# 算術的階層の厳密性と形式的手法の限界について

照井 一成
国立情報学研究所
terui@nii.ac.jp

## 1 はじめに

数学者の主な仕事は定理を証明することである。定理を証明する過程には、直感的ひらめき、具体例の検討、例から普遍への一般化、論証の明確化など、一見したところ意味的・非形式的なプロセスが多く伴うが、ひとたび定理や証明が書き下されたならば、少なくともその書き下されたところのものは**形式化**（formalize）することが可能であり、純粋に数学的・形式的な対象と見なすことができる。形式化により、（幾何学や算術などの）**理論**や、その理論における**定理**などは形式的な概念となり、それらについては形式的・数学的手法により分析を行うことが可能になる。一言で言えば、数学について数学することができるようになり、**メタ数学**（**数学基礎論**）という数学の新しい一分野が拓かれることになる。

さて、ひとたび数学理論 $T$ が形式化されると、次のような問いが興味深い問題として現れてくる。

1. $T$ における言明が真であるとはどういうことかを、$T$ の言明のみを用いて定義することはできるか？
2. ある言明が与えられたとき、その言明が $T$ の定理かどうかを有限時間で判定することはできるか？
3. $T$ における言明のうちで真なものは、全て $T$ の定理として導出することができるか？
4. $T$ におけるどんな言明についても、$T$ において証明するか反証するのどちらかができるか？
5. $T$ が無矛盾であることは、$T$ において許されている論法のみを用いて確かめることができるか？

これらの問いに対しては、部分的な肯定的結果と一般的な否定的結果が共に知られている。特に 1 から 5 に対する否定的結果は、それぞれ**真理述語の定義不能性**（Tarski）、算術および一階述語論理の**決定不能性**（Church）、$\Pi_1$ **不完全性**（Gödel）、**第一不完全性**（Gödel-Rosser）、**第二不完全性**（Gödel）と呼ばれている。本稿の目的は、形式的手法の限界を示すと言われるこれらの否定的な結果について、統一的な観点から解説を行うことにある。

上記の結果は、ほとんど全ての数学理論にあてはまる（特に数学のほぼ全てを体系化できる ZF 集合論にもあてはまる）普遍的な成果であるが、ここでは話を単純にするため、

一階算術（自然数論）に議論を限定する。ひとたび一階算術に身を置くと、そこに**算術的階層**の存在とその**厳密性** (Kleene) という重要な事実が立ち現れる。すなわち算術的に定義可能な集合は、それを定義する論理式の複雑さに応じてある階層性をなし、各階層の間には厳密な含意関係が存在するという事実である。本稿の特徴は、上記の諸成果（第二不完全性を除く）を算術的階層の厳密性という単一の事実に基づいて説明するという点にある。そのメリットとしては、一階算術に対して統一的な見方を与えられることや、諸定理間の関連性（特に肯定的結果と否定的結果の関連性）を明確にできることなどが挙げられるが、特に重要なのは、証明可能性などのメタ数学的な概念を算術的階層という強固な階層のうちに位置づけることができるという点である。対象理論に身を置こうとも、メタ数学に身を移そうとも、形式的な手法を用いる限り、我々の前には圧倒的に強固な算術的階層が立ちはだかっており、それを崩壊させたり、そこから逃れ出たりする余地は全くない。その不可避性が、形式的手法に関する否定的な結果の真意を最もよく表しているように思われるのである。

以下の論述においては、直感的なわかりやすさを重視し、数学的な厳密さをある程度犠牲にしている部分がある。証明は全て概略的である。ここで与えられる定義や証明のいくつかは、Tarski, Church, Gödel らのオリジナルのものとは異なっているが、特に新しいものではない。本稿を執筆するにあたっては、[6, 11, 12] などを参考にした。

## 2　自然数としての論理式

本章では準備として、まず算術の論理式とは何かを定義し、次に算術の論理式が（標準モデルにおいて）真であるとはどういうことかの定義を与える。

**定義 1 (算術の項、算術の論理式)**

**算術の項:** $0, S, +, \cdot$ および変項を用いて構成される項。算術の項を表すのに、$t, u, v, \ldots$ 等の記号を用いる。

**数項:** $0, S(0), SS(0), SSS(0), \ldots$ という形の算術の項。自然数 $n$ に対応する数項を $\overline{n}$ により表す。

**閉項:** 変項を含まない項。

**算術の論理式:** 算術の項から $=, \neg, \wedge, \forall x$ を用いて構成される論理式。以下、算術の論理式のことを単に論理式と呼ぶ。算術の論理式を表すのに、$A, B, C \ldots$ 等の記号を用いる。

**閉論理式** 自由変項を一つも含まない論理式。**文**（$sentence$）とも呼ばれる。

**一変項論理式:** 自由変項を一つだけ含む論理式 $A(x)$。

含意 $\to$、選言 $\vee$, 存在 $\exists$ 等は $\neg$、$\wedge$、$\forall$ を用いて用いて定義することができる。さらに以下の省略表現を用いることにする：

$$\begin{array}{rcl} t \leq u & \equiv & \exists x(t + x = u) \quad \text{（ここで } x \text{ は } t, u \text{ に現れない）} \\ \forall x \leq t.A & \equiv & \forall x(x \leq t \to A) \text{（ここで } x \text{ は } t \text{ に現れない）} \\ \exists x \leq t.A & \equiv & \exists x(x \leq t \wedge A) \text{（ここで } x \text{ は } t \text{ に現れない）} \end{array}$$

算術の論理式は、**ゲーデル符号化**の手法を通して、自然数に一意に対応させることができる。今後、そのような符号化の方法 $\ulcorner \ \urcorner$ を一つ固定し、論理式 $A$ に対応する自然数 $\ulcorner A \urcorner \in \mathbb{N}$ を $A$ の**ゲーデル数**と呼ぶことにする。論理式とは形式的な対象であり、それが実際に何であるのかが重要なのではない。大事なのはその使用法であり、解釈である。使用法や解釈が明確に定まっている限り、それはどのような対象であってもかまわない。特にそれが自然数であったとしても、一向に構わない。ゆえに我々は以下の重要な規約を採用することにする。

- **算術の論理式はそれを表すゲーデル数と同一視される**[1]**。**

例えば、算術の論理式 $\forall x.0 = x$ は、そのゲーデル数 $\ulcorner \forall x.0 = x \urcorner$ と同一視される。今後、論理式とは、ある種の性質を満たす自然数のことであるとする。ある数が偶数であったり素数であったりするのと正確に同じ意味で、ある数は閉論理式であったり一変数論理式であったりする。この同一視により、$Q$ や $PA$ などの算術の理論（“自然数に関する” 理論）において、論理式を直接に取り扱うことが可能となる。

次に、算術の論理式が「（標準モデルにおいて）真である」とはどういうことかを正確に定めておくことにする。

**定義 2 (算術の項の値)** 任意の閉項 $t$ について、$t$ の**値**とは以下のように定義される自然数のことである。

1. 項 $0$ の値は自然数 $0$ である。
2. 項 $t$ の値が自然数 $n$ のとき、項 $S(t)$ の値は自然数 $n + 1$ である。
3. 項 $t, u$ の値がそれぞれ自然数 $n, m$ のとき、項 $t + u$ の値は自然数 $n + m$ である。
4. 項 $t, u$ の値がそれぞれ自然数 $n, m$ のとき、項 $t \cdot u$ の値は自然数 $n \cdot m$ である。

**定義 3 (算術の論理式の真偽)** 任意の閉論理式 $A$ について、$A$ が（標準モデルにおいて）**真である**のは、以下の場合である。

1. 原子論理式 $t = u$ が真であるのは、$t$ の値と $u$ の値が等しいときである。
2. $t \leq u$ が真であるのは、$t$ の値が $u$ 以下の場合である。
3. $\neg A$ が真であるのは、$A$ が真でないときである。
4. $A \wedge B$ が真であるのは、$A$ と $B$ が両方とも真であるときである。

[1] このような規約は、例えば [4, 3, 6] 等に見られる。

5. $\forall x \le t.A$ が真であるのは、$t$ の値よりも小さい全ての数 $n$ について、$A[\overline{n}/x]$ が真となる場合である。

6. $\exists x \le t.A$ が真であるのは、$t$ の値よりも小さいある数 $n$ が存在して、$A[\overline{n}/x]$ が真となる場合である。

