集中講義「マーティン予想」*†

木原 貴行
名古屋大学 情報学部・情報学研究科

最終更新日: 2018 年 12 月 14 日

目次

1 **実数の深淵への入門** 2
1.1 数体系の拡張 2
1.2 構成可能宇宙とマスターコード 9
1.3 マーティン予想 13

2 **無限ゲームと決定性** 18
2.1 決定性公理 18
2.2 超距離と決定性公理 22
2.3 ☕ 決定性公理についての余談 26

3 **不変記述集合論** 28
3.1 可算群作用と可算ボレル同値関係 28
3.2 一様準同型と一様普遍性 32
3.3 ☕ 計算可能性理論の応用 36

4 **ワッジ理論** 40
4.1 位相複雑性の階層理論 40
4.2 BQO 理論 47
4.3 無限指数ラムゼー理論と Ellentuck 位相 50
4.4 BQO 値ワッジ理論 53

5 **ボレル写像の組合せ論的構成原理** 59

---

* 本講義ノートは，2018 年度秋期開講の東北大学大学院理学研究科数学専攻における「力学系理論特選」,「応用数理特論 A」及び「応用数理 特殊講義 GII」の集中講義「マーティン予想」の内容をまとめたものである．

† 講義のページ： http://www.math.mi.i.nagoya-u.ac.jp/~kihara/teach.html

5.1 準同型順序 60
5.2 階層理論の一般化 62
5.3 Σ_T-完全性 65
5.4 一般化準同型順序 74

6 計算可能性理論 76
6.1 計算可能性理論の予備知識 77
6.2 ジャンプの普遍性と透過性 79
6.3 ジャンプ逆化定理 80

7 主定理の証明 83
7.1 ジャンプ作用素と逆化 83
7.2 連続還元順序と組合せ論的順序の同型性証明 87

8 あとがき 90

1 実数の深淵への入門

1.1 数体系の拡張

われわれ人類は，数概念を次々に拡張してきた．最も基本的な数概念の拡張は以下であろう．

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \cdots \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

この中で最大のギャップは $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ にある．このギャップは途方もなく大きい．もう少し，このギャップを丁寧に埋めていこう．$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の中間概念として代表的なものは，$\mathbb{Q}$ の実閉包 $\mathrm{rcl}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$, つまり**実代数的数**全体がよく知られる．言い換えれば，$\mathrm{rcl}(\mathbb{Q})$ の外側にある実数がいわゆる**超越実数**である．

それでは，超越数の世界に少し足を踏み入れよう．実代数的数全体 $\mathrm{rcl}(\mathbb{Q})$ と $\mathbb{R}$ の間にあるもので注目されているものとして，最近は周期環 $\mathcal{P}$ などがあるらしい．**周期** (*period*) というものは，$\mathbb{Q}$-係数多項式の不等式で与えられる領域上での $\mathbb{Q}$-係数有理関数の絶対収束積分値 $\int_D \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ として書ける実数のことだそうである．

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathrm{rcl}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{P} \subset \cdots \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathcal{P}$ には円周率 π などの一部の超越数が含まれる．本稿では周期やその周辺の実数には触れないので，これらに興味がある人は，吉永氏による名著 [80] を眺めてほしい．

とはいえ，周期環 $\mathcal{P}$ はいまだ可算集合であるから，連続体濃度を持つ $\mathbb{R}$ にはまだまだ程遠い．たとえば，$\mathcal{P}$ を真に含む $\mathbb{R}$ の可算部分体ですら $2^{\aleph_0}$ 種類存在するのである．$\mathbb{R}$ の部分体全体は束構造をなすが，あまりにも大きすぎて，その構造を捉えるのは難しすぎる．

モノを見るには適切なスケールがある．微生物を観測するのに顕微鏡は良いが，天体を観測するのに顕微鏡は適さない．われわれがこれから踏み入るところは，魑魅魍魎の跋扈する，実数の深奥である．そこで，数理論理学の手を借りて，もう少し粗い視点を導入しよう．数理論理学では様々な粗い指標を取り扱う．この粗い指標は，繊細な構造は破壊し尽くすが，$\mathbb{R}$ のような巨大な構造の内部の深奥を大雑把に理解する際には有用足り得る．

これから観測する実数は，超越数の中の超越数たちであり，数学の多くの分野からは徐々に遠ざかっていく．このような "悪い" 実数たちに目を向けるのは，あまり健全ではないかもしれない．しかし，分かって欲しいことがある．われわれはこの実数の混沌の中に病的な反例を見つけたいわけではない．われわれはこの $\mathbb{R}$ の未踏の奥地が，けっして混沌とした無秩序のセカイではなく，きっと隠された秩序があるにちがいないと信じている．その姿を暴くべく，足を踏み入れようとしているのだ．

1.1.1 Δ_1-定義可能性

本稿においてこれから行うものは，個々の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して

「その x を指名/記述/定義するのがどれだけ難しいかの難易度」

によって，実数の分類理論を与えよう，というものである．ただし，個々の整数 $n \in \mathbb{Z}$ は原始的なオブジェクトとして自由に用いてよいものとする．各有理数とは整数の比であるから，個々の有理数 $q \in \mathbb{Q}$ も「指名難易度は低い」と言えよう．実代数的数も，有理係数の代数方程式を記述すればよいだけなので，指名難易度は低い．超越数の中にも，e や π のように指名難易度が低いものがある．

ここからは，定義の簡便さのために，$0 \leq x \leq 1$ の範囲の実数を考えて，実数は 2 進小数表記で表すことにしよう．実数 $x \in [0,1]$ の 2 進小数表記での小数点以下 n 桁目の値を $x(n)$ と書くことにしよう．有理数のところで曖昧さが出現し得るが，もう有理数は分かりきっているものとして，無理数のみを扱うので問題ない．有理係数の代数方程式による記述，すなわち代数的実数を越える第一ステップとして，まずは整数係数ディオファントス方程式による記述を考えてみよう．

定義 1.1. 各 $i \in \{0,1\}$ について，実数 $x \in [0,1]$ が **i-ディオファントス的** (i-*Diophantine*) であるとは，有限個のパラメータを持つ整数係数多項式 $P(n, m_0, \ldots, m_\ell)$ が存在して，次の条件を満たすことである．

$$x(n) = i \iff (\exists m_0, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}) \;\; P(n, m_0, \ldots, m_\ell) = 0.$$

ところで，実数と 2 進小数表記を同一視するのはいかがなものかと思う向きもあるとは思うが，我々がここから使う道具立ては非常に粗いので，本稿で扱う範囲内では差し支えない[*1]．もう少し数学的に言えば，実数の空間 $\mathbb{R}$ と 0-1 無限列の空間 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ は 2 **級ボレル同型**なので，その程度まで粗い視点に持ち込めば，同一視できるのである[*2]．

以後，1-ディオファントス的な実数を Σ_1-実数, 0-ディオファントス的な実数を Π_1-実数, 0-ディオファントス的かつ 1-ディオファントス的な実数を Δ_1-実数と呼ぶ[*3]．なぜこんな奇妙な定義を考えるのかということは後ほど明かされるので辛抱して頂きたい．しかし，これはとてつもなくロバストな概念であり，全く異なる数十（もしかすると数百や数千）に及ぶ同値な特徴付けが知られている．

Δ_1-実数を考えると良い点として，分かりやすいものとしては，まず，これが**実閉体** (*real closed field*) をなすという点である．Δ_1-実数全体を Δ_1 という記号で表すとすれば，以下のようになる．

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathrm{rcl}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{P} \subset \Delta_1 \subset \cdots \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

ここで $\mathcal{P} \subset \Delta_1$ とあっさり書いてしまっているが，実は $\mathcal{P}$ と Δ_1 の中間にも様々な数体系が沢山あると知られている [80].

たとえば，10 進正規数の例として知られるチャンパーノウン数 (Champernowne constant) $0.123456\ldots$ は Δ_1-実数であるが，しかし $\mathcal{P}$ には属さないであろうと予想されている．ボレルはほとんどすべての実数が**絶対正規** (*absolutely normal*) であることを示し，ルベーグやチューリングは具体的な絶対正規数の構成を与えた．ルベーグの構成の複雑性については議論があるようだが，チューリングによる絶対正規数の構成は，絶対正規な Δ_1-実数を与えていると広く認められている．その発展型として，絶対正規**リウヴィル数** (*Liouville number*) であるような Δ_1-実数など，様々なものが知られている．この実数はリウヴィル数であるから超越数である，つまり $\mathrm{rcl}(\mathbb{Q})$ の外の実数であるが，実際はこの手の構成は Δ_1 のかなり小さい部分クラスの中で行われており，つまりは Δ_1 の相当内側の話である．

このような Δ_1-超越数論の世界も興味深いのであるが，しかし，本稿では Δ_1 の内側にはこれ以上深入りせず，外側に目を向けることにしよう．

1.1.2 算術的定義可能性

さて，ここまでの議論を少し抽象的な形で見直してゆこう．整数の比として定義可能なものが有理数であり，有理係数多項式の根として定義可能なものが代数的数であり，整数係数多項式の根の存在を用いて定義可能なものが Δ_1-実数である．つまり，どのような数学的枠組の中でそれを定義可能か，ということによって，実数を分類してきたのである．

[*1] 2 進小数表記を用いずに実数上の定義可能性を扱うためのより優れた方法があり，本稿よりも位相的に繊細な議論をする際には必須となる．しかし，記法がすこし煩雑になるので，本稿では扱わない．

[*2] われわれ数理論理学者は細かいことを気にしない雑な人間なので，ここから先の議論は，たとえば複素数や p 進数を考えたとしても大体同じような話の流れになる．より一般に，任意の有限次元完備可分距離空間は，非可算濃度を持つならば，$\mathbb{R}$ と 2 級ボレル同型である（$F_{\sigma\delta}$ を保つボレル同型が存在する）．

[*3] オリジナルの定義とは異なるが，われわれはマチャセビッチの後の時代を生きている．

われわれは数理論理学者である．数理論理学者に思いつく最もベーシックなアイデアは，「**与えられた実数 x が，どれくらいの複雑性の論理式で定義できるか**」を考えることである．その第一ステップとして，「初等算術の枠組み内で定義可能な実数」の定義を与えよう．

算術的論理式とは，和 $+$, 積 $\cdot$, 定数 $0, 1$, 順序 $\leq$, 等号 $=$, 論理記号 $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$ と変数記号の組合せによって有限の長さだけで書ける一階論理式である．

定義 1.2. 実数 $x \in [0,1]$ が**算術的定義可能** (*arithmetically definable*) であるとは，ある算術的論理式 φ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について次が成立することである．

$$x(n) = 1 \iff \mathbb{N} \text{ において } \varphi(n) \text{ が真である．}$$

算術的定義可能実数もまた可算実閉体をなすことが知られている．しかし，算術的定義可能な実数も多種多様である．そこで，そのような実数を「どれくらい複雑な論理式で記述できるか」によって分類しよう．

論理式の複雑さは，量化記号の数によって分類することができる．もし φ が $\exists$ から始まる高々 n 個の量化記号しか含まない論理式として書ける場合，φ を Σ_n 論理式と呼ぶ．また，φ が $\forall$ から始まる高々 n 個の量化記号しか含まない論理式として書ける場合，φ を Π_n 論理式と呼ぶ．定義 1.2 を満たすような φ として，Σ_n 論理式でも Π_n 論理式でも取れるとき，実数 x のことを Δ_n-実数と呼ぶ．$n = 1$ の場合，先ほどの Δ_1-実数と一致する．

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
& \Sigma_1 \arrow[dr] & & \Sigma_2 \arrow[dr] & & \Sigma_3 \arrow[dr] & \\
\Delta_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
& \Pi_1 \arrow[ur] & & \Pi_2 \arrow[ur] & & \Pi_3 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

図 1　算術的階層

Δ_n-実数全体の集合は可算実閉体をなし，また Δ_{n+1}-実数体は Δ_n-実数体よりも真に大きい．これが，いわゆる**算術的階層** (*arithmetical hierarchy*) と言われるものである．

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \cdots \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3 \subset \cdots \subset \{\text{ 算術的定義可能実数全体 }\} \subset \cdots \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

ところで，実数の Δ_n-定義可能性を導入したが，実数列の Δ_n-定義可能性を考察することもできる．具体的には，2 変数の算術的論理式 φ による定義可能性を考えればよい：

$$x_i(n) = 1 \iff \mathbb{N} \text{ において } \varphi(i, n) \text{ が真である．}$$

すると，いわゆる**シェーンフィールドの極限補題** (*Shoenfield's limit lemma*) というものによって，次を示すことができる．

$$\Delta_{n+1}\text{-実数全体} \;=\; \Delta_n\text{-定義可能な実数列の極限として書ける実数全体}$$

つまり，Δ_n の範囲内で書けるコーシー列は Δ_{n+1} の中で収束する．そういう意味で，Δ_{n+1}-実数全体とは，Δ_n-定義可能なコーシー列に対する部分的な完備化であると考えられる．一気にすべてのコーシー列に対する完備化をするのではなく，このようにして「**ちょっとずつ完備化**」していくことによって実数全体 $\mathbb{R}$ に近付こうとしているのである．

上の議論から，算術的実数列の極限は算術的実数であることが分かる．つまり，算術的実数全体の集合は，いまだ可算集合であるが，ある種の完備性を持つ可算実閉体である．

しかし，この完備性は完璧なものではない．実は，実数列の算術的定義可能性，というものをどう考えるかはそう簡単なことではない．先ほどの定義は，ひとつの算術的論理式で実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定義することを考えていた．しかし，x_n 毎に異なる算術的論理式 φ_n を用いてよい，となれば状況は一転する．

算術的論理式にはゲーデル数を与えられるので，ゲーデル数 e の算術的論理式を ψ_e と書くことにしよう．実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が**弱く算術的定義可能**とは，グラフが算術的定義可能なある関数 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が存在して，実数 $x_n\in\mathbb{R}$ が算術的論理式 $\psi_{f(n)}$ によって定義されていることとする．弱く算術的定義可能な実数列の極限として書ける実数全体を Δ_ω と書けば，これは算術的定義可能実数全体よりも真に大きい可算実閉体をなす．

このようにして「ちょっとずつ完備化」の手続きは延々と続けられる．これを（構成的順序数に沿って）超限的に繰り返して作られる実数の階層が，いわゆる**超算術的階層** (*hyperarithmetical hierachy*) である．これは，一階論理の枠を超えて，「構成的無限論理」または「計算可能無限論理」における定義可能性を考えているとみなすことができる．

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \diagup & \Sigma_1 & \diagdown & \diagup & \Sigma_2 & \diagdown & & \diagup & \Sigma_\omega & \diagdown & \diagup & \Sigma_{\omega+1} & \diagdown \\
\Delta_1 & & & & \Delta_2 & & & \cdots\ \Delta_\omega & & & & \Delta_{\omega+1} & & & \cdots \\
 & \diagdown & \Pi_1 & \diagup & \diagdown & \Pi_2 & \diagup & & \diagdown & \Pi_\omega & \diagup & \diagdown & \Pi_{\omega+1} & \diagup
\end{array}
$$

図 2　超算術的階層

もちろん，一階算術における定義可能性に固執する理由は特にない．実数の世界において，超算術的階層はいまだ山の麓であり，超算術的階層を超える無数の階層が立ち並んでいるのである．超算術的階層を越えるひとつの方法としては，二階算術における定義可能性がある．算術的階層と類似の方法で，二階算術の階層 $(\Sigma^1_n,\Pi^1_n,\Delta^1_n)$ を考えることができ，これらは $\mathbb{R}$ の非常に巨大な部分可算実閉体を与える．

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\diagdown & \diagup & \Sigma_\alpha & \diagdown & & \diagup & \Sigma^1_1 & \diagdown & \diagup & \Sigma^1_2 & \diagdown & \diagup & \Sigma^1_3 & \diagdown \\
 & \Delta_\alpha & & & \cdots\ \Delta^1_1 & & & \Delta^1_2 & & & \Delta^1_3 & & & \cdots \\
\diagup & \diagdown & \Pi_\alpha & \diagup & & \diagdown & \Pi^1_1 & \diagup & \diagdown & \Pi^1_2 & \diagup & \diagdown & \Pi^1_3 & \diagup
\end{array}
$$

図 3　二階算術における階層

ただし，二階算術における階層は，超算術的階層などとは比較にならないほど巨大である．真の二階算術を用いる場合，$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ での真偽は，（まだわれわれが知らない実数も含む）すべての実数に対する量化を考えることとなる．Spector-Gandy の定理というものがあって，Σ^1_1 や Π^1_1 はわれわれが既に発見してきた実数のみの量化の話に還元することができる．しかし，Δ^1_2 以降はそうも行かない．このため，Σ^1_1 や Π^1_1 と Δ^1_2 の隙間には，再帰的到達不可能順序数や再帰的マーロ順序数などから始まり安定順序数に至る巨大可算順序数の山嶺が無数に立ち並んでいる．二階算術的階層において，Σ^1_1 や Π^1_1 と Δ^1_2 は隣り合っていると考えるのではなく，Δ^1_2 はけっして到達できない雲の上の世界のあるとイメージした方が，実際の数学的状況に近いかもしれない．

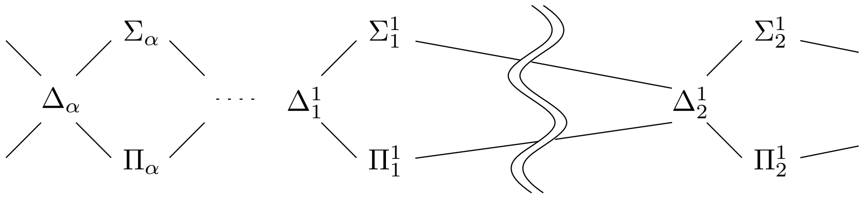

図 4　二階算術における階層の正しいイメージ

しかし，たとえ Δ^1_n-実数を考えようとも，まだ所詮，実数のうちの高々可算個しか覆い切れていない．この調子で，実数の更なる深みに辿り着くことなんて可能なのだろうか．しかし，その道は果てしないので，その前に，別の観点から，この算術的階層を見直してみよう．

☕ **豆知識.** 余談であるが，この「ちょっとずつ完備化」の階層を用いると，たとえば実解析学の様々な定理を証明するために，どれくらいのレベルまで完備化された実数の部分体を考えれば十分か，ということなどを議論することができる．この発想は，たとえば**逆数学** (*reverse mathematics*) と呼ばれる分野 [67] における道具のひとつとして用いられる．

1.1.3　Δ_1-閉包

実数を変数に用いた算術的定義可能性を考えよう．ここからは算術の言語に述語 O を加えた拡張言語 $\mathcal{L}^+$ を考える．それでは，実数 z（の 2 進表記）が与えられているとしよう．$\mathcal{L}^+$ の論理式 φ に対して，$(\mathbb{N}, z)$ で φ が真，という概念を与える．$(\mathbb{N}, x)$ で $O(n)$ が真であるとは，$z(n) = 1$，つまり z の小数点以下 n 桁目が 1 であることとする．一般の論理式 φ に対しては，通常の構造における真偽の定義のように帰納的に定義するものとする．

これを用いて，**実数 y が実数 z から相対的に算術的定義可能**，ということを，拡張算術言語 $\mathcal{L}^+$ の論理式 φ が存在して，以下が成り立つものとして定義する．

$$y(n) = 1 \iff (\mathbb{N}, z) \text{ で } \varphi(n) \text{ が真である．}$$

以前と同様にして，相対的に Σ_1, 相対的に Π_1, 相対的に Δ_1 ということも定義できる．気持ちとしては，実数 x の各桁の情報を用いて，別の実数を定義しようという発想である．

集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ の **Δ_1-閉包** (Δ_1-*closure*) とは，A のある元 x から相対的に Δ_1 な実数全体の集合である．A の Δ_1-閉包を $\Delta_1(A)$ と書くこととすると，$\Delta_1(A)$ は常に実閉体である．一般には，Δ_1-

閉包は実閉包より遥かに大きくなり得るが，可算集合の Δ_1-閉包は可算実閉体である．ひとつの実数 x の Δ_1-閉包 $\Delta_1(\{x\})$ のことは，$\Delta_1(x)$ と略記する．特に，$\Delta_1(x)$ は可算実閉体をなす．

1940 年代，エミール・ポスト (Emil Post) は，実閉体 Δ_{n+1} が，ある 1 つの実数から生成されることを発見した．後で詳細を説明するが，それは $\mathbf{0}^{(n)}$ という記号で書かれる，第 n マスターコードと呼ばれる実数である．ポストの定理とは，各 Δ_{n+1} は実数 $\mathbf{0}^{(n)}$ の Δ_1-閉包として表される，というものである．

$$\Delta_{n+1} = \Delta_1(\mathbf{0}^{(n)}).$$

そういうわけで，個々の実数の Δ_1-閉包が．どのような実閉体をなすかを見るのは重要である．この詳細な構造を見るために，Δ_1-閉包を比較する以下の順序を導入しよう．

定義 1.3. $\mathbb{R}$ 上の前順序 $\leq_T$ を次によって定義する．

$$x \leq_T y \iff \Delta_1(x) \subseteq \Delta_1(y).$$

念のため注意しておくと，以下が成立している．

$$x \leq_T y \iff \Delta_1(x) \subseteq \Delta_1(y) \iff x \in \Delta_1(y) \iff x \text{ が } y \text{ から相対的に } \Delta_1\text{-定義可能.}$$

この前順序 $\leq_T$ によって，個々の実数の持つ複雑さを比較したい．$\leq_T$ の意味で同じ情報を持つ実数は同一視しよう．つまり，$(\mathbb{R}, \leq_T)$ の商構造を考え，これを $\mathbb{R}_T$ と書く．これは上半束をなす (が，残念ながら束にはならない)．もう少し細かく言えば，最小元を持ち，最大元を持たない，局所可算な，連続体濃度を持つ上半束である．

また，一般に，実数同士の複雑さは単純には比較可能ではない．実際，実数の $\leq_T$-順序構造 $\mathbb{R}_T$ は，サイズ $2^{\aleph_0}$ の反鎖を持つ．つまり，全順序からは程遠い．だから，$\mathbb{R}$ は互いに包含関係にない $2^{\aleph_0}$ 個の部分実閉体をもつのである．とはいえ，一見，それ以上の具体的な構造など見えなさそうであるが，実は極めて不思議な構造を持つのである．

たとえば，適当に実数 $x \in \mathbb{R}$ を取ってきたとき，そこから Δ_1-定義可能な実数だけを考えると，どのような構造をしているだろうか．これについて，最小元を持つ任意の可算束は，$\mathbb{R}_T$ のある下半錘と同型である．特に P が最大元と最小元を持つ可算束ならば，ある実数 x_P の Δ^0_1-閉包の $\leq_T$-順序構造が P と同型になるのである：

$$P \simeq \Delta_1(x_P)/\equiv_T = \{y \in \mathbb{R} : y \leq_T x_P\}/\equiv_T$$

つまり，$\mathbb{R}_T$ は等質な構造から程遠く，場所場所で形状が異なるのである．上半錘についても同様である．1960 年代に Rogers は等質性予想というものを提示したが，これは $\mathbb{R}_T$ の全ての上半錘 $\{z \in \mathbb{R} : x \leq_T z\}$ は同型であろう，というものである．実数の $\leq_T$-順序構造 $\mathbb{R}_T$ に関する初期の研究では，当然，$\mathbb{R}_T$ は整然とした等質的な構造にちがいないという，この手の予想が多数提示されたのである．

しかし，実数の $\leq_T$-順序 $\mathbb{R}_T$ に関する，これらの予想はことごとく反証されていくこととなる．実数の $\leq_T$-順序 $\mathbb{R}_T$ は，まったく整然としておらず，等質からは掛け離れており，掴みどころのない，混沌とした構造をしている！

Rogers の等質性予想に関していえば，Shore によって否定的な解決を見た．つまり，ある実数 $x, y \in \mathbb{R}$ が存在して，次が成立する．

$$\{z \in \mathbb{R} : x \leq_T z\}/\equiv_T \not\simeq \{z \in \mathbb{R} : y \leq_T z\}/\equiv_T$$

しかし，実は，等質性予想の否定的解決は，この程度のものではなかった．実際，実数 x と y の T-上半錘が同型ならば，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta^0_n(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta^0_n(y)$ であることが示された．これが導くことは，与えられた実数 x の $\leq_T$-上半錘と同型な $\leq_T$-上半錘を持つ実数 y は高々可算個しか存在しない，ということである．つまり，Rogers の予想とは対照的に，ほとんどの上半錘は非同型なのである．

このように，実数の $\leq_T$-順序構造 $\mathbb{R}_T$ の持つ「至る所で形状が異なる」という性質から，$\mathbb{R}_T$ には自己同型が少ないことが予期される．それが，実数の $\leq_T$-順序構造 $\mathbb{R}_T$ に関する最大の未解決問題は Rogers のリジッド性予想として知られる以下の問題である．

予想 1 (リジッド性予想)**.** 実数の $\leq_T$-順序構造 $\mathbb{R}_T$ はリジッドである．つまり，$\mathbb{R}_T$ の非自明な自己同型は存在しない．

このリジッド性予想は，1990 年頃に，Slaman と Woodin [70] によって，**双翻訳可能性予想** (*bi-interpretability conjecture*) と呼ばれる予想と同値となることが示されたが，こちらの予想は定式化が若干複雑なので省略する．現時点で分かっていることは，実数の $\leq_T$-順序構造 $\mathbb{R}_T$ には高々可算個しか自己同型が存在しない，つまり $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}_T)$ が高々可算ということである．

とにかく，$\leq_T$-順序を用いることで，実数の世界 $\mathbb{R}$ がどのようなものか，われわれは少しだけ理解することができた．つまるところ，$\mathbb{R}$ の内部は魔窟であり，けっしてわれわれがよく親しんでいるような単純な構造は一切持たない．しかし，単純にこれまで数学者が考えてきた理想的な順序構造とは限りなく遠いというだけであって，まったくの混沌ではなく，おそらく何かしらの確固たる構造は持っているのである．

1.2 構成可能宇宙とマスターコード

1.2.1 ゲーデルの構成可能宇宙

実数の魔窟に，別の方向からのアプローチを考えたい．実数の定義可能性による分類の別の方法としては，**ゲーデルの構成可能宇宙** (*Gödel's constructible universe*) を用いる方法もある．つまり，実数 $x \in \mathbb{R}$ がゲーデルの構成可能宇宙の階層のどのランクで構成されるか，という観点で実数を分類する，という考え方である．

先ほどは，算術の言語における定義可能性を取り扱ったが，一階算術には限界があるため，ここでは集合論の言語における定義可能性を取り扱う．集合論の言語における論理式 $\varphi(x, \bar{z})$ が与えら

れているとする．この論理式に集合 Z のパラメータ $z_0, \ldots, z_n \in Z$ を与えて，これを Z で解釈することによって，以下のように Z の部分集合を定義できる．

$$X = \{x \in Z : (Z, \in) \text{ において，} \varphi(x, z_0, \ldots, z_n) \text{ は真である．}\}$$

このとき，$X \subseteq Z$ は Z 上**定義可能**ということとする．この概念を用いて，以下のように集合の階層を構成することができる．

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset \\ L_{\alpha+1} &= \{X \subseteq L_\alpha : X \text{ は } L_\alpha \text{ 上定義可能 }\} \\ L_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \qquad (\lambda \text{ が極限順序数の場合}) \end{aligned}$$

順序数全体のクラスを Ord と書く．このとき，$L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} L_\alpha$ は**ゲーデルの構成可能宇宙** (*Gödel's constructible universe*) と呼ばれる．さて，実数の標準的な集合論的構成が与えられているとしよう．そうすると，実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，構成可能宇宙 L のどの階数で構成されるか，という順序数値を与えることができる．

$$\mathrm{rank}(x) = \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} : x \in L_\alpha\}.$$

この観点では，個々の実数 $x \in \mathbb{R}$ に順序数 $\gamma \in \mathrm{Ord}$ が対応付くので，非常にわかりやすい．とはいえ，この方法では，**構成可能実数** (*constructible real*), つまり L に属す実数，の複雑性しか測れないという難点があることには注意してほしい．われわれの宇宙においては，$L \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ かもしれないし，$L \cap \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{R}$ かもしれない．どちらになるかは，（ZFC が無矛盾であるという仮定の下で）ZFC 集合論では決定できない．しかし，一般には，$L \cap \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ より遥かに小さいと信じられているため，その信念の下では，ごく一部の実数しかこの方法では取り扱えていないこととなる．とはいえ，構成可能実数の複雑性を順序数という単純な指標で評価できる，という点において，これはすぐれた考え方である．

しかし，ゲーデルの構成可能宇宙 L の階数を利用する，という点にはもうひとつの欠点がある．L-階数の観点はそこそこ粗いのである．たとえば，階数を 1 上げただけで，次のように空集合から一気に算術的定義可能実数に飛ぶ．

$$L_\omega \cap \mathbb{R} = \emptyset; \qquad L_{\omega+1} \cap \mathbb{R} = \{\text{ 算術的定義可能実数全体 }\}$$

しかし，この問題は，L-階数の観点を少し修正することによって解決できる．これについては，次の節で確認しよう．ここでは，L-階数による実数の分類の基本的な性質をもう少しだけ触れる．まず，最小の非可算順序数ランクまでで，全ての構成可能実数を構成し終える．

$$L_{\aleph_1} \cap \mathbb{R} = \{\text{ 構成可能実数全体 }\}$$

また，任意の可算順序数 $\alpha < \alpha_1$ について，$L_\alpha \cap \mathbb{R}$ は可算実閉体をなす．したがって，われわれは，$\mathbb{R}$ に徐々に近づいていく，$\mathbb{R}$ の可算部分実閉体の増大列を得ることができる．つまり，任意の可算順序数 α, β について，もし $\omega + 1 < \alpha \leq \beta$ ならば次が成立する．

$$\Delta^0_1 \subset \Delta^0_2 \subset \cdots \subset L_{\omega+1} \cap \mathbb{R} \subset \cdots \subset L_\alpha \cap \mathbb{R} \subseteq L_\beta \cap \mathbb{R} \subset \cdots \subset L_{\aleph_1} \cap \mathbb{R} = L \cap \mathbb{R}$$

ここで，$\alpha<\beta$ ならば $L_\alpha \subsetneq L_\beta$ であるが，$L_\alpha\cap\mathbb{R}=L_\beta\cap\mathbb{R}$ となり得ることがあることに注意しよう．このような（実数を加えない）無限可算順序数ステップは**ギャップ**と呼ばれ，1960 年代頃からヒラリー・パトナム (Hilary Putnam) らによって深く研究された．

また，1960〜80 年代の**再帰理論** (*recursion theory*) において，α が具体的な認容順序数，再帰的到達不可能順序数，再帰的マーロ順序数，安定順序数などの巨大可算順序数の場合において，L_α に属す実数の特徴付けは深く研究された．このような再帰理論と構成可能宇宙の理論の融合によって，Σ^1_1 および Π^1_1 と Δ^1_2 の中間に属す実数の理解は大きく進むこととなった．多くの研究者の努力によって，これに関する魅力的な理論が築き上げられ，たくさんの教科書が出版されたが，本稿では取り扱わない．

さて，ここまでに L-階層による実数の分類の 2 つの欠点，つまり構成可能実数しか扱えない，少々観点が粗すぎる，という点を見た．さらに，第 3 の欠点がある．L-階層による実数の分類は，個々の実数の定義の難しさを測るものであって，その実数の持つ情報量を正確には反映しない．$\leq_T$-順序の場合，$x\leq_T y$ だったならば，実数 y をパラメータとして用いることによって実数 x を Δ_1-定義によって復元することができる．対照的に，L-階数による分類はそのような復元可能性を保証してくれない．たとえば x と y の L-階数がそれぞれ α と β であって，$\alpha<\beta$ だったとしよう．このとき，x よりも y の方が複雑であると期待される．しかし，一般には，y の情報から x を再構成することはできない．

1.2.2 微細構造理論とマスターコード

1963 年頃から，ヒラリー・パトナム [61] は，構成可能宇宙の階層のどのレベルにおいて新しい実数が付加されるか，つまりギャップ問題について考察した．その後，1968 年，ジョージ・ブーロスとヒラリー・パトナム [7] は，もし $L_{\alpha+1}\setminus L_\alpha$ に新たな実数が現れるならば，その中にすべての $L_{\alpha+1}$-実数を算術的にコードしているような実数が存在することを発見した．つまり，次を満たす実数 $x\in L_{\alpha+1}$ が存在する．

$$L_{\alpha+1}\cap\mathbb{R}=\{y\in\mathbb{R}: y \text{ は } x \text{ をパラメータに用いて算術的定義可能 }\}.$$

言い換えれば，$L_{\alpha+1}$ に属すありとあらゆる実数の情報が，たったひとつの実数から復元可能なのである．これが，次に述べる「**マスターコード**」の原型となる定理である．

1972 年, Jensen [25] は構成可能宇宙の**微細構造理論** (*fine structure theory*) を構築した．Jensen の基本的な発想は，L-階層より繊細な J-階層を考えることである．ここでは詳細な定義を与えないが，L-階層よりも振る舞いの良い階層 $(J_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ であり，ゲーデルの構成可能宇宙を与える，つまり $L=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}}J_\alpha$ となる．

算術的階層のように，集合論の言語においても，量化記号の個数をカウントすることにより，Σ_n, Π_n, Δ_n などを定義することができる．集合論の言語におけるこの階層は**レヴィ階層** (*Lévy hierarchy*) と呼ばれる．本稿では混乱を避けるために，レヴィ階層については，集合論の言語であることを強調して，Σ^{set}_n, Π^{set}_n, Δ^{set}_n のように書く．

さて，J_ρ から J_α への Σ^{set}_n-定義可能な部分全射が存在するような最小の順序数 ρ を α の Σ^{set}_n-

プロジェクタム (Σ_n^{set}-*projectum*) と呼ぶ．Jensen が示したことは，もし ρ が α の Σ_n^{set}-プロジェクタムならば，J_α で Σ_n^{set}-定義可能な J_ρ の部分集合の中で最大の情報量を持つ「マスターコード」が存在する，ということであった．もしプロジェクタムが $\rho = 1$ ならば，マスターコードは実数である．本稿では，実数のみを考察するので，プロジェクタムが 1 の部分，つまり実数マスターコードのみをマスターコードと呼ぶことにする．

定理 1.4 (Jensen の定理)**.** もし $\Delta_{n+1}^{\mathsf{set}}(J_\alpha)$ に属すが $\Delta_n^{\mathsf{set}}(J_\alpha)$ には属さないような実数が存在するならば，そのようなもののうちで $\leq_T$-順序が最大になる実数 $x \in \mathbb{R}$ が存在する．つまり，

$$\Delta_n^{\mathsf{set}}(J_\alpha) \cap \mathbb{R} \subsetneq \Delta_{n+1}^{\mathsf{set}}(J_\alpha) \cap \mathbb{R} \implies (\exists x \in \mathbb{R})\ \Delta_{n+1}^{\mathsf{set}}(J_\alpha) \cap \mathbb{R} = \Delta_1(x).$$

このような実数 x を**マスターコード** *(*master code*)* と呼ぶ.

