛直下方に荷重 P を作用させる。棒の自重は無視できるものとし、以下の問いに答えよ。

- (1) 棒 AF, BF, CF, DF の軸力をそれぞれ R_{AF} , R_{BF} , R_{CF} , R_{DF} とする。水平方向と鉛直方向の力のつり合い式を示せ。
- (2) 各棒の軸方向の垂直ひずみ ϵ_{AF} , ϵ_{BF} , ϵ_{CF} , ϵ_{DF} を R_{AF} , R_{BF} , R_{CF} , R_{DF} を用いて表せ。
- (3) 各棒の伸び Δl_{AF} , Δl_{BF} , Δl_{CF} , Δl_{DF} と点 F の鉛直方向の変位 δ との関係を示せ。
- (4) R_{AF} , R_{BF} , R_{CF} , R_{DF} をそれぞれ求めよ。
- (5) 点 F の鉛直方向の変位 δ を求めよ。

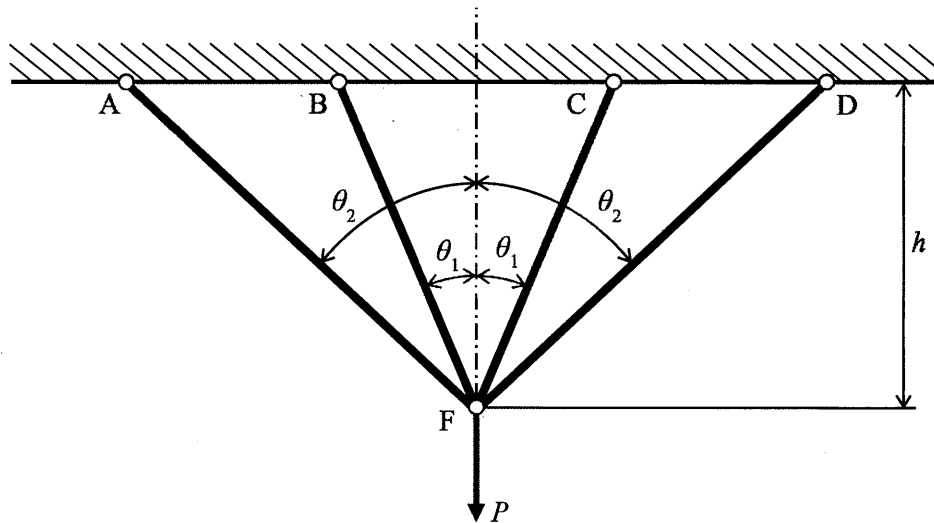


図 1

材料力学 STRENGTH OF MATERIALS

2. 点 A で固定支持された L 型フレーム ABC を考える。ただし、はり AB, BC の長さは $2L$ とし、各はりの曲げこわさ EI は一定とする。また、各はりの自重と中立軸の伸縮は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 図 2(a) のように、L 型フレーム ABC の点 B に集中モーメント M_B を作用させるとき、点 B におけるたわみ角を求めよ。
- (2) 図 2(b) のように、L 型フレーム ABC の点 B から L の距離にある点 D に鉛直下方向に集中荷重 W を作用させるとき、右端 C におけるたわみを求めよ。
- (3) 図 2(c) のように、L 型フレーム ABC の右端 C が単純支持されているものとする。点 D に鉛直下方向に集中荷重 W を作用させるとき、点 C における反力を求めよ。

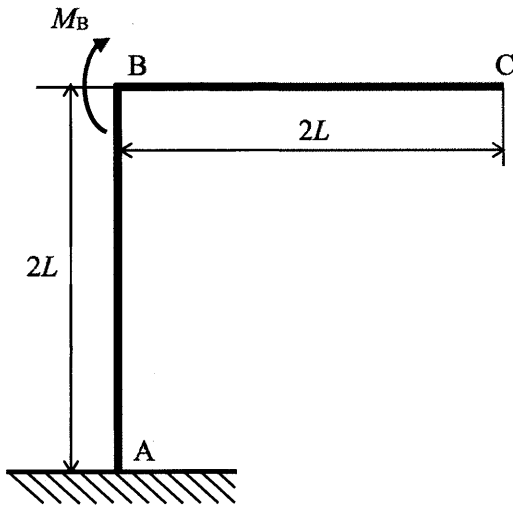


図 2(a)