7. $\forall x A$ が真であるのは、**全て**の数 $n$ について、$A[\overline{n}/x]$ が真となる場合である。

8. $\exists x A$ が真であるのは、**ある**数 $n$ が存在して、$A[\overline{n}/x]$ が真となる場合である。

閉論理式 $A$ が（標準モデルにおいて）真であることは、しばしば $\mathbb{N} \models A$ と表される。前述の規約により、「$\mathbb{N} \models \ $ 」という性質は、それ自体自然数に関する性質であることに注意。また、性質とその外延を同一視するならば、「$\mathbb{N} \models \ $ 」が表す集合（真な論理式の集合）は、それ自体自然数の部分集合であるということもできる。

## 3 算術的階層

自然数の集合は非可算無限に存在する。それらのうちの大部分は、いかなる定義をも受け付けない混沌たるものであるが、中には算術の論理式により定義できるような集合も存在する。例えば、偶数の集合は $\exists y(2 \cdot y = n)$ を満たす自然数 $n$ の集合と同一視することができる。そのような集合は算術の論理式により定義可能である、と言われる。ここでは、まず算術の論理式により定義可能な集合全体の集まりは、**算術的階層** (arithmetical hierarchy) と呼ばれる階層性を成すことを示す。

算術的階層は、自然数の集合の間にある複雑さの尺度を導入する。この尺度は、論理式の複雑さに基づいて定義される純論理的性格のものであるが、興味深いことに、それは計算論的な複雑さの概念に正確に対応することが知られている。本章の最後では、そのような論理と計算論の間の関係の一端を示す定理を紹介する。

**定義 4 ($\Delta_0$, $\Sigma_i$, $\Pi_i$ 論理式)**

**$\Delta_0$ 論理式：** 算術の項から $=, \le, \neg, \wedge, \forall x \le t, \exists x \le t$ を用いて構成される論理式。（量化子は**限定量化子** $\forall x \le t, \exists x \le t$ のみ）

**$\Sigma_1$ 論理式：** $\exists x_1 \cdots \exists x_n A$ の形の論理式 （ここで $n \ge 0$、$A$ は $\Delta_0$ 論理式）。

**$\Pi_1$ 論理式：** $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ の形の論理式 （ここで $n \ge 0$、$A$ は $\Delta_0$ 論理式）。

**$\Sigma_{i+1}$ 論理式：** $\exists x_1 \cdots \exists x_n A$ の形の論理式 （ここで $n \ge 0$、$A$ は $\Pi_i$ 論理式）。

**$\Pi_{i+1}$ 論理式：** $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ の形の論理式 （ここで $n \ge 0$、$A$ は $\Sigma_i$ 論理式）。

**定義 5 (集合の定義)** $A(x)$ を一変項論理式とする。このとき、$A(x)$ が自然数の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ を**定義する**とは、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$A(\overline{n}) \text{ は真である } \iff x \in X$$

が成り立つことである。

**定義 6 (算術的階層)**

- 自然数の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ が $\Delta_0$ **集合**であるとは、$X$ が何らかの $\Delta_0$ 論理式により定義されることである。

- 同様に、$\Sigma_i$ **集合**とは、$\Sigma_i$ 論理式により定義される集合のことであり、$\Pi_i$ **集合**とは、$\Pi_i$ 論理式により定義される集合のことである。

- $\Sigma_i$ 集合であり、$\Pi_i$ 集合でもあるような集合のことを $\Delta_i$ **集合**と呼ぶ。

$\Delta_i$ 集合全ての集まりのことを単に $\Delta_i$ と書く。$\Sigma_i$、$\Pi_i$ についても同様である。

例えば、偶数の集合は $\Sigma_1$ 論理式 $\exists y(x = 2 \cdot y)$ によっても定義できるが、実際には $Even(x) \equiv \exists y \leq x(x = 2 \cdot y)$ という $\Delta_0$ 論理式による定義も存在する。ゆえに偶数の集合は $\Delta_0$ 集合であると言える。また、素数の集合も

$$\begin{aligned} Div(y, x) &\equiv \exists z \leq x(y \cdot z = x) \\ Prime(x) &\equiv \overline{2} \leq x \wedge (\forall y \leq x.Div(y, x) \rightarrow (y = \overline{1} \vee y = x)) \end{aligned}$$

と定義できるので、$\Delta_0$ 集合である。

**補題 7**

*1.* $\Delta_i$, $\Sigma_i$, $\Pi_i$ は以下の包含関係にある。(ここで $\longrightarrow$ は包含関係 $\subseteq$ を表す。例えば、$\Delta_i \longrightarrow \Sigma_i$ は、集合 $X$ が $\Delta_i$ 集合ならば、それは $\Sigma_i$ 集合でもあるということを表す。)

$$\begin{tikzcd} & \Delta_{i+1} & \\ \Sigma_i \arrow[ur] & & \Pi_i \arrow[ul] \\ & \Delta_i \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

*2.* 集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ が何らかの算術の論理式 $A(x)$ により定義されるならば、$X$ は算術的階層に属する。即ち、ある $n$ について $X \in \Sigma_n$ である。

*3.* $X \in \Sigma_i \Longleftrightarrow X^C \in \Pi_i$ (ここで $X^C$ は $\mathbb{N}$ に関する $X$ の補集合を表す。)

**証明**

1. 定義より、$\Delta_i \subseteq \Sigma_i$, $\Delta_i \subseteq \Pi_i$。また、$\Sigma_i \subseteq \Pi_{i+1}$ ($\Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1}$) である。さらに $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ ($\Pi_i \subseteq \Pi_{i+1}$) であることは、$i$ に関する帰納法により証明することができる。ゆえに

$$\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1} \cap \Pi_{i+1} = \Delta_{i+1} \;\; (\Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1} \cap \Pi_{i+1} = \Delta_{i+1}).$$

2. Prenex 標準形定理（のヴァリエーション）により、$A(x)$ は $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nA'$（ここで各 $Q_i$ は $\forall$ または $\exists$、$A'$ は $\Delta_0$ 論理式）という形の論理式と同値である。$Q_1,\ldots,Q_n$ における $\forall$ と $\exists$ の交替の回数が $k$ 回であるとすると、それは $\Sigma_{k+1}$ 論理式である。ゆえに $A(x)$ が表す集合は $\Sigma_{k+1}$ 集合である。

3. ドモルガンの法則より。例えば $X$ が $\Sigma_2$ 論理式 $\exists y\forall z.A$ により定義されるならば、$X^C$ は $\neg\exists y\forall z.A$ により定義されるが、後者は $\Pi_2$ 論理式 $\forall y\exists z.\neg A$ と論理的に同値である。

**定義 8 ($\Delta_1$ 関数)** 関数 $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ が $\Delta_1$ **関数**であるのは、ある $\Sigma_1$ 論理式 $F_f(x,y)$ が存在し、次の 2 つが成り立つときである：

- 任意の $n\in\mathbb{N}$ について、$f(n)=m\Longleftrightarrow F_f(\overline{n},\overline{m})$ が真である。
- $\forall x\exists!y.F_f(x,y)$ が真である。

**補題 9** $X$ を $\Sigma_i$ 集合、$f$ を $\Delta_1$ 関数とすると、

$$n\in X(f)\Longleftrightarrow f(n)\in X$$

により定義される集合 $X(f)$ は $\Sigma_i$ 集合である。

同様に、$X$ を $\Delta_i$ 集合（$i\geq 1$)、$f$ を $\Delta_1$ 関数とすると、$X(f)$ は $\Delta_i$ 集合である。

**証明** 例として $i=1$ の場合を考える。集合 $X$ が $\Sigma_1$ 論理式 $A(x)$ により定義され、関数 $f$ が $\Sigma_1$ 論理式 $F(x,y)$ により定義されるとき、集合 $X(f)$ は論理式 $\exists y(F(x,y)\wedge A(y))$ により定義される。なぜならば、任意の $n\in\mathbb{N}$ についてある $m\in\mathbb{N}$ が一意に存在し、以下の同値性が成り立つからである：

$$\begin{aligned} n\in X(f) &\Longleftrightarrow f(n)=m \text{ かつ } m\in X \\ &\Longleftrightarrow F(\overline{n},\overline{m}) \text{ が真、かつ } X(\overline{m}) \text{ が真} \\ &\Longleftrightarrow \exists y(F(\overline{n},y)\wedge A(y)) \text{ が真。} \end{aligned}$$

この論理式が $\Sigma_1$ 論理式と同値であることは容易に確かめることができる（$\exists zB(z)\wedge\exists zC(z)$ と $\exists z\exists w(B(z)\wedge C(w))$ の同値性を用いよ)。 ■

例えば、$Even=\{0,2,4,\ldots\}$、$Odd=\{1,3,5,\ldots\}$、$f(x)=x+1$ とすると、

$$n\in Even(f)\Longleftrightarrow f(n)\in Even\Longleftrightarrow n+1\in Even\Longleftrightarrow n\in Odd$$