J-階層の構成において，新たな実数が加わったり加わらなかったりする．具体的には，プロジェクタムが 1 のレベルでは実数が加わり，そうでなければ実数は加わらない．もし実数が新たに加わるのであれば，その中で最も情報量の多い実数が存在し，それがマスターコードである．マスターコードから，そこまでの J-階数の全ての実数を Δ_1-定義で復元可能である．

マスターコードのみの $\leq_T$-順序を見れば，これは整列順序を与える．また，その長さは $\aleph_1^L$ である．以後，α 番目のマスターコード（の同値類，またはその代表元）を $\mathbf{0}^{(\alpha)}$ と書くこととしよう．J-階層の実数は，ω_1^{CK} 未満のランクを見ると超算術的階層と一致することがわかる．しかし，もちろん，J-階層による実数の階層は，ω_1^{CK} を越えても $\aleph_1^L$ に至るまでは続いていく．

例 1.5. 算術の言語におけるゲーデル数 e の Σ_1 論理式を φ_e と書くことにする．このとき，

$$\emptyset' = \sum\{2^{-e} : \mathbb{N} \text{ において } \varphi_e \text{ が成立する }\}$$

と定義すれば，$\emptyset'$ は第 1 マスターコードである．より一般に，ゲーデル数 e の Σ_n 論理式を φ_e^n と書けば，

$$\emptyset^{(n)} = \sum\{2^{-e} : \mathbb{N} \text{ において } \varphi_e^n \text{ が成立する }\}$$

と定義したとき，$\emptyset^{(n)}$ は第 n マスターコードである．

ともかく，$\mathbb{R}$ の $\leq_T$-順序は極めて混沌とした複雑な構造をなすが，$\mathbb{R}$ からマスターコードと呼ばれる構成可能実数だけを取り出してくれば，その $\leq_T$-順序は長さ $\aleph_1^L$ の整列順序という極めて単純な構造しか持たないのである．

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\Delta_1 & \subset & \Delta_2 & \subset & \Delta_3 & \subset & \dots & \subset & \Delta_\omega & \subset & \Delta_{\omega+1} & \subset & \dots \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
\Delta_1^{\mathsf{set}}(J_1)\cap\mathbb{R} & \subset & \Delta_2^{\mathsf{set}}(J_1)\cap\mathbb{R} & \subset & \Delta_3^{\mathsf{set}}(J_1)\cap\mathbb{R} & \subset & \dots & \subset & \Delta_1^{\mathsf{set}}(J_2)\cap\mathbb{R} & \subset & \Delta_2^{\mathsf{set}}(J_2)\cap\mathbb{R} & \subset & \dots \\
\Psi & & \Psi & & \Psi & & & & \Psi & & \Psi & & \\
\mathbf{0}^{(0)} & <_T & \mathbf{0}^{(1)} & <_T & \mathbf{0}^{(2)} & <_T & \dots & <_T & \mathbf{0}^{(\omega)} & <_T & \mathbf{0}^{(\omega+1)} & <_T & \dots
\end{array}$$

マスターコードの列は，情報量の指標である．与えられた実数 $x \in \mathbb{R}$ とマスターコードを比較

することにより，その実数 x の持つ情報量がどれくらいか，ということをひどく粗い意味であるが，測定できる．一方で，たとえば**ゼロ・シャープ** (*zero sharp*) などの構成不可能実数の振る舞いについては，ここから情報を得ることはできない．

1.3 マーティン予想

1.3.1 $\equiv_T$-準同型の分類

一方，T-順序による実数の分類は極めて複雑であるが，個々の実数の持つ情報量を正確に反映してくれる．他方，L-階数によって実数は前整列するが，実数の持つ情報量を反映しない．

われわれの方針は，指名/記述/定義の難易度によって，実数を分類しようというものであった．ところで「定義」には常にパラメータを含むことができる．たとえば，論理式にはパラメータを含むことができるし，L-階層や J-階層もまた同様である．具体的には，集合 x が与えられたとき，x をパラメータに用いた定義可能性を考えることによって，x-相対的な構成可能宇宙 $L[x]$ やその微細階層 $J_\alpha[x]$ が構成される．同様にして，x-相対的 J-階層におけるマスターコードの列 $(x^{(\alpha)})_{\alpha<\aleph_1^{L[x]}}$ を得られる．ちなみに第 α-マスターコード-相対的な J-階層における第 1-マスターコードがちょうど第 $(\alpha+1)$-マスターコードになる．

$$(\mathbf{0}^{(\alpha)})^{(1)} = \mathbf{0}^{(\alpha+1)}.$$

このようにして，個々の実数の指名または記述というものは，パラメータを許容する．そして，そのパラメータ毎に実数が定まるとすれば，「定義式」とはひとつの実数を定めるものではなく，与えられたパラメータを入力として何か実数を返す関数だと考えることができる．ここでは，実数パラメータのみを考えたい．この場合，「具体的な実数 x を指名する」という行為は，関数 $\hat{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と考えることができる．このようにして，視点を 1 つ高階に持ち上げよう．いま，定義の難易度による実数の分類問題は，**実関数**の分類問題に移行した．

もちろん，あらゆる実関数を考えてしまうと，考察の対象が増えるだけであり，事態はただ悪化するのみである．しかし，適切な実関数のみを考えることにより，状況が一気に簡明化される．それをこれから説明しよう．

この実数の分類から実関数の分類への視点の移行，という発想が現れた切っ掛けは，ポストの問題の次数不変な解の探求に端を発する．**ポストの問題** (*Post's problem*) とは，1944 年に提出された，以下のような実数の存在を問う問題である．

$$\Delta_1 \subsetneq \Delta_1(x) \subsetneq \Delta_2 \quad \text{となる実数 } x \in \Sigma_1 \text{ は存在するか？}$$

あるいは，$\leq_T$-順序構造の言葉で述べれば，最初の 2 つのマスターコード $\mathbf{0}^{(0)}$ と $\mathbf{0}^{(1)}$ の中間の Σ_1-実数の存在を問うものである．

$$\mathbf{0}^{(0)} <_T x <_T \mathbf{0}^{(1)} \quad \text{となる実数 } x \in \Sigma_1 \text{ は存在するか？}$$

この問題は，1957 に Friedberg と Muchnik によって独立に解決した．しかし，その証明は当時としては複雑で，その解となる Σ_1-実数 x は全くもって不自然なものだった．現在は，この手法の理

解が進んだため，その実数 x の「定義」はかろうじて 1 ページ以内で書き切れるだろうが，しかし，自然な実数とは言い難い．もう少し複雑な問題になると，状況はますます悪化する．この手の研究の進んだ現在では，様々な性質を持つ実数の存在に関する問題が問われ，その解となる実数を記述するために何十ページもの紙面を要する，ということは，もはや全く珍しいことではなくなった．

さて，1950 年代以降のこのような技巧的で難解な実数の多数の発見によって，数理論理学における「自然」のハードルは大きく下がった．たとえばチャンパーノウン数や例 1.5 のマスターコードなどは，われわれ数理論理学者の低いハードルでは，「とてつもなく自然」という部類に属すであろう．しかし，いくら地面すれすれという所までハードルを下げようとも，ポストの問題の解となる「自然」な実数は一向に見つからなかった．

われわれにとっての「自然」な実数というものは何かというと，「物理学的な意味を持つ」というような強力な要求ではなく，「明快な定義式を持つ」程度のものである．つまりは，ポストの問題の解となる実数 $x \in \mathbb{R}$ の「より自然な構成法」は存在しないか，ということが問われることとなった．ここで，われわれの興味の対象は，実数本体ではなく，実数の指名法[*4] に移行したのである．これが，実数の分析から実関数の分析への移行である．

ポストの問題の文脈においては，われわれが扱いたいものは，実数のあらゆる指名法（すべての実関数）ではなく，実数の自然な指名法（よい性質を持った実関数）である．このひとつの規準として，1967 年，サックスは次数不変なポストの問題の解を尋ねた．

定義 1.6. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**次数不変** (*degree-invariant*) または **$\equiv_T$-準同型** ($\equiv_T$-*homomorphism*) であるとは，次を満たすことである．

$$x \equiv_T y \implies f(x) \equiv_T f(y).$$

言い換えれば，$\equiv_T$-準同型 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とは，$\mathbb{R}_T$ 上 well-defined な写像のことである．以後，$\equiv_T$-準同型 f が誘導する写像を $[f]\colon \mathbb{R}_T \to \mathbb{R}_T$ と書く．定数関数や恒等関数などが自明な $\equiv_T$-準同型の例である．それ以外には，与えられた実数をタネとして，そこから相対的に α-番目のマスターコードを返す関数 $x \mapsto x^{(\alpha)}$ なども，$\equiv_T$-準同型である．

サックスは，Σ_1-定義可能な $\equiv_T$-準同型 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，以下の性質を満たすものが存在するかどうかを尋ねた．

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x <_T f(x) <_T x^{(1)}.$$

ここで $x^{(\alpha)}$ は x-相対的な第 α マスターコードである．第 1 マスターコード写像 $x \mapsto x^{(1)}$ が，Σ_1-定義可能な $\equiv_T$-準同型の具体例である．サックスの問題は，いまだ解決していない．サックス本人は，第 0 および第 1 マスターコードの中間の実数を与える Σ_1-構成が存在すると信じているよ

*4 この辺りの言葉遣いは難しい．実数の構成法あるいは実数の定義法と呼ぶのが適切かもしれないが，そうすると $\mathbb{R}$ の構成法や $\mathbb{R}$ の定義法と勘違いされる恐れがある．「数学基礎論では，（本稿のような意味で）実数の構成や実数の定義可能性に関する深い研究がなされている」のように言うと，かなりの高確率で，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の構成や $\mathbb{R}$ の定義の話であると勘違いされ，「そんなの $\mathbb{Q}$ の完備化でいいじゃん」みたいな反応をされるのである．

うであり，長きに渡り，その構成に向けて歩を進めていった．それに対し，ドナルド・マーティン (Donald Martin) は，そのような異常な $\equiv_T$-準同型は存在しないと予想し，きわめて大胆な予想を打ち立てた．それを今から説明しよう．

1.3.2 マーティン予想とスティールの定理

いま，$\mathfrak{M}$ を $\le_T$-上半錘を含む実数の $\equiv_T$-不変部分集合全体の族としよう．

$$\mathfrak{M} = \{S \subseteq \mathbb{R}_T : (\exists \mathbf{c} \in \mathbb{R}_T)(\forall \mathbf{x} \ge_T \mathbf{c})\ \ \mathbf{x} \in S\}.$$

この $\mathfrak{M}$ は $\mathbb{R}_T$ 上の非単項 σ-完備フィルターをなす．さらに，**決定性公理** (*axiom of determinacy*) と呼ばれるものを仮定すると，この $\mathfrak{M}$ は非単項 σ-完備超フィルターとなる．このため，$\mathfrak{M}$ は**マーティン超フィルター** (*Martin ultrafilter*) と呼ばれることもある．超フィルターがあれば 2 値測度が定義できるため，$\mathfrak{M}$ によって定義される測度は**マーティン測度** (*Martin measure*) と呼ばれる．しばしば，この $\mathfrak{M}$ を測度と同一視し，$\mathfrak{M}$-殆ど至る所，などの用語を用いる．余談であるが，決定性公理下では，このマーティン超フィルターを利用して，$\aleph_1$ 上の非単項 σ-完備超フィルターを構成でき，これによって $\aleph_1$ が可測基数であることが示される．

決定性公理の話は後回しにしよう．マーティンは，$\mathbb{R}_T$ 上の写像を以下によって比較することを提案した．与えられた $\mathbf{f}, \mathbf{g} \colon \mathbb{R}_T \to \mathbb{R}_T$ に対して，前順序 $\le_T^\triangledown$ を次によって定義する．

$$\mathbf{f} \le_T^\triangledown \mathbf{g} \iff \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_T : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \le_T \mathbf{g}(\mathbf{x})\} \in \mathfrak{M}.$$

この前順序 $\le_T^\triangledown$ は，**マーティン順序** (*Martin order*) と呼ばれる．元の文献では $\le_m$ という記号が用いられているが，後に出てくる別の順序と混同しかねないので，ここでは $\le_T^\triangledown$ という記号を用いる．ちなみに，$\triangledown$ は上半錘を表し，上半錘の中で $\le_T$-順序が成立するという気持ちを込めている．

さて，与えられた $\equiv_T$-準同型 $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$[f] \le_T^\triangledown [g]$ であることを単に $f \le_T^\triangledown g$ と書く．これはつまり，ほとんど全ての実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) \le_T g(x)$ が成立することを意味する．実数（の指名法）の比較としては妥当であろう．

マーティンが打ち立てた大胆な予想とは以下である．

予想 2 (マーティン予想)**.** ZF + DC + AD の下で以下が成立する．

1. 任意の $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}_T \to \mathbb{R}_T$ は $\mathfrak{M}$-殆ど至る所定数であるか，$\mathfrak{M}$-殆ど至る所増大である，つまり $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_T : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \ge_T \mathbf{x}\} \in \mathfrak{M}$ である．
2. $\mathfrak{m}$-殆ど至る所増大する写像 $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}_T \to \mathbb{R}_T$ たちは，$\le_T^\triangledown$-順序の下で整列する．
   さらに，後続 $\le_T^\triangledown$-階数は第 1 マスターコードによって与えられる．つまり，$\mathbf{f}$ の $\le_T^\triangledown$-階数が α であれば，$\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^{(1)}$ によって与えられる写像 $\mathbf{f}^{(1)}$ の $\le_T^\triangledown$-階数は $\alpha + 1$ である．

$\mathsf{ZF}+\mathsf{DC}+\mathsf{AD}$ という言葉の意味は後で説明するとして，ここではマーティン予想の中身を解説しよう．まず 1 つめの項目である．殆ど至る所定数とは，ほとんどのパラメータに対して同じ実数を返す．これは，われわれに新しい実数を与えてくれない自明な指名法と考える．第 1 項目は，もし与えられた指名法が非自明な指名法ならば，タネとなる実数よりも複雑な実数を与えてくれる，ということを予想する．この予想が正しければ，タネよりも簡単な実数を与える指名法 $f(\mathbf{x})<_T\mathbf{x}$ は，ほとんどのパラメータに対して，定数値となるしかないのである．

第 1 項目も大胆なのであるが，第 2 項目は輪をかけて大胆である．第 1.1.3 節で述べたように，$\leq_T$-順序の構造は混沌中の混沌である．連続体濃度の反鎖が存在し，至る所で様子が異なり，等質からは程遠い．しかし，マーティンは予想する．自然な実数の非自明な指名法だけを見れば，全ての反鎖はすっかり消え去り，すべて整列されてしまうであろう，と．よくもここまで大胆な大予想を立てられるものである．

そして，第 2 項目の 2 行目以降がポストの問題に関わる部分である．非自明な実数の指名法は整列するのであるが，その階数の $+1$ の部分に相当する指名法は，直前の指名法から相対的な第 1 マスターコードによって与えられる，という予想である．つまり，定数写像の「次」の指名法は $x\mapsto x^{(1)}$ であり，その「次」の指名法は $x\mapsto x^{(2)}$ であり……となり，これらの中間の（$\equiv_T$-不変な）指名法は存在しない！

これまでにひとびとが見つけたポストの問題の解は，すべて技巧的なものだった．それは，研究者の力不足だったのではなく，数学的な必然だったのではないだろうか．それがマーティンの予想するものであった．

☕ **豆知識．** ある時代，南カリフォルニアに Cabal と名乗る集合論の秘密集団が存在した．この集団は，巨大基数や決定性公理などのような，当時としては超越的な公理を取り扱うことを厭わなかった．Cabal は，Victoria Delfino 懸賞問題として，1978 年に 5 つの問題，1985 年に 7 つの問題，80 年代末に新たな 2 つの問題を公表した．このうち，1978 年に公表された Victoria Delfino 第 5 問題が，このマーティン予想である．この 14 の問題のうち，現在に至っても未解決なものとしては，第 5 問題「マーティン予想」および第 14 問題「$\mathsf{AD}\overset{?}{=}\mathsf{AD}^+$」の 2 つが残されるのみである．

さて，こんな大予想にどう切り込めばよいだろうか．一見すると，まったく手立てはなさそうに思える．しかし，実は，1980 年代には，マーティン予想に深く食い込む，かなり大きな結果が得られていた．残る Victoria Delfino 予想が次々と解かれていったことで，マーティン予想も後一歩か，と思われたが，しかし，90 年代以降に続く進展はほとんど無かったようである．

ここでは，1980 年代のマーティン予想周辺の研究の幾つかを紹介しよう．マーティン予想は $\equiv_T$-準同型に関する予想であるが，$\equiv_T$-準同型よりも，もう少し良い性質を持つ実関数に制限すれば，様々なことが分かるのである．それが，一様 $\equiv_T$-準同型というものである．

ここで $x\equiv_T y$ の定義を思い出してほしい．これは x と y が互いに Δ_1 定義可能ということであった．つまり，まず x から相対的に y を定義する Σ_1 論理式 $\varphi^{\Sigma}_{x\mapsto y}$ と Π_1 論理式 $\varphi^{\Pi}_{x\mapsto y}$ があり，そして y から相対的に x を定義する Σ_1 論理式 $\varphi^{\Sigma}_{y\mapsto x}$ と Π_1 論理式 $\varphi^{\Pi}_{y\mapsto x}$ がある．これら 4 つの論理式 $\varphi^{\Sigma}_{x\mapsto y},\varphi^{\Pi}_{x\mapsto y},\varphi^{\Sigma}_{y\mapsto x},\varphi^{\Pi}_{y\mapsto x}$ をそれらのゲーデル数 a,b,c,d と同一視することとしよう．つまり，$x\equiv_T y$ という式の背後には常に 4 つの自然数が存在している．

ある写像の $\equiv_T$-準同型性が，$\equiv_T$ の背後の 4 つの論理式（あるいはそのゲーデル数）の変換という形で得られているとき，これを一様 $\equiv_T$-準同型であるという．形式的には，以下のように定義される．

定義 1.7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**一様 $\equiv_T$-準同型** (*uniform $\equiv_T$-homomorphism*) とは，次を満たす $u\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}^4$ が存在することである．

$$x \equiv_T y \quad \text{via } (a,b,c,d) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \equiv_T f(y) \quad \text{via } u(a,b,c,d).$$

一様 $\equiv_T$-準同型は，伝統的に**一様次数不変** (*uniform degree invariant*) 写像と呼ばれることもある．パラメータが多くてごちゃごちゃしているが，意味は明瞭だろうと思う．一様準同型については，第 3.2 節でも少し触れる．

この一様準同型に対して，本稿の主題のひとつである**ワッジの理論**，特に**無限ゲーム** (*infinite game*) の手法が極めて重要であると逸早くきづいたのが，ジョン・スティール (John Steel) であった．このワッジの理論を応用し，1982 年，スティールは，驚くべき結果を証明した．マーティンの驚異の予想は，一様 $\equiv_T$-準同型では成り立つ，というのである．次の定理の興味深い点は，構成不可能な作用素についてまで，その構造の一部を明かしていることである．

定理 1.8 (スティールの定理 [72]). ZF + DC + AD の下で以下が成立する．

- 一様 $\equiv_T$-準同型 f について，$\mathfrak{M}$-殆ど全ての x について $f(x) \in L[x]$ ならば，$\mathfrak{M}$-殆ど全ての x について $f(x)$ はある x-マスターコード $x^{(\alpha)}$ と $\equiv_T$-同値である．
- シャープ作用素 $x \mapsto x^\sharp$ は，$\mathfrak{M}$-殆ど全ての x について $f(x) \notin L[x]$ となる一様 $\equiv_T$-準同型のうち，$\equiv_T^\triangledown$-順序で最小のものである．

前者について，α は x に依存し得ることに注意する．たとえば，ハイパージャンプは $x \mapsto x^{(\omega_1^x)}$ である．ここで ω_1^x は最小の x-相対的認容順序数である．マスターコードの系列は長さ $\aleph_1^L$ しかないが，$\equiv_T^\triangledown$ による整列順序はそれよりも遥かに長い．たとえば，ハイパージャンプの時点で $\equiv_T^\triangledown$-階数 $\aleph_1$ である．また，Δ^1_{2n}-ジャンプの $\equiv_T^\triangledown$-階数は $\underset{\sim}{\delta}{}^1_{2n+1}$ であり，よって Δ^1_2-ジャンプの $\equiv_T^\triangledown$-階数は $\aleph_{\omega+1}$ であると計算されている．

そういうわけで，一様 $\equiv_T$-準同型については，驚くべきことにマーティン予想以上のことがあっさりと分かってしまった．残るは，一様ではない $\equiv_T$-準同型であるが，そもそもそのような例はひとつも知られていない．もしかすると，一様ではない $\equiv_T$-準同型なんてものは本質的には存在しないのではないか，というのがスティールの予想である．

予想 3 (スティール予想 [72]). 任意の $\equiv_T$-準同型は，一様 $\equiv_T$-準同型と $\equiv_T^\triangledown$-同値である．

もし全ての $\equiv_T$-準同型が一様ならば，定理 1.8 より，マーティン予想が解決する．つまり，次が

成立する．

$$\text{スティール予想} \Longrightarrow \text{マーティン予想}$$

1988 年には Howard Becker [3] は一様 $\equiv_T$-準同型の分析を進め，一様 $\equiv_T$-準同型が必ずある種の**普遍集合** (*universal set*) から得られることなどが示された．これが 1980 年代頃までのマーティン予想の研究である．スティールの定理の証明は，微細構造理論など数多くの分野の知識を要求するので，本稿ではその証明を与えない．その代わり，スティールの定理や Becker の定理の証明の背後にある理論のひとつである，ウィリアム・ワッジ (William Wadge) の連続還元順序の理論の周辺について学んでいこう．

あらかじめ述べておくと，本稿で取り扱う予定の主定理は，「通常の数学」の範囲内で証明される．しかし，「通常の数学」の枠組みにおいて証明されるにも関わらず，「通常の数学」とは**矛盾**する種々の超越的な公理の知識と発想が極めて有用である．これについては，次の節で述べたい．

2 無限ゲームと決定性

2.1 決定性公理

2.1.1 古典論理と排中律

突然であるが，記号論理学のおさらいをしよう．以下の論理的原理は，それぞれ排中律，二重否定除去，ド・モルガンの法則として知られている．

$$\begin{array}{rc}
\text{排中律 (LEM):} & A \vee \neg A \\
\text{二重否定除去 (DNE):} & \neg\neg A \ \rightarrow \ A \\
\text{ド・モルガンの法則 (DML):} & \neg(A \wedge B) \ \leftrightarrow \ (\neg A) \vee (\neg B).
\end{array}$$

論理式 A や B が複雑なとき，これらの原理は非構成的原理であるとされる．たとえば，A や B が Σ_1 論理式であった場合を考えてみよう．そのようなものは，それぞれ Σ_1-排中律，Σ_1-二重否定除去，Σ_1-ド・モルガンの法則と呼ばれる．これらは排中律などを Σ_1 論理式に制限したものなので，古典論理において規則として認められているふつうの排中律などよりは遥かに弱い．

Σ_1-排中律は構成的解析学においては LPO (*limited principle of omniscience*) として知られている．Σ_1-ド・モルガンの法則はそれより弱く，LLPO (*lessor limited principle of omniscience*) と呼ばれる．一方で，Σ_1-二重否定除去はさらに弱く，**マルコフの原理** (*Markov's principle*) として知られ，ロシア学派の構成的数学では，構成的な原理と認められていた．これは，ロシア学派が計算可能数学的な観点を構成的数学の基礎として採用していたからであろう．ただし，ロシア学派を除くと，他の多くの構成的数学の体系では，マルコフの原理は公理としては採用されない．LLPO や LPO などは，いかなる構成的数学の体系においても非構成的な超越的原理として扱われる．

ちなみに，排中律 (LEM), 二重否定除去 (DNE), ド・モルガンの法則 (DML) は同値とも言えるが，先に述べたように，適用範囲を Σ_1 論理式に制限すれば，それぞれの古典論理的原理の超越性は異なる．また，Σ_1 だけでなく，算術的階層の各レベルで考えた場合には，直観主義算術上で図

5 のような関係が成り立っていることが，赤間, Berardi, 林, Kohlenbach らの研究 [1] によって知られるようになった．排中律にせよ何にせよ，何かの公理や推論規則を認めるか認めないかという all-or-nothing でなく，このようにグラデーションを付けると楽しくなる．

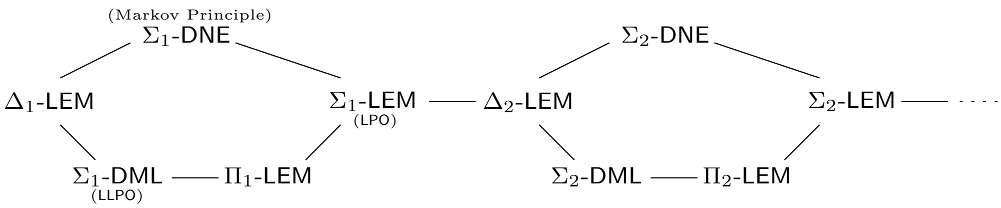

図 5　非構成的原理の階層

とにかく，排中律，二重否定除去，ド・モルガンの法則などの論理的原理は，いわゆる非構成的原理とされるものである．したがって，これらの原理は，直観主義論理では証明できない．しかし，われわれ数学者は古典論理を無根拠に採用する．それは本稿においても同様である．

それでは，古典論理の世界の旅を続けよう．古典論理においては，ド・モルガンの法則は，以下の述語論理に対する原理に拡張される．

$$\neg\forall x A(x) \ \leftrightarrow\ \exists x \neg A(x)$$

もう少し複雑な述語論理式にド・モルガンの法則を適用すると，以下のようになる．

$$\neg\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots \neg A$$

これに排中律を用いれば，以下の論理式が成立することは容易に分かる．

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots A \quad \vee \quad \exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots \neg A \tag{1}$$

さて，われわれはいま，古典論理を無批判に認めている．実際のところ，古典論理を採用することに特に正当な理由を持っている人がどれだけいるだろうか．それならば，もう少しだけ強力な公理を採用することにも正当な理由など必要ないと考えられる．

たとえば，式 (1) の「...」が無限に続いた論理式を考えてみてはどうだろう．ここで変数 x_i の量化範囲の集合 X は固定することにする．すると，$(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ となるから，A は $X^{\mathbb{N}}$ の部分集合とみなすことにする．そうすると，式 (1) の無限への拡張とは，以下の公理であると考える．

$$\begin{aligned} & \forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \forall x_{2n} \exists x_{2n+1} \forall x_{2n+2} \exists x_{2n+3} \ldots \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \\ \vee \quad & \exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots \exists x_{2n} \forall x_{2n+1} \exists x_{2n+2} \forall x_{2n+3} \ldots \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin A \end{aligned} \tag{2}$$

われわれが採用したい公理とは，このスーパー排中律 (2) である[*5]．この「...」の部分が不明瞭だと思うかもしれないが，それはすぐに解決する．後で述べるように，この公理は，厳密には有限長の文字列で記述されるので，そんなに大したものではない．

*5 どちらかといえば，この規則は，排中律よりもド・モルガンの法則の無限化としての側面の方が強い．実際，多くの文脈では，ド・モルガンの法則の無限化として語られている．しかし，人名にスーパーを付けて「スーパー・ド・モルガン」とするのは憚られるので，ここではスーパー排中律と呼んでおくことにする．

とはいえ，無限個の量化に対する排中律 (2) など本当に成立するのだろうか，と疑問に思うかもしれない．しかし，そもそもわれわれは有限個の量化に対する排中律 (1) が成立するとされる理由も知らないし，単に論理的な推論規則として認めているだけである．実際のところ，有限個の量化に対する排中律 (1) の時点で，たとえば自然数などを量化範囲に取っていれば，既に極めて無限的な原理である．

もし無限的原理に疑問を呈すならば，Σ_1-排中律などの時点でそう言うべきであった．Σ_1-排中律は，ふつうの排中律 (1) よりも遥かに弱い．それでも，Σ_1-排中律などの表面上は覆い隠された無限性を真摯に受け止め，これは非構成的原理だとして扱うのが，直観主義論理に基づく構成的数学である．

とにかく，ヒルベルトはこう言った．数学者から排中律を奪うのは，ボクサーから拳を奪うに等しい，と．任意の公理はこの言葉によって正当化できるのでありがたい．これより取り組むボクシングでは，このスーパー排中律 (2) がわれわれの拳となる．この言葉だけで，この公理を採用する理由に十分足りえるであろう．

2.1.2 量化子とゲーム

ところで，量化記号を使って書かれた文は，∀ 氏と ∃ 氏という 2 人のプレイヤーによる完全情報ゲームとして解釈される．この考え方は，論理学や計算機科学などでは古くから標準的である．ε-δ 論法などをその種の完全情報ゲームとして説明する人も多い．ここでは，たとえば，量化記号が複雑に入り混じった論理式として，

$$\forall a\,\exists b\,\forall c\,\forall d\,\exists e\; B(a,b,c,d,e)$$

を考えよう．これは次のようなゲームとして図示できる．

	1 手目	2 手目	3 手目	4 手目	勝利条件
∀	a		c,d		$B(a,b,c,d,e)$ は偽
∃		b		e	$B(a,b,c,d,e)$ は真

このゲームは，次の意味で，上に記述した論理式を特徴づける．

$$\forall a\,\exists b\,\forall c\,\forall d\,\exists e\; B(a,b,c,d,e) \text{ は真である} \iff \text{後手の } \exists \text{ 氏が必勝戦略を持つ．}$$

ド・モルガンの法則と排中律から得られる式 (1) をゲームとして解釈しよう．上のように，必ず固定した k-手で終了するゲームを k-手ゲームと呼ぶことにする．すると，次が分かる．

$$\text{式 (1)} \iff \text{どんな } k\text{-手ゲームも必ず } \forall \text{ 氏または } \exists \text{ 氏が必勝戦略を持つ．} (\forall k \in \mathbb{N})$$

このように，複雑に入れ子になった量化記号をゲームとして理解しようという発想は歴史が長く，少なくとも 1950 年頃に遡る．といっても，1950 年頃のヒンティッカによるゲーム意味論などは，非線形な量化（分岐量化子）といった極めて複雑な量化子の分析のために誕生したものである．したがって，上に述べたような線形かつ有限な量化子をゲームと考える試みであれば，1950 年よりも遥かに古いかもしれない．

それでは，われわれのスーパー排中律 (2) をゲームとして解釈しよう．ふつうの古典論理法則が有限の k-手ゲームの必勝戦略の存在に対応するなら，スーパー排中律 (2) に対応するものは無限ゲームである．

	1 手目	2 手目	3 手目	4 手目			勝利条件
$\forall$	x_0		x_2		$\ldots$		$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$
$\exists$		x_1		x_3		$\ldots$	$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin A$

つまり，われわれのスーパー排中律 (2) は，上のような無限ゲームにおいて，$\forall$ 氏か $\exists$ 氏のどちらか一方は必勝戦略を持つ，ということを主張するものである．

もう少し数学的に厳密な定義を与えよう．まず，$\forall$ 氏の戦略は，$2n$ 手目までのプレイのデータ $(x_k)_{k<2n}$ を元に，$2n+1$ 手目 x_{2n} を決める写像と同一視できる．同様に，$\exists$ 氏の戦略は，$2n+1$ 手目までのプレイのデータ $(x_k)_{k<2n+1}$ を元に，$2n+2$ 手目 x_{2n+1} を決める写像である．つまり，ゲームの戦略とは，数学的に次のように定義される．

定義 2.1. X^{even} を偶数長の X-値列全体，X^{odd} を奇数長の X-値列全体とする．このとき，$\forall$ の**戦略** (*strategy*) とは写像 $\sigma\colon X^{\mathrm{even}} \to X$ であり，$\exists$ の戦略とは写像 $\tau\colon X^{\mathrm{odd}} \to X$ である．

それぞれのプレイヤーの戦略は，$X^{\mathbb{N}}$ 上の写像を定義する．たとえば，$\exists$ 氏の戦略 τ が与えられているとしよう．このとき，ゲームのプレイは以下のように進んでいく．