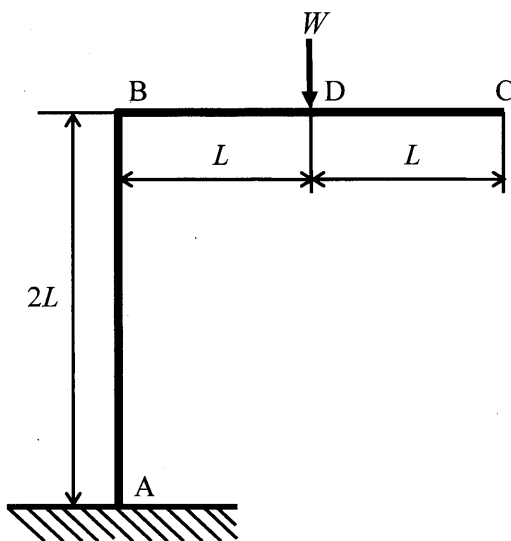


図 2(b)

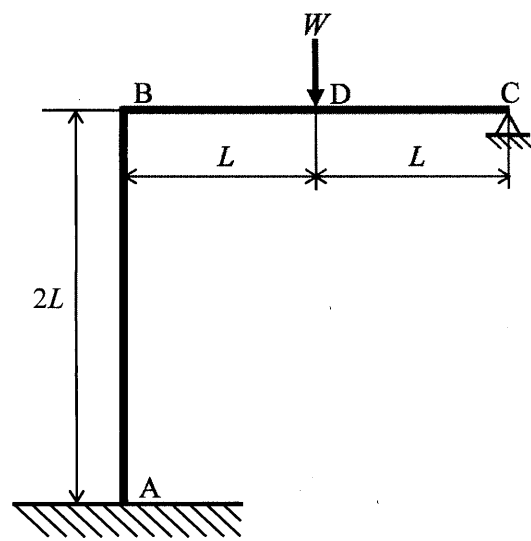


図 2(c)

1. 図1に示すような、質量 m 、ばね定数 k_1, k_2 の2つのばね、粘性減衰係数 c のダッシュポット、および長さ L 、縦弾性係数 E 、断面二次モーメント I のはりからなる振動系を考える。ばね、ダッシュポット、およびはりの質量は無視できるものとし、質量 m は水平方向にのみ微小振動するものとする。質量 m の釣り合い位置からの変位を $x(t)$ とし、 t は時間である。以下の問いに答えよ。

- (1) はりの等価ばね定数 k_3 を L, E, I を用いて表せ。
- (2) 系の等価ばね定数 K を求めよ。
- (3) 系の臨界減衰係数を求めよ。
- (4) 系が不足減衰となるとき、系の減衰固有振動周期 T を求めよ。
- (5) 問(4)の条件下で、周期 T だけ離れた2つの異なる時刻での $x(t)$ の比を求めよ。ただし、 $x(t) \neq 0$ とする。

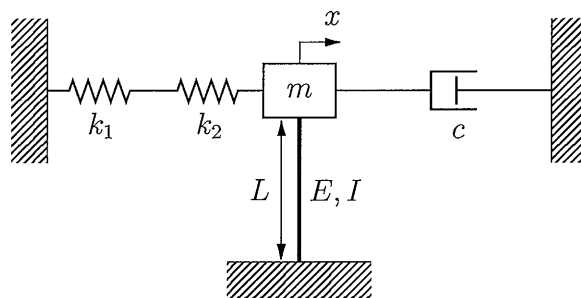


図 1

2. 図2に示すような、質量 m_1 、半径 r 、慣性モーメント J の均質回転円板、ばね定数 k_1 と k_2 の2つのばね、および質量 m_2 の台車からなる振動系を考える。ばね定数 k_1 のばねの右端は円板の摩擦の無い軸受を介して中心軸 O に連結されており、左端は台車に固定されている。ばね定数 k_2 のばねの右端は台車に連結されており、左端は壁に固定されている。円板は台車の上を滑らずに回転運動をし、台車は水平方向にのみ振動する。釣り合いの位置からの円板の回転角と台車の変位をそれぞれ θ と x とする。ばねの質量は無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 系の運動エネルギー T を求めよ。
- (2) 系のポテンシャルエネルギー U を求めよ。
- (3) 系の運動方程式を求めよ。
- (4) $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$ のとき, $J = mr^2$ を用いて, 系の固有角振動数を求めよ。