であるから、$Even(f)=Odd$ となる。

次にいくつかの計算論的な概念を定義する。

**定義 10 (決定可能集合、計算可能関数、半決定可能可能集合)**

- $X\subseteq\mathbb{N}$ が**決定可能** *(decidable)* である $\Longleftrightarrow$ 自然数 $n\in\mathbb{N}$ が与えられたとき、$n\in X$ かどうかを有限時間で判定するアルゴリズムが存在する。

- 関数 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ が**計算可能** *(computable)* である $\iff$ 自然数 $n \in \mathbb{N}$ が与えられたとき、$f(n) = m$ となる $m$ を有限時間で出力するアルゴリズムが存在する。

- $X \subseteq \mathbb{N}$ が**半決定可能** *(semi-decidable)* である $\iff$ 自然数 $n \in \mathbb{N}$ が与えられたとき、$n \in X$ ならば有限時間で停止し、そうでないならば永遠に停止しないようなアルゴリズムが存在する。

決定可能集合、計算可能関数、半決定可能集合は、それぞれ帰納的関数論における再帰的集合 (recursive sets)、再帰的関数 (recursive functions)、再帰的枚挙可能集合 (recursively enumerable sets) と同一視される（**Church のテーゼ**）。これらの計算論的概念と算術的階層の間には以下の対応がある。

**定理 11** *1.* $X$ が決定可能である $\iff$ $X$ が $\Delta_1$ 集合である。

*2.* $f$ が計算可能である $\iff$ $f$ が $\Delta_1$ 関数である。

*3.* $X$ が半決定可能である $\iff$ $X$ が $\Sigma_1$ 集合である。

**証明** ここでは 3 の $\Longleftarrow$ のみを示す。(残りについては、[10, 8] 等の標準的な教科書を参照してほしい。）まず、量化子を含まない論理式 $A(x_1, \ldots, x_k)$ については、どんな $n_1, \ldots, n_k$ が与えられても、$A(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$ の真偽が有限時間で判定可能であることは明らかである。たとえば、$\overline{n_1} + \overline{n_2} = \overline{n_3}$ の真偽を判定するには、$n_1 + n_2$ を計算して、その結果を $n_3$ と比べればよい。

同様にして、限定量化子を含む論理式についても、真偽が有限時間で判定可能である。例えば、$\forall x \leq \overline{n} A(x)$ は

$$A(\overline{0}) \wedge A(\overline{1}) \wedge \cdots \wedge A(\overline{n})$$

と同値であり、後者の真偽は有限時間で判定可能だからである。

最後に、$\Sigma_1$ 論理式 $\exists x.A(x)$（ここで $A(x)$ は $\Delta_0$ 論理式）については、それが真であることを示すための半決定的アルゴリズムは次のようにして与えることができる：まず $A(\overline{0})$ の真偽を判定し、もし真ならば停止する。さもなければ $A(\overline{1})$ の真偽を判定する。もし真ならば停止する。さもなければ $A(\overline{2})$ の真偽を判定する。このようにして、

$$A(\overline{0}), A(\overline{1}), A(\overline{2}), \ldots$$

と真偽判定のプロセスを続けていく。各 $A(\overline{n})$ については、その真偽は有限時間で判定可能である。さて、$\exists x.A(x)$ は、ある $k \in \mathbb{N}$ について $A(\overline{k})$ が真のとき、またそのときに限り真である。ゆえに、上記のアルゴリズムは $\exists x.A(x)$ が真のとき、またそのときに限り停止する。 ■

## 4 算術的階層の厳密性

本章では、前章で導入された算術的階層が厳密であることを示す。即ち、クラス間の包含関係 $\subseteq$ が、実際には $\subsetneq$ であることを示す。証明はカントールの**対角線論法**による。

$\Sigma_1$ 集合とは $\Sigma_1$ 論理式により定義される集合であった。$\Sigma_1$ 論理式は、（ゲーデル数が小さいほうから順番に数えることで）0 番目の $\Sigma_1$ 論理式、1 番目の $\Sigma_1$ 論理式というように全て枚挙することができる。ゆえに（重複を無視すれば）$\Sigma_1$ 集合も

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

というように枚挙することができるはずである。いま、集合 $K$ を $K = \{n | n \in X_n\}$ により定義する。すると次の性質が成り立つ。

**補題 12 ($\Sigma_1$ 対角化)**

*(1)* $K \in \Sigma_1$

*(2)* $K \notin \Pi_1$

**証明**

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ が与えられたとき、$n \in K$ が真かどうかを調べるためには $n \in X_n$ が真かどうかを調べればよい。$X_n$ は $\Sigma_1$ 集合だから、このことを調べるための（半決定的）アルゴリズムが存在する。ゆえに $K$ 自身も半決定可能であり、よって $K$ は $\Sigma_1$ 集合である。

(2) 仮に $K$ が $\Pi_1$ 集合であるとすると、補題 7 により $K^C$ は $\Sigma_1$ 集合となる。ゆえにある $k$ について $X_k = K^C$ となるはずであるが、

$$k \notin K^C \Longleftrightarrow k \in K \Longleftrightarrow k \in X_k \Longleftrightarrow k \in K^C$$

となり矛盾する。

■

ここで用いられた論法が対角線論法と呼ばれることの理由は、以下のように説明することができる。

自然数の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned} x_i &= 1 \quad i \in X \text{ のとき} \\ &= 0 \quad i \notin X \text{ のとき} \end{aligned}$$

とおく。すると $X$ に対して、0 と 1 から成る無限列

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

を対応させることができる。例えば、偶数の集合 $Even = \{0, 2, 4, \ldots\}$ には

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

が対応し、素数の集合 $Prime = \{2, 3, 5, 7, 11 \ldots\}$ には

$$0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

が対応する。逆にこのような無限列が与えられたら、そこから自然数の集合 $X$ を一意に復元することができる。

さて、本章の最初で定義した $\Sigma_1$ 集合の列 $X_0, X_1, X_2, \ldots$ の各要素 $X_i$ に対して上のように 0,1 の無限列を対応させせると、次のような表を得ることができる。

| | 0 | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_0$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $\cdots$ |
| $X_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | $\cdots$ |
| $X_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\cdots$ |
| $X_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

この表の対角線 $0, 1, 1, 0, \ldots$ をとると、それ自体 0,1 の無限列になっている。集合 $K$ はこの無限列に相当する。そしてその補集合 $K^C$ は、対角線の 0,1 を逆にして得られる無限列 $1, 0, 0, 1, \ldots$ に相当する。補題 12 が示しているのは、$K$ はこの表の中に何らかの $X_k$ として現れるが、$K^C$ はこの表の中には現れないということである。（なぜならばいかなる $X_k$ についても、$K^C$ と $X_k$ は、その $k$ 番目の要素について異なっているからである。）

補題 12 およびその一般形から、次の定理 [7] が帰結する。

**定理 13 (算術的階層の厳密性)**

*1.* $\Sigma_1 \not\subseteq \Pi_1$、$\Pi_1 \not\subseteq \Sigma_1$

*2.* $\Delta_1 \subsetneq \Sigma_1$、$\Delta_1 \subsetneq \Pi_1$

*3.* $\Sigma_1 \subsetneq \Delta_2$、$\Pi_1 \subsetneq \Delta_2$

*4.* 一般に算術的階層は厳密である。すなわち、各 $i$ について包含関係

$$\begin{tikzcd} & \Delta_{i+1} & \\ \Sigma_i \arrow[ur] & & \Pi_i \arrow[ul] \\ & \Delta_i \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

は厳密である。

**証明**　(1) については、補題 12 より、$K \in \Sigma_1$ かつ $K \notin \Pi_1$ であること、また逆に $K^C \in \Pi_1$ かつ $K^C \notin \Sigma_1$ であることから。

(2),(3) は (1) から容易に示すことができる。

(4) は以上の事柄の一般化である。 ■

## 5　真理述語の定義不能性

本章では、算術的階層の厳密性の第一の帰結として、真理述語の定義不能性（Tarski）を証明する。

第 2 章で導入した規約により、論理式とはある性質を満たす自然数のことである。ゆえに、一変項論理式 $A(x)$ が与えられたとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して論理式 $A(\overline{n})$ を割り当てる操作は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数と考えることができる。この関数を $A(\overline{\ })$ と書くことにする。すると、$A(\overline{\ }) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ は明らかに計算可能である（$\Delta_1$ 関数である）。