$\forall$	x_0		x_2		x_4		$\ldots$	
$\exists$		$x_1^\tau := \tau(x_0)$		$x_3^\tau := \tau(x_0, x_1^\tau, x_2)$		$x_5^\tau := \tau(x_0, x_1^\tau, x_2, x_3^\tau, x_4)$		$\ldots$

このとき，$\hat{\tau}(x_0, x_2, x_4, \ldots) = (x_1^\tau, x_3^\tau, x_5^\tau, \ldots)$ によって，写像 $\hat{\tau}\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ が定義される．同様にして，$\forall$ 氏の戦略 σ から写像 $\hat{\sigma}\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ を作ることができる．

以後，数列 $x = (x_0, x_1, \ldots)$ と $y = (y_0, y_1, \ldots)$ を合わせたものを $x \oplus y = (x_0, y_1, x_1, y_1, \ldots)$ と書く．$\exists$ 氏の戦略 τ が与えられており，$\forall$ 氏が $x = (x_0, x_1, \ldots)$ のように手を進めていた場合，ゲームのプレイは $x \oplus \hat{\tau}(x)$ という列を作る．同様に，$\forall$ 氏の戦略 σ が与えられており，$\exists$ 氏が $y = (y_0, y_1, \ldots)$ のように手を進めていた場合，ゲームのプレイは $\hat{\sigma}(y) \oplus y$ という列を作る．

定義 2.2. 勝利条件 $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ が与えられているとする．$\exists$ の戦略 τ が A における**必勝戦略** (*winning strategy*) とは，任意の $x \in X^{\mathbb{N}}$ に対して，$x \oplus \hat{\tau}(x) \in A$ となることを意味する．同様に，$\forall$ の戦略 σ が A における必勝戦略とは，任意の $y \in X^{\mathbb{N}}$ に対して，$\hat{\sigma}(y) \oplus y \notin A$ となることを意味する．

これで，スーパー排中律 (2) の厳密な定義を与える準備ができた．ちなみにスーパー排中律というのは正式名称ではなく，本来は**決定性公理** (*axiom of determinacy*) と呼ばれる．したがって，以後はその名称を使っていこう．

公理 1 (決定性公理)**.** X を可算集合とする．任意の $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ に対して，$\exists$ または $\forall$ のどちらか一方は A における必勝戦略を持つ．

しばしば，決定性公理のことを AD と略記する．ところで，より厳密なことを語るのであれば，上記の決定性公理はスーパー排中律 (2) より少しばかり強いことを主張しているように感じるかもしれない．字面通りに解釈すれば，式 (2) が正しいことと，それが正しいことを保証するスコーレム関数（つまり必勝戦略）が存在することは，少々違うと思う人もいるだろう．式 (2) が正しいことは，どちらかといえば，必勝な**擬戦略** (*quasi-strategy*)，つまり，必勝な多価戦略が存在することとして定義するのが自然だと思われる．とはいえ，可算集合 X 上の無限ゲームの場合は，必勝戦略の存在と必勝擬戦略の存在は同値であると分かっているため，本質的には特に変わりはない．

2.2 超距離と決定性公理

決定性公理の主張は，直感的には分かりやすいが，必勝戦略の定義など数学的には少しややこしい．そこで，もう少し数学的に明快な方法で，決定性公理の記述を与えよう．

2.2.1 超距離空間

不等式 $d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$ を満たす距離関数は**超距離** (*ultrametric*) と呼ばれる．超距離の例としては，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上の p 進距離などがある．より一般に，可算付値体の完備化は完備可分超距離空間である．

超距離によって距離化可能な空間のことを**超距離化可能空間** (*ultrametrizable space*) と呼ぶことにしよう．以下の特徴付けはよく知られている．

$$\text{超距離化可能} \iff \text{強零次元かつ距離化可能}$$

ここで，位相空間が**強零次元** (*strongly zero-dimensional*) とは，その**大帰納次元** (*large inductive dimension*) が 0 であることを意味する．つまり，非交叉な 2 つの閉集合は，開かつ閉であるような集合によって分断される．

超距離化可能空間は，非アルキメデス付値体の部分空間としても特徴付けられる．それ以外にも様々な良い特徴付けが知られているが，本稿で重要であると思われるものは以下である．

$$\text{超距離化可能} \iff \text{離散空間の可算直積に埋め込み可能}$$

したがって，超距離化可能空間を扱う際には，離散空間 A の可算直積 $A^{\mathbb{N}}$ を考えればよい．現時点では我々は可分性を仮定してないので，A は非可算かもしれないことには注意しておこう．$A^{\mathbb{N}}$ のような空間には，以下のような標準的な超距離が入る．$x, y \in A^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$d(x,y) = \begin{cases} 2^{-\min\{n\in\mathbb{N} : x(n)\neq y(n)\}} & \text{if } x \neq y \\ 0 & \text{if } x = y. \end{cases}$$

この超距離の良い点は，距離が取る値の唯一の極限点が 0 であるという点である．したがって，この部分空間として埋め込むことによって，任意の超距離化可能空間 X 上に対して，値が $\{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ しか取らない超距離を入れることができる．このような超距離を**標準的な超距離**と呼ぶことにしよう．

また，上で定義した $A^{\mathbb{N}}$ 上の超距離 d は完備である．完備超距離化可能空間は，以下のように特徴付けられる．

$$\begin{aligned}\text{完備超距離化可能} &\iff \text{強零次元かつ完備距離化可能}\\ &\iff \text{離散空間の可算直積に閉集合として埋め込み可能}\end{aligned}$$

$A^{\mathbb{N}}$ に閉集合として埋め込めるということは，その空間を A 上の木として表現できる，と言い換えることができる．無限ゲームの決定性は，離散空間上に木表現を持つ空間，つまり完備超距離化可能空間の構造解析のための強力な武器となることを見ていこう．

距離空間上の写像 $f\colon X \to Y$ が**リプシッツ連続** (*Lipschitz continuous*) とは，ある定数 c が存在して，次の性質を満たすことであった．

$$(\forall x, y \in X) \quad d_Y(f(x), f(y)) \le c \cdot d_X(x, y).$$

この定数 c は**リプシッツ定数** (*Lipschitz constant*) と呼ばれる．リプシッツ定数 1 のリプシッツ連続写像は**非拡大写像** (*non-expansive map*) または**距離写像** (*metric map*) と呼ばれる．リプシッツ定数が 1 未満のリプシッツ連続写像は**縮小写像** (*contraction map*) と呼ばれる．ここで注目して欲しいのは，空間 X, Y に標準的な超距離が入っている場合，リプシッツ定数 1 未満という性質からリプシッツ定数 1/2 以下という性質が自動的に得られることである．つまり，標準的な超距離の入った空間では，縮小写像の像の直径は必ず 1/2 サイズ以下となる．この特性は極めて重要である．なぜなら，縮小写像を合成し続ければ，その像の直径が徐々に 0 に収束していくことが保証されるからである．

2.2.2 木と単調写像

さて，これが先ほどの決定性公理とどう関係するだろうか．しばらく細かい定義が続くが，辛抱してほしい．

集合 A が与えられたとき，$A^{<\omega}$ を A の有限列全体の集合とする．各 $\sigma \in A^{<\omega}$ に対して，σ の**長さ** (*length*) を $|\sigma|$ と書く．また，$\tau = (b_j)_{j<\ell}$ に対して，$\tau \upharpoonright k = (b_j)_{j<k}$ と定義する．A の有限列 $\sigma, \tau \in X^{<\omega}$ に対して，σ が τ の**始切片** (*initial segment*) であるとき，$\sigma \sqsubseteq \tau$ と書く：

$$\sigma \sqsubseteq \tau \iff \sigma = \tau \upharpoonright |\sigma|.$$

A 上の**木** (*tree*) とは，空でない集合 $T \subseteq A^{<\omega}$ であって，始切片で閉じているものである：

$$\sigma \sqsubseteq \tau \ \text{ and } \ \tau \in T \implies \sigma \in T.$$

さて，$\sigma \in A^{<\omega}$ と $p \in A^{\omega}$ に対して，始切片の定義を $\sigma \sqsubseteq p$ のようなものに拡張出来ることは明らかであろう．つまり，$\sigma \sqsubseteq p$ とは，$\sigma = p \upharpoonright |\sigma|$ のことである．有限列 $\sigma \in A^{<\omega}$ について，

$[\sigma]=\{p\in A^\omega:\sigma\sqsubseteq p\}$ と定義する．木 $T\subseteq A^\omega$ の**無限道** (*infinite path*) とは，$p\in A^\omega$ であって，p の任意の有限始切片が T に属するもののことである．T の無限道全体の集合を $[T]$ と書く．

$$[T]=\{p\in A^\omega:(\forall n\in\omega)\ p\upharpoonright n\in T\}.$$

上で述べたように，完備超距離空間とは，ある離散集合 A の可算直積 A^ω の閉部分空間であった．したがって，以下のように，木と完備超距離空間を同一視できることは明らかであろう．

命題 2.3. 任意の木 $T\subseteq A^{<\omega}$ に対して, $[T]$ は A^ω の閉集合である．逆に, 任意の閉集合 $F\subseteq A^\omega$ に対して，$\underline{F}=\{\sigma\in A^{<\omega}:F\cap[\sigma]\neq\emptyset\}$ は A 上の木であり，$F=[\underline{F}]$ となる．

S と T をそれぞれ A と B 上の木とする．このとき，$\varphi\colon S\to T$ が**単調写像** (*monotone map*) であるとは，次を満たすことである．

$$\sigma\sqsubseteq\tau\implies\varphi(\sigma)\sqsubseteq\varphi(\tau)$$

単調写像によって生成される部分写像 $[\varphi]\colon\subseteq[S]\to[T]$ を次によって定義する．

$$\mathrm{dom}([\varphi])=\{x\in[S]:\lim_n|\varphi(x\upharpoonright n)|=\infty\}$$
$$[\varphi](x)(n)=b\iff(\exists s)\ \varphi(x\upharpoonright s)(n)=b.$$

写像を集合論的にコーディングしている場合には，上の式は $[\varphi](x)=\bigcup_{n\in\omega}\varphi(x\upharpoonright n)$ と定義することと等しい．木上の単調写像は，次の意味で完備超距離空間上の連続写像と同一視できる．

命題 2.4. $\varphi\colon S\to T$ が単調写像ならば，$[\varphi]\colon\subseteq[S]\to[T]$ は $[S]$ の G_δ 集合を定義域とする連続写像である．逆に，G_δ 集合を定義域とする任意の連続写像 $\theta\colon\subseteq[S]\to[T]$ に対して，ある単調写像 $\underline{\theta}\colon S\to T$ が存在して，$\theta=[\underline{\theta}]$ となる．

Proof. $x\in\mathrm{dom}([\varphi])$ であることと $\forall n\exists m\varphi(x\upharpoonright m)\geq n$ が成立することは同値なので，定義域が G_δ であることは明らかである．次に, 各基本開集合 $[\tau]$ に対して, $[\varphi]^{-1}[\tau]=\mathrm{dom}([\varphi])\cap\bigcup\{[\sigma]:\sigma\in S\text{ and }\tau\sqsubseteq\varphi(\sigma)\}$ であることは明らかである．つまり，$[\varphi]^{-1}[\tau]$ は $\mathrm{dom}([\varphi])$ で開であるから，$[\varphi]$ は連続である．

$D=\mathrm{dom}(\theta)$ を $[S]$ の G_δ 集合とする．基本的な発想は, 与えられた $\sigma\in S$ に対して, $\underline{\theta}(\sigma)$ を $\theta([\sigma]\cap D)\subseteq[\tau]$ となるような長さ $|\sigma|$ 以下で最長の $\tau\in T$ として定義することである．

あとは，定義域を一致させるための微調整が必要なだけである．$D=\bigcap_n U_n$ となる開集合の下降列 (U_n) を取る．$x\in D$ ならば $x\in U_n$ なので，x のある近傍 $[\sigma]\cap[S]$ が U_n に属すことが分かる．したがって，各 $[\sigma]$ に対して，$[\sigma]\cap[S]\subseteq U_n$ であるような最大の $n\leq|\sigma|$ までしか上のような $\tau\in T$ の探索を行わないようにすればよい． □

同様にして，リプシッツ連続写像なども，特殊な単調写像として理解できる．たとえば，整数 $c\in\mathbb{Z}$ に対して，リプシッツ定数 2^c のリプシッツ連続写像は，次の条件を満たす単調写像 $\varphi\colon S\to T$ と同一視できる．

$$|\sigma|\leq|\varphi(\sigma)|+c.$$

したがって, 非拡大写像とは $|\sigma| \leq |\varphi(\sigma)|$ を満たす単調写像 φ であり, 縮小写像とは $|\sigma| < |\varphi(\sigma)|$ を満たす単調写像 φ である.

それでは，ゲームの決定性の話に戻ろう．各プレイヤーの戦略が単調写像とみなせることは明らかであろう．そして，当然ながら，先手側のプレイは，後手側のプレイよりも長さが 1 だけ大きくなり得る．つまり，先手の戦略から生成される単調写像 η は $|\eta(\tau)| = |\tau| + 1$ を満たし，後手の戦略から生成される単調写像 θ は $|\theta(\sigma)| = |\sigma|$ を満たす．つまり，先手の戦略は縮小写像を生成し，後手の戦略は非拡大写像を生成する．以上より，決定性公理が以下の「決定性公理′」を導くことは明らかであろう.

公理 2 (決定性公理′)**.** X を可算集合とし，$X^{\mathbb{N}}$ には標準的な超距離が入っているとする．このとき，任意の集合 $R \subseteq (X^{\mathbb{N}})^2$ に対して，次のいずれか一方が成立する.

1. ある非拡大写像 $\theta\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ が存在して，任意の $x \in X^{\mathbb{N}}$ に対して $(x, \theta(x)) \in R$ が成立する.
2. ある縮小写像 $\eta\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ が存在して，任意の $x \in X^{\mathbb{N}}$ に対して $(\eta(x), x) \notin R$ が成立する.

もはや排中律の面影は消えてしまったが，数学的には極めて明快になったので，実用上は非常に取り扱いやすい．公理を眺めただけではあまり実感が沸かないかもしれないが，この公理のやばいところは，この縮小写像 η である．その恐ろしさについては，これから手を動かして確かめていくこととしよう.

2.2.3 従属選択公理

木と関連する公理は他にも色々とある．その中でも本稿と関連する公理は，従属選択公理である．**従属選択公理** (*axiom of dependent choice*) とは「X 上の $\sqsubseteq$-極大元をもたない木は，無限 $\sqsubseteq$-鎖を含む」ということを述べる公理であり，DC と略記される．もう少し木の用語を利用して，この主張を定式化しよう．木 T における $\sqsubseteq$-極大元は**葉** (*leaf*) と呼ばれる．木 T の**道** (*path*) とは，T の $\sqsubseteq$-鎖，つまり，$\sqsubseteq$ の意味で全順序となっている T の部分集合のことであった.

公理 3 (従属選択公理)**.** X を任意の集合とする．X 上の葉をもたない木は，無限道をもつ.

従属選択公理が**可算選択公理** (*axiom of countable choice*) を導くことはよく知られている.

公理 4 (可算選択公理)**.** 空でない集合の可算列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は空でない.

一般にはフルの選択公理を必要とされる主張でも，可分であるとか可算生成であるとかいった類の条件が付いていれば，可算選択公理または単に ZF で十分であることが多い．

☕ **豆知識．** 余談であるが，可算選択公理の定義において，$A_n \subseteq \mathbb{N}$ などであれば，選択公理なしの集合論 ZF でもこれは証明できる（ZF の時点でかなり強力なので，選択公理なしでもかなりの多くのものを選択できる）．さらに，$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を自然数の算術的定義可能な部分集合の列に制限したものを考えると，これはいわゆる ACA_0 と呼ばれるものに相当する（より正確には，ACA_0 は冪集合公理などを持たず，帰納法公理も制限される）．これをさらに Π_1-定義可能で一様に有界な部分集合の列に制限すれば，WKL_0 である．このようにして，選択公理や従属選択公理にもグラデーションを付けることができ，その強さは深く調べられている．

WKL_0, ACA_0 や ATR_0 などは選択公理なしの集合論 ZF とは比べ物にならないほど遥かに弱いが，解析学や代数学などのそれなりの定理が証明できることが知られている．多くの逆数学者の主要な興味は，反例を探すことに傾倒しているので，たとえば ATR_0 を越えるような強い公理を要求する解析学や代数学の定理を長きに渡って探しているのであるが，少なくとも二階算術で書ける範囲内[*6]では，そのようなものはなかなか見つかっていないようである．

2.3 ☕ 決定性公理についての余談

数理論理学の非専門家でも，決定性公理というものを既に耳にしたことがある人は多いかもしれない．たとえば「決定性公理は選択公理と矛盾する」というような話題はよく目にする．しかしながら，「決定性公理と選択公理が矛盾する」という風説から，公理の二者択一を差し迫られていると錯覚する人もいるようである．われわれの立場を述べると，決定性公理と選択公理のどちらかだけを選ぶ，ということをするつもりはない．

現代の数学者で，たとえば「ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何のどちらか片方しか認めない」という人は存在するだろうか？　古い時代，「空間」とは我々の住む物理空間を指し，それ以外の「空間」は存在せず，幾何は唯一であった．しかし，現代において，数学者は無数の空間を同時に取り扱い，無数の幾何を取り扱っている．複数の矛盾した公理は，無数の数学的構造たちの織りなす豊穣な世界像を与える．

同様に，現代のロジシャンで，「選択公理と決定性公理のどちらか片方しか認めない」という人は殆どいないだろうと思う（どちらも認めない人なら割といそうな気はするが，ここではそれは置いておこう）．集合論寄りのロジシャンの場合は，「選択公理が成立するユニバースと決定性公理が成立するユニバースがある（他にも色々なユニバースがある）」という立場であるか，「大域的には選択公理が成立しているが，局所的には決定性公理が成立している」という立場がほとんどではないだろうか．局所的公理としての決定性公理とは，たとえば，次のようなものである．

定理 2.5. ZFC および，十分に沢山の巨大基数が存在すると仮定する．このとき，$L(\mathbb{R})$ において，決定性公理および従属選択公理が成立する．

---

*6 つまり，可分であるとか可算生成であるような構造（たとえば $\mathbb{R}$ などの第二可算位相空間や，それを基礎型とする有限型の連続汎関数空間など）に対する主張である．ただし，そのような主張も，二階算術で書いた段階で，生成元の枚挙という付加的な情報も与えていることとなる．

ここでの十分に沢山の巨大基数とは，より正確には，無限個のウッディン基数とそれより大きい可測基数の存在である．つまり，**選択公理** $(+\alpha)$ **を仮定すると，決定性公理が**（局所的に）**成立する**のである．そういう意味で，決定性公理は選択公理と相反するものではなく，共存するものであると言える．

また，たとえ巨大基数が存在せずとも，選択公理下で局所的に決定性公理が成立している，ということは，次の定理によっても象徴される．次の定理は，巨大基数は一切不要であり，ZFC から証明される．

定理 2.6 (マーティンのボレル決定性定理 [48])**.** 任意のボレル・ゲームは決定的である．つまり，勝利条件がボレル集合で与えられた無限ゲームは，どちらか一方のプレイヤーが必勝戦略を持つ．

つまり，適用範囲をボレルであるとかいった「良いもの」に制限した場合，決定性公理は ZFC の**定理**となるのである．これもまた公理のグラデーションである．先ほども述べたが，どんな公理も all-or-nothing ではなく，グラデーションを掛けることによって，その価値が見えてくる．

また，マーティンのボレル決定性定理は，可算集合上のゲームだけでなく，任意の集合上のゲームについて成立する．そして，より一般には，ボレル決定性ではなく $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$-決定性が証明されている ($\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ については，定義 4.5 で述べる)．ここで，可算離散空間の可算積はポーランド空間であるから，ボレルと $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ は同値であるが，非可算離散空間の可算積は非可分であり，ボレルよりも $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ の方が広いクラスを与える．

☕ **豆知識.** 決定性公理のグラデーションをもう少し細かく説明しよう．決定性公理の非常に弱いフラグメントである開決定性は RCA_0 上で算術的超限再帰 ATR_0 と同値であり，$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$-決定性は Π^1_1-超限再帰となる．$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_3$ を基とするハウスドルフ-クラトフスキの差の階層の第 m 階級の決定性を示すには $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_m$-内包公理では不足である．$n \geq 4$ について，$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$-決定性を示すためには，$n$ が増えるたびに冪集合公理を要求し，無限ボレル階数では置換公理が必要となり，こうしてボレル決定性は更なる超越性を孕む．このように決定性の適用範囲を広げる毎に超越度は上がっていくが，ボレルまでの決定性であれば，ZFC で証明可能な定理である．

とにかく，筆者がここで強調したいことは，けっして決定性公理と選択公理が対立構造にあるものではない，ということである．しかし，あまり非標準的な公理をすぐに採用するのには抵抗を覚える人がいるかもしれないので，本稿では，次のような比較的標準的な穏健派となろう．

まず，何か無限ゲーム的な議論を用いれば，ある主張が証明できた，という状況を仮定する．マーティンのボレル決定性定理より，その主張をボレル集合やボレル関数の話に制限すれば，普通の人は誰もが認める数学の範囲内での定理となる．しかし，ボレルより広い範囲に決定性の秩序が広がっているかもしれない．そうすると，定理の主張をボレルだけの話に狭めたくない．とはいえ，決定性の境界が曖昧で確定不可能なので，どのような集合や関数に対して，その定理が成立す

るかも曖昧で不確定である．そういうときにこう言って我々はお茶を濁すのである．―決定性の成り立っている範囲内では○○は成立するよ―，と．これが，決定性公理を仮定すると○○は成立する，という定理の意図するところである．

この立場においては，決定性公理の下で○○が成立する，という定理は，たとえ「選択公理下の集合論 ZFC が唯一の数学である」という信念を持つ ZFC 原理主義者にとっても意味をなすのである．

じつは，決定性公理が最初に導入された Mycielski と Steinhaus の 1962 年の論文 [53] の段階で，まさにこれと同じような説明がされている．正確には，1962 年の段階ではボレル決定性は証明されていなかったので，そこへの言及はもちろん無いが，“smaller universum” における局所的公理であるという立場は，ここに書いたものと同様だと思われる．

3 不変記述集合論

3.1 可算群作用と可算ボレル同値関係

本節では，予想 2，すなわちマーティン予想の幾つかの帰結について議論しよう．ただし，本節で考察するものはボレル・マーティン予想と呼ばれる，$\equiv_T$-準同型をボレル写像であるものだけに制限したものである．考察対象をボレル写像などに制限した場合，超越的な公理は不要となる．したがって，本節では決定性公理などは特に仮定しないし，選択公理を仮定してもよい．

さて，**不変記述集合論** (*invariant descriptive set theory*) と呼ばれる分野では，数学に現れる様々な不変量をある種の統一的観点の下で分類しよう，ということが試みられている．不変記述集合論の主な舞台となるものが，標準ボレル空間である．可測空間 $(X, \mathcal{B})$ が**標準ボレル空間** (*standard Borel space*) であるとは，X 上のあるポーランド位相が存在して，$\mathcal{B}$ がその位相の下でのボレル集合全体の σ-加法族と一致することである．

まず，定義 1.3 で導入した，Δ_1-定義可能性による同値関係 $\equiv_T$ を思い出して欲しい．この同値関係 $\equiv_T$ は，標準ボレル空間 $\mathbb{R}$ 上の可算ボレル同値関係をなす．ここで，同値関係が可算であるとは，全ての同値類が可算であることを意味する．可算ボレル同値関係の理論の観点に立つと，$\equiv_T$ は極めて異質な性質を持つ．これについて説明するために，可算ボレル同値関係の理論を概観しよう．

標準ボレル空間上の可算群のボレル作用を考えると，この軌道同値関係は可算ボレル同値関係をなす．逆に，以下のように，任意の可算ボレル同値関係は可算群作用の軌道同値関係によって表されることはよく知られている．

定理 3.1 (Feldman-Moore の定理)**.** 標準ボレル空間 X 上の任意の可算ボレル同値関係は，ある可算群の X 上のボレル作用の軌道同値関係として表される．

最初に，不変記述集合論では，様々な不変量をある種の観点の下で分類することを目指してい

る，と述べた．ここでは，不変量による分類は同値関係を与える，ということに着目する．したがって，不変記述集合論の目的を数学的に単純化して述べれば，それは，異なる同値関係の比較である．形式的には，この比較は，ボレル還元という概念によって行われる．

定義 3.2. 標準ボレル空間 X, Y 上の同値関係 E, F に対して，ボレル写像 $f\colon X \to Y$ が E から F への**準同型** (*homomorphism*) であるとは，

$$xEy \implies f(x)Ff(y)$$

を満たすことを意味する．さらに，逆向きの矢印も成立する場合，つまり $xEy \iff f(x)Ff(y)$ である場合，f を**ボレル還元** (*Borel reduction*) と呼ぶ．E から F へのボレル還元が存在する場合，$E \leq_B F$ と書き，その逆も成立する場合，E と F は**ボレル双還元可能** (*Borel bireducible*) と言い，$E \sim_B F$ と書く．

E が F へボレル還元可能という状況は，E-分類問題を F-分類問題へ帰着できる，ということである．ボレル還元可能性 $\leq_B$ によって，ボレル同値関係全体に前順序が入る．

ボレル還元は，商集合 X/E から Y/F への単射を誘導する．したがって，$E \leq_B F$ ということは，商集合 X/E が Y/F 以下の大きさであるということとして理解することもできる．このため，$\leq_B$ による分類を**ボレル濃度** (*Borel cardinality*) と呼ぶことがある．ボレル濃度の意味では，たとえば $\mathbb{R}$ よりも商集合 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の方が真に大きい（つまり，$\mathbb{R}$ 上の等号 $=_{\mathbb{R}}$ とヴィタリ同値関係 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$ に対して，$=_{\mathbb{R}} <_B E$ である）．また，比較不可能なボレル濃度が無数に存在することも想像に難くないであろう．このように，ボレル濃度に関しては，商集合の方が大きかったり，無数に比較不可能な濃度が存在する，ということは ZF でも ZFC でも成立する定理である．意味を考えれば全く不思議なことではなく，直感的にも当然成り立つべきものである．

さて，本節では可算ボレル同値関係に焦点を絞る．

定義 3.3. 標準ボレル空間上の可算ボレル同値関係 E が**普遍** (*universal*) であるとは，標準ボレル空間上の任意の可算ボレル同値関係 F に対して，$F \leq_B E$ となることを意味する．

つまり，どんな可算ボレル同値関係 F に対する F-分類問題も，E-分類問題に帰着可能である，という性質を持つものである．普遍可算ボレル同値関係の例は大量に知られているが，以下にいくつかリストしよう．

例 3.4. 有限生成群の同型関係，$\mathbb{Q}$ 上有限超越次数の体の同型関係，リーマン面の等角同値関係，局所有限連結グラフの同型関係はいずれも普遍可算ボレル同値関係（とボレル双還元可能）である．

さて，われわれが現在，注目している可算ボレル同値関係は $\equiv_T$ であるが，これは普遍であるだろうか．実は，これは Kechris 予想として知られる未解決問題である．

予想 4 (Kechris 予想 [10])**.** $\equiv_T$ は普遍可算ボレル同値関係である．

さて，Feldman-Moore の定理に戻ろう．任意の可算ボレル同値関係 E は，可算群 G のボレル作用の軌道同値関係で表される．とはいえ，E から G を復元する標準的な方法があるわけではない．この復元が可能であるためには，G が X 上自由に作用しており，X 上の G-不変確率測度が存在する必要がある，ということが知られている．それでは，任意の可算ボレル同値関係は，上記を満たすような可算群 G の作用の軌道同値関係にボレル双還元可能であるだろうか．実は，後者の不変確率測度の存在については特に問題はないことが分かる．問題となるのは，前者である．

定義 3.5. 標準ボレル空間 X 上の可算ボレル同値関係が**自由** (*free*) であるとは，X に自由にボレル作用する可算群の軌道同値関係として表されることを意味する．可算ボレル同値関係 E が自由な可算ボレル同値関係とボレル双還元可能であるとき，E は**本質的自由** (*essentially free*) であると呼ばれる．

この分析のために，弱普遍性という概念を導入する．

定義 3.6. ある普遍可算ボレル同値関係以上に細かい可算ボレル同値関係は**弱普遍** (*weakly universal*) と呼ばれる．

Thomas は，Popa のコサイクル超剛性定理 (Popa's cocycle superrigidity theorem) を応用して，弱普遍可算ボレル同値関係は本質的自由でないことを示した．

定理 3.7 (Thomas [75])**.** 任意の弱普遍可算ボレル同値関係は本質的自由でない．

特に，E_∞ などは本質的自由ではない．自然に数学に現れる可算ボレル同値関係で，本質的自由ではないものは，この手の普遍可算ボレル同値関係に限られている．それでは，そのような普遍可算ボレル同値関係以外に，本質的自由でないものはあるだろうか．Thomas の定理 3.7 より，弱普遍だが普遍ではない可算ボレル同値関係を見つければよい．

弱普遍であることは判明しているが普遍であるかどうか分かっていない例としては，Kazhdan 群の間の同型関係と双埋め込み関係であるとか，有限生成従順群の間の同型関係などがある．

予想 5 (Hjorth 予想 [2])**.** 可算ボレル同値関係について，弱普遍性と普遍性は一致する．

もうひとつ，弱普遍であることは分かっているが，普遍であるかどうかは判明していない可算ボレル同値関係の例がある．それは，Δ_1-双定義可能性 $\equiv_T$ である．Kechris 予想より，$\equiv_T$ の普遍性は未解決であると述べたが，実は，Kechris は $\equiv_T$ が弱普遍であることを指摘している．したがって，もし Hjorth 予想が真ならば，Kechris 予想も真であることが分かる．

さて，そろそろマーティン予想が如何にこれらの研究と関わってくるかについて述べよう．Dougherty-Kechris [10] は，マーティン予想を仮定すると Kechris 予想が否定される，すなわち

$\equiv_T$ は普遍ではないことが導かれることを示したのである．したがって，以下が成立する．

$$\text{マーティン予想は真} \implies \text{Kechris 予想は偽} \implies \text{Hjorth 予想は偽}$$

これら上記の観測を合わせることによって，Thomas は定理 3.7 の帰結として，$\equiv_T$ が以下の特筆すべき性質を持つことを指摘した．

定理 3.8 (Thomas [74])**.** *マーティン予想を仮定すると，$\equiv_T$ は本質的自由でも普遍でもない可算ボレル同値関係である．*

マーティン予想は，他にも可算ボレル同値関係の理論に様々な帰結を持つ．まずは弱普遍性に注目しよう．歴史を述べると，弱普遍性に関する Hjorth 予想は，可算群の部分群の空間上の共役同値関係の研究の下で提出された．たとえば，G が非アーベル部分群を持つ可算群ならば，G の部分群の空間上の共役同値関係は普遍可算であることが知られている．

定理 3.9 (Thomas [76])**.** *マーティン予想を仮定する．任意の可算群 G に対して，以下の 2 条件は同値である．*

1. 軌道同値関係が弱普遍となる G のボレル作用が存在する．
2. G の部分群の空間上の共役同値関係は弱普遍可算である．

他にも，たとえば，マーティン予想を仮定すると，弱普遍可算ボレル同値関係の複雑性は常に零集合に集中することが分かる．

定理 3.10 (Thomas [74])**.** *マーティン予想を仮定する．E を標準ボレル空間 X 上の可算ボレル同値関係とし，μ を X 上のボレル確率測度とする．このとき，μ-測度 1 のある E-不変ボレル集合 $Y \subseteq X$ が存在して，$E \upharpoonright Y$ は弱普遍ではない．*

別の問題として，超有限ボレル同値関係に関するものがある．ボレル同値関係が**超有限** (*hyperfinite*) であるとは，それが $\mathbb{Z}$-作用の軌道同値関係となることである．これは，有限ボレル同値関係の可算増大和として書けることと同値である．Boykin と Jackson は超有限ボレル同値関係の可算増大和について考察した．ボレル同値関係が**超超有限** (*hyperhyperfinite*) とは，それが超有限ボレル同値関係の可算増大和として書けることである．問題は，超有限性と超超有限性が同値であるか，という点である．Boykin と Jackson はボレル有界性の概念を定義し，超超有限ボレル同値関係が超有限であることとボレル有界であることが同値であることを示した．一方，ボレル有界でない可算ボレル同値関係の例が現在までに見つかっていないということが指摘された．

この問題も，マーティン予想の仮定の下で解決する．

定理 3.11 (Thomas [74]). マーティン予想を仮定する．このとき，可算ボレル同値関係について，弱普遍ならばボレル有界ではない．

これらの応用は，$\equiv_T$ の振る舞いが，古今東西のありとあらゆる同値関係とは全く違う，という点によるものである．もう少し詳細を述べれば，

$\equiv_T$ の構造は異常に複雑なのに，$\equiv_T$ から $\equiv_T$ への準同型は非常に単純なものしかない

というものがマーティン予想の帰結であって，それがどうやら既知の可算ボレル同値関係とは掛け離れた性質を生み出しているようだ．また，マーティン超フィルターの手法が，測度論的手法の手の届かない領域に踏み込むことができる強力な道具足り得ることを示唆している．