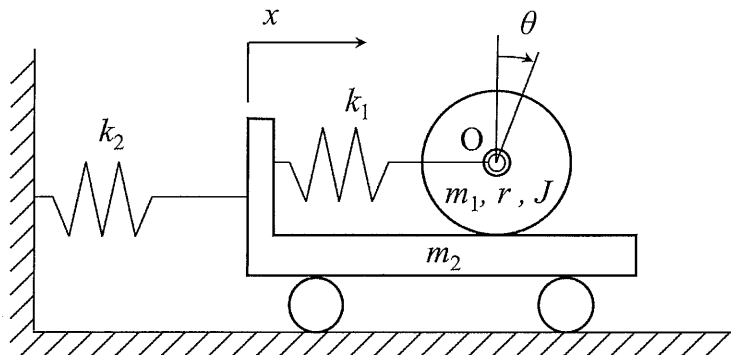


図 2

1. 以下の問いに答えよ。ただし、 s はラプラス演算子、 t は時間を表す。

(1) 図1に示すシステムの単位ステップ応答を求め、その概形を描け。

(2) 図1に示すシステムの $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s)$ を求めよ。また、極と零点を求めよ。

(3) 図2に示すフィードバック制御システムを考える。制御対象の伝達関数 $P(s)$ は次式で与えられる。

$$P(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

このシステムに単位ランプ関数 $r(t) = t$ を目標値として入力したとき、定常速度偏差 e_v ($0 < e_v < \infty$)が残った。このときの制御器 $C(s)$ を(i)~(iii)から1つ選択し、その根拠を説明せよ。ただし、 K_1, K_2, K_3 は正の定数とする。

(i) $C(s) = K_1$, (ii) $C(s) = \frac{K_1s + K_2}{s}$, (iii) $C(s) = \frac{K_1s^2 + K_2s + K_3}{s^2}$

(4) 問(3)のフィードバック制御システムが安定となる条件を求めよ。また、定常速度偏差 e_v が $e_v \leq 0.1$ となる条件を求めよ。

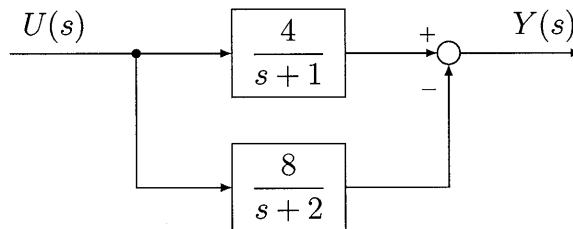


図1

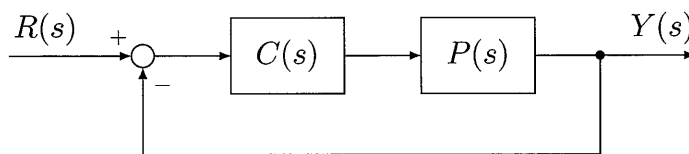


図2

2. 以下の可制御な線形時不変システムを考える.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

ただし, x を状態ベクトル, u を入力, y を出力とする.

このシステムに対し, 評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

を最小とする最適制御入力は, Ricatti 方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = O$$

の正定解 P を用いて, $u = -R^{-1}B^T P x$ で与えられることが知られている. ただし, Q, R は重みを表す行列, O は零行列である. このことを用いて, 以下の問いに答えよ.

- (1) 図3に示す電気回路において, インダクタンスを l , レジスタンスを r , キャパシタンスを c とする. また, 入力電圧を e_i , 出力電圧を e_o , コイルに流れる電流を i , コンデンサにかかる電圧を v とする. この系の状態ベクトルを $x = (i, v)^T$, 入力を $u = e_i$, 出力を $y = e_o$ とし, 状態方程式と出力方程式を求めよ.
- (2) 問(1)において, 回路定数 $l = r = c = 1$, 重み $R = 1$, $Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ としたときの行列 $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ および最適制御入力 u を求めよ.
- (3) 問(2)において, Q を変えずに, R を大きくした場合, この系の初期値に対する応答はどのような挙動を示すか考察せよ.

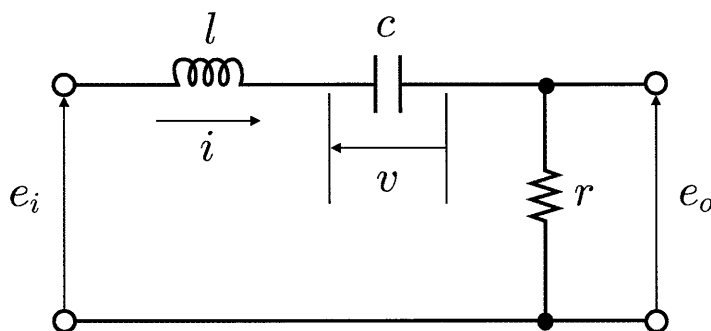


図3