**定理 14 (真理述語の定義不能性)** 算術の論理式に関して「真である」という性質は、算術の論理式によっては定義することができない。すなわち、次の性質を満たす集合 $True \subseteq \mathbb{N}$ は算術の論理式によっては定義することができない：任意の閉論理式 $A$ について

$$A \text{ が真} \iff A \in True$$

**証明**　仮に集合 $True$ が算術の論理式によって定義可能であるとすると、補題 7 により、$True$ はある $k$ について $\Sigma_k$ 集合となるはずである。ゆえに補題 9 により任意の一変項論理式 $A(x)$ について $True(A(\overline{\ }))$ も $\Sigma_k$ 集合となるはずである。一方、任意の $n$ について

$$A(\overline{n}) \text{ が真} \iff A(\overline{n}) \in True \iff n \in True(A(\overline{\ }))$$

が成り立つ。よって算術的階層に属する全ての集合が $\Sigma_k$ 集合となり、算術的階層は崩壊してしまう。しかしこのことは算術的階層の厳密性に反する。 ■

よって、算術の論理式一般に関する真理概念は算術の言語によっては定義することができない。一方、各 $\Sigma_n$ については、このことは可能であることが知られている（cf. [6]）。

**定理 15 (各層ごとの真理述語の定義可能性)** 任意の $n \geq 0$ について、次の性質を満たす集合 $True_n \subseteq \mathbb{N}$ は $\Sigma_n$ 論理式によって定義可能である：任意の $\Sigma_n$ 閉論理式 $A$ について

$$A \text{ が真} \iff A \in True_n.$$

## 6　形式的理論について

以下においては、形式的数学理論に関して一連の性質を証明していくが、本章ではその準備としていくつかの基本的な概念を定義し、形式的理論の例として算術の理論 $Q$ と $PA$ を導入する。

**定義 16 (理論)** **理論** *(theory)* とは、論理式の集合である。理論 $T$ が理論 $S$ の**拡大** *(extension)* であるとは、$S \subseteq T$ が成り立つことである。理論 $T$ が**再帰的** *(recursive)* であるのは、$T \subseteq \mathbb{N}$ が決定可能集合（$\Delta_1$ 集合）のときである。

**定義 17 (証明可能性)** 論理式 $A$ が理論 $T$ において**証明可能**であるとは、一階述語論理（等号に関する公理を含む）に $T$ を公理として付け加えた体系において、$A$ の証明が存在することである。$A$ が理論 $T$ において証明可能であることを、$\vdash_T A$ により表す。理論 $T$ が**無矛盾** *(consistent)* であるのは、$\vdash_T 0 = 1$ が成り立たないときである。

$\mathbb{N} \models$ の場合と同じく、$\vdash_T$ も自然数に関する性質と見なすことができる。また、性質とその外延を同一視するならば、$\vdash_T$ が表す集合（証明可能な論理式の集合）は自然数の集合であると考えることができる。

例として、算術の理論 $Q$ と $PA$ を導入する。

**定義 18 (Q, PA) 理論** $Q$ は、以下の論理式の全称量化から成る。

1. $S(x) = S(y) \to x = y$
2. $S(x) \neq 0$
3. $x \neq 0 \to \exists y(x = S(y))$
4. $x + 0 = x$
5. $x + S(y) = S(x + y)$
6. $x \cdot 0 = 0$
7. $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$
8. $x \leq y \leftrightarrow \exists z.x + z = y$

**理論** $PA$ とは、理論 $Q$ に次の形の論理式を全て加えたものである。

$$A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(S(x))) \to \forall y A(y)$$

$Q$ も $PA$ も明らかに再帰的である。$PA$ が無限集合であるのに対して、$Q$ は有限集合であることに注意。

$Q$ の拡大と $PA$ の縮小に関しては、以下の（部分的な）完全性定理および健全性定理が成り立つ。

**定理 19 ($Q$ の $\Sigma_1$ 完全性)** 任意の閉 $\Sigma_1$ 論理式 $A$ について

$$A \text{ が真} \Longrightarrow \vdash_Q A.$$

**証明** $A$ の構造に関する帰納法による。 ■

よって任意の $Q$ の拡大 $T$ は $\Sigma_1$ 完全である。

**定理 20 ($PA$ の健全性)** 任意の閉論理式 $A$ について

$$\vdash_{PA} A \Longrightarrow A \text{ が真}.$$

**証明** 証明図の大きさに関する帰納法による。次の二つを示せばよい。

1. 公理は（標準モデルにおいて）真である。

2. 真な論理式から論理的推論により導かれる論理式は真である。（ここで変項を含む論理式が真であるとは、変項にどんな数項を代入しても結果として得られる閉論理式が真であることと定義する。）

■

よって $T \subseteq PA$ となる任意の理論（特に $Q$）は健全である。健全性よりも弱い性質として、次の $\Sigma_1$ 健全性を考えることができる。

**定義 21** **($\Sigma_1$ 健全性)** 理論 $T$ が $\Sigma_1$ **健全**であるとは、任意の閉 $\Sigma_1$ 論理式 $A$ について

$$\vdash_T A \Longrightarrow A \text{ が真}$$

が成り立つことである。

$\Sigma_1$ 健全性は無矛盾性を含意する。もしも $T$ が $\Sigma_1$ 健全であり、かつ $\vdash_T 0=1$ であるとすると、$0=1$ は（$\Sigma_1$ 論理式なので）真となるはずであるが、$0=1$ は明らかに偽だからである[2]。

## 7 $\Sigma_1$ 表現可能性と理論の決定不能性

一変項論理式 $A(x)$ は、一方で真であるという概念を通して、ある自然数の集合 $\{n \in \mathbb{N} | A(\overline{n})$ は真である $\}$ を定義する。同じ論理式は、他方で証明可能であるという概念を通して、別の仕方で自然数の集合 $\{n \in \mathbb{N} | A(\overline{n})$ は $T$ において証明可能である $\}$ を定義する。では、両者は一体どのような関係にあるのだろうか？前章においては、$Q$ の拡大の $\Sigma_1$ 完全性を示したが、ここではその直接の帰結として、もしも理論 $T$ が十分に強力（$Q \subseteq T$）かつ自然（$\Sigma_1$ 健全）ならば、少なくとも $\Sigma_1$ 一変項論理式に関しては上の二つの定義は一致することを示す[3]。別の言い方をすれば、証明可能性述語 $\vdash_T$ は少なくとも $\Sigma_1$ 論理式に関しては真理述語と見なすことができる、ということである[4]。

結果として、$T$ における証明可能性は決定不能であるということが帰結し、さらにそこから、一階述語論理は（等号を含んでも含まなくても）決定不能であるということが帰結する。後に第 10 章で、ここでの $\Sigma_1$ 健全性の仮定を無矛盾性に弱めても類似の性質が成り立つことを見る。

---

[2] $\Sigma_1$ 健全性は [5] における $\omega$ 無矛盾性の仮定を弱めたものである。（理論 $T$ が $\omega$ **無矛盾**であるのは、$\vdash_T \exists x.A(x)$ かつ全ての $n \in \mathbb{N}$ について $\vdash_T \neg A(\overline{n})$ となるような論理式 $A(x)$ は存在しないときである。）まとめると、以下の含意関係が成り立つ：

$$\text{健全性} \Longrightarrow \omega \text{ 無矛盾性} \Longrightarrow \Sigma_1 \text{ 健全性} \Longrightarrow \text{無矛盾性}$$

[3] 本稿で表現可能性と呼ぶところの性質は、しばしば**弱い意味での表現可能性**（weak representability）と呼ばれているので注意が必要である。

[4] 純粋に外延的に考えれば、$\vdash_T$ は定理 15 で示した階層ごとの真理概念の特殊例であると見なすこともできよう。ただし、真理概念が通常論理式の構成に関する帰納法により定義されるのに対して、証明可能性概念は証明の構成に関する帰納法により定義されるという重要な相違がある。

**定理 22 ($\Sigma_1$ 表現可能性)** 理論 $T$ が $Q$ の拡大であり、かつ $\Sigma_1$ 健全であるとすると、任意の $\Sigma_1$ 一変項論理式 $A(x)$ について

$$A(\overline{n}) \text{ が真} \Longleftrightarrow \vdash_T A(\overline{n})$$

**証明** $T$ の $\Sigma_1$ 健全性および $\Sigma_1$ 完全性より。 ■

**定理 23 (決定不能性)** 理論 $T$ が $Q$ の拡大であり、かつ $\Sigma_1$ 健全であるとすると、証明可能性 $\vdash_T$ は決定可能ではない。すなわち、$T$ において証明可能な論理式の集合は $\Delta_1$ 集合ではない。