3.2　一様準同型と一様普遍性

標準ボレル空間 X, Y に作用する可算群 G, H の軌道同値関係 E_G^X, E_H^Y を考えよう．ここで，群 H は Y に自由に作用していると仮定する．E_G^X から E_H^Y へのボレル準同型 $h\colon X \to Y$ が与えられているとする．準同型の定義と自由性から，任意の $x \in X$ と $g \in G$ について，

$$g \cdot x = y \implies \alpha(g, x) \cdot h(x) = h(y)$$

となる唯一の $\alpha(g, x) \in H$ が存在する．このように定義される $\alpha\colon G \times X \to H$ はボレル準同型 φ に付随する G-作用の**ボレル・コサイクル** (*Borel cocycle*) と呼ばれる．可算ボレル同値関係の理論において，コサイクル超剛性定理と呼ばれる様々な主張の幾つかの応用が知られている．ここで用いられるのは，大雑把に言ってしまえば，ある種の群作用のコサイクルは大きな集合（余零集合など）上で群準同型に（共役）同値であるという類の主張である．これより，群準同型 $u\colon G \to H$ を G-作用のコサイクルとして持つ E_G^X から E_H^Y へのボレル準同型 $\tilde{h}\colon X \to Y$ を得られる：

$$g \cdot x = y \implies u(g) \cdot \tilde{h}(x) = \tilde{h}(y).$$

このような $\tilde{h}$ を**一様準同型** (*uniform homomorphism*) と呼ぶ．言い換えれば，$\tilde{h}$ が一様準同型であるとは，ある $u\colon G \to H$ が存在して，

$$xE_G^X y \ \text{ via } g \implies \tilde{h}(x) E_H^Y \tilde{h}(y) \ \text{ via } u(g)$$

となることと言い表せる．

この概念を一般化しよう．X を標準ボレル空間とし，$\varphi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上のボレル部分写像の可算列で，恒等関数を含み合成で閉じているものとする．ここで，あるボレル集合 $A_n \subseteq X$ について，$\varphi_n\colon A_n \to X$ となるものがボレル部分写像と呼ばれる．そのような可算列としては，たとえば X にボレル作用する可算群 G の元の枚挙 $G = \{g_n\}$ が一例である．このような φ が与えられたとき，同値関係 E_φ を次によって定義する．

$$xE_\varphi y \iff (\exists d, e)\ [\varphi_d(x) = y \text{ and } \varphi_e(y) = x].$$

定義 3.12. いま，X および Y 上のボレル部分写像の可算列 φ, ψ が与えられているとする．このとき，$h\colon X \to Y$ が (φ, ψ) に関する**一様準同型** (*uniform homomorphism*) であるとは，ある $u\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ が存在して，

$$xE_\varphi y \ \text{ via } (d,e) \implies h(x)E_\psi h(y) \ \text{ via } u(d,e)$$

を満たすことである．

スティール予想とは，$\equiv_T$ から $\equiv_T$ への任意の準同型はマーティン測度 1 上で一様準同型である，という予想であった．上に述べたコサイクルに関する観測と比較すれば，スティール予想はある種の超剛性に対応するものかもしれない．しかし，定理 3.8 より，$\equiv_T$ が本質的自由ではない，すなわち可算群の自由な作用からは得られない，という所に困難な点があるようである．

さて，ボレル還元の概念についても，次のように一様性を考えることができる．

定義 3.13. 定義 3.12 における h がボレル写像であって，逆向きの矢印も成立する場合，h は**一様ボレル還元** (*uniform Borel reduction*) と呼ばれる．

一様準同型および一様ボレル還元の概念は，生成子 φ, ψ の選択に依存することに注意する．また，普遍性の定義を一様ボレル還元に置き換えることによって，（生成子に相対的な）**一様普遍性** (*uniform universality*) の概念を定義することができる．

$$\text{ある生成子に対して一様普遍} \iff \text{普遍} \implies \text{弱普遍}$$

2018 年現在までに普遍性が知られている可算ボレル同値関係は，任意の生成子に対して一様普遍であろうと考えられているようである．これに対して，Marks は次の予想を立てた．

予想 6 (Marks 予想 [47])**.** 可算ボレル同値関係が普遍であることと任意の生成子に対して一様普遍であることは同値である．

これはスティール予想のボレル同値関係版と見ることもできる．さて，Slaman-Steel の定理より，$\equiv_T$ は標準的な生成子に対して一様普遍でないことが分かっている．よって，以下が成立する．

$$\text{Marks 予想は真} \implies \text{Kechris 予想は偽}$$

Marks 予想の仮定の下で，可算ボレル同値関係に関する様々な問題が解決することを Marks は示している．さて，その他の一様普遍性と関わる重要な例を少し紹介しよう．

定義 3.14. 関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が Δ^0_1 であるとは，f のグラフが Δ^0_1 定義可能であることとする．集合 Z に対して，$x, y \in Z^{\mathbb{N}}$ が与えられているとする．x が y に**多対一還元可能** (*many-one reducible*)

であるとは，ある Δ^0_1 関数 $\theta\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が存在して，$x=y\circ\theta$ を満たすことを意味する．このとき，$x\leq^Z_m y$ と書く．$Z=2$ のとき単に $x\leq_m y$ と書く．

多対一還元 $\leq_m$ は $\leq_T$ より目が細かいことに注意する．また，第 1 マスターコードによって，$\equiv_T$ は $\equiv_m$ に一様ボレル還元可能である．

$$x\leq_m y \implies x\leq_T y \iff x^{(1)}\leq_m y^{(1)}.$$

Z が可算集合であるとすれば，$Z^{\mathbb{N}}$ には自然に標準ボレル空間の構造が入り，実際，$\equiv_T$ は $\equiv^Z_m$ に一様ボレル還元可能であることが分かる．さて，多対一同値性の興味深いところは，以下のように，一様普遍か否かの境界線付近にあるという点である．

定理 3.15 (Marks [47])**.** $2^{\mathbb{N}}$ 上の多対一同値関係 $\equiv_m$ は一様普遍ではない．一方，$3^{\mathbb{N}}$ 上の多対一同値関係 $\equiv^3_m$ は一様普遍可算ボレル同値関係である．

実際，$|Z|\geq 3$ ならば，$\equiv^Z_m$ は一様普遍である．さて，$\equiv_T$ は $\equiv^Z_m$ に一様ボレル還元可能であると述べた．ここから興味が沸くのは，$\equiv_T$ から $\equiv^Z_m$ への一様ボレル準同型にはどのようなものがあるのか，そして $|Z|\leq 2$ と $|Z|\geq 3$ でどのような違いがあるのか，という点である．また，第 1.3 節の観点に立ち返ると，$\equiv_T$ から $\equiv^Z_m$ への一様ボレル準同型は，実数というか自然数列（の構成）の分類という観点からも非常に興味深い．これについてもう少し詳しく説明しよう．

$\leq_m$-前順序の商構造を $\mathbf{R}^Z_m$ と書くことにし，$Z=2$ のときは $\mathbf{R}_m$ と書くことにする．$\leq_m$-順序構造 $\mathbf{R}_m$ も $\leq_T$-順序構造 $\mathbb{R}_T$ と同様に，最小元を持つが最大元を持たない連続体濃度の局所可算上半束をなすが，束ではない．任意の可算分配束は，$\mathbf{R}_m$ のある始切片と同型である．

一方で，$\leq_m$-順序 $\mathbf{R}_m$ は $\leq_T$-順序 $\mathbb{R}_T$ と比べると等質に近い．ほとんどの上半錐が非同型である $\mathbb{R}_T$ とは対照的に，$\mathbf{R}_m$ において，全ての上半錐は同型である．また，$\mathbb{R}_T$ に高々可算個しか自己同型が存在しない一方で，$\mathbf{R}_m$ には $2^{2^{\aleph_0}}$ 個の自己同型が存在する．

このように，$\leq_m$-順序構造は $\leq_T$-順序構造と多少異なった様子を見せる．こんなところにして，これ以上，$\leq_m$-順序の詳細な構造に深入りするのはやめておこう．さて，$\leq_m$-順序の良い点は，$\leq_T$-順序より細かいものの，その細かさが適切であるという部分である．たとえば，再帰理論における殆どの重要な概念は $\equiv_m$ に関して不変だが，そのうちの幾つかについて $\equiv_T$ に関しては不変ではない，ということである．具体的には，$\Sigma^i_n,\Pi^i_n,\Delta^i_n$ などは $\equiv_m$-不変であるが，そのうち Σ^i_n と Π^i_n は $\equiv_T$-不変ではない．したがって，実数の詳細な分析のためには $\mathbb{R}_T$ よりも $\mathbf{R}_m$ を見る方が適切という考え方もある．その際，$\equiv_m$ に対するマーティン予想の適切な定式化のために，以下の観測が有用である．

定理 3.16 (Becker [3])**.** $\equiv_T$ から $\equiv_T$ への任意の一様準同型写像は，$\equiv_T$ から $\equiv_m$ へのある一様準同型写像と $\equiv^{\triangledown}_T$-同値である．

つまり，現在までに知られている限りの実数 $x \in \mathbb{R}$ の次数不変な構成法というものは，$\equiv_T$ から $\equiv_T$ への一様準同型というだけでなく，$\equiv_T$ から $\equiv_m$ への一様準同型写像となっている．

そういうわけで，$\equiv_T$ から $\equiv_m$ への一様準同型の構造を知りたい．$\equiv_T$ よりも細かい構造を見て何が分かるか，と思うかもしれない．しかし，$\equiv_T$ から $\equiv_T$ への一様準同型のなすマーティン順序は（殆ど至る所定数な写像を取り除けば）整列順序をなすので，整然としすぎて逆に構造が見えない．したがって，実はむしろ $\equiv_T$ から $\equiv_m^Z$ への一様準同型のなす順序のような複雑な構造を見た方が，逆に，その本質が明瞭に分かるのである．それどころか Z よりも更に複雑なものを考えた方がより分かりやすい．

定義 3.17. $\mathcal{Q}$ を前順序とする．$x, y \in \mathcal{Q}^{\mathbb{N}}$ および $c \in \mathbb{R}$ に対して，次のように c 上多対一前順序 $\leq_m^{\mathcal{Q},c}$ を定義する．

$$x \leq_m^{\mathcal{Q},c} y \iff (\exists \theta \in \Delta_1^0(c))(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x(n) \leq_{\mathcal{Q}} y \circ \theta(n).$$

たとえば，Z 上の離散順序を考えれば，$\leq_m^{Z,0}$ は定義 3.14 の多対一前順序 $\leq_m^Z$ と一致する．また，$\mathbb{N}$ 上の通常の全順序を考えれば，$\leq_m^{\mathbb{N},c}$ は自然数上の関数の増大度のある基準での比較をしている．

定義 3.18. $\mathcal{Q}$ を前順序とする．$\equiv_T$ から $\equiv_m^Z$ への一様準同型 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{Q}^{\mathbb{N}}$ に対して，f が g に**錐上多対一還元可能** (*many-one reducible on a cone*) とは，次によって定義される．

$$f \leq_{\mathbf{m}}^{\nabla} g \iff (\exists c \in \mathbb{R})\ \ f(x) \leq_m^{\mathcal{Q},c} g(x) \ \ \text{for } \mathfrak{M}\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}$$

若干，定義が複雑に見えるかもしれないが，ある定数 c の力を借りれば，マーティン測度の意味で殆ど全ての入力 $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x)$ が $g(x)$ に多対一還元可能である，と述べている．本稿では，この構造こそが，再帰理論的な観点による実数（あるいは $\mathcal{Q}$ 値列）の究極的解析である，と主張したい[*7]．そして，もし $\mathcal{Q}$ として有限前順序や整列順序などの "ベター" な擬順序を取ってくれば，その構造が明確に分かる，というのが以下の木原-Montalbán [31] による同型性定理である．

定理 3.19 (同型性定理)**.** AD^+ を仮定する．任意のベター擬順序 $\mathcal{Q}$ に対して，次の 2 つの順序構造は同型である．

1. $\equiv_T$ から $\equiv_m^{\mathcal{Q}}$ への一様準同型写像全体のなす錐上多対一順序構造.
2. 非コンパクト非可算な可分完備超距離化可能空間 X 上の $\mathcal{Q}$ 値写像全体のなす連続還元

[*7] 本当は，錐上多対一還元の定義における $\leq_m^{\mathcal{Q},c}$ の部分の定数 c は外したいのだが，それが構造に与える影響は現時点では未知数である．

順序構造.

条件 (2) を満たす空間の例としては，p 進数体の（p 進距離による）空間 $\mathbb{Q}_p$, 可算無限離散空間 X の可算直積 $X^{\mathbb{N}}$（無限語の空間），あるいは実質同じだが無理数の空間 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ などもある．もちろん，AD$^+$, ベター擬順序，連続還元順序などの用語はまだ定義していない．しかし，とりあえず，$\equiv_T$ から $\equiv^{\mathcal{Q}}_m$ への一様準同型写像全体の構造を知るには，その連続還元順序構造とやらを調べればよいということが分かった．これについては，次以降の節で詳細に述べることとしよう．

3.3 ☕ 計算可能性理論の応用

不変記述集合論のこむずかしい話が続いて，そろそろ頭が疲れてきた頃かもしれない．そこで，頭休めのために，話題をちょっとだけ切り替えよう．注意しておくと，このコーヒーブレイクの話題は，不変記述集合論とは全く無関係である．

3.3.1 巨大関数の増大度比較

まず，同型性定理 3.19 のちょっとした遊びへの応用を述べておこう．定義 3.17 で多対一前順序を導入した．自然数上の標準的な順序 $(\mathbb{N},\leq)$ を基にして，定義 3.17 に従って $c=0$ に対する多対一前順序を作ると次のようになる．

$$f\leq_{\mathrm{maj}} g \iff \exists\,\text{計算可能}\ \theta\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ f(n)\leq g(\theta(n)).$$

つまり，g が増大関数ならば，g に少し計算可能なスピードアップを噛ませれば，f よりも増大する，という感じである．この maj の意味としては majorize のつもりである．計算可能関数の比較には使えないが，計算不可能な増大関数の増大度比較としては妥当な定義であると思われる．

この $\leq_{\mathrm{maj}}$-順序がどのような構造をしているだろうか．しかし，すべての関数 f と g を考えた場合，$\leq_{\mathrm{maj}}$-順序の構造が極めて複雑であろうということは想像に難くない．そういうわけで，われわれは代わりに f と g の指名法，つまりパラメータをタネに f や g を生成する高階関数 $\hat{f},\hat{g}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を考える．もう少し正確には，$\equiv_T$ から $\equiv_{\mathrm{maj}}$ への一様準同型を考えよう．ふつうに思いつく計算不可能巨大関数（の定義式）を考えると，いずれも $\equiv_T$ から $\equiv_{\mathrm{maj}}$ への一様準同型になっていると思ってよい．このとき，定義 3.18 から得られる $\leq^{\triangledown}_{\mathrm{maj}}$ を用いて，計算不可能巨大関数（の定義式）の増大度を比較しよう．

同型性定理 3.19 の帰結を連続還元順序の定義を少し先取りして説明しよう．自然数列の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ には，離散空間 $\mathbb{N}$ の可算積としての位相が入っているとする．自然数列の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ から自然数 $\mathbb{N}$ への関数全体の族に次の前順序 $\leq_{\mathrm{top}}$ を入れる．

$$f\leq_{\mathrm{top}} g \iff \exists\,\text{連続写像}\ \theta\colon\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ \forall x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ f(x)\leq g(\theta(x))$$

同型性定理 3.19 の主張するものとは何かというと，$\leq^{\triangledown}_{\mathrm{maj}}$ と $\leq_{\mathrm{top}}$ が同型な順序を与える，というものである．なんと，計算可能性の話が連続性の話になってしまった！　計算不可能巨大関数を

作るゲームは，位相的に如何にやばい関数を作るか，というゲームにいつの間にかすり替わってしまったのである．そして，連続還元順序の理論を用いると，$\leq_{\mathrm{top}}$ が整列順序を与えることを示すのは難しくない．したがって，定義式が一様準同型となるような巨大関数の増大度順序は，整列順序というとてつもなく単純な順序となることがわかる．

そういうわけで，同型性定理 3.19 は様々な一様準同型の構造を，連続還元順序と呼ばれる位相空間論的な順序に移し替えてしまうのである．後の節では，同型性定理を適用する前の順序が “ベター” である限り，この連続還元順序という位相的順序が常に極めて単純であることを示す．そして，その証明のための主張な道具が**計算可能性理論** (*computability theory*) である．

3.3.2 計算可能性をどう応用するか？

計算可能性（コンピュータビリティ）の数学への応用と聞くと，もしかしたら Appel-Haken による四色問題の解決であるとか，Hales によるケプラー予想の証明であるとかを思い浮かべてしまう人がいるかもしれない．しかし，これらは残念ながら，計算可能性理論の応用とはいえない．コンピュータを用いた証明支援と，コンピュータビリティを用いた証明は全く別物である．Hales らによって 2017 年に出版されたケプラー予想の形式証明については，米国で計算可能性理論を研究している（していた）知人も共著者に入っているが，特にコンピュータビリティの知識は一切使っていないようである．

それでは，計算可能性理論の応用とは如何なるものであろうか．ここでは 2 つ例を挙げよう．ただし，本稿の内容とはあまり関わりがないので，読み飛ばしてしまっても構わない．

■ガンディ-ハーリントン位相: ボレル集合やボレル可測写像の研究と計算可能性理論の関わりの歴史は古く，1950 年代まで遡る．しかし，計算可能性理論の有用性として最もよく知られたものは，1990 年に示されたもので，不変記述集合論におけるボレル同値関係の理論における，Glimm-Effros のダイコトミー (Glimm-Effros dichotomy) の拡張だと思われる．

先に述べたように，ボレル同値関係の理論は，群作用の軌道同値関係と深い関わりをもつ．Glimm は，第二可算局所コンパクト変換群作用の軌道同値関係に関するある種のダイコトミーを示した．そのような同値関係は，滑らかである（実数値完全不変量を持つ）または非自明なエルゴード的測度を持つ（滑らかでないような超有限ボレル同値関係を連続的に埋め込める）という形の二者択一が成立するのである．詳しくは知らないが，元々は，C^*-環と群の表現論における Mackey の「滑らかな双対 $\Leftrightarrow$ I 型」予想の証明から出てきたらしい．Glimm 自身は，作用素環論における，任意の II_1 型因子は超有限 II_1 型因子を含む，という事実の類似物であると述べている．

Effros は一般のポーランド変換群作用を考察し，もし誘導される同値関係が F_σ ならば，同じダイコトミーが成立することを示すことによって，Glimm の定理を拡張した．同じ論文内で，Effros は上記の Mackey 予想の別証明を与えている．

それからしばらくして，Harrington, Louveau および Kechris [21] は，Glimm-Effros のダイコトミーの大規模な拡張を与えた．群作用から誘導される同値関係である必要もなく，F_σ どころか任意のボレル同値関係で，全く同じダイコトミーが成り立つことを示したのである．これは，整数

列全体の集合に**ガンディ-ハーリントン位相** (*Gandy-Harrington topology*) と呼ばれる，計算可能コードを持つ解析集合を開基とする位相を入れる手法による．これは，極めて強力なダイコトミーを与えるので，不変記述集合論における基本定理のひとつとなった．

ガンディ-ハーリントンの手法を同値関係の理論に応用すること自体は，これ以外にも，たとえば Harrington [22] による余解析的同値関係に関する Silver のダイコトミーの別証明などが既に知られていた．Silver の最初の証明は超限回の冪集合公理の適用が必要なものであったが，Harrington は，この計算可能性理論的な位相を用いて，圧倒的に簡単な「冪なし証明」を与えたのである．

ガンディ-ハーリントン位相のその他の応用としては，Louveau の分離定理 [38] などがある．ある種の単層化定理の精密化として，セクション問題というものがあった．$\xi = 1$ のときは Dellacherie, $\xi = 2$ のときは Saint-Raymond, $\xi = 3$ のときはジャン・ブルガン (Jean Bourgain) によってこの問題は解かれた．では，$\xi = 4, 5, \dots$ ではどうか，ということになるが，そこへ Louveau が持ち出したものがガンディ-ハーリントン位相である．これによって，全ての ξ に対して，セクション問題は一気に解かれることとなった．Louveau は，この問題の解決のために，Louveau の分離定理と呼ばれる定理を証明した．これは記述集合論と計算可能性理論を結び付ける極めて強力な定理であり，その後の展開を考えると，セクション問題の解決よりも，むしろこの分離定理の発見の方が遥かに重要であった．

■整定時刻とビジービーバー:　1950 年代に有限表示群の語の問題のアルゴリズム的非可解性が明らかになって以来，トポロジーの様々な問題に対して計算可能な解法が存在しないことが示されることとなった．たとえば，マルコフは 4 次元以上の多様体の同相性判定問題を解く計算可能な方法が存在しないことを示し，ノヴィコフは，5 次元以上の多様体の微分同相性判定問題の計算可能な解法の非存在を示した．

しかし，これはあくまで判定問題の計算不可能性に関する定理であって，純粋なトポロジーの定理とは言い難い．この段階からもう一歩だけ足を踏み出そう．1981 年，グロモフは，もしコンパクト・リーマン多様体 M の基本群の語の問題が**計算可能な解法を持たない**ならば，M は無限個の可縮な閉測地線を持つことを証明した．1996 年，Nabutovsky [54] はグロモフの定理を改良した．彼の示したことは，コンパクト・リーマン多様体 M の基本群の語の問題のコルモゴロフ複雑性に依存するある定数 c_M に対して，M の長さ x 以下の可縮な閉測地線の個数が高々 c_M^x 個であるということであった．

ここまで来ると，単に計算不可能云々という話ではなく，計算可能性理論によって幾何学的な対象に関する不等式を与えていて徐々に面白くなってくる．この方針を Nabutovsky と Weinberger は更に進めていった．5 次元以上の滑らかなコンパクト多様体 M に対して，$\mathrm{Riem}(M)$ を M 上のリーマン計量の空間とし，微分同相の差を同一視する．つまり，リーマン計量のモジュライ空間 $\mathrm{Met}(M) = \mathrm{Riem}(M)/\mathrm{Diff}(M)$ を考える．Nabutovsky と Weinberger [55] が得たものは，リーマン計量のモジュライ空間のフラクタル的特性に関する純粋に微分幾何学的な定理である．ただし，定理の主張はかなり複雑なので，ここでは，どのような計算可能性理論が使われたかについてのみ紹介しよう．

自然数の Σ_1 集合の（枚挙に対する）**整定時刻** (*settling time*) とは，関数 $m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ であって，時刻 $m(n)$ 以降は n 未満の元が枚挙されないような最小値を与えるもののことである．たとえば，停止問題の整定時刻は，**ビジービーバー関数** (*Busy Beaver function*) とほとんど等しい増大度である．そして，微分幾何学に応用されたものは，「どんな計算可能関数よりも急増大するが，ビジービーバー関数ほどは急増大しない」ような整定時刻の分析であった．

整定時刻の早さを比較する順序を導入しよう．関係 $A \ll B$ とは，A の整定時刻よりも B の整定時刻の方がビジービーバー的に急増大することとして定義される．より正確には，A と B の任意の枚挙アルゴリズムに対して，どんな計算可能関数 f に対しても，ほとんど全ての $n \in \mathbb{N}$ について，整定時刻が $f(m_A(n)) < m_B(n)$ を満たすことである．

Nabutovsky と Weinberger [55] は，この整定時刻順序の下降列を利用して，リーマン計量のモジュライ空間の幾何に関する定量的情報を与えた．「どんな計算可能関数よりも急増大する計算不可能巨大関数」の理論が微分幾何学に応用されるとはちょっと驚きかもしれない．この定理も証明手法も非常に興味深いものであったが，しかし，そこまで汎用性が高いものではなかったのか，あくまで単発の定理として収束してしまったようだ．既に 20 年近い月日が経ったが，少なくとも計算可能性理論の微分幾何学への応用という方向性では，残念ながら，その後の発展はあまり見られなかったようである．

■近年の計算可能性理論の応用:　これら 2 つの応用は，非常に興味深いとはいえど，もうかなり古い話題である．計算可能性理論の外の分野の未解決問題の（部分的）解決のために計算可能性理論を用いる，という試みは近年にも幾つかあるので，ここ数年の応用についても文献を紹介しておこう．

最初に，モデル理論における**ヴォート予想** (*Vaught conjecture*) である．計算可能性理論を用いたヴォート予想へのアプローチは古くから知られているが，近年の Montalbán の定理 [50, 51] は非常に興味深い．ヴォート予想を解決に導いたわけではないが，**超算術的イズ計算可能** (*hyperarithmetic-is-recursive*) による特徴付けは，それ自身が高い価値を持つものである．

計算可能性理論を用いて記述集合論における未解決問題に部分的解決あるいは完全解決を与えた最近の例としては，木原 [30], 木原-Pauly [33], Gregoriades-木原-Ng [20] などがある．次節以降で取り扱う本稿の内容もまた，記述集合論への計算可能性理論の応用である．

幾何学的測度論においては，2 次元掛谷予想に関する Davies の定理に対して，Lutz-Lutz [41] はコルモゴロフ複雑性を用いた別証明を与えている．また，Lutz-Stull [42, 43] は，計算可能性理論を用いて様々なフラクタル幾何学の定理を証明している．

4　ワッジ理論

4.1　位相複雑性の階層理論

4.1.1　古典的階層構造

位相空間の部分集合として，開集合，閉集合，G_δ 集合，ボレル集合，射影集合など様々なものがある．これらの概念を分類するための位相複雑性の階層概念が古くから研究されている．さて，多くの位相的階層構造は，対をなす概念がずらりと整列しているような形状をしている．たとえば，開集合に対する閉集合，G_δ 集合に対する F_σ 集合，など，いくつかの概念は対をなす．

定義 4.1. 位相空間 X の部分集合族 Γ が与えられたとき，$\neg\Gamma = \{X \setminus A : A \in \Gamma\}$ を Γ の双対と呼ぶ．集合族 Γ が**自己双対** (*selfdual*) であるとは，$\Gamma = \neg\Gamma$ を満たすことである．

例 4.2. 開集合全体の族の双対は，閉集合全体の族である．よって，たとえば $\mathbb{R}$ の開集合全体の族や閉集合全体の族は自己双対ではない．一方，開かつ閉な集合全体の族やボレル集合全体の族は自己双対である．

記述集合論における最も重要な階層構造は，ボレル階層および射影階層である．

定義 4.3. ポーランド空間 X を固定する．開集合全体の族を $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ と書く．与えられた可算順序数 α に対して，$\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_\alpha$ を $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\alpha$ の双対とする．また，$\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\alpha$ を $\bigcup_{\beta<\alpha} \undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_\beta$ に属す集合の可算和として書ける集合全体の族とする．さらに，$\undertilde{\mathbf{\Delta}}^0_\alpha = \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\alpha \cap \undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_\alpha$ と書く．このとき，$\bigcup_{\alpha<\omega_1} \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\alpha$ はボレル集合全体の族と一致する．このようなボレル集合の階層分類は，**ボレル階層** (*Borel hierarchy*) と呼ばれ，記述集合論などで幅広く用いられる．

例 4.4. X をポーランド空間とする．$\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2 = F_\sigma$ かつ $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_2 = G_\delta$ である．また，$\undertilde{\mathbf{\Delta}}^0_\alpha$ は自己双対であるが，$\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\alpha$ や $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_\alpha$ は自己双対ではない．

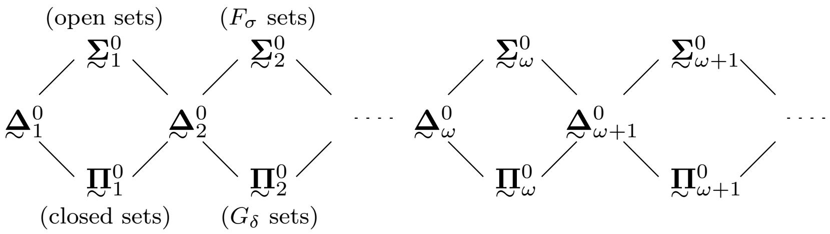

図 6　ボレル階層

豆知識. 擬ポーランド空間の記述集合論では，少し異なるボレル階層を導入する．一般の擬ポーランド空間は完全空間（任意の閉集合が G_δ であるような空間; G_δ-空間とも呼ばれる）とは限らないからである．

定義 4.5. ポーランド空間 X, Y を固定する．$X \times Y$ の閉集合の X への射影として得られる集合全体の族を $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ と書く．与えられた順序数 α に対して，$\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_\alpha$ を $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_\alpha$ の双対とする．また，$X \times Y$ の $\bigcup_{\beta<\alpha} \undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_\beta$ に属す集合の X への射影として書ける集合全体の族を $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\alpha$ と書く．さらに，

$\mathbf{\Delta}^1_\alpha = \mathbf{\Sigma}^1_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^1_\alpha$ と書く．$\mathbf{\Sigma}^1_1$ に属す集合は，**解析集合** (*analytic set*) とも呼ばれ，$\mathbf{\Pi}^1_1$ に属す集合は，**余解析集合** (*coanalytic set*) とも呼ばれる．この階層は，**射影階層** (*projective hierarchy*) と呼ばれ，集合論の様々な分野における主要な興味の対象である．

例 4.6. X をポーランド空間とする．**ススリンの定理** (*Suslin's theorem*) より，$\mathbf{\Delta}^1_1$ はボレル集合全体の族と一致する．$\mathbf{\Sigma}^1_1$ に属す集合は解析集合とも呼ばれる．$\mathbf{\Delta}^1_\alpha$ は自己双対であるが，$\mathbf{\Sigma}^1_\alpha$ や $\mathbf{\Pi}^1_\alpha$ は自己双対ではない．

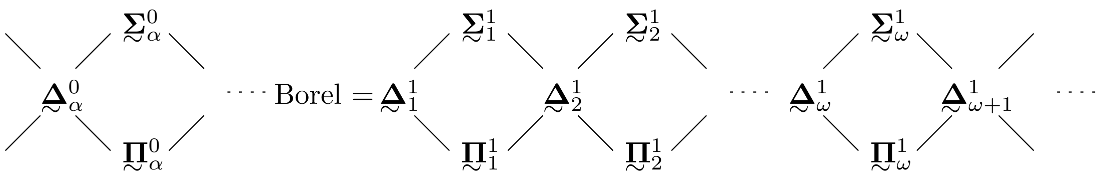

図 7　射影階層

上の例のように，記述集合論などの分野においては，位相複雑性に関する様々な階層が主要な興味の対象である．しかし，これらの階層は究極的なものではない．階層の隙間をルーペで拡大すれば，更なる他の階層構造が見えることがある．たとえば，$\mathbf{\Sigma}^0_1$ と $\mathbf{\Delta}^0_2$ は本当は隣り合っていない．事実，ハウスドルフは，$\mathbf{\Sigma}^0_1$ と $\mathbf{\Delta}^0_2$ の間に**差の階層** (*difference hierarchy*) と呼ばれることになる超限階層が存在することを発見した．クラトフスキは，これと同様の現象を一般の $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ と $\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$ の間に見出した．

射影階層になると状況はますます悪化する．射影階層の各階数の隙間はとてつもなく広大であり，たとえば $\mathbf{\Sigma}^1_1$ と $\mathbf{\Delta}^1_2$ との間には驚異的なギャップがある．じつは $\mathbf{\Sigma}^1_1$ と $\mathbf{\Delta}^1_2$ は，微生物と宇宙空間くらいには全くスケールの異なるものであり，その深淵を少しでも覗き込めば，$\mathbf{\Delta}^1_2$ の途方もない巨大さに圧倒されることであろう．その中間部の解析の試みは，1920 年代の記述集合論や測度論によってなされ，ニコディムやコルモゴロフらによって C-階層や R-階層というものが研究された．これらは $\mathbf{\Sigma}^1_1$ を始点とする超限階層であるが，まったく $\mathbf{\Delta}^1_2$ の裾野にも達しないのである．

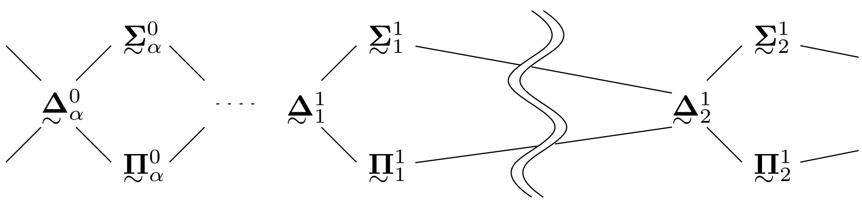

図 8　射影階層の正しいイメージ

この辺りが ZFC 集合論の手の届く限界であり，射影階層は，集合論的独立命題の温床なのである．この事実が知られるのは 1960 年代以降のこととなる．しかし，射影集合の理論の創始者であるニコライ・ルジンは，その慧眼によって 1920 年代に既にそれを予言していた．

> 射影集合が《非可算ならば連続体濃度を持つ》か否か《ベールの性質を満たす》か否か《可測である》か否か，いずれも知る者なく，そして未来永劫，知り得ることはないであろ

う.

— N. Luzin "Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue" (1925)

じっさい，ルジンが取り組んでいた射影階層に関する問題のほとんどは，それから数十年経った後に，次々と ZFC 独立命題だと示されていったのであった．しかし，ルジンの "不可知性" に関する予言は完璧なものではなかった．ひとびとは射影集合の正則性について何も知り得なかったわけではない．射影階層における正則性の ZFC 独立性を知ることに成功し，そして射影階層における様々な ZFC 独立命題たちの間の論理的導出関係についての数多の知識を得るに至った．

4.1.2 ワッジ理論

階層の隙間には無数の階層があり，その隙間にも無数の階層がある．果たして，われわれは究極の階層理論を作り出すことはできるのだろうか．そもそも，このような極めて複雑な世界に，究極の階層など導入することができるのだろうか．その解答が，ウィリアム・ワッジ (William Wadge) の連続還元順序の理論 [79] である．

1970 年代，ワッジはベール空間の部分集合の分類を試みた．ワッジの定義は極めて単純である．単に，特定の空間の部分集合を連続写像による還元によって分類しよう，という程度のものである．それにも関わらず，このワッジの理論は数学的に深遠であり，それは集合の位相的複雑性の究極的解析として知られるようになった．以下が，その定義である．

定義 4.7 ([79])**.** X, Y を位相空間，Z を集合とする．位相空間 X, Y 上の Z 値関数 $f : X \to Z$ と $g : Y \to Z$ に対して，f が g に**連続還元可能** (*continuously reducible*) または**ワッジ還元可能** (*Wadge reducible*) であるとは，ある連続関数 $\theta\colon X \to Y$ が存在して，$f = g \circ \theta$ となることを意味する．このとき，$f \leq_W g$ と書く．

あまりにも簡単な定義すぎて拍子抜けしたかもしれない．この連続還元前順序は，特に 2 値関数に対して特筆すべき興味深い性質を持つことが知られている．ここで，位相空間上の 2 値関数 $f\colon X \to \{0,1\}$ は位相空間上の部分集合 $f^{-1}\{1\} \subseteq X$ と同一視されることに注意する．つまり，集合 $A \subseteq X$ および $B \subseteq Y$ を 2 値関数と同一視すると，連続還元可能性は次のように特徴付けられる．

$$A \leq_W B \iff (\exists \theta\colon X \to Y \text{ 連続}) \quad A = \theta^{-1}[B].$$

まず，自己双対の概念は，2 値関数（集合）の連続還元順序構造においては，以下のように翻訳される．

定義 4.8. 集合 $A \subseteq X$ が**自己双対** (*selfdual*) であるとは，$A \leq_W X \setminus A$ を満たすことである．

このとき，以下が成立する．

$$A \subseteq X \text{ が自己双対} \iff \Gamma_A = \{B \in X : B \leq_W A\} \text{ が自己双対}.$$

次の補題は，ワッジ理論における最初の補題であり，無限ゲームの決定性の有用性を示すものである．

補題 4.9 (ワッジの補題 [79])**.** ZF + AD + DC を仮定する．$A, B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，$A \leq_W B$ または $B^{\mathsf{c}} \leq_W A$ が成立する．特に，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の 2 値関数の連続還元前順序における反鎖のサイズは高々 2 である．

Proof. $R = \{(x, y) : A(x) = B(y)\}$ と定義する．決定性公理より，非拡大写像 $\theta \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在して $(x, \theta(x)) \in R$ となるか，縮小写像 $\eta \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在して $(\eta(x), x) \notin R$ となる．特に θ と η は共に連続である．前者の場合は $A(x) = B \circ \theta(x)$ となるから，$A \leq_W B$ である．後者の場合は $A \circ \eta(x) \neq B(x)$ であるから，$1 - B(x) = A \circ \eta(x)$ となり，$B^{\mathsf{c}} \leq_W A$ を得る．

半鎖のサイズが高々 2 であることについて，$A \leq_W B$ または $B^{\mathsf{c}} \leq_W A$ のどちらか一方が成立し，さらに $A \leq_W B^{\mathsf{c}}$ または $B \leq_W A$ のどちらか一方が成立する．すべての組合せを試すと，

$$A \equiv_W B, \quad A \equiv_W B^{\mathsf{c}}, \quad A \leq_W B, B^{\mathsf{c}}, \quad B, B^{\mathsf{c}} \leq_W A$$

の 4 つのいずれかが成立していることが分かる．つまり，$\{A, B\}$ が半鎖をなすのは $A \equiv_W B^{\mathsf{c}}$ のときのみである． □

先に概形が分かっていた方が分かりやすいので，結果だけ先に述べてしまおう．以下の定理について，第 4.2 節で BQO と呼ばれる，その証明に必要なエッセンスを抽出する．そして，より一般的な形の定理 4.31 を証明するため，以下の定理の証明は省略しよう．

定理 4.10 (マーティン-モンクの定理)**.** ZF + AD + DC を仮定する．このとき，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の 2 値関数の連続還元順序は半整列順序をなす．

特に，非自己双対集合族の対は整列順序をなす．つまり，$(\Gamma_\alpha, \neg\Gamma_\alpha)_{\alpha<\Theta}$ のように書き表せる．ここで，Θ は，$\mathbb{R}$ からの全射が存在しないような最小の 0 でない順序数である．選択公理下では Θ は単なる連続体濃度の後続基数であるが，決定性公理下では Θ は巨大基数となり，連続関係順序の高さを与える．たとえば Θ の下には無限個の可測基数が存在する．

順序数 α の**共終数** (*cofinality*) とは，β から α への非有界な関数が存在するような最小の基数 β である．$\alpha < \Theta$ の共終数が可算の場合には，$\Gamma_\alpha \cap \neg\Gamma_\alpha$ に完全集合が存在する．つまり，$\Gamma_\alpha \cap \neg\Gamma_\alpha$-集合の中で，連続還元順序に関して最大となるものが存在する．しかし，$\alpha < \Theta$ の共終数が非可算の場合には，$\Gamma_\alpha \cap \neg\Gamma_\alpha$ に完全集合は存在しない．

定義 4.11. 位相空間 X の部分集合族 Γ が**分離性** (*separation property*) を持つとは，交わらない 2 つの Γ 集合を $\Gamma \cap \neg\Gamma$ 集合によって分離できることを意味する．つまり，以下が成立することで

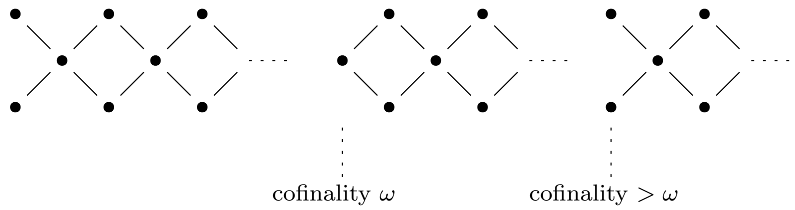

図 9　連続還元順序の半整列順序構造

ある．

$$(\forall A, B \in \Gamma)\ [A \cap B = \emptyset \implies (\exists C \in \Gamma \cap \neg\Gamma)\ A \subseteq C\ \&\ B \cap C = \emptyset].$$

例 4.12. X の閉集合族が分離性を持つことと X が強零次元，つまり大帰納次元が 0 であることは同値である．

例 4.13.
- 任意の可算順序数 $\alpha < \omega_1$ に対して，$\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$ は分離性を持つ．
- $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ と $\boldsymbol{\Pi}^1_2$ は分離性を持つ．
- (PD) $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$ と $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+2}$ は分離性を持つ．

分離性は，連続還元順序の言葉を使って言い直すこともできる．まず，連続還元順序を前順序値写像上の関係として拡張しよう．

定義 4.14. X, Y を位相空間，$\mathcal{Q}$ を前順序集合とする．位相空間 X, Y 上の $\mathcal{Q}$ 値関数 $f : X \to \mathcal{Q}$ と $g : Y \to \mathcal{Q}$ に対して，f が g に**連続還元可能** (*continuously reducible*) または**ワッジ還元可能** (*Wadge reducible*) であるとは，次の条件 $f \leq_W g$ を満たすことである．

$$f \leq_W g \iff (\exists \theta \colon X \to Y \text{ 連続})(\forall x \in X)\ f(x) \leq_{\mathcal{Q}} g \circ \theta(x).$$

集合 Z に**離散順序** (*discrete order*), つまり $a \leq_Z b$ は $a = b$ のときのみであるような順序を入れたならば，定義 4.14 の連続還元順序は定義 4.14 の連続還元順序と一致する．

いま，半順序集合 $2_\uparrow = \{0, 1, \uparrow\}$ を考えよう．ここで，順序は $\uparrow < 0$ と $\uparrow < 1$ のみ定義されている．つまり，$\uparrow$ が $2_\uparrow$ の最小元であり，0 と 1 は比較不可能な極大元である．

次の命題では，$2_\uparrow$ にはスコット位相が入っていると考える．つまり，$\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$, $2_\uparrow$ が開集合である．位相空間 X の部分集合族 Γ に対して，写像 $f \colon X \to Y$ が **Γ-可測** (Γ-*measurable*) であるとは，任意の開集合 $U \subseteq Y$ に対して，$f^{-1}[U] \in \Gamma$ であることを表す．

以下，Γ が**連続代入で閉じている** (*closed under continuous substitution*) とは，$B \leq_W A \in \Gamma$ ならば $B \in \Gamma$ であることを意味する．この性質は，任意の連続写像 θ に対して，$A \in \Gamma$ ならば $\theta^{-1}[A] \in \Gamma$ であることと同値である．

命題 4.15. Γ は連続代入と有限和で閉じている X の部分集合族とする．Γ が分離性を持つことと，任意の Γ-可測 $2_\uparrow$-値写像が Γ-可測 2 値写像に連続還元可能であることは同値である．

Proof. Γ-可測写像 $f\colon X \to 2_\uparrow$ が与えられているとき，$A = f^{-1}\{1\}$ と $B = f^{-1}\{0\}$ は非交差な Γ 集合である．Γ が分離性を持つならば，ある $\Gamma \cap \neg\Gamma$ 集合 $C \subseteq X$ が A と B を分離する．このとき，特性関数 $\chi_C\colon X \to 2$ は Γ-可測であり，恒等写像により $f \leq_W \chi_C$ が保証されることは容易に分かる．

逆に，非交差な Γ 集合 $A, B \subseteq X$ が与えられているとする．$f\colon X \to 2_\uparrow$ を A 上で 1, B 上で 0, それ以外では $\uparrow$ を返す写像とする．Γ は有限和で閉じているから，$A, B, A \cup B \in \Gamma$ であるため，この写像は Γ-可測である．もし f が Γ-可測 2 値写像 $g\colon X \to 2$ に連続還元可能ならば，ある連続写像 θ が存在して $f \leq g \circ \theta$ と書ける．いま，0 と 1 は極大元なので，$f(x) \in \{0, 1\}$ ならば $g \circ \theta(x) = f(x)$ である．よって，$g \circ \theta$ は A 上で 1, B 上で 0 を返す．つまり，$C = (g \circ \theta)^{-1}\{1\}$ は A と B を分離する．g の Γ-可測性より $D = g^{-1}\{1\}$ は Γ 集合であり，また Γ は連続代入で閉じているので，$C = \theta^{-1}[D]$ も Γ 集合である． □

定理 4.16 (Steel [71])**.** ZF + AD + DC を仮定する．Γ を連続代入で閉じている集合族とする．このとき，Γ または $\neg\Gamma$ の少なくとも一方は，分離性を持つ．

Proof. まず，決定性公理を用いて，次の補題を示す．

主張. (A_0, A_1) が Γ の分離不可能対であるとする．このとき，もし (B_0, B_1) が共に Γ または共に $\neg\Gamma$ に属す非交叉な対であれば，ある縮小写像 η が存在して，$\eta[B_0] \subseteq A_0$ かつ $\eta[B_1] \subseteq A_1$ となる．

R を以下によって定義する．

$$(x, y) \notin R \iff (y \in B_0 \ \to\ x \in A_0) \ \wedge\ (y \in B_1 \ \to\ x \in A_1).$$

もし $(x, \theta(x)) \in R$ を満たす非拡大写像 θ が存在するならば，$\theta(x) \in B_0 \cup B_1$ である．さらに，$\theta(x) \in B_0$ ならば $x \notin A_0$ であり，もし $\theta(x) \in B_1$ ならば $x \notin A_1$ である．よって，$C = \theta^{-1}[B_0]$ は A_0 と A_1 を分離し，$\theta(x) \in B_0 \cup B_1$ であるから，C は $\Gamma \cap \neg\Gamma$ 集合である．これは A_0 と A_1 の分離不可能性に反する．よって，決定性公理より，$(\eta(x), x) \notin R$ を満たす縮小写像 η が存在する．性質 $(\eta(x), x) \notin R$ は明らかに $\eta[B_0] \subseteq A_0$ および $\eta[B_1] \subseteq A_1$ を意味する．

それでは，Γ を非自己双対であるとし，Γ と $\neg\Gamma$ が共に分離性を持たないと仮定しよう．(A_0, A_1) を Δ-分離不可能な Γ の非交叉対，(C_0, C_1) を Δ-分離不可能な $\neg\Gamma$ の非交叉対とする．上の主張によって，ある縮小写像 η で，$\eta[A_0] \subseteq C_0$ かつ $\eta[A_1] \subseteq C_1$ となるものが存在する．いま，$B_0 = \eta^{-1}[C_0]$ かつ $B_1 = \eta^{-1}[C_1]$ とする．このとき，$(A_1, A_0), (A_0, B_0^{\mathsf{c}}), (B_1^{\mathsf{c}}, A_1)$ はいずれも Δ-分離不可能な Γ の非交叉対であるから，先ほどの主張を再び適用すれば，以下のような縮小写像 η_0, η_1, η_2 を得る．

$$\begin{aligned} \eta_0[A_1] &\subseteq A_0, & \eta_0[A_0] &\subseteq A_1, \\ \eta_1[A_0] &\subseteq A_0, & \eta_1[B_0^{\mathsf{c}}] &\subseteq A_1, \\ \eta_2[B_1^{\mathsf{c}}] &\subseteq A_0, & \eta_2[A_1] &\subseteq A_1. \end{aligned}$$

η_0, η_1, η_2 は縮小写像なので，任意の $r \in 3^\omega$ に対して，ある唯一の $(x_n^r)_{n\in\omega}$ が存在して，$x_n^r = \eta_{r(n)}(x_{n+1}^r)$ となる．

主張. $\{r \in 3^\omega : x_0^r \in A_0 \cup A_1\}$ は余痩 (comeager) 集合である．

Proof. そうでないと仮定する．つまり，$\{r \in 3^\omega : x_0^r \notin A_0 \cup A_1\}$ は痩集合ではない．3^ω はベール空間なので，ある $\sigma \in 3^{<\omega}$ が存在して，$\{r \in 3^\omega : x_0^{\sigma^\frown r} \notin A_0 \cup A_1\}$ は余痩集合となる．しかし，η_0, η_1, η_2 の定義より，任意の $r \in 3^\omega$ に対して，

$$x_0^r \in A_0 \cup A_1 \implies x_0^{\sigma^\frown r} = \eta_{\sigma(0)} \circ \eta_{\sigma(1)} \circ \cdots \circ \eta_{\sigma(|\sigma|)}(x_0^r) \in A_0 \cup A_1.$$

よって，$\{r : x_0^r \notin A_0 \cup A_1\}$ は余痩集合である．いま，B_0 と B_1 は非交叉なので，$3^\omega = \bigcup_{i<2}\{r : x_0^r \notin B_i\}$ であるから，ある j について，$\{r : x_0^r \notin B_j\}$ は痩集合ではない．いま，η_1, η_2 の定義より，

$$x_0^r \notin B_j \implies x_0^{(j+1)^\frown r} = \eta_{j+1}(x_0^r) \in A_{1-j}.$$

よって，$\{r : x_0^r \in A_0 \cup A_1\}$ は痩集合ではないことが示されるが，これは矛盾である． □

主張より，ある j について，$\{r \in 3^\omega : x_0^r \in A_j\}$ は痩集合ではない．よって，ある $\sigma \in 3^{<\omega}$ について，$\{r \in 3^\omega : x_0^{\sigma^\frown r} \in A_j\}$ は余痩集合である．η_0 の定義より，任意の $r \in 3^\omega$ について，次を得る．

$$x_0^{\sigma^\frown r} \in A_j \implies x_0^{\sigma^\frown 0^\frown r} \in A_{1-j}.$$

よって，$\{r : x_0^{\sigma^\frown r} \in A_{1-j}\}$ は痩集合ではない．しかし，A_j と A_{1-j} は非交叉なので，これは矛盾を導く． □

Steel の定理より，各対 $(\Gamma_\alpha, \neg\Gamma_\alpha)$ の少なくとも一方が分離性を持つことが示される．一方，1978 年に Van Wesep [78] は，非自己双対集合族の各対 $(\Gamma_\alpha, \neg\Gamma_\alpha)$ のどちらか一方しか分離性を持ちえないことを示している．これより，非自己双対集合族の各対 $(\Gamma_\alpha, \neg\Gamma_\alpha)$ のちょうど一方のみが分離性を持つことが導かれる．

この性質から，連続還元順序の全ての同値類に一意に名前を付けることができる．Π_α を非自己双対集合族の対のうちで分離性を持つ方とし，Σ_α で分離性を持たない方を表すとする．また，Δ_α で自己双対集合族 $\Sigma_\alpha \cap \Pi_\alpha$ を表す．

例 4.17. $\Pi_0 = \{\mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ かつ $\Sigma_0 = \{\emptyset\}$ である．Σ_1 は開集合全体の族，Π_1 は閉集合全体の族である．1 以上 ω_1 未満のワッジ階数の集合族は，**ハウスドルフの差の階層** (*Hausdorff difference hierarchy*) に対応する．Σ_{ω_1} は F_σ 集合全体の族，Π_{ω_1} は G_δ 集合全体の族である．

例 4.18. $\uparrow\uparrow$ によって超指数階層を表す．つまり，$x \uparrow\uparrow 1 = x$ かつ $x \uparrow\uparrow (n+1) = x^{x\uparrow\uparrow n}$ と定義する．このとき，$\Sigma_{\omega_1\uparrow\uparrow n}$ は $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ 集合全体の族，$\Pi_{\omega_1\uparrow\uparrow n}$ は $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}$ 集合全体の族と一致する．

ここまでが有限ボレル階数である．無限ボレル階数はさらに複雑になる．

例 4.19. まず，ω_1+1 番目のイプシロン数 $\varepsilon_{\omega_1+1} = \sup_{n\in\omega}(\omega_1 \uparrow\uparrow n)$ を考えよう．この順序数は明らかに共終数 ω である．したがって，この階数は自己双対から開始するから，たとえば $\Sigma_{\varepsilon_{\omega_1+1}}$ は $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$ よりも遥かに小さい．実際，$\Sigma_{\varepsilon_{\omega_1+\omega_1}} = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_\omega$ および $\Pi_{\varepsilon_{\omega_1+\omega_1}} = \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_\omega$ となる．

さらに高い無限ボレル階数の集合のワッジ階数は，ω_1 を基とするヴェブレン階層を用いて表すことができる．

例 4.20. 基 ω_1 の**ヴェブレン階層** (*Veblen hieararchy*) を以下によって定義する．$\phi_\alpha(\gamma)$ を $+$, $\sup_{n\in\omega}$, および $(\phi_\beta)_{\beta<\alpha}$ で閉じた γ 番目の順序数とする．たとえば，ϕ_0 は $1, \omega_1, \omega_1^2, \omega_1^2, \dots, \omega_1^{\omega+1}, \omega_1^{\omega+2}$ のように並べていく．同様に ϕ_1 は $1, \varepsilon_{\omega_1+\omega_1}, \dots$ と続く．

このとき，0 でない可算順序数 α に対して，$\Sigma_{\phi_\alpha(1)} = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{\omega^\alpha}$ かつ $\Pi_{\phi_\alpha(1)} = \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{\omega^\alpha}$ が成立する．以上より，$\nu = \sup_{\xi<\omega_1}\phi_\xi(1)$ とすれば，これがボレル集合のワッジ階数の高さである．さらに，Π_ν は解析集合全体であり，Σ_ν は余解析集合全体である．

算術的階層にせよ，ボレル階層にせよ，ひとびとは様々な半整列階層を考察してきた．しかし，これらの半整列階層は，あくまで人為的に構成されたものであった．これに対してワッジの連続還

元順序の理論は，こう述べる．あえて人為的に半整列階層を作る必要はない，あくまで位相的議論からの数学的帰結によって，自動的に半整列階層が得られるのだ，と．つまるところ，人為的に作ったすべての階層構造が半整列階層をなしていたのは，数学的な必然だったのである．

4.2 BQO 理論

無限反鎖も無限下降列も持たないような擬順序を**整擬順序**[*8] (*well-quasi-order*) または単に WQO と呼ぶ．組合せ論において，様々な前順序構造が整擬順序をなすことが証明されてきた．最もよく知られたものが Robertson-Seymour の**グラフ・マイナー定理** (*graph minor theorem*) であろう．これは有限グラフ上のマイナー順序は整擬順序をなす，というものであり，グラフ理論における最も深い定理のひとつとして知られる．

グラフ・マイナー定理の前身となる定理のひとつが**クラスカルの木の定理** (*Kruskal's tree theorem*) である．これにより，整擬順序でラベル付けされた有限木上の埋め込み順序は再び整擬順序をなす．それでは，無限木を考えたらどうなるだろうか．実を言うと，整擬順序は無限的な操作に対して相性が悪い．WQO 理論では，無限的な構造には全く太刀打ちできなかった．

それでは，無限的な構造上に導入された何らかの前順序が良い順序となっていることを示すには，どうすればよいだろうか．整擬順序になっていることを示す手立てはない．それにも関わらず，1965 年，Nash-Williams [56] は整擬順序をさらに強めた順序概念を定義した．これがベター擬順序 (BQO) の理論であり，Nash-Williams は，無限木上の位相マイナー順序が整擬順序どころかベター擬順序になっていることを示したのである．その後，Laver [36] は，BQO 理論を用いることによって，可算全順序上の埋め込み順序に関する Fraïssé の予想を解決に導いた．

1972 年の段階では，クラスカル [35] は，自然に現れるすべての整擬順序はベター擬順序であると述べている．また，WQO 理論において，ある構造上の前順序が整擬順序をなすことを示す際に，整擬順序でラベル付けされた構造上の前順序が整擬順序をなすことを示す，というような入れ子型な証明の方が容易であることが多かった．しかし，クラスカルはこう述べる．BQO 理論の登場によって明らかになったことは，そのような入れ子型の証明の道具としては擬整列順序は誤った概念であり，ベター擬順序こそが入れ子型証明を容易にするものであった，と．

前置きが長くなったが，それでは，ベター擬順序の定義を述べよう．Nash-Williams の定義は有用であるが，極めて複雑であるから，まず記述が容易な特徴付けを先に出すことにする．ここでは，まず Pouzet による特徴付けによって定義を与える．

擬順序 $\mathcal{Q}$ が与えられたとき，順序数長の $\mathcal{Q}$-値列を考える．

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{Ord}} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathcal{Q}^{\alpha}.$$

順序数長の $\mathcal{Q}$-値列 $p, q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ord}}$ が与えられたとき，$p \leq q$ であるとは，

$$(\forall\alpha\in\mathrm{dom}(p)) \quad p(\alpha) \leq_{\mathcal{Q}} q\circ\theta(\alpha)$$

[*8] Well-quasi-order は，整擬順序ではなく整列擬順序と訳されることが多い．しかし「整列」と言ってしまうと混乱を招く可能性があるため，ここでは「整列」と呼ぶことを避け，曖昧に「整」と訳す．

となる増大単射 $\theta\colon \mathrm{dom}(p) \to \mathrm{dom}(q)$ が存在することとする．

定義 4.21. 擬順序 $\mathcal{Q}$ が**ベター擬順序** (*better-quasi-order*) あるいは BQO であるとは, $(\mathcal{Q}^{\mathrm{Ord}}, \leq)$ が整擬順序であることを意味する．

ただし，Pouzet によるこの定義は少しばかり使い勝手が悪い．このため，もう少し扱いやすい特徴付けを後に与える．ベター擬順序に関して，以下が成立することが知られている．

$$\begin{array}{lcccc} \text{整列順序} & \Rightarrow & & & \\ & & \text{ベター擬順序 (BQO)} & \Longrightarrow & \text{整擬順序 (WQO)} \\ \text{有限順序} & \Rightarrow & & & \end{array}$$

Nash-Williams の導入したベター擬順序は，ある意味で究極の閉包性を持つ．これが擬順序をアトムにする集合論的宇宙の整礎性として捉えられる，ということは，Laver をはじめとする多くの研究者によって認識されていた．それを明示化したものが，以下の Forster [15, 59] による興味深い特徴付けである．まず，擬順序 $\mathcal{Q}$ をアトムとするフォン・ノイマン宇宙 $V^+(\mathcal{Q})$ を次によって定義する．$\mathcal{P}^+(\mathcal{Q})$ を $\mathcal{Q}$ の空でない部分集合全体の集合とする．

$$\begin{aligned} V_0^+(\mathcal{Q}) &= \mathcal{Q} \\ V_{\alpha+1}^+(\mathcal{Q}) &= \mathcal{P}^+(V_\alpha^+(\mathcal{Q})) \\ V_\lambda^+(\mathcal{Q}) &= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha^+(\mathcal{Q}) \text{ if } \lambda \text{ is limit} \\ V^+(\mathcal{Q}) &= \bigcup_{\lambda\in\mathrm{Ord}} V_\lambda^+(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

空集合を排除している目的を説明しよう．通常のフォン・ノイマン宇宙 V では（正則性公理より）任意の $\in$-下降列はいつか空集合に辿り着く．一方，上の $\mathcal{Q}$-宇宙 $V^+(\mathcal{Q})$ では，任意の $\in$-下降列はいつかアトム $q \in \mathcal{Q}$ に辿り着く．

このとき，次のゲーム $\mathrm{G}_{\mathcal{Q}}$ を考察しよう．A, B を $\mathcal{Q}$-宇宙の要素，つまり $A, B \in V^+(\mathcal{Q})$ とする．このとき，2 人のプレイヤー I と II による完全情報ゲーム $\mathrm{G}_{\mathcal{Q}}(A, B)$ を考える．

I と II は，交互に $\mathcal{Q}$-宇宙の要素を選んでいく．第 0 ラウンドでは，I は $x_0 = A$ を選び，つづいて II は $y_0 = B$ を選ぶ．第 $n+1$ ラウンドにおいて，I は x_n がアトムでないならば $x_{n+1} \in x_n$ を選び，x_n がアトムならば $x_{n+1} = x_n$ とする．II についても同様である．

$$\begin{array}{llllllllllllll} \text{I:} & A = x_0 & \ni & & x_1 & \ni & x_2 & \ni & \dots & \ni & x_m & = & x_{m+1} & \dots \\ \text{II:} & & & B = y_0 & \ni & y_1 & \ni & y_2 & \ni & \dots & \ni & y_n & = & y_{n+1} \quad \dots \end{array}$$

$\mathcal{Q}$-宇宙の定義より，プレイヤー I もプレイヤー II も選ぶ手はいつかアトムに辿り着くはずである．それぞれが選んだアトムを $\lim_n x_n$ および $\lim_n y_n$ と書くことにする．このゲーム $\mathrm{G}(A, B)$ の勝利条件は以下によって与えられるとしよう．

$$\text{プレイヤー II の勝利} \iff \lim_n x_n \leq_{\mathcal{Q}} \lim_n y_n.$$

このとき $\mathcal{Q}$-宇宙 $V^+(\mathcal{Q})$ 上の順序を次によって定義する．

$$A \leq B \iff \mathrm{G}_{\mathcal{Q}}(A, B) \text{ においてプレイヤー II の必勝戦略が存在する．}$$

定理 4.22 (Forster [15, 59])**.** $\mathcal{Q}$ がベター擬順序であることと $\mathcal{Q}$-宇宙 $(V^+(\mathcal{Q}), \leq)$ が整礎であることは同値である．

ここまでを見る限り，ベター擬順序は整擬順序よりも遥かに強い性質であり，そのようなものは殆ど無いのではないかと感じるかもしれない．しかし，クラスカルが述べたように，経験的事実として，自然に現れる既知の整擬順序はすべてベター擬順序であると考えられている．

ベター擬順序の例としては，可算全順序の間の埋め込み可能性順序，可算全順序の間の全射準同型順序，可算木の間の埋め込み可能性順序，可算全順序の間の連続埋め込み可能性順序，$\mathbb{R}^n$ のボレル部分順序の埋め込み可能性順序，零次元ポーランド空間の間の位相的埋め込み可能性順序などが知られている．整擬順序であると知られているがベター擬順序であるかどうか分かっていない順序としては，有限グラフの間のマイナー順序がある．

■局所定数写像と悪配列: 上で述べた Forster の定義は一見して凶悪そうだが，抽象化して考えると実は大したことがない．まったく見掛け倒しの張子の虎である．$\mathcal{Q}$-宇宙の要素 A が与えられているとする．ゲーム $G(A, B)$ における各プレイヤーのプレイのように，A の要素から開始した後ある時点で $\mathcal{Q}$ に辿り着くまでは $\in$-下降列であり，$\mathcal{Q}$ に辿り着いたら一定になる無限列全体の集合を $\mathrm{Seq}_\in(A)$ と書くことにする．

A の推移的閉包 $\mathrm{tc}(A)$ を考えよう．$\mathrm{Seq}_\in(A)$ は $\mathrm{tc}(A)^\mathbb{N}$ の部分集合である．推移的閉包 $\mathrm{tc}(A)$ に離散位相を入れ，その可算直積 $\mathrm{tc}(A)^\mathbb{N}$ 上の標準的な超距離を考えよう．$\mathrm{Seq}_\in(A)$ は $\mathrm{tc}(A)^\mathbb{N}$ の部分空間として超距離空間と思える．このようにして，宇宙を下っていく列同士の間に超距離を入れることができる．

すると, 宇宙 $V^+(\mathcal{Q})$ 上の前順序 $A \leq B$ というのは, 超距離空間上の連続写像 $\lim_A\colon \mathrm{Seq}_\in(A) \to \mathcal{Q}$ と $\lim_B\colon \mathrm{Seq}_\in(B) \to \mathcal{Q}$ に対して，ある非拡大写像 $\theta\colon \mathrm{Seq}_\in(A) \to \mathrm{Seq}_\in(B)$ が存在して，任意の x に対して $\lim_A(x) \leq_\mathcal{Q} \lim_B \circ\theta(x)$ が成立することである．これは $\lim_A$ が $\lim_B$ にリプシッツ還元可能と言い換えることもできる．つまり，宇宙 $V^+(\mathcal{Q})$ 上の前順序は,（非可分）完備超距離空間上の $\mathcal{Q}$ 値連続写像のなすリプシッツ前順序の特殊ケースに過ぎない．

さて，ここまでベター擬順序の幾つかの同値な定義を取り扱ってきたが，実際には，これらの定義を用いて，何かの順序がベター擬順序であることを示すのは極めて難しい．以下で，Simpson によるベター擬順序の非常に扱いやすい定義を与えよう．

$[\mathbb{N}]^\mathbb{N}$ を自然数の無限増大列の空間とする．各 $s \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N}$ のシフトを s^* と書くことにする．つまり，$s^*(n) = s(n+1)$ である．前順序 $\mathcal{Q}$ が与えられたとき，ボレル写像 $\varphi\colon [\mathbb{N}]^\mathbb{N} \to \mathcal{Q}$ が**良 $\mathcal{Q}$-配列** (*good $\mathcal{Q}$-array*) であるとは，ある $s \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N}$ が存在して $\varphi(s) \leq_\mathcal{Q} \varphi(s^*)$ となることである．良 $\mathcal{Q}$-配列でないボレル写像のことを**悪 $\mathcal{Q}$-配列** (*bad $\mathcal{Q}$-array*) と呼ぶ．

補題 4.23 (Simpson [66])**.** $\mathcal{Q}$ がベター擬順序であることと，任意のボレル写像 $\varphi\colon [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}} \to \mathcal{Q}$ が良 $\mathcal{Q}$-配列であることは同値である．

4.3 無限指数ラムゼー理論と Ellentuck 位相

4.3.1 無限指数ラムゼー理論

無限増大列の空間は，ラムゼーの定理の文脈でしばしば用いられる．最も単純な無限ラムゼーの定理は，指数 2 のラムゼーの定理であり，これが無限グラフの言葉で書かれる．一般の有限指数の無限ラムゼーの定理は，無限ハイパーグラフに対する定理だと思うことができる．以下，$h \in [\omega]^\omega$ および $S \subseteq [\omega]^n$ に対して，$h \circ S = \{h \circ g : g \in [\omega]^n\}$ と書く．有限指数の無限ラムゼーの定理は，以下のように定式化できる．

事実 4.24 (有限指数の無限ラムゼーの定理)**.** 任意の $A \subseteq [\omega]^n$ に対して，ある $h \in [\omega]^\omega$ が存在して，$h \circ [\omega]^n \subseteq A$ または $h \circ [\omega]^n \cap A = \emptyset$ が成立する．

この定理は，1928 年のフランク・ラムゼーによる「形式論理のある問題について」と題された論文の主定理として発表されたものである．しかし，本稿で扱う数学においては，有限指数の無限ラムゼー理論では力不足である．BQO 理論で用いられるものは，無限指数ラムゼー理論である．

定義 4.25. $A \subseteq [\omega]^\omega$ が**ラムゼー性** (*Ramsey property*) を持つとは，ある $h \in [\omega]^\omega$ が存在して，$h \circ [\omega]^\omega \subseteq A$ または $h \circ [\omega]^\omega \cap A = \emptyset$ が成立することである．

まず，無限指数ラムゼー理論における第一歩となるものが，エルデシュとラドーによる次の定理である．

「任意の集合 $A \subseteq [\omega]^\omega$ はラムゼー性を持つ」

という主張は，選択公理と矛盾する．

そういうわけで，第一歩から足を踏み外したものが，無限指数ラムゼー理論である．しかし，基本的に，任意の集合だの任意の関数だのを考えるから矛盾するのである．ふつうの集合や関数を考えている限りはそうそう矛盾しない．これは，決定性にせよラムゼー性にせよ，状況は同じである．ひとびとが考えるべきは，無限指数ラムゼー性にグラデーションを掛けることである．そして，たとえばボレル集合に制限すれば一切問題がない，ということは予期されることであろう．