**証明** 仮に $\vdash_T$ が $\Delta_1$ であるとする。すなわち、ある $\Delta_1$ 集合 $P_T$ が存在して、任意の論理式 $A$ について

$$\vdash_T A \Longleftrightarrow A \in P_T$$

が成り立つとする。すると、補題 9 により任意の一変項論理式 $A(x)$ について、$n \in P_T(A(\overline{\phantom{n}}))$ $\Longleftrightarrow A(\overline{n}) \in P_T$ により定義される集合 $P_T(A(\overline{\phantom{n}}))$ も $\Delta_1$ 集合となるはずである。以下、記法を単純にするために、集合 $P_T(A(\overline{\phantom{n}}))$ のことを $\vdash_T A(\overline{\phantom{n}})$ と表し、$n$ がこの集合に属することを単に $\vdash_T A(\overline{n})$ と表すことにする。

一方、定理 22 により、任意の一項 $\Sigma_1$ 論理式 $A(x)$ について

$$A(\overline{n}) \text{ が真} \Longleftrightarrow \vdash_T A(\overline{n})$$

が成り立つ。よって全ての $\Sigma_1$ 集合は $\Delta_1$ 集合であることになってしまうが、このことは算術的階層の厳密性に反する。 ■

特に $Q$ も $PA$ も健全であるから、$\vdash_Q$ も $\vdash_{PA}$ も決定不能である。さらに $Q$ が有限集合であることから、次のことが帰結する（Church [1]）。

**系 24 (一階述語論理の決定不能性)** 一階述語論理における証明可能性 $\vdash$ は決定可能ではない。

**証明** $Q$ の公理を全て連言により結んで得られる論理式を $\bigwedge Q$ と書く。すると、

$$\vdash_Q A \Longleftrightarrow \vdash \bigwedge Q \to A$$

が成り立つ。ゆえに、もしも一階述語論理が決定可能ならば、$Q$ における証明可能性も決定可能となってしまうが、これは上記の定理に反する。 ■

## 8 証明可能性の算術的階層における位置づけと算術の第一不完全性

前章では、適切な仮定の下では証明可能性述語 $\vdash_T$ は $\Delta_1$ ではないということを証明した。本章では、その一方で再帰的理論における証明可能性述語は $\Sigma_1$ であるという事実を

示す[5]。Gödel[5] によるこの洞察は、形式的理論一般の性質として決定的に重要である。特に、第一不完全性定理 [5] はこのことと算術の $\Sigma_1$ 完全性から直接に帰結する。

メタ数学的概念である証明可能性述語が算術的階層の、しかも $\Sigma_1$ というごく低い層に位置づけられるという事実は、真理述語は算術的階層のうちに位置づけることはできない（定理 14）という事実と対照的である。

**定理 25 (証明可能性 $\in \Sigma_1$)** 理論 $T$ が再帰的ならば、$\vdash_T$ は $\Sigma_1$ である。すなわち、$T$ において証明可能な論理式の集合は $\Sigma_1$ 集合である。

**証明** 任意の論理式 $A$、任意の証明図 $\pi$ について、「$\pi$ は $T$ における $A$ の証明図である」という関係は有限時間で判定可能であり、ゆえに（$\pi$ を自然数と見なすならば）、ある $\Sigma_1$ 論理式 $Proof_T(y,x)$ により定義することができる。このとき、「$A$ は $T$ において証明可能である」という性質は、$\exists x.Proof_T(y,x)$ により定義することができる。 ■

**定理 26 ($\Pi_1$ 不完全性)** 理論 $T$ が $Q$ の無矛盾な再帰的拡大ならば、真でありかつ $T$ で証明不可能な閉 $\Pi_1$ 論理式が存在する。

**証明** $T$ が無矛盾ならば、$T$ は $\Pi_1$ 健全である。なぜならば、ある $\Pi_1$ 論理式 $A$ が証明可能でありなおかつ偽であるとすると、$\neg A$ は真な $\Sigma_1$ 論理式（と論理的に同値）であり、ゆえに $\Sigma_1$ 完全性により証明可能なはずである。よって $T$ は矛盾することになるからである。

いま、さらに $T$ が $\Pi_1$ 完全であるとすると、任意の $\Pi_1$ 論理式 $A(x)$、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$A(\overline{n}) \text{ が真} \iff \vdash_T A(\overline{n})$$

となる。ここで $\vdash_T A(\overline{\phantom{n}})$ は補題 9 により $\Sigma_1$ 集合であるから、$\Pi_1 \subseteq \Sigma_1$ が帰結するが、このことは算術的階層の厳密性に反する。 ■

次の定理が一般にゲーデルの第一不完全性定理と呼ばれるものである。この定理は $\Sigma_1$ 健全性（$\omega$ 無矛盾性を弱めたもの）という仮定に基づいているが、後に第 10 章で、この仮定を単なる無矛盾性に弱めても同じ性質が成り立つことを示す。

**系 27 (第一不完全性)** 理論 $T$ が $Q$ の再帰的拡大であり、かつ $\Sigma_1$ 健全ならば、$A$ も $\neg A$ も証明不可能であるような閉 $\Pi_1$ 論理式 $A$ が存在する。

**証明** $\Pi_1$ 不完全性定理により、真でありかつ証明不可能な $\Pi_1$ 論理式 $A$ が存在する。$\neg A$ は偽な $\Sigma_1$ 論理式（と論理的に同値）であるから、$\Sigma_1$ 健全性により $\neg A$ は $T$ では証明不可能である。 ■

[5] Craig [2] は全ての再帰的枚挙可能理論（$\Sigma_1$ 理論）についてそれと同等な再帰的理論が存在するという定理を証明した。この結果により、以下の諸定理は「再帰的」を「再帰的枚挙可能」と読み替えても、全て成立する。

## 9　形式化された対角線論法

本稿のこれまでの流れを振り返ってみると、まず我々は対角線論法を用いて算術的階層の厳密性を示し、そのことに基づいて、真理述語の定義不能性、一階述語論理の決定不能性、算術の第一不完全性などを証明してきた。特に算術的階層の厳密性が確立されたあとでは、対角線論法を用いる必要は一切なかった。

しかし $\Sigma_1$ 表現可能性定理（定理 22）や第一不完全性定理における $\Sigma_1$ 無矛盾性の仮定を単なる無矛盾性に弱めようとすると、どうしても**形式的体系の内部で**対角線論法を用いることが必要になってくる。その理由は、単なる無矛盾性の仮定だけでは、$\Sigma_1$ 論理式の成立・不成立が標準モデルにおける真偽と必ずしも一致しなくなるため、標準モデルの内部にあるところの算術的階層の厳密性を形式的体系に反映させることができなくなるからである。また、第二不完全性定理を証明するためには、$\Pi_1$ 不完全性定理の議論を形式的体系の内部で行う必要がある。そのためにも、対角線論法を形式的体系の内部で行うことが必要になってくる。ここでは形式的体系の内部における対角線論法の一般的な帰結として、対角化定理（任意の論理式に対してその**不動点**が存在する）を紹介する。

インフォーマルには、対角化定理（不動点定理）は以下のように示すことができる。

まず、ゲーデル数 $n$ の一変項論理式を $A_n(x)$ により表すことにする（$n$ が一変項論理式に対応しないときは未定義とする）。次に、関数 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する：

$$f(n) = A_n(\overline{n}) \text{（のゲーデル数）}$$

$f$ は明らかに計算可能であるから $\Delta_1$ 関数である。

さて、$X$ を算術の論理式により定義可能な集合とすると、

$$n \in X(f) \iff f(n) \in X$$

を満たす集合 $X(f)$ もやはり算術の論理式により定義可能である（補題 7、補題 9 より）。$X(f)$ を定義する論理式（のゲーデル数）を $k$ とする。すなわち、$A_k(x)$ が $X(f)$ を定義するものとする。すると、

$$A_k(\overline{k}) \text{ が真} \iff k \in X(f) \iff f(k) \in X \iff A_k(\overline{k}) \in X.$$

ゆえに算術の論理式により定義可能などんな集合 $X$ についても、ある閉論理式 $A$ が存在し、

$$A \text{ が真} \iff A \in X$$

が成立する。これが対角化定理の内容である[6]。

以上の論証を体系 $Q$ において形式化すると、次のことが成立する。（2 は 1 の一般化である。）

**定理 28 (対角化定理)**

*1.* 任意の一変項論理式 $B(x)$ に対して、ある閉論理式 $A$ が存在し、

$$\vdash_Q A \longleftrightarrow B(\overline{A}).$$

[6] $A$ は $X$ の**不動点**（fixed point）と呼ばれる。

*2.* 任意の二項論理式 $B(x,y)$ に対して、ある一変項論理式 $A(y)$ が存在し、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\vdash_Q A(\overline{n}) \longleftrightarrow B(\overline{A(\overline{n})}, \overline{n}).$$