そのステップを踏んだのは，Nash-Williams である．1965 年に BQO の概念を導入した論文 [56] では，その基礎理論の構築のために，ある種の無限指数ラムゼー性が必要となった．Nash-Williams が示したことは，非交差な 2 つの開集合に関するラムゼー性のような形式で，開閉集合から開集合のラムゼー性への中間的な結果である．その後，Richard Laver が BQO 理論を用いて Fraïssé 予

想を解決したことにより，Nash-Williams の理論は広く知られることとなった．これによって，より一般のラムゼー性に興味が持たれることとなる．定義可能な集合に関するラムゼー性の問題は，Dana Scott によって問われた．

まず，すぐに Galvin らが任意の開集合がラムゼー性を持つことを示した．ポール・コーエンらも独立に同様のことを証明したようである．その後に証明されたものが，Galvin-Prikry の定理 [17] としてよく知られる，任意のボレル集合がラムゼー性を持つというものである．ラムゼー性の場合は決定性よりも振る舞いが良く，ボレル集合よりも広いクラスでラムゼー性が成り立つことが ZFC で証明できる．

定理 4.26 (Galvin-Prikry [17]; Silver [65])**.** 任意の解析集合 $A \subseteq [\omega]^\omega$ はラムゼー性を持つ．特に，任意のボレル集合 $A \subseteq [\omega]^\omega$ はラムゼー性を持つ．

実は，もっと精密な定理を得ることができる．無限増大列の空間 $[\omega]^\omega$ 上の位相として，積位相よりも振る舞いの良い位相がある．有限増大列 $\sigma \in [\omega]^n$ について，$f \circ [\sigma] = \{f \circ g : \sigma \sqsubseteq g\}$ の形の集合から生成される $[\omega]^\omega$ 上の位相を **Ellentuck 位相** (*Ellentuck topology*) と呼ぶ．特に n 上の恒等関数 id_n について，$f \circ [\mathrm{id}_n]$ の形の集合を f の Ellentuck 近傍と呼ぶ．この位相は，Ellentuck が 1974 年に解析集合のラムゼー性の別証明のために導入したものである．Ellentuck 位相の重要な性質は次である．

補題 4.27 (Ellentuck [13])**.** *$A \subseteq [\omega]^\omega$ が Ellentuck 位相に関してベールの性質を持つことと，任意の $g \in [\omega]^\omega$ の Ellentuck 近傍 $g \circ [\mathrm{id}_n]$ が次を満たす h を含むことは同値である．*

$$h \circ [\mathrm{id}_n] \subseteq A \quad or \quad h \circ [\mathrm{id}_n] \cap A = \emptyset.$$

特に，A が Ellentuck 位相に関してベールの性質を持つならば，A はラムゼー性を持つ．

この定理は無限指数ラムゼー理論の見通しを良くする．たとえば，Galvin-Prikry の定理が成り立つ理由などは明白となった．すなわち，任意のボレル集合は，Ellentuck 位相に関してベールの性質を持つ，ということである．

さて，本稿で必要なものは，Mathias のハッピー・ファミリーの論文 [49] で証明された近似定理とその拡張である．写像 $\varphi\colon [\omega]^\omega \to Y$ が **Ellentuck-ベール可測** (*Ellentuck-Baire measurable*) であるとは，任意の開集合 $U \subseteq Y$ に対して，$\varphi^{-1}[U]$ が Ellentuck 位相に関してベールの性質を持つこととする．単に $\varphi\colon [\omega]^\omega \to Y$ が連続などと言った場合には，$[\omega]^\omega$ を ω^ω の部分位相として見たときに連続であることを意味する．次が Mathias の近似定理の拡張である．

補題 4.28 (Mathias [49]). Y を距離化可能空間とする．任意の *Ellentuck*-ベール可測写像 $\varphi\colon [\omega]^\omega \to Y$ に対して，ある $f \in [\omega]^\omega$ が存在して，$\varphi \restriction f \circ [\omega]^\omega$ は連続となる．

4.3.2　BQO 理論への応用

命題 4.29 ([66]). 第二可算空間から離散空間への任意のボレル写像の像は高々可算である．

これにより，ベター擬順序の次のような特徴付けを得ることができる．

定理 4.30 (Simpson [66]). 前順序 Q について，以下の条件は同値である．

1. Q はベター擬順序である．
2. 任意の連続写像 $\varphi\colon [\omega]^\omega \to Q$ が良 Q-配列である．
3. 任意のボレル写像 $\varphi\colon [\omega]^\omega \to Q$ が良 Q-配列である．
4. 任意の *Ellentuck*-ベール可測写像 $\varphi\colon [\omega]^\omega \to Q$ が良 Q-配列である．

集合族 Γ に属す集合が Ellentuck 位相に対してベールの性質を持つとき，Γ は**完全ラムゼー** (*completely Ramsey*) であると言われる．Ellentuck の補題 4.27 より，Γ が完全ラムゼー性を持つならば，特にラムゼー性も持つ．以下の**ラムゼー性公理** (*axiom of Ramsey*) は便利である．

公理 5 (ラムゼー性公理). 任意の集合 $A \subseteq [\omega]^\omega$ は *Ellentuck* 位相に関してベールの性質を持つ．

この公理を仮定すると，すべての写像 $\varphi\colon [\omega]^\omega \to Q$ が Ellentuck-ベール可測となる．したがって，ベター擬順序であることと，任意の写像 $\varphi\colon [\omega]^\omega \to Q$ が良 Q-配列であることが同値になる．つまり，連続であるとかボレルであるとか余計なことに気を払う必要がなくなってよい．

ただし，最初にエルデシュ-ラドーの定理として述べたように，ラムゼー性公理は選択公理と矛盾する．一方で，決定性公理と同様に，ラムゼー性公理は選択公理下における局所的公理である．つまり，選択公理 $(+\alpha)$ を仮定すると，局所的には，従属選択公理，決定性公理，ラムゼー性公理のすべてが成立する．

4.3.3　☕ 決定性とラムゼー性

決定性公理とラムゼー性公理は，共に選択公理と矛盾するほどの強力な超越的公理である．しかし，射影集合の範囲内では，ラムゼー性公理は決定性公理より超越度が低いようである．

たとえば，ボレル集合の場合である．マーティンのボレル決定性定理には，超限階算術（冪集合の超限回の適用）が必要であり，置換公理なしの集合論 ZC では証明できない．一方で，

Galvin-Prikry のボレル・ラムゼー性定理は二階算術のかなり弱い部分で証明できる．具体的には，Π^1_1-内包公理 Π^1_1-CA_0 の超限反復である Π^1_1-超限再帰 Π^1_1-TR_0 程度の強さにしかならない．

もちろん，いわゆる逆数学のビッグ・ファイブなどは越える超越的公理ではあるが，ゲームの決定性のような果てしなく超越的な原理の前では大したことはない．ボレル・ラムゼーの強さ，つまり Π^1_1-TR_0 とは，たった $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_2$-ゲームの決定性程度の強さである．構成可能宇宙のランクで言えば，最小の**再帰的到達不可能順序数** (*recursively inaccessible ordinal*) 程度である．

この超越度の差は，解析集合のレベルにおいて特に顕著に現れる．解析集合の決定性は ZFC 集合論の枠組みを越えることはよく知られている．実際，Σ^1_1-ゲームの必勝戦略がゲーデルの構成可能宇宙全体に渡る情報をコードし，いわゆる $0^\sharp$ の存在を導く．一方で，解析集合のラムゼー性は，Silver によって示されたように，付加的な公理は一切必要ない．ボレル集合での状況を考えれば，これは特に驚くには値しないだろう．

しかし，フルの決定性公理とラムゼー性公理を考えると状況はよくわからなくなる．「決定性公理はラムゼー性公理を導くか？」という問題は，集合論における代表的な未解決問題のひとつである．そして，実は，この問題も Victoria-Delfino 問題とつながっていたりする．決定性公理とラムゼー性公理は共に Woodin の AD^+ という公理から導かれることが知られている．一方，マーティン予想と「$\mathsf{AD} \overset{?}{=} \mathsf{AD}^+$」問題が，残る 2 つの未解決な Victoria-Delfino 問題として残されていた．もし「$\mathsf{AD} \overset{?}{=} \mathsf{AD}^+$」問題が肯定的に解決されれば，決定性公理からラムゼー性公理が導かれる，ということも明らかになる．

4.4 BQO 値ワッジ理論

ここまで 2 値関数の連続還元について議論してきた．2 値関数の連続還元順序構造は前整列順序をなすが，整然とし過ぎているが故に，逆にその構造の本質が分かりにくい．しかし，定義 4.14 のように，連続還元順序は，より一般の前順序集合上に拡張することができる．そして，そのように拡張することによって，隠された構造が明示化されることを見ていこう．

まず，前節までのようにワッジ理論においては，2 値関数が主役であるが，それ以外の写像に対する研究もなされてきた．たとえば，ワッジの原論文 [79] でも，2 点離散順序のみではなく，$\{\top, 0, 1, \bot\}$ の菱形順序を考察している．これは，命題 4.15 で触れたように，記述集合論における分離性などを分析する際に有用である．また，集合論におけるワッジ理論の重要性に気づいたスティールは，すぐに順序数値写像に対するワッジ理論の考察を始めた．順序数値写像のワッジ理論はその後，Löwe や Block らによって進められ，その連続還元のなす整列順序の順序型が Θ^{Θ^Θ} 以上 Θ^+ 未満であることなどが示されている [40, 6]．

集合論以外の方向性としては，有限の $m \in \mathbb{N}$ に対する m 値関数の連続還元順序が 90 年代頃から研究されるようになった [23]．つまり，自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbf{m}$ を $\{0, \ldots, m-1\}$ に離散順序を入れたものを考えている．これは空間の様々な m-分割の位相複雑性を測ることに相当する．有限離散順序ではなく一般の有限半順序を考えれば，有限分割でなく有限被覆を考えることとなる．

そういうわけで，先行研究の方向性は，大雑把に言えば 2 つであった．順序数（整列順序）値にするか，有限順序値にするか，である．ところで，さきほどまで，整列順序と有限順序の共通の一般化を扱っていた．そう，ベター擬順序，つまり BQO である．このようにして，様々なワッジ理論を，BQO 値ワッジ理論として統合できる．

一般の BQO 値写像の連続還元順序に関する最初の非自明な仕事は，1987 年，van Engelen, Miller, および Steel [77] によってなされた．BQO 値写像の連続還元順序のその後の発展は，2014 年の Alexander Block の論文 [5] を待つことになる．しかし，Block も一般的な性質を幾つか証明しただけで，その一般的定理を順序数値写像についてしか適用しなかった．

4.4.1 Martin-Monk 法と整礎性

2 値関数のワッジ理論において，Martin-Monk は連続還元順序の整礎性を示した．これがワッジ理論の根幹をなす最初期の非自明な定理のひとつである．van Engelen-Miller-Steel [77] はその手法を応用し，普通の数学，つまり ZFC 集合論において，$\mathcal{Q}$ がベター擬順序であれば，ベール空間上の $\mathcal{Q}$-値ボレル写像のワッジ順序もまたベター擬順序をなすことを示した．

ちなみに van Engelen らの当初の目的は，位相空間論における van Douwen の問題の解決であったようである．Van Douwen は，零次元の**絶対ボレル集合** (*absolute Borel set*), つまり，どんな可分距離空間への位相埋め込み像もボレルとなる集合で，位相空間として**リジッド** (*rigid*)，つまり，非自明な自己同相写像の存在しないものが存在するかどうか尋ねた．Van Engelen らは，そこでワッジ理論を応用して，この問題を否定的解決に導いた．

さて，Block [5] によって指摘されたように，強い決定性の下で van Engelen-Steel-Miller の定理からボレル性の仮定を排除できる．ここでは，さらに van Engelen らの定理を超距離化可能空間に拡張できることを示そう．

定理 4.31 (AD$^+$)**.** $\mathcal{Q}$ がベター擬順序であれば，完備可分超距離化可能空間上の $\mathcal{Q}$-値写像のなすワッジ前順序もベター擬順序をなす．

Proof. 標準的な完備可分超距離空間上の $\mathcal{Q}$-値写像のなすリプシッツ前順序がベター擬順序をなすことを示せば十分である．そうでないと仮定する．このとき，リプシッツ前順序の悪配列 φ が与えられている．つまり，$\mathcal{Q}$-値写像の族 $(\varphi_s)_{s\in[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}}$ で，$\varphi_s \not\leq_{\rm Lip} \varphi_{s^*}$ となるものである．悪配列の値域を B とすると，B は可算集合である．各 $f\in B$ の定義域である標準的超距離空間を U_f と書くことにする．無限ゲームの決定性より，各対 $(f,g)\in B^2$ に対して，$f\leq_{\mathcal{Q}} g\circ\theta$ を保証する非拡大写像 $\theta\colon U_f\to U_g$ または $f\circ\theta\not\leq_{\mathcal{Q}} g$ を保証する縮小写像 $\theta\colon U_g\to U_f$ が存在する．可算選択公理を用いて，(f,g) 毎にそのような非拡大または縮小写像 $\theta(f,g)$ を固定する．

いま，$s\in[\omega]^\omega$ を任意に選び，$s_0=s$ かつ $s_{n+1}=s_n^*$ とする．$\theta_n^s=\theta(\varphi_{s_n},\varphi_{s_{n+1}})$ および $U_n=U_{\varphi_{s_n}}$ と定義する．定義より明らかに $\theta_{n+1}^s=\theta_n^{s^*}$ である．このとき，悪配列の定義より，$\varphi_{s_n}\not\leq_{\rm Lip}\varphi_{s_{n+1}}$ であるから，$\theta_n^s\colon U_{n+1}\to U_n$ は縮小写像であり，$\varphi_{s_n}(\theta_n^s(x))\not\leq_{\mathcal{Q}}\varphi_{s_{n+1}}(x)$ を得

る．いま，

$$\theta^s_{j,n+1} = \theta^s_j \circ \theta^s_{j+1} \circ \cdots \circ \theta^s_n \colon U_{n+1} \to U_j$$

はリプシッツ定数 $2^{-(n-j+1)}$ の縮小写像である．逆系 $(\theta^s_{ij} \colon U_j \to U_i)_{i \leq j}$ を考え，その逆極限を $(\alpha^s_j \colon U \to U_j)_j$ とする：

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "\alpha^s_j"'] \arrow[dr, "\alpha^s_i"] & \\
U_j \arrow[rr, "\theta^s_{ij}"'] & & U_i
\end{tikzcd}$$

リプシッツ定数の条件から，α^s_j は定値写像であるから，α^s_j とその唯一の行き先を同一視する．また，$\theta^{s^*}_{i,j} = \theta^s_{i+1,j+1}$ なので $\alpha^{s^*}_j = \alpha^s_{j+1}$ であることに注意する．逆極限の性質と $\theta^s_{n,n+1} = \theta^s_n$ であることから，$\theta^s_{n,n+1} \circ \alpha^s_{n+1} = \alpha^s_n$ となる．よって，

$$\varphi_{s_n}(\alpha^s_n) = \varphi_{s_n}(\theta^s_n(\alpha^s_{n+1})) \not\leq_{\mathcal{Q}} \varphi_{s_{n+1}}(\alpha^s_{n+1}) = \varphi_{s^*_n}(\alpha^{s^*}_n)$$

を得る．いま，$q(s) = \varphi_s(\alpha^s_0)$ によって定義すれば，$q \colon [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}} \to \mathcal{Q}$ は悪配列である． □

4.4.2 Steel-van Wesep の定理と自己双対性

2 値関数のワッジ理論においては，自己双対性の概念がその構造解析の重要な役割を担った．そして，そのための強力な武器となるものが，ワッジ自己双対性とリプシッツ自己双対性の同値性を述べる Steel-van Wesep の定理である．しかし，一般の前順序値写像において，自己双対性の概念に相当するものが何であるかはあまり自明ではない．この自己双対性の不在が大きなネックになり，前順序値写像のワッジ理論の発展を阻害していたと考えられる．

一般の前順序値写像の自己双対性は，1990 年に以下の定義が与えられていた．

定義 4.32 (Louveau and Saint-Raymond [39])**.** $\mathcal{Q}$ を前順序とする．位相空間 X について，写像 $f \colon X \to \mathcal{Q}$ が**ワッジ自己双対** (*Wadge selfdual*) であるとは，ある連続写像 $\theta \colon X \to X$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して $f(\theta(x)) \not\leq_{\mathcal{Q}} f(x)$ となることである．

もし X が距離空間であり，θ が非拡大写像として取れるとき，f は**リプシッツ自己双対** (*Lipschitz selfdual*) であるという．

しかし，この自己双対性が本当に正しい定義である，という判断を下すに至るまでの道のりは長かった．この定義は，2014 年に Alexander Block [5] によって再発見されるまで，ほとんど考察されていなかった．Block が定義 4.32 によって与えられる自己双対性が，2 値写像の自己双対性と同等に重要であることを見抜いたのである．そして，Block はこの自己双対性の定義の下で，Steel-van Wesep の定理をベター擬順序値写像に一般化できることを示した．ここでは，さらに超距離空間への拡張を与えよう．

定理 4.33 (AD$^+$)**.** $\mathcal{Q}$ をベター擬順序とする．このとき，標準的な完備可分超距離空間上の $\mathcal{Q}$ 値写像がワッジ自己双対であることとリプシッツ自己双対であることは同値である．

Proof. リプシッツ自己双対ならばワッジ自己双対であることは自明である．ワッジ自己双対だがリプシッツ自己双対でない標準的な完備超距離空間 U 上の写像 $f\colon U \to \mathcal{Q}$ が存在すると仮定する．このとき，以下が成立する．

- ある縮小写像 $\theta_0\colon U \to U$ が存在して，$f(x) \leq_{\mathcal{Q}} f(\theta_0(x))$ を満たす．
- ある連続写像 $\theta_1\colon U \to U$ が存在して，$f(\theta_1(x)) \not\leq_{\mathcal{Q}} f(x)$ を満たす．

ここで，後者はワッジ自己双対性から得られるものであり，前者はリプシッツ自己双対でないことと決定性公理による．つまり，$R = \{(x, y) : f(y) \not\leq_{\mathcal{Q}} f(x)\}$ とすると，リプシッツ自己双対であることは，$(x, \theta(x)) \in R$ となる非拡大写像 θ が存在することと同値である．よって，仮定よりそのような η は存在しないので，決定性公理より，$(\theta_0(x), x) \notin R$ となる縮小写像 θ_0 が得られる．

さて，上記の θ_0 と θ_1 に加え，さらに θ_2 を恒等写像としよう．十分急増大な列 $m \in [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ を固定する．このとき，任意の増大列 $s \in [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ に対して，$\tilde{\theta}^s_n$ を以下によって定義する．

$$\tilde{\theta}^s_n = \begin{cases} \theta_0 & \text{if } n \notin \mathrm{rng}(m) \\ \theta_1 & \text{if } n \in \mathrm{rng}(m \circ s) \\ \theta_2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

先程と同じように，これらの写像による逆系を考えたい．

$$\tilde{\theta}^s_{j,n+1} = \tilde{\theta}^s_j \circ \tilde{\theta}^s_{j+1} \circ \cdots \circ \tilde{\theta}^s_n.$$

いま，θ_0 は縮小写像なので，もし m が十分に急増大ならば $\tilde{\theta}^s_{m(i),m(i+1)}$ が縮小写像であると期待できそうである．ここで，以下であることに注意する．

$$\tilde{\theta}^s_{m(i),m(i+1)} = \tilde{\theta}^s_{m(i)} \circ \underbrace{\theta_0 \circ \theta_0 \circ \theta_0 \cdots \circ \theta_0 \circ \theta_0}_{m(i+1) - m(i) \text{ 個}}.$$

たとえば，仮に θ_1 がリプシッツ定数 2^n のリプシッツ連続写像であれば，$m(i) = i \cdot (n+2)$ によって定義すれば，θ_2 は非拡大写像であるから，s が何であれ $\tilde{\theta}^s_{m(i),m(i+1)}$ は縮小写像である．ただし，あくまで θ_1 は連続写像であり，リプシッツ連続であることは保証できない．しかし，たとえリプシッツ連続どころか一様連続でさえなくとも，十分に急増大な m を取れば，以下の意味での縮小性が保証できることを示そう．

主張. 十分急増大な m に対して，s に関わらず，任意の $i < j$ に対して $\tilde{\theta}^s_{m(i),m(j)}$ の像の直径は高々 2^{-j} となる．

この主張を証明する前に，この主張を仮定すれば残りの証明がうまくいくことを先に説明しよう．先程と同じように，逆系 $(\tilde{\theta}^s_{ij}\colon U_j \to U_i)_{i,j}$ を考え，その逆極限を $(\alpha^s_j\colon V \to U_j)_j$ とする．こ

こで，任意の n について $U_n = U$ とする．上の縮小性の条件から，α^s_j は定値写像であるから，α^s_j とその唯一の行き先を同一視する．逆極限の性質より，$\tilde{\theta}^s_{ij} \circ \alpha^s_j = \alpha^s_i$ である．特に，以下の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \cdot \arrow[dl, "\alpha^s_{m\circ s(1)+1}"'] \arrow[d, "\alpha^s_{m\circ s(1)}"] \arrow[drrrrr, "\alpha^s_{m\circ s(0)+1}"] & & & & & \\
\cdot \arrow[r, "\theta_1"'] & \cdot \arrow[r, "\theta_0 \text{ or } \theta_2"'] & \cdot \arrow[r, "\theta_0 \text{ or } \theta_2"'] & \cdot \arrow[r, dotted, no head] & \cdot \arrow[rr, "\theta_0 \text{ or } \theta_2"'] & & \cdot
\end{tikzcd}$$

よって，θ_0 と θ_2 の性質より，$f(\alpha^s_{m\circ s(1)}) \leq_{\mathcal{Q}} f(\alpha^s_{m\circ s(0)+1})$ を得る．さらに，θ_1 の性質より，$f(\alpha^s_{m\circ s(1)}) \not\leq_{\mathcal{Q}} f(\alpha^s_{m\circ s(1)+1})$ を得る．また，$i > m \circ s(0)$ ならば $\tilde{\theta}^s_{ij} = \tilde{\theta}^{s^*}_{ij}$ であるから，$\alpha^{s^*}_i = \alpha^s_i$ である．よって，$q \colon [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}} \to \mathcal{Q}$ を $q(s) = f(\alpha^s_{m\circ s(0)+1})$ によって定義すれば，

$$q(s) = f(\alpha^s_{m\circ s(0)+1}) \geq_{\mathcal{Q}} f(\alpha^s_{m\circ s(1)}) \not\leq_{\mathcal{Q}} \varphi(\alpha^s_{m\circ s(1)+1}) = \varphi(\alpha^{s^*}_{m\circ s^*(0)+1}) = q(s^*).$$

よって，q が悪配列であることが示された．

あとは，上の主張が正しいことを証明すればよい．$m(0) = 0$ とし，帰納的に $(m(k))_{k\leq j}$ が定義されていると仮定しよう．このとき，既に任意の s と $i \leq j$ について $\tilde{\theta}^s_{m(i),m(j)}$ は定義されていると考えてよい．また，この写像は s の最初の高々 j 個の値のみに依存するから，高々有限種類の連続写像 $\tilde{\theta}^s_{m(i),m(j)}$ のみを考えれば十分であることが分かる．いま，縮小写像 $\theta^{(\ell)}_0$ に対応する単調写像は，空列入力に対して長さ ℓ の出力を返す．縮小性より，この出力は ℓ に関する拡張列なので，ある $\alpha \in U \subseteq \Lambda^{\mathbb{N}}$ が存在して $\alpha \upharpoonright \ell$ と書ける．一方，そのような固定された点 α に対して，任意の連続写像 ψ に対応する単調写像は，十分大きな ℓ_ψ を取れば，$\alpha \upharpoonright \ell_\psi$ に対して長さ j の出力を返す．よって，上に述べた高々有限種類の連続写像 ψ に対するそのような ℓ_ψ の最大値を ℓ とし，$m(j+1) = m(j) + \ell + 1$ と定義すればよい．$\square$

写像 f が **Λ-結び可約** (*Λ-join-reducible*) であるとは，ある $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して，$f \equiv_W \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ となることである．そうでないとき，f は **Λ-結び既約** (*Λ-join-irreducible*) であるという．$\Lambda = \mathbb{N}$ のとき，それぞれ σ-結び可約および σ-結び既約という．以下が定理 4.33 の帰結である．

補題 4.34 (AD^+)**.** $\mathcal{Q}$ をベター擬順序とする．完備可分超距離化可能空間 $U \subseteq \Lambda^{\mathbb{N}}$ 上の任意のワッジ自己双対な $\mathcal{Q}$ 値写像は Λ-結び可約である．

Proof. 証明のために，まず，以下の主張を示そう．

主張. 任意の x について $f \circ \theta(x) \not\leq_{\mathcal{Q}} g(x)$ となる非拡大写像 $\theta \colon U_g \to U_f$ が存在するならば，任意の x について $f(x) \leq_{\mathcal{Q}} g \circ \eta(x)$ となる縮小写像 $\eta \colon U_f \to U_g$ は存在しない．

Proof (主張). 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$R_n = \{(x,y) : f(x) \leq_{\mathcal{Q}} g(ny)\}$ とする．いま，θ の性質より，任意の $y \in U_g$ に対して，$f \circ \theta(ny) \not\leq_{\mathcal{Q}} g(ny)$ となる．ここで θ は非拡大写像であるから，$\theta_n \colon y \mapsto \theta(ny)$ は縮小写像となる．さらに，$(\theta_n(y), y) \notin R_n$ を得る．よって，$(x, \eta_n(x)) \in R_n$ となる非拡大写像は存在しない．一方，もし $f(x) \leq_{\mathcal{Q}} g(\eta(x))$ となる縮小写像 η が存在するならば，ある n に対して，$f(x) \leq_{\mathcal{Q}} g(n^\frown\eta_n(x))$, つまり $(x, \eta_n(x)) \in R_n$ となる非拡大写像 η_n が存在するが，これは成り立たない． □

主張. g がリプシッツ自己双対ならば，g はリプシッツ Λ-結び可約である．

Proof (主張). g がリプシッツ自己双対ならば，ある非拡大写像 θ が存在して，$g(\theta(x)) \not\leq_{\mathcal{Q}} g(x)$ となる．このとき，上の主張を用いれば，$g(x) \leq_{\mathcal{Q}} g \circ \eta(x)$ となる縮小写像 η は存在しない．よって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $g|_\lambda <_{\mathrm{Lip}} g$ を得る． □

いま f がワッジ自己双対であるとしよう．この f がワッジ Λ-結び既約であると仮定して矛盾を導きたい．

この仮定の下で，任意の $g \equiv_W f$ について，g はワッジ自己双対であり，ワッジ Λ-結び既約である．$\bigoplus_\lambda g|_\lambda = g$ であるから，g のワッジ Λ-結び既約性より，ある λ について $g|_\lambda \equiv_W g$ を得る．一方，g のワッジ自己双対性より，ベター擬順序に対する Steel-van Wesep の定理 4.33 を用いて，g はリプシッツ自己双対であることが導かれる．よって，上の主張より，g はリプシッツ Λ-結び可約である．したがって，$g \equiv_W g|_\lambda <_{\mathrm{Lip}} g$ を得る．

$g_0 = f$ とし，上のような $\lambda_0 = \lambda$ について $g_1 = g_0|_{\lambda_0}$ と定義すると，$g_0 \equiv_W g_1 <_{\mathrm{Lip}} g_0$ である．$g_1 \equiv_W g_0 \equiv_W f$ であるから，同じ方法によって $g_2 = g_1|_{\lambda_1}$ で，$g_1 \equiv_W g_2 <_{\mathrm{Lip}} g_1$ となるものを得ることができる．これを繰り返すことによって，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $g_{n+1} <_{\mathrm{Lip}} g_n$ となる列 $(g_n)_n$ を得る．しかし，これはベター擬順序値写像のリプシッツ前順序の整礎性に矛盾する． □

標準的な完備超距離空間 U 上の写像 $f \colon U \to \mathcal{Q}$ の**ワッジ核**とは，以下によって定義される U の閉集合である．

$$\mathcal{F}(f) = \{x \in U : (\forall n)\ f|_{[x \upharpoonright n]} \equiv_W f\}.$$

定理 4.35. $\mathcal{Q}$ を前順序とし，U を完備可分超距離化可能空間とする．ボレル写像 $f \colon U \to \mathcal{Q}$ について，以下は同値である．

1. f は自己双対である．
2. f は σ-結び可約である．
3. f はある可算個の σ-結び既約写像 $f_\lambda <_W f$ の直和 $\bigoplus_{\lambda<\kappa} f_\lambda$ とワッジ同値である．
4. ワッジ核 $\mathcal{F}(f)$ は空である．

Proof. (1)⇒(2): 補題 4.34 による．

(4)⇒(3): $\mathcal{F}(f)$ とする．$\mathcal{F}(f)$ は空なので，V を $f \upharpoonright [\sigma] <_W f$ を満たす極小な節 $\sigma \in \underline{U} \subseteq \kappa^{<\omega}$ 全体の集合とする．このとき，明らかに $f \equiv_W \bigoplus_{\sigma \in V} f \upharpoonright [\sigma]$ である．また，f がボレルならば $f \upharpoonright [\sigma]$ もボレルである．$\mathcal{Q}$-値ボレル写像のワッジ前順序は整礎であるから，超限帰納法によって，$f \upharpoonright [\sigma]$ は σ-結び既約であるか，σ-結び既約写像の可算個の直和とワッジ同値であると仮定できる．よって，特に f は σ-結び既約写像の可算個の直和とワッジ同値である．

(3)⇒(2): 自明である．

(2)⇒(4): f が σ-結び可約であるとすると，可算個の $g_\lambda <_W f$ が存在して，$f \equiv_W \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda$ となる．つまり，ある連続写像 θ に対して，$f(x) \leq_{\mathcal{Q}} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda(\theta(x))$ となる．連続性より，任意の x に対して，ある n と λ が存在して，$\underline{\theta}(x \upharpoonright n) = \lambda$ となる．これは $f|_{[x \upharpoonright n]} \leq_W g_\lambda <_W f$ を導く．よって，x は f のワッジ核には属さないので，$\mathcal{F}(f)$ は空である．□

5 ボレル写像の組合せ論的構成原理

ここから先では，ボレル写像の構造をもう少し細かく見ていくことにしよう．まず，**ルベーグ-ハウスドルフ-バナッハの定理** (*Lebesgue-Hausdorff-Banach theorem*) としてよく知られているように，振る舞いの良い空間においては，ボレル写像であることとベール級写像であることは同値である．より精密には，$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{1+\xi}$-可測であることとベール ξ 級であることが同値になる．ここからの議論では，可測性よりもベール階級の方が取り扱いやすいので，ベール級写像に注目する．ここで，位相空間 X から Y への写像 $f\colon X \to Y$ が**ベール 1 級** (*Baire class one*) であるとは，連続写像の列 $(f_n\colon X \to Y)_{n \in \mathbb{N}}$ の各点極限として書けることである．つまり，

$$(\forall x \in X) \quad f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

一般に，写像が**ベール ξ 級** (*Baire class ξ*) であるとは，ξ 未満級のベール写像列の各点極限として書けることを意味する．

それでは，本稿の残りを通して，ボレル写像の連続還元順序に対して，組合せ論的完全不変量を与える，木原-Montalbán の定理 [32] の解説を行う．これは，とくに超距離空間においては，ボレル可測写像の連続還元順序と，ある種の組合せ論的順序構造の間に同型を与えるものとなる．

この定理を大雑把に説明すると，ベター擬順序 $\mathcal{Q}$ と任意の可算順序数 ξ に対して，次の 2 つの構造は同型であるというものである．

1. コンパクト非可算超距離化可能空間上の $\mathcal{Q}$ 値ベール ξ 級写像の連続還元順序構造．
2. ベター擬順序 $\mathcal{Q}$ をラベルに持つ可算整礎木全体上の準同型順序をラベルに持つ可算整礎木全体上の準同型順序をラベルに持つ可算整礎木全体上の準同型順序をラベルに持つ……の超限入れ子構造の ξ 段階目の可算整礎木のなす順序構造．

非コンパクトかつ可分の場合は，ξ 段階目の可算整礎木の代わりに可算整礎**森** (*forest*) を考えたものが同型になる．ここからの話では，**決定性公理は仮定しない**．これからわれわれが相手にするものはボレル写像であるから，マーティンのボレル決定性定理 2.6 と Galvin-Prikry のボレル・ラ

ムゼー定理 2.6 で十分である．したがって，以後の議論は，たとえば，ZFC 集合論における証明であると考えてよい．

以後，標準的な完備超距離空間 $U \subseteq \kappa^{\mathbb{N}}$ および U の木表現 $\underline{U} \subseteq \kappa^{<\omega}$ を固定する．

5.1 準同型順序

主定理の正確な主張を述べるために，いくつか組合せ論的な準備を行おう．無限下降列を持たない順序は，**整礎** (*well-founded*) であると言われる．**森** (*forest*) とは，半順序構造 $(T, \leq)$ であり，任意の $t \in T$ に対して $\{s \in T : s \geq t\}$ が全順序となっているものとする．**木** (*tree*) とは，最大元を持つ森である．

定義 5.1. $\mathcal{Q}$ を前順序集合とする．**$\mathcal{Q}$-ラベル前順序** ($\mathcal{Q}$*-labeled preorder*) とは，集合 A, および A 上の順序 $\leq_A$ と写像 $c_A\colon A \to \mathcal{Q}$ からなる 3 つ組 $\mathcal{A} = (A, \leq_A, c_A)$ である．

定義 5.2 ([23])**.** $\mathcal{Q}$-ラベル前順序 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への**準同型** (*homomorphism*) とは，次の 2 条件を満たす写像 $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ のことである．

1. h は順序保存である．つまり，$x \leq_A y$ ならば $h(x) \leq_B h(y)$ である．
2. h はラベル増大である．つまり，$c_A(x) \leq_{\mathcal{Q}} c_B(h(x))$ である．

もし，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への準同型が存在するならば，$\mathcal{A} \leq_h \mathcal{B}$ と書き，これを**準同型前順序** (*homomorphic preorder*) と呼ぶ.