対角化定理を用いれば、第一不完全性定理に対してより直接的な証明を与えることができる。

理論 $T$ が $Q$ の再帰的拡大であり、かつ無矛盾であるとする。すると、定理 25 により $\vdash_T$ は $\Sigma_1$ である。即ち、

$$Prov_T(\overline{A}) \text{ が真} \Longleftrightarrow \vdash_T A$$

を満たす $\Sigma_1$ 論理式 $Prov_T(x)$ が存在する。いま、論理式 $\neg Prov_T(x)$ に対して対角化定理を適用すると、

$$\vdash_T G \longleftrightarrow \neg Prov_T(\overline{G})$$

を満たす論理式 $G$ を得ることができる。論理式 $G$ は一般に**ゲーデル文**と呼ばれる。その直感的意味は「私は証明できない」といったものである。

**定理 29 (第一不完全性)**

*1.* 理論 $T$ が $Q$ の再帰的拡大であり、無矛盾ならば、$\nvdash_T G$。

*2.* さらに $T$ が $\Sigma_1$ 健全ならば、$\nvdash_T \neg G$。

**証明**

1. もしも $\vdash_T G$ であるとすると、$\vdash_T \neg Prov_T(\overline{G})$ となり、$T$ の無矛盾性により $\nvdash_T Prov_T(\overline{G})$ である。ゆえに $\Sigma_1$ 完全性定理により $Prov_T(\overline{G})$ は偽である。よって $\nvdash_T G$ となり、矛盾する。

2. もしも $\vdash_T \neg G$ であるとすると、$\vdash_T Prov_T(\overline{G})$ となり、$T$ の $\Sigma_1$ 健全性により $Prov_T(\overline{G})$ は真である。ゆえに $\vdash_T G$ となる。これは $T$ の無矛盾性に反する。

■

## 10 一般 $\Sigma_1$ 表現可能性

第 7 章では、$\Sigma_1$ 健全な $Q$ の再帰的拡大においては、全ての $\Sigma_1$ 集合が表現可能であること（定理 22）を証明した。ここでは $\Sigma_1$ 健全性の仮定を無矛盾性の仮定で置き換えても同様のことが成立することを証明する（Ehrenfeucht-Feferman [3]）。また、その帰結として、$Q$ の本質的決定不能性（定理 23 の一般化）、ゲーデル=ロッサーの不完全性定理（系 27 の一般化）を示す。

**定理 30 (一般 $\Sigma_1$ 表現可能性)** 理論 $T$ が $Q$ の再帰的拡大であり、かつ無矛盾であるとすると、任意の $\Sigma_1$ 集合 $X$ に対してある一変項論理式 $B(x)$ が存在し、

$$n \in X \Longleftrightarrow \vdash_T B(\overline{n})$$

定理 22 の場合とは異なり、ここで論理式 $B(x)$ は $X$ を定義する論理式であるとは限らないことに注意。

**証明** $X$ は $\Sigma_1$ 論理式 $\exists y.A(x,y)$（ここで $A$ は $\Delta_0$）により定義され、$\vdash_T$ は $\Sigma_1$ 論理式 $\exists y.Proof_T(x,y)$ により定義されるものとする。このとき、二項論理式

$$\forall y(Proof_T(x,y) \to \exists z \leq y.A(w,z))$$

を考えると、対角化定理により、ある一変項論理式 $B$ が存在して、任意の $n$ について

$$\vdash_T B(\overline{n}) \longleftrightarrow \forall y(Proof_T(\overline{B(\overline{n})},y) \to \exists z \leq y.A(\overline{n},z))$$

を満たす。これが求める論理式であることを示すには、次の 2 点を証明すればよい。

1. $n \in X \Longrightarrow \vdash_T B(\overline{n})$。
2. $\vdash_T B(\overline{n}) \Longrightarrow n \in X$。

■

次の系は定理 23 と同様にして証明できる。

**定理 31 ($Q$ の本質的決定不能性)** 理論 $T$ が $Q$ の無矛盾な再帰的拡大であるとすると、$T$ における証明可能性 $\vdash_T$ は決定可能ではない。

最後に第一不完全性定理の改良版であるゲーデル=ロッサーの定理を証明する（Rosser [9]）。

**定理 32 (ゲーデル=ロッサー不完全性)** 理論 $T$ が $Q$ の無矛盾な再帰的拡大であるとすると、$A$ も $\neg A$ も証明不可能であるような閉 $\Pi_1$ 論理式 $A$ が存在する。

**証明** 仮に $T$ が完全であるとする。すなわち、どんな論理式 $A$ についても、$\vdash_T A$ か $\vdash_T \neg A$ のどちらかが成り立つとする。いま、$\Pi_1$ 集合 $X$ が与えられたとき、その補集合 $X^C$ は $\Sigma_1$ 集合であり、ゆえに定理 30 によりある一変項論理式 $B(x)$ が存在し、

$$n \in X^C \Longleftrightarrow \vdash_T B(\overline{n}).$$

一方、$T$ の無矛盾性および完全性の仮定により

$$\nvdash_T B(\overline{n}) \iff \vdash_T \neg B(\overline{n}).$$

以上のことから、

$$n \in X \Longleftrightarrow n \notin X^C \Longleftrightarrow \nvdash_T B(\overline{n}) \iff \vdash_T \neg B(\overline{n})$$

よって $\Pi_1 \subseteq \Sigma_1$ が帰結するが、これは算術的階層の厳密性に反する。 ■

第一不完全性定理同様、ゲーデル=ロッサーの不完全性定理にも直接的な証明方法がある。$Disproof_T(x,y)$ を「$y$ は $T$ における $\neg(x)$ の証明である」を意味する論理式とし、一変項論理式

$$\forall y(Proof_T(x,y) \to \exists z \leq y.Disproof_T(x,z))$$

に対角化定理を適用して得られる論理式を $R$ とする。すると $\nvdash_T R$ かつ $\nvdash \neg R$ であることが直接的に証明できる（$R$ は一般に**ロッサー文**と呼ばれる）。定理 30 における論理式 $B(x)$ の構成法はこのロッサー文の構成法を一般化したものになっている。

## 11　第二不完全性

理論 $T$ を $Q$ の再帰的拡大とする。このとき、$\Pi_1$ 不完全性定理は次の性質をもつ論理式 $A$ が存在することを主張する：

1. $T$ が無矛盾ならば A が成り立つ。
2. $T$ が無矛盾ならば $\nvdash_T A$。

$\Pi_1$ 不完全性定理に至るまでの証明を注意深く検討すれば、この $A$ は具体的に構成することが可能である（あるいは定理 29 における $G$ をとればよい）。そして、そのような具体的な $A$ に話を制限すれば、算術を超え出るような超越的な論法は一切用いずに $\Pi_1$ 不完全性定理は証明可能である[7]。ゆえに理論 $T$ として十分強力な算術の体系（例えば $PA$）をとれば、$\Pi_1$ 不完全性の議論は全て $T$ **の内部で**遂行することができる。特に上記の 1 を形式化することで、次のことが証明できる：

1' $\vdash_T Con_T \to A$

ここで $Con_T$ は $T$ の無矛盾性を表す論理式 $\neg Prov_T(\overline{0=1})$ である。上記 1',2 の論理的帰結として、もしも $\vdash_T Con_T$ ならば $T$ は矛盾することになる。言い換えれば、

- $T$ が無矛盾ならば、$\nvdash_T Con_T$。

すなわち、十分強力かつ無矛盾な理論は、自分自身の無矛盾性を証明することができない。これがゲーデルの第二不完全性定理の主張の骨子である。以下、第二不完全性定理の証明のあらましを見ていくことにする。

次の定理は定理 25 の改良版である。

**定理 33** 理論 $T$ が $PA$ の再帰的な拡張ならば、$\vdash_T$ を表し、かつ次の性質を満たす $\Sigma_1$ 論理式 $Prov_T(x)$ が存在する：

*1.* **形式化された Modus Ponens：** 任意の論理式 $A$ について、

$$\vdash_T Prov_T(\overline{A}) \wedge Prov_T(\overline{A \to B}) \to Prov_T(\overline{B}).$$

[7] これまでに用いた論法の全てが算術において形式化可能なわけではない。例えば、$PA$ の健全性（定理 20）を示すためには、**任意の**論理式に関する真理述語が必要であるが、そのような述語が算術的には定義不能であることは、定理 14 で見た通りである。