本稿では，特にラベル可算木やラベル可算森に対する準同型前順序を考察する．類似概念として，Nash-Williams らによって研究された**同相埋め込み前順序** (*homeomorphic embedding order*) がある．Nash-Williams の無限木定理は，ラベルを考慮に入れないが，その後，Laver [37] は，ベター擬順序をラベルに持つ木上の同相埋め込み前順序はベター擬順序をなすことを示している．

さて，前順序 $\mathcal{Q}$ が与えられたとき，$\mathrm{Tree}(\mathcal{Q})$ によって可算整礎 $\mathcal{Q}$-ラベル木全体のなす準同型（前）順序構造を表す．同様に $^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathcal{Q})$ によって可算整礎 $\mathcal{Q}$-ラベル森全体のなす準同型（前）順序構造を表す．準同型前順序は同相埋め込み前順序より粗いので，Laver の定理より，もし $\mathcal{Q}$ がベター擬順序ならば，$\mathrm{Tree}(\mathcal{Q})$ や $^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathcal{Q})$ もまたベター擬順序をなす．

さて，自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbf{m}$ を $\{0, \dots, m-1\}$ に離散順序を入れたものを表す．ベール 1 級写像，つまり $\mathbf{\Delta}^0_2$-可測写像と木構造との関わりは，古くからぼんやりと認識されていたが，数学的に厳密にどのような繋がりがあるかについては，はっきりとはしていなかった．しかし，この準同型順序を用いることで，ついに，ベール 1 級有限分割と木構造との厳密な関わりを得る．

定理 5.3 ([63])**.** 次の 2 つの構造は同型である．

1. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の $\mathbf{m}$-値ベール 1 級写像の連続還元順序構造.

2. 可算整礎 $\mathbf{m}$-ラベル森全体のなす準同型順序構造 ${}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathbf{m})$.

証明は，古くからあるアイデアを厳密に書き下すことによる．しかし，漠然としたアイデアが明示的に書き出されると，途端に，理論の発展は加速するものである．この定理が証明されたことにより，われわれは次のステップを踏むことができる．$\mathrm{Tree}(\mathbf{k})$ は再び前順序構造をなすから，$\mathrm{Tree}(\mathbf{k})$-ラベル前順序を考えることができる．つまり，これは 2 重ラベル前順序である．そして，なんと，これがベール 2 級有限分割を特徴付けるというのである．

定理 5.4 ([64])**.** 次の 2 つの構造は同型である．

1. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の $\mathbf{m}$-値ベール 2 級写像の連続還元順序構造.
2. 可算整礎 $\mathrm{Tree}(\mathbf{m})$-ラベル森全体のなす準同型順序構造 ${}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathbf{m}))$.

そうすると，ベール 3 級写像，ベール 4 級写像などの特徴付けにも期待が持てる．2 重ラベル木 $\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathbf{m}))$ もまた前順序構造をなす．だから，$\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathbf{m}))$-ラベル森，$\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathbf{m})))$-ラベル森，というラベルの多重ネストを考えればよいのではないだろうか．事実，これはそのとおりであった．いま，$\mathrm{Tree}^1(\mathcal{Q}) = \mathrm{Tree}(\mathcal{Q})$ かつ $\mathrm{Tree}^{n+1}(\mathcal{Q}) = \mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q}))$ と定義し，また ${}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^{n+1}(\mathcal{Q}) = {}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q}))$ としよう．

定理 5.5 ([32])**.** $\mathcal{Q}$ をベター擬順序とし，$n \in \mathbb{N}$ とする．このとき，次の 2 つの構造は同型である．

1. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の $\mathcal{Q}$-値ベール n 級写像の連続還元順序構造.
2. 可算整礎 n 重 $\mathcal{Q}$-ラベル森全体のなす準同型順序構造 ${}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$.

この定理は，超限級に拡張できる．しかし，ラベルの超限ネストや準同型順序の超限への拡張方法については，まったく自明ではないことに注意する必要がある．

たとえば，$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}$ 集合のワッジ階数は「ω_1 を基とする超指数階層の n 段目 $\omega_1 \uparrow\uparrow n$」であった．素朴に考えれば，$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{\omega}$ 集合のワッジ階数は「ω_1 を基とする最小のイプシロン数 ε_{ω_1+1}」だと思ってしまうかもしれないが，これは大きな誤りである．思い出して欲しい，$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{\omega}$ 集合のワッジ階数は「ω_1 を基とする ω_1 番目のイプシロン数 $\varepsilon_{\omega_1+\omega_1}$」であったことを．最小のイプシロン数 ε_{ω_1+1} と ω_1 番目のイプシロン数 $\varepsilon_{\omega_1+\omega_1}$ の差は，果てしなく大きい．

このように，有限階級と ω 階級には，かなりのギャップがある．このギャップを認識せずに雑に考えた超限級多重ラベルでは，ワッジ階数で言うところの ε_{ω_1+1} と $\varepsilon_{\omega_1+\omega_1}$ の間をうろうろと徘徊するだけであろう．一般の α 階級に対する超限多重ラベルを考えたつもりでも，ω 階級にまったく

辿り着けていない可能性が高いのである．

これは一工夫で解決できるが，ただの準同型順序ではなく，その一般化が必要となる．超限級の準同型順序の定義自体は難しくないのだが，主定理の証明については格段に難しくなる．これは単純に無限順序数を考えているために証明が複雑化する，というレベルの話ではない．有限級の場合には必要のなかった，全く発想の異なる証明を要求されるのである．このため，本稿では，有限級の場合のみを取り扱うことにする．

5.2 階層理論の一般化

位相空間 X の開集合 V の特性関数 $\chi_V\colon X \to 2$ を考えてほしい．これは特にベール 1 級であり，連続近似 $(v_s)_{s\in\mathbb{N}}$ を持つ．開集合は，$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ 集合とも表されるように，存在式によって特徴付けられる．つまり，連続近似は，$x \in V$ の証拠を見つけるまでは $v_s(x) = 0$ という推測を行い，$x \in V$ の証拠が見つかれば，$v_t(x) = 1$ のように変化する．この連続近似の 0 から 1 への値の変化可能性を「根が 0 でラベル付けられ，葉が 1 でラベル付けられた高さ 2 の木」で表現し，記号的には $[0]\to[1]$ と書くことにする．

同様に，閉集合は，$\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1$ 集合とも表されるように，全称式によって特徴付けられる．よって，閉集合の（特性関数の）連続近似は，1 から 0 への変化として捉えられる．これを「根が 1 でラベル付けられ，葉が 0 でラベル付けられた高さ 2 の木」で表現し，記号的には $[1]\to[0]$ と書く．

開かつ閉な集合 C の場合，その特性関数 χ_C は既に連続関数である．よって，直ちに $\chi_C(x) = 0$ か $\chi_C(x) = 1$ かを決定できる．これを「それぞれ 0 と 1 でラベル付けられた 2 つの根のみからなる森」によって表現し，記号的には $[0] \sqcup [1]$ と書く．

このように，集合/写像の族と木の対応付けを行うのが，本節の目標である．一般に，ラベル木または森 T が与えられたときに，対応する写像の族 Σ_T を定義する．たとえば，以下のような感じである．

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \Sigma_{[0]\to[1]}, \quad \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \Sigma_{[1]\to[0]}, \quad \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_1 = \Sigma_{[0]\sqcup[1]}.$$

なんとなく法則は掴めてきただろうか．連続近似の $0 \to 1 \to 0$ という変化は，根を 0, 後続ノードを 1, その後続ノードである葉を 0 でラベル付けた高さ 3 の木によって表され，$\Sigma_{[0]\to[1]\to[0]}$ はハウスドルフの差の階層の第 1 階数を表す．ハウスドルフの差の階層やエルショフ階層に詳しい人であれば，なるほど，$\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_2$ までなら容易に木や森で表わすことができそうだ，と納得してもらえるだろうと思う．

では，$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ や $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ はどう表すことができるだろうか．ここには，少しの思考の飛躍が必要である．理屈を抜きにして，答えを言ってしまうが，ここでラベルのネストが必要になる．$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ に対応する木は「木 $[0]\to[1]$ によってラベル付けされた根のみからなる高さ 1 の木」であり，$\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ に対応する木は「木 $[1]\to[0]$ によってラベル付けされた根のみからなる高さ 1 の木」である．つまり，以下のようになる．

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2 = \Sigma_{[[0]\to[1]]}, \qquad \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_2 = \Sigma_{[[1]\to[0]]}.$$

なぜこうなるかという理屈は，数学的証明から導かれたという他はない．

それでは，厳密な Σ_T の定義を与えたい．しかし，その前に，木や森を $[0]^\to[1]$ や $[0]\sqcup[1]$ や $[[1]^\to[0]]$ のように書く表記法を整備しておく方が便利である．

定義 5.6. 言語 $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$ は，各 $q\in\mathcal{Q}$ に対する定数記号 $[q]$，そして 3 つの関数記号 $^\to$, $\sqcup$, $[\cdot]$ からなる．ここで，$^\to$ は 2 項関数記号，$\sqcup$ は ω 項関数記号，$[\cdot]$ は 1 項関数記号である．これから，言語 $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$ の**項** (*term*) の概念を帰納的に定義する．ただし，項には，「根型」「木型」「森型」の 3 種類がある．以下によって帰納的に定義されるものだけが，各種の項である．

1. 根型項は，木型項である．
2. 各定数記号 $[q]$ は根型項である．
3. $(t_i)_{i\in A}$ が木型項の列ならば，$\sqcup_i t_i$ は森型項である．
4. t が根型項かつ F が森型項ならば，$t^\to F$ は木型項である．
5. t が木型項ならば，$[t]$ は根型項である．

根型項，木型項，森型項のいずれかであるものを $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$ の項と呼ぶ．このとき，${\rm Tree}^\omega(\mathcal{Q})$ を $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$ の木型項全体の集合，${}^\sqcup{\rm Tree}^\omega(\mathcal{Q})$ を $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$ の項全体の集合とする．

また，${\rm Tree}^n(\mathcal{Q})$ および ${}^\sqcup{\rm Tree}^n(\mathcal{Q})$ によって，ラベルのネストが n 未満の木型項および項全体の集合とする．より正確には，各定数記号は 1 級項とし，構成 5 については，t が n 級項ならば $[t]$ は $(n+1)$ 級項，他の構成は階級を保つとする．このとき，${\rm Tree}^n(\mathcal{Q})$ および ${}^\sqcup{\rm Tree}^n(\mathcal{Q})$ によって，n 級以下の木型項および項全体の集合とする．

直感的な意味付けとしては，根型項というのは，何かラベルのついた根のみからなる木を表す．たとえば，$[q]$ は q というラベルの付いた根のみからなる木である．項目 3 は，可算個の木の非交差な和によって，森を表すことと同等である．項目 4 については，森 F に根 t を付加して束ねることによって，1 つの木を与えることを意味している．項目 5 はラベルの多重ネストを可能にする．

さて，Σ_T を定義したいのだが，U の開集合または閉集合上で定義された写像は，U 上全域で定義された写像と同一視できることをコメントしておく．

命題 5.7. $Z\subseteq U$ が空でない開集合または閉集合ならば，任意の $g\colon Z\to\mathcal{Q}$ は，ある $\hat{g}\colon U\to\mathcal{Q}$ とワッジ同値である．

Proof. Z が閉集合の場合，U の零次元性より，レトラクション $\rho\colon U\to Z$ が存在する．つまり，ρ は連続かつ $\rho\restriction Z$ は恒等写像である．このとき，$\hat{g}=g\circ\rho$ によって定義する．すると，ρ によって $\hat{g}\leq_W g$ が保証され，また恒等写像によって $g\leq_W\hat{g}$ が保証される．

Z が開集合の場合，$\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\underline{U}$ を Z の生成子とする．このとき，$\hat{g}(n^\frown x)=g(\sigma_n{}^\frown x)$ として定義すると，$g\equiv_W\hat{g}$ は明らかである． □

以後，U 上の開集合または閉集合上で定義された写像は，命題 5.7 を用いて，全域写像と同一視

する．

定義 5.8. 各項 $T \in {}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^{\omega}(\mathcal{Q})$ に対して，Σ_T-写像の概念を以下によって帰納的に定義する．

1. 各定数記号 $[q]$ について，$\Sigma_{[q]}$-写像とは，定数写像 $x \mapsto q$ を意味する．
2. $(t_i)_{i \in A}$ を木型項の列とする．このとき，$f\colon U \to \mathcal{Q}$ が $\Sigma_{\sqcup_i t_i}$**-写像**であるとは，U の開被覆 $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して，$f \upharpoonright C_i$ が Σ_{t_i}-写像であることを意味する．
3. t を根型項で，F を森型項とする．このとき，$f\colon U \to \mathcal{Q}$ が $\Sigma_{t \to F}$**-写像**であるとは，ある開集合 $V \subseteq U$ が存在して，$f \upharpoonright (U \setminus V)$ が Σ_t-写像であり，$f \upharpoonright V$ が Σ_F-写像であることを意味する．
4. t を木型項とする．このとき，$f\colon U \to \mathcal{Q}$ が $\Sigma_{[t]}$**-写像**であるとは，あるベール 1 級写像 $\gamma\colon U \to U$ と Σ_t-写像 $g\colon U \to \mathcal{Q}$ が存在して，$f = g \circ \gamma$ となることである．

この定義によって，木や森という組合せ論的構造は，写像の族と対応付けられる．項目 2 は，可算個の木から森を作る操作と，可算個の写像を貼り合わせて 1 つの写像を作る操作を対応させている．項目 3 について，森に根を加えて 1 つの木として束ねる操作が，開集合上の写像に閉集合上の写像を加えて 1 つの写像を作る操作と対応する．この操作について，2 値写像の場合は，ハウスドルフ-クラトフスキの差の階層（あるいはエルショフ階層）に相当する．したがって，これは差の階層の $\mathcal{Q}$ 値写像への一般化と考えられるが，少し意味が読み取りづらいかもしれない．その直感的な意味付けについては，後の Σ_T-完全写像の構成の際に詳述する．項目 $1, 2$ だけでは連続写像しか作れない．項目 $1, 2, 3$ を組み合せて，ベール 1 級写像を作れるようになる．そして，さらに項目 4 を合わせることにより，ベール階級の高い写像を作ることが可能になる．

この定義は，算術的階層，エルショフ階層，ボレル階層，ハウスドルフの差の階層などの発想を究極的に精密化しているという点で，ワッジ理論の枠を越えて有用であるというポテンシャルを持っていると思うが，ここではそれは置いておこう．本稿で示すことは，あらゆるベール有限階級写像はこのたった 4 つの構成原理から得ることができ，そして，如何に構成されたか（つまり対応する $\mathcal{L}_{\mathrm{tree}}(\mathcal{Q})$-項）を見ることによって完全に分類されるということである．

観測 5.9. f が Σ_T-写像であり θ が連続写像ならば，$f \circ \theta$ も Σ_T-写像である．これは項の構成上の帰納法によって示すことができる．

以後，Σ_T によって Σ_T-写像全体の族を表す．また，$\mathcal{B}_\xi$ によってベール ξ 級写像全体の族を表す．

補題 5.10. S と T を $\mathcal{L}_{\mathrm{tree}}(\mathcal{Q})$ の項とし，$\xi \geq 1$ を可算順序数とする．このとき，以下が成立する．

1. $\Sigma_S, \Sigma_T \subseteq \mathcal{B}_\xi$ ならば $\Sigma_{S \to T} \subseteq \mathcal{B}_\xi$ である．
2. $\Sigma_T \subseteq \mathcal{B}_\xi$ ならば $\Sigma_{[T]} \subseteq \mathcal{B}_{1+\xi}$ である．

注意点として，ξ が無限順序数ならば $1+\xi=\xi$ である．したがって，この補題より，なぜこの方針が無限階級に対して無力であるのか，ということは明らかであろう．

5.3 Σ_T-完全性

定義 5.11. T を $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$ の項とする．写像 $f\colon\mathbb{N}^\mathbb{N}\to\mathcal{Q}$ が Σ_T**-完全** (Σ_T*-complete*) とは，f が Σ_T-写像であり，任意の Σ_T-写像 $g\colon\mathbb{N}^\mathbb{N}\to\mathcal{Q}$ に大して $g\le_W f$ となることである．

本節の目的は，Σ_T-完全写像を見つけることである．まず，定数記号 q について，定数写像 $x\mapsto q$ が $\Sigma_{[q]}$-完全であることは明らかである．つづいて，f_n が Σ_{t_n}-完全写像であれば，

$$g(n^\frown x)=f_n(x)$$

によって定義される写像 g が $\Sigma_{\sqcup_n t_n}$-完全であることを示すのはむずかしくないであろう．よって，問題となるものは，$\Sigma_{t\to F}$-完全写像と $\Sigma_{[t]}$-完全写像である．前者については，第 5.3.2 節において $(f,g)\mapsto f^\to g$ という演算を定義し，f が Σ_t-完全で g が Σ_F-完全ならば $f^\to g$ が $\Sigma_{t\to F}$-完全であることを示す．

問題は，$\Sigma_{[t]}$-完全写像である．$\Sigma_{[t]}$-写像は，Σ_t-写像とベール 1 級写像の合成なのだから，$\Sigma_{[t]}$-完全写像を得るには，Σ_t-完全写像とベール 1 級完全写像を合成すればいいと思うかもしれない．しかし，そのアイデアには，1 つだけ，とんでもなく大きな問題点がある．実は**ベール 1 級完全写像などというものは存在しない！**　これは，2 値関数の文脈ではよく知られたものである．つまり，$\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^0_2$-完全集合は存在しない．そういうわけで，この議論は破綻してしまうのだが，解決策がある．

5.3.1 融和的写像とベール 1 級完全性

完備超距離化可能空間 U は，木の構造 $\underline{U}$ を持っていた．この木の無限パスが空間の点に相当するものである．しかし，無限パスの部分だけを空間とみなすよりも，それに木の部分が備わった構造を含めた空間を考えた方が都合がよい．つまり，われわれはこれから空間 $\tilde{U}=U\cup\underline{U}$ を考える．ただし，この空間 $\tilde{U}$ の位相は $\{\{x\in\tilde{U}:x\supseteq\sigma\}:\sigma\in\underline{U}\}$ から生成されているものとする．これはいわゆる領域理論的な空間であって，T_1-分離公理などを満たさないことは容易に分かる．また，特化順序と呼ばれる順序より，空間 $\tilde{U}$ 上の木構造を復元できる．ここで，特化順序 (specialization order) とは，以下によって与えられる順序である．

$$x\le_s y\iff \mathrm{cl}(x)\subseteq\mathrm{cl}(y).$$

このとき，$\underline{U}$ がコンパクト元全体，U が極大元全体に対応する．この領域理論的空間 $\tilde{U}$ 自体はまったく大したものではないが，以下の融和的写像の概念と合わせることによって，その真価を発揮する．融和的写像の目的は，領域理論的空間 $\tilde{U}$ を経由して，U 上の部分写像を U 上の全域写像として表現することである．

まず，空白記号 $\sqcup\notin A$ を固定する．このとき，$A_\sqcup=A\cup\{\sqcup\}$ を離散集合と考えると，$U_\sqcup=A_\sqcup^\mathbb{N}$ には標準的な超距離が入り，等長写像 $i\colon U\to U_\sqcup$ が存在する．いま，文字詰め (kerning) 写像

$\mathrm{kern}\colon \tilde{U}_{\text{\textvisiblespace}} \to \tilde{U}$ を $x \in \tilde{U}_{\text{\textvisiblespace}}$ にある全ての空白記号を削除する写像とする．そして，このとき，$p = \mathrm{kern} \circ i$ と与えることにする．以後，$\mathrm{kern}(x)$ を単に $x^\diamond$ と書く．

例 5.12. たとえば，以下が文字詰めの具体例である．

$$(k\ e\ \text{\textvisiblespace}\ r\ \text{\textvisiblespace}\ \text{\textvisiblespace}\ \text{\textvisiblespace}\ n\ \text{\textvisiblespace}\ i\ n\ \text{\textvisiblespace}\ g \dots)^\diamond = (k\ e\ r\ n\ i\ n\ g \dots).$$

注意. 数学的に正確に書けば，文字詰め写像とは，以下の操作である．

$$x^\diamond(n) = \begin{cases} (x^\diamond \upharpoonright n)^\frown x(n) & \text{if } x(n) \neq \text{\textvisiblespace} \\ (x^\diamond \upharpoonright n) & \text{if } x(n) = \text{\textvisiblespace} \end{cases}$$

このとき，$\mathrm{kern}(x) = x^\diamond$ によって定義される．

定義 5.13. 写像 $f\colon U \to \mathcal{Q}$ あるいは写像 $\theta\colon U \to U$ が**融和的** (*conciliatory*) であるとは，次の図式を可換にするような（連続とは限らない）写像 $\tilde{f}\colon \tilde{U} \to \mathcal{Q}$ あるいは $\tilde{\theta}\colon \tilde{U} \to \tilde{U}$ が存在することを意味する．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{Q} \\ \tilde{U} \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "p"'] & U \arrow[d, "p"] \\ \tilde{U} \arrow[r, dotted, "\tilde{\theta}"'] & \tilde{U} \end{tikzcd}$$

つまり，融和的写像とは，$\tilde{U}$ 上の写像とみなすことのできるような U 上の写像のことである．写像 $f, g\colon U \to U$ が p-**同値**であるとは，$p \circ f = p \circ g$ であることを意味する．もし f, g が融和的ならば，これは $\tilde{f} = \tilde{g}$ となることと同値である．

つまり，$f\colon U \to \mathcal{Q}$ が融和的写像とは，空白の差を無視すれば同じ入力に対しては，出力も等しい，ということを意味し，同様に，$\theta\colon U \to U$ が融和的写像とは，空白の差を無視すれば同じ入力に対しては，出力も空白の差を無視すれば等しい，ということである．

この節では，等長写像 i のことは忘れて，$f\colon U_{\text{\textvisiblespace}} \to \mathcal{Q}$ や $\theta\colon U_{\text{\textvisiblespace}} \to U_{\text{\textvisiblespace}}$ が融和的，などと言ったりもする．この場合，単に $p = \mathrm{kern}\colon x \mapsto x^\diamond$ である．

U 上の部分連続写像は，木 $\underline{U}$ 上の単調写像と同一視できる．したがって，次の主張は，U 上の部分連続写像が U 上の全域連続写像によって表現できることを述べる．

補題 5.14. 写像 $\varphi\colon \tilde{U} \to \tilde{U}$ が融和的連続写像 $f\colon U \to U$ によって表現されることと，φ が木 $\underline{U}$ 上の単調写像によって表現されることは同値である．

Proof. ψ を $\underline{U}$ 上の単調写像とする．写像 $f\colon (A \cup \{\text{\textvisiblespace}\})^{\mathbb{N}} \to (A \cup \{\text{\textvisiblespace}\})^{\mathbb{N}}$ を以下のように帰納的に定義する．$f(x) \upharpoonright n$ が既に定義されていると仮定する．$f(x)(n)$ の値は，$\psi(x^\diamond \upharpoonright n)$ をフォローする，つまり，

$$f(x)(n) = \begin{cases} a & \text{if } (f(x) \upharpoonright n)^{\diamond\frown} a \sqsubseteq \psi(x^\diamond \upharpoonright n) \\ \text{\textvisiblespace} & \text{if } (f(x) \upharpoonright n)^\diamond = \psi(x^\diamond \upharpoonright n) \end{cases}$$

このとき，$A \cup \{\text{\textvisiblespace}\} \simeq A$ を同一視すれば，f は融和的非拡大写像であり，f と ψ が同じ写像 φ を表現することは容易に確かめられる．

逆に，ある融和的連続写像 f が存在して，$\varphi = \tilde{f}$ となると仮定する．$\underline{f}\colon (A\cup\{\llcorner\!\lrcorner\})^* \to (A\cup\{\llcorner\!\lrcorner\})^*$ を f の単調写像表現とする．$\sigma \sqsubseteq \tau$ とすると，ある γ が存在して，$\tau = \sigma^\frown\gamma$ と書ける．仮定より，$f(\sigma\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\dots)^\diamond = \varphi(\sigma)$ となる．f の連続性より，十分沢山の $\llcorner\!\lrcorner$ を用いれば，$\underline{f}(\sigma\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\ \dots\ \llcorner\!\lrcorner)^\diamond = \varphi(\sigma)$ となる．よって，

$$\varphi(\sigma) = \underline{f}(\sigma\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\ \dots\ \llcorner\!\lrcorner)^\diamond \sqsubseteq f(\sigma\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\ \dots\ \llcorner\!\lrcorner\,\gamma\,\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\dots)^\diamond = \varphi(\sigma^\frown\gamma) = \varphi(\tau)$$

となるから，φ の単調性が示された． □

さて，この節の最大の目的は，ベール 1 級完全性の概念を弱めた「融和的ベール 1 級完全性」の概念を導入し，その存在を示すことである．

命題 5.15. 自己相似な融和的ベール 1 級完全写像 $\beta\colon U \to U$ が存在する．

融和的ベール 1 級写像の難しい点は，必ずしも融和的連続写像の各点極限と書けない点である．それでは，融和的ベール 1 級写像は，どのように理解できるだろうか．空間 $\tilde{U}$ の特性としては，自明に，任意の列が収束列である．しかし，極限が一意には定まらないので，以下のように特化順序を用いて極限概念を修正する．ある点列の極限のうち，特化順序で最大のものが存在するとき，それを**融和極限**と呼ぶことにしよう．空間 $\tilde{U}$ の任意の点列が融和極限を持つことを示すのは難しくない．

例 5.16. $\tilde{U}$ の点列 $(x_s)_{s\in\mathbb{N}}$ の融和極限 $\mathrm{Lim}_{s\to\infty}x_s \in \tilde{U}$ とは，$\langle \lim_s x_s(0), \lim_s x_s(1), \dots\rangle$ の始切片で，各項目の極限が定まっているような最大の長さのものである．つまり，$x = \mathrm{Lim}_{s\to\infty}x_s$ かつ ℓ を x の長さとしたとき，任意の $n < \ell$ について，$\mathrm{Lim}_s x_s(n) = \lim_s x_s(n)$ であり，ℓ が有限ならば $x_s(\ell)$ は $s\to\infty$ での極限を持たない．

次の補題の証明は，ある種の空間上ではベール 1 級であることと F_σ-可測性が同値であることを述べるルベーグ-ハウスドルフ-バナッハの定理は類似する．融和的ベール 1 級写像から得られる $\tilde{U}$ 上の写像は F_σ-可測であり，それは連続写像の融和的極限と一致する，という形式である．

補題 5.17. 写像 $\varphi\colon \tilde{U} \to \tilde{U}$ が融和的ベール 1 級写像によって表現されることと，木上の単調写像列の各点融和極限として表現されることは同値である．

Proof. ある融和的ベール 1 級写像 $f\colon (A\cup\{\llcorner\!\lrcorner\})^{\mathbb{N}} \to (A\cup\{\llcorner\!\lrcorner\})^{\mathbb{N}}$ が存在して，$\varphi = \tilde{f}$ となると仮定する．f はベール 1 級であるから，ある連続写像の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の各点極限となる．このとき，次が成立することは容易に確かめられる．

$$\sigma \sqsubseteq f(x)^\diamond \iff (\exists\tau)[\sigma = \tau^\diamond \text{ and } (\exists s)(\forall t \geq s)\ \tau \sqsubseteq f_t(x)].$$

ここで，A が何であれ，$\sigma = \tau^\diamond$ となる τ は可算個しか存在しないため，τ の量化範囲は可算集合であることに注意する．いま，$\sigma \sqsubseteq \varphi(\xi)$ だが $\sigma \not\sqsubseteq \lim_n \varphi(\xi\upharpoonright n)$ として矛盾を導く．後者の条件より，ある無限増大列 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\sigma \not\sqsubseteq \varphi(\xi\upharpoonright k_n)$ となる．

帰納的に $y_n^\diamond = \xi \upharpoonright k_n$ となる有限列 y_n を得ていると仮定する．$\sigma \not\sqsubseteq \varphi(\xi \upharpoonright k_n) = f(y_n {}^\frown \sqcup^{\times\infty})^\diamond$ なので，$\sigma = \tau^\diamond$ となる n 番目の対 $\langle \tau, s\rangle$ に対して，ある $t_n \geq s$ が存在して，$\tau \not\sqsubseteq f_{t_n}(y_n {}^\frown \sqcup^{\times\infty})$ となる．f_{t_n} は T_1 空間 U 上の連続写像であるから，十分大きな u について，$(y_n {}^\frown \sqcup^{\times u})$ の入力でこの結果は保証される．このとき，$y_{n+1} = y_n {}^\frown \sqcup^{\times u} {}^\frown \xi \upharpoonright [k_n, k_{n+1}-1]$ として定義し，$y = \lim_n y_n$ とする．明らかに，任意の τ について，もし $\tau^\diamond = \sigma$ ならば $\tau \not\sqsubseteq \lim_s f_s(y) = f(y)$ であるから，$\sigma \not\sqsubseteq f(y)^\diamond = \varphi(y^\diamond) = \varphi(\xi)$ が導かれるが，これは矛盾である．

逆に，木上の単調写像の列 $(\psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ が与えられているとする．$\xi \in \underline{U}$ を固定する．このとき，$t_s^\xi(n)$ を $u \in [t,s]$ で $\psi_u \upharpoonright n$ の値が安定しているような最小の t とする．つまり，任意の $u \in [t,s]$ に対して，$|\psi_u| \geq n$ かつ $\psi_u \upharpoonright n = \psi_s \upharpoonright n$ である．そのような t が存在しない場合には，$t_s^\xi(n) = \infty$ としておく．このとき，$x^\diamond = \xi$ に対して，

$$f_s(x) = \sqcup^{\times t_s^\xi(0)} {}^\frown \psi_s(\xi)(0) {}^\frown \sqcup^{\times t_s^\xi(1)} {}^\frown \psi_s(\xi)(1) {}^\frown \dots$$

のように定義する．$(f_s)_{s\in\mathbb{N}}$ が連続写像の列であり，$\lim_s f_s$ と $\lim_s \psi_s$ が同じ写像を表現することは容易に確認できる． □

我々はこれからベール 1 級完全写像の概念を考察する．注意すべき点として，記述集合論的な意味では，基本的に，全てのベール 1 級写像の情報を含有する全域ベール 1 級写像というものは存在しない．しかし，この融和的写像の概念を用いることで，弱い意味での全域ベール 1 級完全写像の概念を考察することができる．

定義 5.18. $\beta \colon U \to U$ を融和的写像とする．このとき，β が**融和的ベール 1 級完全**であるとは，β がベール 1 級であり，任意の融和的ベール 1 級写像 $g \colon U \to U$ に対して，g と $\beta \circ \theta$ が p-同値となる連続写像 $\theta \colon U \to U$ が存在することを意味する．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "\theta"] \arrow[d, "g"'] & & U \arrow[d, "\beta"] \\
U \arrow[r, "p"'] & \tilde{U} & U \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}$$

定義 5.19. 写像 $f \colon U \to U$ が**自己相似**であるとは，任意の開集合 $V \subseteq U$ に対して，f と $f \circ \theta$ が p-同値となるような連続写像 $\theta \colon U \to V$ が存在することを意味する．

Proof (命題 5.15)*.* それでは自己相似な融和的ベール 1 級完全写像を定義しよう．$\{\sigma_\lambda : \lambda \in A\}$ を $\underline{U}$ の枚挙とする．各点 $x \in U$ に対して，$y = p(x)$ とし，有限列の列 $\sigma_{y(0)}, \sigma_{y(1)}, \sigma_{y(2)}, \dots$ を考える．$\tilde{U}$ の性質より，この列の融和極限 $\mathrm{Lim}(x)$ が存在する．明らかに Lim はベール 1 級である．いま，$g \colon U \to U$ を融和的ベール 1 級写像とすると，$g = \lim_s g_s$ と書ける．与えられた $x \in U$ に対して，$\sigma_{x^*(s)} = p \circ g_s(x) \upharpoonright s$ となるような $x^*(s)$ を取る．p は連続であるから，$\mathrm{Lim}(x^*) = p \circ g(x)$ が成立する．p の全射性より，$p \circ \beta(x) = \mathrm{Lim}(x)$ となる写像 $\beta \colon U \to U$ が存在するので，そのような β を取る．明らかに β は融和的である．また，上の議論より，β は融和的ベール 1 級完全である．

自己相似性について，$\varepsilon \in \Lambda$ を σ_ε が空列であるようなものとする．$[\sigma] \subseteq V$ となる $\sigma \in \underline{U}$ を取り，$\theta(x) = \sigma^\frown\varepsilon^\frown x$ と定義すれば，$f(x) = f \circ \theta(x)$ であることは容易に確かめられる． □

連続写像 $p\colon U \to \tilde{U}$ が与えられているとする．p が**可拡大**であるとは，p の単調写像表現 ψ に対して，もし $\psi(\sigma) = \tau$ ならば，任意の $\tau' \in \tilde{U}$ で $\tau' \succeq \tau$ なるものについて，ある $\sigma' \in U$ で，$\sigma' \succ \sigma$ なるものが存在して，$\psi(\sigma') = \tau'$ となることを意味する．p が可拡大な連続全射であれば，可分性を要求するが，以下の命題は便利である．