*2.* **形式化された $\Sigma_1$ 完全性：** 任意の $\Sigma_1$ 論理式 $A$ について、

$$\vdash_T A \to Prov_T(\overline{A}).$$

実際、$Prov_T(x)$ を "自然に"（証明の長さに関する帰納法を使って）定義すれば、上記の性質 1 は、自ずと満たされる（ただし注意深い論証が必要である）。性質 2 は、$PA$ が $\Sigma_1$ 完全性定理の証明を遂行するのに十分な証明能力を持っているという事実に基づいている[8]。

以下、上の定理の性質を満たす $Prov_T(x)$ を一つ固定し、$Con_T \equiv \neg Prov_T(\overline{0=1})$ と定義する。

**補題 34**

*1.* $\vdash_T A$ ならば $\vdash_T Prov_T(\overline{A})$。

*2.* $\vdash_T Prov_T(\overline{A}) \to Prov_T(\overline{Prov_T(\overline{A})})$。[9]

*3.* $\vdash_T Prov_T(\overline{A}) \to B$ ならば $\vdash_T Prov_T(\overline{A}) \to Prov_T(\overline{B})$。

**証明**

1. $\vdash_T A$ ならば $Prov_T(\overline{A})$ が真。ゆえに $\Sigma_1$ 完全性定理により $\vdash_T Prov_T(\overline{A})$。

2. 定理 33 の 2 で、$A$ として $\Sigma_1$ 論理式 $Prov_T(\overline{A})$ をとればよい。

3. まず、形式化された Modus Ponens により、次の FMP が成り立つことに注意する：

$$\dfrac{\vdash_T Prov_T(A \to B)}{\vdash_T Prov_T(A) \to Prov_T(B)}\ FMP$$

これと上記の 1,2 を用いて、

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash_T Prov_T(\overline{A}) \to Prov_T(\overline{Prov_T(\overline{A})})}\ 2 \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash_T Prov_T(\overline{A}) \to B}{\vdash_T Prov_T(\overline{Prov_T(\overline{A}) \to B})}\ 1}{\vdash_T Prov_T(\overline{Prov_T(\overline{A})}) \to Prov_T(\overline{B})}\ FMP}{\vdash_T Prov_T(\overline{A}) \to Prov_T(\overline{B})}$$

■

**定理 35 (第二不完全性)** 理論 $T$ が $PA$ の再帰的拡大であり、かつ無矛盾ならば、$\nvdash_T Con_T$。

**証明** 論理式 $\neg Prov_T(x)$ に対角化定理を適用することにより、

$$\vdash G \leftrightarrow \neg Prov_T(\overline{G})$$

を満たす論理式 $G$（ゲーデル文）を得ることができる。$\vdash_T \neg G \leftrightarrow (G \to 0=1)$ に注意すれば、以下のように $\vdash_T Con_T \to G$ を導出することができる：

[8] 実際には、$PA$ ほど強力な証明能力は必要ではなく、高々 $\Sigma_1$ 論理式に関する帰納法が使用できれば十分である。

[9] 定理 33 の 1 および補題 34 の 1,2 を合わせて**可導性条件** (derivability conditions) と呼ぶ。第二不完全性定理はこれら 3 つの条件および対角化定理から帰結する。

$$
\begin{array}{cl}
\hline
\vdash_T \mathit{Prov}_T(\overline{G}) \to \neg G & \\
\hline
\vdash_T \mathit{Prov}_T(\overline{G}) \to (G \to 0=1) & \\
\hline
\vdash_T \mathit{Prov}_T(\overline{G}) \to \mathit{Prov}_T(\overline{G \to 0=1}) & \text{補題 34 の 3} \\
\hline
\vdash_T \mathit{Prov}_T(\overline{G}) \to \mathit{Prov}_T(\overline{G}) \land \mathit{Prov}_T(\overline{G \to 0=1}) & \\
\hline
\vdash_T \mathit{Prov}_T(\overline{G}) \to \mathit{Prov}_T(\overline{0=1}) & \text{定理 33 の 1} \\
\hline
\vdash_T \mathit{Con}_T \to \neg \mathit{Prov}_T(\overline{G}) & \\
\hline
\vdash_T \mathit{Con}_T \to G &
\end{array}
$$

一方、$T$ は無矛盾なので、定理 29 により $\nvdash_T G$。よって、$\nvdash_T \mathit{Con}_T$。 ■

しかし一方で、$PA$ の無矛盾性に関しては、いくつかの部分的な肯定的結果が知られている（cf. [6]）。いま、理論 $T$ が**有限公理化可能**（finitely axiomatizable）であるとは、ある有限集合 $T'$ が存在して、$\vdash_T A \Longleftrightarrow \vdash_{T'} A$ が成り立つこととする。

**定理 36 (局所的な無矛盾性の証明可能性)** 理論 $T \subseteq PA$ が有限公理化可能ならば、$\vdash_{PA} \mathit{Con}_T$。

特に、$T$ としてどのように大きな公理の集合を取ったとしても、それが有限である限り、$PA$ はその無矛盾性を証明することができる。系として、次のことが帰結する。

**系 37 ($PA$ の本質的無限性)** $PA$ は有限公理化不可能である。

次に、任意の $n \geq 1$ について、**理論** $I\Sigma_n$ とは、$Q$ に $\Sigma_n$ 論理式に関する数学的帰納法の公理を全て付け加えることにより得られる理論のことであるとする。当然、$I\Sigma_n \subseteq PA$ である。これらの $PA$ の部分理論については、次のことが知られている。

**定理 38 (各層ごとの有限公理化可能性)** 任意の $n \geq 1$ について、$\Sigma_n$ は有限公理化可能である。

よって、次のことが成り立つ。

**系 39 (各層ごとの無矛盾性の証明可能性)** 任意の $n \geq 1$ について、$\vdash_{PA} \mathit{Con}_{I\Sigma_n}$.

どのように大きな $n$ をとったとしても、このことは成立する。特に、通常の数学において用いられる数学的帰納法を全て包含するほどに大きな $n$ を取ったとしても、$PA$ は、その無矛盾性を証明することができるのである。

## 12　おわりに

本稿においては、メタ数学における否定的成果（真理述語の定義不能性、算術や一階述語論理の決定不能性、第一不完全性など）に対して統一的説明を与えることを試みた。方針としては、まず算術的階層の概念を導入し、対角線論法を用いてその厳密性を示し、その上で上記の否定的成果をそこに帰着させる、という道筋をとった。この方針により、それぞれの否定的成果が成り立つことは以下のように説明される：

1. 算術の論理式に関する真理述語が算術の論理式で定義可能であるとすると、算術的階層の全体がある $\Sigma_n$ へと崩壊してしまう（定理 14、**真理述語の定義不能性**）。

2. $Q$ より強力かつ自然な理論 $T$ をとると、証明可能性述語 $\vdash_T$ は、$\Sigma_1$ 論理式に関する真理述語を定義しているものと見なすことができる（定理 22、$\Sigma_1$ 表現可能性）。ゆえにもしも $\vdash_T$ が決定可能、すなわち $\Delta_1$ だとすると、$\Sigma_1$ が $\Delta_1$ へと崩壊してしまう（定理 23、**算術の決定不能性**）。

3. 証明可能性述語 $\vdash_T$ は、$\Sigma_1$ 論理式で定義可能である（定理 25)。もしも $\vdash_T$ が $\Pi_1$ 完全であるとすると、$\vdash_T$ は、$\Pi_1$ 論理式に関する真理述語を定義することになり、$\Pi_1$ が $\Sigma_1$ へと崩壊してしまう（定理 26、$\Pi_1$ **不完全性**）。

このようにして、全ては算術的階層の厳密性に起因するものと見なすことができる（第二不完全性を除く）。もちろん、上記の説明は単に一つの見方を与えているに過ぎず、排他的なものでも、絶対的なものでもない。にもかかわらず、このようにして一つの統制的な概念（ここでは算術的階層）を機軸に据えることには、大いに意義がある。それによりメタ数学における様々な成果の間の関係について、よりよい見通しが与えられるようになるからである。

本稿を締めくくるにあたり、以下の４点を補足しておく。

1. ゲーデルによる $\Pi_1$ 不完全性定理は、ある意味で真理述語の定義不能性という現象の特殊例であると言うことができるだろう。なぜならば、それはある特定の述語であるところの $\vdash_T$ が、算術の論理式全般（特に $\Pi_1$ 論理式）に関する真理述語足り得ないということを主張しているからである。もちろん、だからといってゲーデルの業績がタルスキの業績（といわれているもの）に包含されるわけではない。ゲーデルの定理の重要性は、一つには、証明可能性述語という特別なステータスを持つ述語が真理述語足り得ないことを示した点にあり、またもう一つには、証明可能性述語が単に真理述語足り得ないというだけでなく、それは（$\Pi_1$）健全性は満たしつつも完全性は満たさない、という方向で真理述語足り得ないことを示した点にあるからである[10]。

2. 一般的な否定的結果には、必ずといっていいほど部分的な肯定的結果が伴う。例えば、真理述語の定義不能性（定理 14）には、各層ごとの真理述語の定義可能性（定理 15）が対応する（ゆえに、真理述語は "漸近的には" 定義可能である)。同様の関係は、第二不完全性（定理 35）と各層ごとの無矛盾性の証明可能性（系 39）の間にも見ることができる（ゆえに、$PA$ の無矛盾性は "漸近的には" $PA$ で証明可能である)。また、$\vdash_T$ が $\Delta_1$ ではないという事実（定理 23）には $\vdash_T$ が $\Sigma_1$ であるという事実（定理 25）が表裏一体の形で対応しており、$\Pi_1$ 不完全性には $\Sigma_1$ 完全性（定理 19）という双対的結果がある意味必然的な仕方で対応している（前者を示すためには後者を用いることが本質的だからである)。

一般に形式的体系については、不完全性、決定不能性をはじめとする様々な否定的性質が知られているが、それらはより詳細に検討してみると、対応する肯定的性質とごく紙一

[10] ここで「タルスキの業績」と呼んでいるのは、一般にタルスキの定理と呼ばれている算術の論理式に関する真理述語の定義不能性のことであり、それは大雑把に言ってタルスキのアイデアによるものと目されているに過ぎない。両者の業績を公正に比較するためには、より正確な論理学史的、文献学的考証が必要であろう。

重な関係において成り立っていることがわかる。ゆえに、形式的手法について考察する際には、決して否定的な成果のみに目を奪われるべきではないし、決してそれに直面して悲観的・感傷的になるべきではない。重要なのはこの**紙一重性**を理解することである。このメタ数学における紙一重性は、一体何に起因するのだろうか？それはメタメタ数学的な考察により、厳密に定式化することができるのだろうか？これらの問いについては今後の検討課題として残しておきたい。

3. ゲーデルの不完全性定理の解説においては、しばしばゲーデル文（「この文は証明不可能である」）の構成が証明の核心としてクローズアップされる。しかし、我々はこの方針をとらなかった。（実際には、算術的階層の厳密性を示すのに用いられた対角線論法がこのゲーデル文の構成に対応するのであるが、我々はそこに力点を置くことはしなかった。）その理由は、ゲーデル文の構成は確かに第一不完全性定理の直接的証明を可能にするが、それにより問題の本質から目をそらされる恐れがあるからである。

ゲーデル文と言えば、自己言及性ということがすぐに念頭に浮かぶ。その上で典型的な解説（ゲーデル自身によるものも含む）は以下のように進む。形式的体系が十分に強力かつ自然であれば、ゲーデル文のように「この文」という仕方で自己に言及する文の構成が可能となり、うそつき文（「この文は偽である」）と同様の構造が形式的な場面に持ち込まれ、結果として不完全性が引き起こされる。この説明に誤りはない。また、ある種の自己言及性、あるいは**循環性**が不完全性という現象の根底にあるというのもおそらく間違いではないであろう。しかし、その循環性とは、単に文レヴェルにおける**局所的な循環性**（ある特定の文が自分自身を指示する表現を含みうること）に還元されうるようなものなのだろうか？我々は、もっと広い視野を持ち、数学（基礎論）というアクティヴィティそのものにおいて当初から作用している、より根源的で大域的な循環性に目を向ける必要があるのではないだろうか？

ヒルベルトは数学の形式化により、数学自体が数学的研究（メタ数学）の対象となりうることを洞察した。一方でゲーデルはメタ数学の算術化により、メタ数学が対象数学（算術）の内部に取り込まれうることを洞察した。このことを端的に示しているのが定理 25 である。この定理が主張するのは、証明可能性というメタ数学的な概念が（偶数や素数などの）対象数学的概念と同列な仕方で、算術的階層の内部に位置づけられる、ということだからである。ヒルベルトとゲーデル、二人の洞察が相合わさることで、対象数学–メタ数学–対象数学という一つの連環が完成する。我々は対象数学についてメタ数学するが、そのメタ数学自体は再び対象数学の内部で遂行可能であるという循環性である。これは個々の文レヴェルにおける局所的な循環性からは一応区別されるべき**大域的な循環性**である。そして、形式的体系の不完全性という現象を（単に証明を与えるだけでなく）包括的に理解するためには、このような大域的循環性について理解する必要があるのではないかと思われるのである[11]。

大域的循環性という考え方は決して新奇なものではないが、ゲーデル文の構成により局所的循環性へと貶めて理解される傾向がある。それを避けるために、本稿においては、

[11] 一つの傍証として、例えばゲーデル文以外の $PA$ 独立命題の存在が挙げられる。ヒドラゲームやパリス・ハリントン命題などにおいては、文レヴェルにおける自己言及性は一切現れない。にもかかわらず、それらは $PA$ において証明も反証もできない。この事実は、独立命題の対象数学的性質と $PA$ のメタ数学的性質の密接な絡み合いの中で、初めて説明されうるように思われる。

ゲーデル文を明示的に構成せずに、算術的階層の厳密性および定理 25 に見られる大域的循環性のみに基づいて不完全性定理の証明を行う、という方針を採ったのである[12]。(ゲーデル文の構成は、それが必要になる第 9 章まで延期した。)

4. 最後に多少思弁的な(それゆえ十分な理論的裏づけのない)考察を付け加えることを許してほしい。既に指摘したとおり、証明可能性や妥当性など我々が用いる様々なメタ数学的概念は、大域的循環性を通して算術的階層の内部にに取り込まれている。そして算術的階層の厳密性により、その強さ、適用範囲は明確に限界付けられている。このことの帰結として、我々のメタ数学というアクティヴィティ自体が算術的階層(あるいは解析学的階層)に支配されているということになる。ここで我々の活動を支配するのが算術的階層であるか、解析学的階層であるか(あるいはもっと複雑な階層性であるか)は我々がどの程度の強さの概念を用いるのかに依存するので本質的ではない。本質的なのは、それらの階層は、いずれも $\Sigma$ と $\Pi$ の対立を通して定義されているという点である。我々は、$\Sigma$ と $\Pi$ の二項対立を通して対象数学を理解しようとしたのであるが、まさにその事により我々の思考様式自体が $\Sigma$ と $\Pi$ の二項対立により束縛される、という奇妙な事態に陥っているのである。一言で言えば、既存の数学基礎論・論理学は**論理的二元論**により支配されている。論理的二元論は、例えば $\forall$ と $\exists$ という二つの量化子の存在、$\Sigma_1$ 表現可能性と $\Pi_1$ 表現不能性、$\Sigma_1$ で定義される証明可能性と $\Pi_2$ で定義される(一階述語論理的)妥当性、あるいはより包括的に証明論と意味論という分類そのものなどに垣間見られる。このような見方が正しいとすると直ちに疑問となるのは、では、この論理的二元論はメタ数学、しいては我々の形式的思考一般にとって一体どこまで本質的なのだろうか、という問いである。それはメタ数学の発展における単なる歴史的事情に過ぎず、いくらでも別様でありえたのだろうか?それとも、それは歴史的事情とは関わりなく、我々が形式的に思考し、形式的であることの本性を形式的に問い続ける限り、必ず現れる類のものなのであろうか?

この論理的二元論という見方を正当化し、その射程を正確に定めることは、今後の課題として残しておきたい。

## 参考文献


[1] A. Church. A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, 1936, pp. 40–41.

[2] W. Craig. Bases for first order theories and subtheories, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 25, 1960, pp. 97–142.

[3] A. Ehrenfeucht and S. Feferman. Representability of recursively enumerable sets in formal theories, Arch. Math. Log., Vol. 5, 1959, pp. 37–41.

[4] S. Feferman. Arithmetization of metamathematics in a general setting, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 49, 1960, pp. 35–92.


[12] 同様の証明法は [6] においても言及されており、本稿はそれを参考にしている。

[5] K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38, pp. 173–198.

[6] P. Hájek and P. Pudlák, *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, 1994.

[7] S. C. Kleene. Recursive functions and predicates, *Trans. Amer. Math.*, Vol. 53, 1943, pp. 41–73.

[8] P. G. Odifreddi, *Classical Recursion Theory*, Elsevier, 1989.

[9] J. B. Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church's theorem, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 4, 1939, pp. 53–60.

[10] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[11] R. M. Smullyan. *Gödel's Incomplete Theorems*. Oxford University Press, 1992. （邦訳：『ゲーデルの不完全性定理』、丸善株式会社、1996.）

[12] 田中一之（編・著）、『数学基礎論講義』、日本評論社、1997.