命題 5.20. 可分超距離空間上の任意の融和的写像は，あるコンパクト超距離空間上の写像と連続双還元可能である．

Proof. f を $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 上の融和的写像であるとする．与えられた σ に対して，$i(\sigma)$ を次のように帰納的に定義する．このとき，p の可拡大性を用いて，長さ n 以上の $\sigma' \succeq i(\sigma)$ で $p(\sigma') = p(i(\sigma))$ なるものを取り，$i(\sigma n) = \sigma'^\frown n$ と定義する．$p(i(x)) = p(x)$ であるから，f の融和性より，$p \circ f(i(x)) = p \circ f(x)$ である．$\mathbb{N}^\mathbb{N}$ のコンパクト部分集合 $C = \{x : |x(n)| \leq n\}$ への f の制限を考える．$i(x) \in C$ なので，i は $f \leq_W f \upharpoonright C$ を保証する．逆向きについては，明らかである． □

この節が終わった後には，p が何であったかは忘れて構わない．定義 5.13 に記述した抽象的な性質のみが用いられる．

5.3.2 変心演算

つづいての我々の目標は，Σ_S-完全写像と Σ_T-完全写像を基として，$\Sigma_{S\to T}$-完全写像を生成する演算を与えることである．

U の開集合 U_+ が与えられているとし，$U_- = U \setminus U_+$ とおく．また，連続写像 $\alpha_+\colon U_+ \to U$ と $\alpha_-\colon U_- \to U$ も与えられているとする．写像 $f, g\colon U \to U$ に対し，次の写像 $f^\rightarrow g\colon U \to U$ を考える．

$$(f^\rightarrow g)(x) = \begin{cases} f \circ \alpha_-(x) & \text{if } x \in U_- \\ g \circ \alpha_+(x) & \text{if } x \in U_+ \end{cases}$$

このとき，$f \in \Sigma_S$ かつ $g \in \Sigma_T$ ならば，明らかに $f^\rightarrow g \in \Sigma_{S\to T}$ である．もちろん，この $f^\rightarrow g$ の性質は，$U_+, U_-, \alpha_+, \alpha_-$ の性質に強く依存する．これからの話では $U_+, U_-, \alpha_+, \alpha_-$ に様々な性質を要求することになるので，これらを具体的に上手く選んでやる必要がある．

ハウスドルフの差の階層（およびエルショフ階層）は，**変心** (*mind-change*) の概念を用いて理解することができる．つまり，ある集合がハウスドルフの差の階層の第 n 階数に属す，ということは，その集合の特性関数が高々 n 回変心を起こす連続関数列によって近似できることに他ならない．

■$f^{\to}g$ の定義のアイデア: 我々の写像 $f^{\to}g$ は，最初は写像 f のように振る舞うが，1 度だけ《変心》を起こすことができ，《変心》後は写像 g のように振る舞う．入力として，たとえば

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \sharp y_0, y_1, y_2, \ldots$$

のようなストリームを考えよう．ここで $\sharp$ は《変心》の合図を表す．《変心》を起こすと，変心直前の前言は全て撤回され，無かったことになる．つまり，$y = y_0, y_1, y_2, \ldots$ とすれば，この入力に対する $f^{\to}g$ の出力は $g(y)$ である．もし入力ストリームに $\sharp$ が現れない，つまり $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ の形であれば，$f^{\to}g$ の出力は $f(x)$ である．

いま，変心記号を含み得る無限列のうち，変心記号を含まないものを V_- と書く．集合としては $V_- = U$ であるが，混乱を避けるために，このような表記を用いる．先の議論において，許される入力は以下のようである．

$$V = V_- \cup \{\sigma^\frown \sharp y : \sigma \in \underline{U} \text{ and } y \in U\}.$$

上式の和集合の右側にある集合は，V_+ と書くこととする．V は無限文字列の集合であるから，通常のようにアルファベットの離散集合の可算直積の部分空間と考える．いま，$U = \Lambda^{\mathbb{N}}$ であると仮定する．このとき，次を確認しよう．

補題 5.21. V は U と同相である．

Proof. Λ の 2 つのコピー $i_- \colon \Lambda \simeq \Lambda_-$ と $i_+ \colon \Lambda \simeq \Lambda_+$ を考える．Λ は無限集合なので，$\Lambda = \Lambda_- \cup \Lambda_+$ としてよい．$x \in U$ に対しては, $i(x) = i_-(x)$ と定義する．さもなくば, $x = x_0 \ldots x_n \sharp y_0 y_1 \ldots$ の形であるから，$i(x) = i_-(x_0) i_-(x_1) \ldots i_-(x_n) i_+(y_0) y_1 y_2 \ldots$ と定義する．$i \colon V \to U$ が同相写像であることは容易に確認できる． □

さて，元となる空間 U に帰ろう．与えられた $z \in U$ は，同相 $U \simeq V$ の下で，変心記号 $\sharp$ を含むかもしれない無限列と思うことができる．U_- は $\sharp$ を含まない，つまり変心を起こさない無限列を表す z 全体の集合であり，U_+ は $\sharp$ を含む，つまり変心を起こす無限列を表す z 全体の集合である．形式的には，この同相写像 $j \colon U \to V$ について，$U_- = j^{-1}[V_-]$ かつ $U_+ = j^{-1}[V_+]$ と定義する．

それでは，α_- と α_+ の定義を与えよう．α_- は，変心を起こさないならば文字列をそのまま取り出す写像，α_+ は，変心を起こすならば，変心後の文字列を取り出す写像である．形式的には，$z = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \sharp y_0, y_1, \ldots)$ に対して，$c(z) = (y_0, y_1, \ldots)$ と定義すれば，$\alpha_- = j$ かつ $\alpha_+ = c \circ j$ である．

$$
\begin{tikzcd}
V_- \arrow[r, hook] \arrow[dd, bend right, "\mathrm{id}"'] & V & V_+ \arrow[l, hook'] \arrow[dd, bend left, "c"] \\
U_- \arrow[u, "j"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha_-"] & U \arrow[u, "j"'] \arrow[dd, "f^{\to} g"] & U_+ \arrow[u, "j"] \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\alpha_+"'] \\
U \arrow[dr, "f"'] & & U \arrow[dl, "g"] \\
& \mathcal{Q} &
\end{tikzcd}
$$

アイデアとしては簡単なのだが，実際に数式として書き下すとややこしい．

5.3.3 ☕ 歴史的リマーク

ベール 1 級写像は連続写像の各点極限である．極限は常に，変化のプロセスを伴う．極限値の推測過程を木や森のような組合せ論的構造として明示化するものが，本稿での議論である．

ベール 1 級写像と $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$ 集合（$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-可測写像）の対応は，ルベーグ-ハウスドルフ-バナッハの定理として知られるが，ハウスドルフはさらにこの $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$ 集合を順序数の階層に分解していた．これがハウスドルフの**差の階層** (*difference hierarchy*) である．

順序数というと，無限的な側面ばかりが強調されることが多いが，実態はむしろ逆で，ある意味で有限に帰着できる順序構造のことを指すものである，と考えた方がよい．これはつまり整礎性であり，可算順序数とは可算整礎木（の同値類）である．そういうわけで，順序数は整礎木として理解されるのが標準的である．こう考えると，ベール 1 級写像と可算整礎木との関係性はかなり明瞭となる．

ベール 1 級写像や $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$ 集合における極限性を推測過程として捉えようとする試みの発想の源流もまた，かなり古い．歴史的には，Δ_2 を「推測」「学習」の手続きとして最初に捉えたのは，ヒラリー・パトナム (Hilary Putnam) であろうか．1963 年，パトナム [62] は，Σ_1 のブール閉包（つまり，ハウスドルフの差の階層の有限階級）を**試行錯誤述語** (*trial-and-error predicate*) として記述した．この前段階として，1957 年の Shoenfield の極限補題，つまり Δ_2 と極限計算可能性の同値性があるが，Shoenfield はこれを推測や学習過程と明示的に結び付けることはしなかった．1967 年には，E. M. Gold [19] は，極限計算可能性概念を言語を学習する人工知能のモデル化に用い，これは**アルゴリズム学習理論** (*algorithmic learning theory*) の源流のひとつとなった．

その後，パトナムの試行錯誤の階層を順序数に拡張することによって，Δ_2 集合全体に変心の階層構造を与えたのがエルショフ [14] である．これは**エルショフ階層** (*Ershov hierarchy*) と呼ばれ，ハウスドルフの差の階層に相当するものである．この概念は，後に，アルゴリズム学習理論における帰納推論の理論にも輸入され，**変心カウンター** (*mind-change counter*) と呼ばれる概念が導入された．

さて，試行錯誤の階層の順序数への拡張は，極限過程と木との対応を明示化するという点で重要であった．エルショフ階層，つまり変心回数に順序数上界を持つ極限計算可能性について学んだ人

にとっては，Δ_2 と整礎木（整礎森）との関わりは明らかであろう．

先ほど述べたように，順序数は，通常は整礎木として理解される．順序数に沿う変心とは，木の根から葉へ辿っていく手続きである．変心を起こすたびに，根を初期地点として，1 歩先のノードを選ばなければならない．葉に辿り着くと，もう変心を起こすことはできない．このようにして，変心回数の順序数上界を持つ極限計算は表される．

したがって，各点極限性とは，順序数上界を持つ変心による学習過程であり，整礎木に沿う推測過程である．この点から，各点極限と整礎木との漠然とした関係は古くから知られていると言ってよいであろう．とはいえ，無論，われわれが示さなければならないことは，単に $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$ は「推測木」によって表現できる，という程度のものではない．連続還元の差を除けば，この「推測木」よりも優れた $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$ の分析法はなく，つまるところ，この「推測木」が $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$ の「究極の解析」である，ということを証明しなければならない．

2 値関数に関しては，これはワッジ [79] によって成し遂げられた．実際，ワッジは 2 値ベール 1 級関数（$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$ 集合）の連続還元順序の解析のために，**推測可能性** (*guessability*) という概念を導入している．ベール 1 級写像の構造を木構造として捉えようとしたのは，ようやく 1990 年頃 Hertling [23] である．ただし，Hertling が扱ったものは，有限の m について，m 値ベール 1 級関数だけである．さらに言えば，ハウスドルフの差の階層で言うところの有限級までしか扱っておらず，これは木で言うならば，有限木程度のものである．これをすべての m 値ベール 1 級関数に拡張したのが Selivanov の 2007 年の論文 [63] である．そして，Selivanov が m 値ベール 2 級関数の解析を完了したのは，それから 10 年後，2017 年のことであった [64]．

2018 年 9 月，ドイツの Dagstuhl における会議の折に，Hertling に直接この辺りの研究の経緯を伺ってみた．Hertling によれば，1990 年頃の彼の目的は実数上の非標準的[*9]な計算モデルのひとつである，**BSS 機械** (*Blum-Shub-Smale machine*) というモデルの分析だったという．BSS 機械は，ある種の計算不可能な操作を原始的命令として使える計算モデルであるため，その計算不可能性の精密な分析手法として連続還元順序を用いたそうである．

ところで，この Dagstuhl における一幕である．筆者が Dagstuhl 城に到着し，会議室に入ろうとすると，ふいに Hertling が早足で迫ってきた．そして，Hertling は特に挨拶もなく，口を開くなり，いきなり早口でこう捲し立ててきた．「お前の論文 [32] の中で俺の論文 [23] を文献リストに入れていないのは何か理由があるのか？」なかなか威圧感のある人物である．ちなみに Hertling の論文を文献リストに入れなかった理由は明白で，連続還元順序に関する Hertling の論文は全てドイツ語で書かれており，そもそも Hertling が何を証明したか知らなかったからである[*10]．

5.3.4 Σ_T-完全性の証明

それでは，ようやく Σ_T-完全写像の厳密な定義を与えよう．われわれはこれから写像 $\Omega_T\colon U \to \mathcal{Q}$ を定義し，その Σ_T-完全性を証明する．さらに，もし T が木型項であれば，この写像 Ω_T は融

[*9] 超準的という意味ではない．2018 年現在の計算可能解析学では，実現可能性 (realizability) との相性が悪いためにあまり使われない計算モデル，という程度の意味である．

[*10] 筆者は，日本語と英語を除けば，フランス語とペルシャ語しか勉強したことがないので，ドイツ語は全く読めない．

和的であることも保証される．

定義 5.22. T を $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$ の項とする．このとき，$\Omega_T\colon U\to\mathcal{Q}$ を次によって帰納的に定義する．

1. $[q]$ を定数記号とする．このとき，$\Omega_{[q]}$ は定数写像 $x\mapsto q$ である．つまり，
$$(\forall x\in U)\quad \Omega_{[q]}(x)=q.$$
しばしば $\Omega_{[q]}$ を Ω_q と略記する．
2. 各 $n\in A$ について t_n を木型項とする．このとき，$\Omega_{\sqcup_n t_n}\colon U\to\mathcal{Q}$ を次のように定義する．
$$\Omega_{\sqcup_n t_n}(x)=\Omega_{t_n}(n^\frown X).$$
3. t を根型項とし，F を森型項とする．このとき，
$$\Omega_{t\to F}=\Omega_t{}^{\to}\Omega_F.$$
4. t を木型項とする．このとき，
$$\Omega_{[t]}=\Omega_t\circ\beta.$$
ここで命題 5.15 を用いて，自己相似な融和的ベール 1 級完全写像 β を固定しておく．

観測 5.23. 任意の $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$-項 T に対して，Ω_T は Σ_T に属す．

Proof. 項の構成上の帰納法による．項 T が (1), (2) または (4) で構成される場合には明らかである．したがって，$\Omega_{T\to S}\in\Sigma_{T\to S}$ を示せば十分である．節 5.3.2 で述べた定義より，開集合 $U_+\subseteq U$ と閉集合 $U_-=U\setminus U_+$ および連続写像 α_+ と α_- について，$\Omega_{t\to F}\restriction U_+=\Omega_F\circ\alpha_+$ かつ $\Omega_{t\to F}\restriction U_-=\Omega_t\circ\alpha_-$ である．α_+,α_- は連続であるから，観測 5.9 より，$\Omega_t\circ\alpha_-\in\Sigma_t$ かつ $\Omega_F\circ\alpha_+\in\Sigma_F$ である．以上より，$\Omega_{t\to F}\in\Sigma_{t\to F}$ であることが示された． □

補題 5.24. 任意の $T\in{}^\sqcup\mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ に対して，Ω_T は Σ_T-完全である．

Proof. $\mathcal{L}_{\rm tree}(\mathcal{Q})$ の項の構成上の帰納法による．まず，T が $\sqcup_i t_i$ の形の項であるとし，f を Σ_T-写像とする．このとき，U のある開被覆 $(C_i)_{i\in A}$ が存在して，任意の $i\in A$ に対して，$f\restriction C_i$ は Σ_{t_i}-写像となる．U は強零次元なので，特に被覆次元 0 であるから，$(C_i)_{i\in A}$ の細分となる開分割を取れる．よって，$(C_i)_{i\in A}$ は開分割であると仮定しても一般性を失わない．帰納的仮定より，$f\restriction C_i\leq_W\Omega_{T_i}$ を保証する連続写像 θ_i を取る．これより，$f\leq_W\Omega_T$ を確かめるために，与えられた $x\in U$ に対して，$x\in C_{i_x}$ なる $i_x\in A$ を選ぶ．A は離散空間であり，各分割は開であるから，$x\mapsto i_x$ は連続である．さらに，$f(x)\leq_{\mathcal{Q}}\Omega_T(i_x{}^\frown\theta_{i_x}(x))$ であるから，$f\leq_W\Omega_T$ が示された．

つづいて，f を $\Sigma_{T\to S}$ に属す写像とする．このとき，ある開集合 V が存在し，$f\restriction V$ は Σ_S に

属し，$\mathcal{A}\restriction V^{\mathrm{c}}$ は Σ_T に属す．ここで，前者の条件の意味することは，V のある生成子 $\underline{V}$ が存在して，任意の $\sigma\in\underline{V}$ について $f\restriction[\sigma]\in\Sigma_S$ となることである．帰納的仮定より，$f\restriction V^{\mathrm{c}}\leq_W\Omega_T$ を保証する連続写像 θ, および $f\restriction[\sigma]\leq_W\Omega_S$ を保証する連続写像 γ_σ が存在する．

それでは，$f\leq_W\Omega_{T\to S}$ を保証する連続写像の構成を与えよう．まず，与えられた $x\in U$ の情報を徐々に読み込んでいき， $x\restriction s\in\underline{V}$ となる s が見つかるまでは，θ に従う．もし，$x\restriction s\in\underline{V}$ と分かったら，我々は心変わりをして，その後は $\gamma_{x\restriction s}$ に従う．この手続きを形式的に記述すれば，$f\leq_W\Omega_{T\to S}$ が示せることは明らかであろう．形式的な証明は，読者の演習問題とする．

最後に，f を $\Sigma_{\langle T\rangle}$-写像とする．このとき，あるベール 1 級写像 δ と Σ_T-写像 g が存在して，$f=g\circ\delta$ となる．帰納的仮定より，$g\leq_W\Omega_T$ を保証する連続写像 θ が存在する．このとき，$f(x)=g(\delta(x))\leq_{\mathcal{Q}}\Omega_T\circ\theta(\delta(x))$ である．いま，$\theta\circ\delta$ はベール 1 級であり，β は融和的ベール 1 級完全であるから，ある連続写像 ψ が存在して，$\theta\circ\delta$ と $\beta\circ\psi$ は p-同値である．いま，Ω_T は融和的であるから，以下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrr, "\psi"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & & & U \arrow[d, "\beta"] \\
U \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "g"] & U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Omega_T"'] & \tilde{U} \arrow[dl, "\tilde{\Omega}_T"] & U \arrow[l, "p"'] \arrow[dll, bend left, "\Omega_T"] \\
\mathcal{Q} \arrow[r, dotted, "\leq_{\mathcal{Q}}"'] & \mathcal{Q} & &
\end{tikzcd}$$

以上より，ψ によって $f\leq_W\Omega_T\circ\beta=\Omega_{\langle T\rangle}$ であることが示された． $\square$

5.4 一般化準同型順序

定義 5.2 において準同型前順序を導入したが，この準同型前順序は，異なるレベルのネストを比較可能な形に変形できる．この異なるレベルのネストの比較が，準同型前順序を超限順序数に一般化するための鍵となるアイデアのひとつでもあるのだが，ここではそれは置いておこう．この発想は，有限ボレル階数においても，その証明を明確にするという形で重要である．

以下，記法を単純化するために，$\mathbf{o}$ によって空な木または森（を意味する項）を仮想的な項として付加する．これは以下の前順序 $\trianglelefteq$ における仮想的な最小元として取り扱われる．つまり，任意の $T\in{}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^{\omega}(\mathcal{Q})$ について，$\mathbf{o}\trianglelefteq T$ とおく．常に項 $[T]$ と $[T]^{\to}\mathbf{o}$ あるいは $[T]^{\to}\sqcup_i\mathbf{o}$ を同一視することとする．また，木型項 T は森型項 $\sqcup_i T$ と同一視する．

定義 5.25. ${}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^{\omega}(\mathcal{Q})$ 上の前順序 $\trianglelefteq$ を，$\mathcal{L}_{\mathrm{tree}}(\mathcal{Q})$ の項の構成上の帰納法によって定義する．

1. （根型項）定数記号 p,q と木型項 S,T について，以下のように定義する．

$$[p]\trianglelefteq[q]\iff p\leq_{\mathcal{Q}}q,$$
$$[S]\trianglelefteq[T]\iff S\trianglelefteq T,$$

2.（木型項）根型項 U, V と森型項 $S = \sqcup_i S_i, T = \sqcup_j T_j$ について，以下のように定義する．

$$U^{\rightarrow} S \trianglelefteq V^{\rightarrow} T \iff \begin{cases} \text{either } U \trianglelefteq V & \text{and } (\forall i)\ S_i \trianglelefteq V^{\rightarrow} T, \\ \text{or} \qquad U \ntrianglelefteq V & \text{and } (\exists j)\ U^{\rightarrow} S \trianglelefteq T_j. \end{cases}$$

3.（森型項）木型項の列 $(S_i), (T_j)$ について，以下のように定義する．

$$\sqcup_i S_i \trianglelefteq \sqcup_j T_j \iff (\forall i)(\exists j)\ S_i \trianglelefteq T_j.$$

この前順序関係から得られる同値関係を $\equiv$ と書く．つまり，$S \equiv T$ とは，$S \trianglelefteq T$ かつ $T \trianglelefteq S$ のことである．

補題 5.26. $S, T \in {}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ に対して，もし $S \trianglelefteq T$ ならば $\Omega_S \leq_W \Omega_T$ である．

Proof. 前順序 $\trianglelefteq$ の定義 5.25 上の帰納法によって示す．まず，$p, q \in \mathcal{Q}$ について，$p \trianglelefteq q$ と $\Omega_p \leq_W \Omega_q$ が同値であることは明らかである．次に，木型項 U, V について，$\langle U \rangle \trianglelefteq \langle V \rangle$ であると仮定する．定義より，これは $U \trianglelefteq V$ と同値である．よって，帰納的仮定より，$\Omega_U \leq_W \Omega_V$ を保証する連続写像 θ が存在する．いま，β の融和的ベール 1 級完全性より，ある連続写像 ψ が存在して，$\theta \circ \beta$ は $\beta \circ \psi$ と p-同値である．いま，Ω_V は融和的であるから，以下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrr, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & & & U \arrow[d, "\beta"] \\
U \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\Omega_U"'] & U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Omega_V"'] & \tilde{U} \arrow[dl, "\tilde{\Omega}_V"] & U \arrow[l, "p"'] \arrow[dll, bend left, "\Omega_V"] \\
\mathcal{Q} \arrow[r, dotted, "\leq_{\mathcal{Q}}"'] & \mathcal{Q} & &
\end{tikzcd}$$

以上より，ψ によって $\Omega_{\langle U \rangle} = \Omega_U \circ \beta \leq_W \Omega_V \circ \beta = \Omega_{\langle V \rangle}$ は保証される．

次に，根型項 U, V と森型項 $S = \bigsqcup_i S_i, T = \bigsqcup_j T_j$ について $U^{\rightarrow} S$ および $V^{\rightarrow} T$ を考える．まず，$U \trianglelefteq V$ の場合を考えよう．この場合，$U \trianglelefteq V$ の仮定の下での $\trianglelefteq$ の定義より，任意の $i \in A$ について $S_i \trianglelefteq V^{\rightarrow} T$ を得る．帰納的仮定より，$\Omega_U \leq_W \Omega_V$ がある連続写像 τ によって保証され，さらに，任意の $i \in A$ について，$\Omega_{S_i} \leq_W \Omega_{V \rightarrow T}$ がある連続写像 θ_i によって保証される．それでは，$\Omega_{U \rightarrow S} \leq_W \Omega_{V \rightarrow T}$ を保証する連続写像の構成のアイデアは以下となる．

与えられた x に対して，もし x が変心を起こさないのであれば，連続還元 $\tau \colon \Omega_U \leq_W \Omega_V$ を用いればよい．もし x が変心を起こすのであれば，ある S_k の領域に移行する．この場合，連続還元 $\theta_k \colon \Omega_{S_k} \leq_w \Omega_{V \rightarrow T}$ を用いる必要がある．しかし，変心の発覚前に V の領域で還元 τ はある σ 程度まで歩を進めてしまっている．ここで，V が根型項ならば必ず Ω_V は自己相似であることに着目しよう．Ω_V の自己相似性を用いれば，還元を再始動できる．より具体的には，自己相似性より，任意の σ について，$\Omega_V \leq_W \Omega_V \upharpoonright [\sigma]$ を保証する連続写像 η_σ が存在する．たとえば，

$\theta_k(y) = q\sharp z$ の形（つまり q まで出力した後に変心 $\sharp$ を起こし，z に切り替える）であるならば，代わりに $\eta_\sigma(q)\sharp z$ を用いれば，これは σ を拡張するから，連続的に還元を与える．形式的な証明は，読者の演習問題とする．

いま，$\langle U\rangle \not\trianglelefteq \langle V\rangle$ であると仮定する．この場合，定義より $S \trianglelefteq T$ であることと，ある $i \in A$ について $S \trianglelefteq T_i$ であることは同値である．帰納的仮定より，ある $i \in A$ について $\Omega_S \leq_W \Omega_{T_i}$ となる．この条件は明らかに $\Omega_S \leq_w \Omega_T$ を導く． $\square$

6 計算可能性理論

本稿におけるボレル可測写像の完全解析において，最も強力な武器となるものが，**計算可能性理論** (*computability theory*) である．この理論は，**再帰理論** (*recursion theory*) という名でも知られている．計算可能性理論における主要な研究対象は，**チューリング次数** (*Turing degree*) の理論である．これは第 1.3 節で導入した前順序 $\leq_T$ の構造の理論であり，1954 年のクリーネとポストの論文が嚆矢であると思われる．

どのようにして，この計算可能性理論をボレル可測写像の解析に役立てるか，という点を軽く説明しよう．まず，ボレル集合やボレル可測写像の理論において，各ボレル階数を登るにつれて，難易度が一定に上昇するということはあまりない．$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ では簡単だった話が，$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_3$ ではとんでもなく難しくなり，$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_4$ はもはや理解の範疇を越える，ということは日常茶飯事である．ボレル階数を駆け上がるにつれ，その複雑性が加速度的に増大していくのである．決定性，セクション問題，分解問題，われわれは，そんな光景をいくつも見てきた．

じつは，$\mathcal{Q}$ 値ボレル可測写像の連続還元順序構造も似たような状況であった．ベール 1 級写像の一部は，90 年代に構造が明かされ，ようやく 2007 年になってベール 1 級写像の完全な構造解明が完了した (定理 5.3)．ベール 2 級写像の構造解明には，それから 10 年かかって，その結果が発表されたのは 2017 年のことである (定理 5.4)．われわれが何もせずとも，さらに 10 年後，2027 年にはベール 3 級写像の構造解明が完了し，その 10 年後の 2037 年にはベール 4 級写像の構造解明は完了するかもしれない．

しかし，われわれはもう待ち飽きた．ベール 3 級だの 4 級だのという，ちまちました話には終わりを告げよう．これから，計算可能性理論によるチートによって，すべての階級，つまり，すべてのボレル写像の構造解明を成し遂げる．

本稿で用いる最も強力な道具は，チューリング次数の理論における最初期の定理である，**フリードバーグのジャンプ逆化定理** (*Friedberg jump inversion theorem*) である．このジャンプ逆化定理を，高いボレル階数の議論を低いボレル階数に引き摺り落とすために用いる．

6.1 計算可能性理論の予備知識

6.1.1 計算可能性と定義可能性

計算理論における最も基本的なオブジェクトは，もちろん計算可能性である．計算可能性の定義には様々なものがある．再帰関数，λ-計算，チューリングマシン，あるいは現実のプログラミング言語を用いてもよい．計算可能性理論では特定の計算モデルに依存する議論は滅多に行わないので，たとえば計算モデルの特殊な例のひとつであるチューリングマシンの定義などは覚えていない専門家も多い．ここでも，具体的な計算モデルには言及せず，好みのプログラミング言語など，任意の計算モデルを思い浮かべて欲しい．

部分関数 $f\colon\subseteq\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が**計算可能** (*computable*) とは，次のようなコンピュータ・プログラムが存在することである．自然数 n を入力としたとき，もし n が f の定義域に属すのであれば，そのプログラムは有限時間で停止し，$f(n)$ と等しい値を出力する．集合 $A\subseteq\mathbb{N}$ が計算可能とは，その特性関数 $\chi_A\colon\mathbb{N}\to 2$ が計算可能なことである．

また，実数 $x\in\mathbb{R}$ が計算可能とは，x を任意精度近似するコンピュータ・プログラムが存在することである．つまり，入力 n に対して，$|x-q|<2^{-n}$ となる有理数 $q\in\mathbb{Q}$ を出力するアルゴリズムが存在することである．計算可能実数（任意精度近似可能な実数）は高々可算個である．それ以外の実数 x については，どのような近似アルゴリズムを用いても，ある精度以上となると，そのアルゴリズムはその実数 x の近似に失敗する．

計算可能性には様々な特徴付けがある．たとえば，以下は代表的な特徴付けである．

$$\begin{aligned}
\text{部分関数 } f\colon\subseteq\mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ が計算可能} &\iff f \text{ のグラフは } \Sigma_1\text{-定義可能.}\\
\text{全域関数 } f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ が計算可能} &\iff f \text{ のグラフは } \Delta_1\text{-定義可能.}\\
\text{集合 } A\subseteq\mathbb{N} \text{ が計算可能} &\iff A \text{ は } \Delta_1\text{-定義可能.}\\
\text{実数 } x\in\mathbb{R} \text{ が計算可能} &\iff x \text{ は } \Delta_1\text{-定義可能.}
\end{aligned}$$

そういうわけで，第 1 節で Δ_1-実数や Δ_1-定義可能性について深く議論したが，これらが深く研究されていた理由としては，計算可能性とこのような深い関わりがあるためである．つまり，Δ_1-実数とは，計算可能実数であり，任意精度近似可能な実数である．

実用的なことを言えば，計算可能性を示すために，具体的な Δ_1-定義を書き下すようなことをすると，かなりの苦行になることが多い．しかし，理論的には，計算可能性と定義可能性の深い結び付きを理解しておくことで，Δ_1 の枠組みを越える領域に計算可能性理論の発想を適用することが可能となる．すなわち，数学において何か Δ_1 あるいは Σ_1-定義可能性に類似した概念が現れるならば，それがたとえ一階算術におけるものでなくとも，つまり，本当の計算可能性とは全く別概念であったとしても，計算可能性理論の手法を応用できる．それがかつて一般再帰理論と呼ばれ，ある時代に隆盛を極めた分野の主たる発想であった．

さて，コンピュータに慣れ親しんだ現代人であれば，計算可能性に関するすぐれた勘は持っており，なんとなく感覚で取り扱えると思われるので，そのまま先に進もう．

6.1.2　停止問題とチューリング・ジャンプ

第 1.1.3 節で導入した言語 $\mathcal{L}_+$ を思い出そう．計算可能性理論における歴史上最初の定理のひとつは，1936 年のチューリングによる**停止問題** (*halting problem*) の計算不可能性である．つまり，「与えられたコンピュータ・プログラムが有限時間で計算を終了するか，それとも無限ループに陥るか」を判定するコンピュータ・プログラムは存在しない．コンピュータ・プログラムにパラメータを含めることで，停止問題を関数とみなすことができ，それは**チューリング・ジャンプ** (*Turing jump*) と呼ばれる．

チューリング・ジャンプ $\mathrm{TJ}\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ は，通常は神託 x が与えられたときに，x-相対的な計算に対する停止問題を返す写像と定義されることがふつうである．しかし，以下のように定義したとしても，本質的には同値である．

定義 6.1. 第 1.1.3 節の拡張算術言語 $\mathcal{L}^+$ におけるゲーデル数 e の Σ_1 論理式を $\exists x\psi_e(x)$ と書くことにする．このとき，

$$\mathrm{TJ}(z)(e) = 1 \iff (\mathbb{N}, z) \text{ において } \exists x\psi_e(x) \text{ が成立する．}$$

つまり，チューリング・ジャンプとは，相対的第 1 マスターコードである．したがって，われわれが対象とするものは，計算不可能性の領域である．$TJ(x)$ のことを x のチューリング・ジャンプと呼び，ここでは $x^{\mathbf{1}}$ と書くことにする．これは標準的な表記法とは若干異なるが，本稿では，これから別種のチューリング・ジャンプも取り扱うためである．少しチューリング・ジャンプ TJ の性質を見ていこう．

観測 6.2. $\mathrm{TJ}\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ はベール 1 級かつ単射である，さらに，左逆写像 $\mathrm{TJ}^{-1}\colon \mathrm{Im}(\mathrm{TJ}) \to 2^{\mathbb{N}}$ は連続である．

これは計算可能性理論に慣れ親しんでいる人にとっては難しくない．したがって，チューリング・ジャンプとは，連続な左逆写像をもつベール 1 級単射という，解析学的には極めて単純な部類に属す具体的な写像である．

しかし，最大の問題点は，$\mathrm{Im}(\mathrm{TJ})$ の複雑性である．この TJ の像が G_δ 集合であることを示すことは難しくない．したがって，TJ^{-1} は G_δ 集合を定義域とする写像である．ワッジ理論において，開集合や閉集合を定義域とする写像は全域写像と同一視することができた．しかし，これは G_δ 集合に対してはもはや正しくない．つまり，G_δ 集合を定義域とする写像をワッジ理論における基本的なオブジェクトとして用いることはできない．

このため，チューリング・ジャンプの定義を少し修正しよう．

定義 6.3. $\mathcal{J}\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を以下によって定義する．

$$\mathcal{J}(z)(e) = \begin{cases} s+1 & \text{if } (\mathbb{N}, z) \text{ において } \psi_e(s) \text{ が真} \\ 0 & \text{if } (\mathbb{N}, z) \text{ において } \exists x\psi_e(x) \text{ が偽.} \end{cases}$$

このような修正を**整定時刻** (*settling time*) または**トゥルーステージ** (*true stage*) 付きのチューリング・ジャンプと呼ぶが，本稿ではこれを単にジャンプと呼ぼう．この新しく定義されたジャンプは，先ほどの TJ とほとんど同じ性質をもつが，一点だけ違う部分がある．それは，$\mathcal{J}(z)(e)=i$ という式の複雑性が $\Pi_1(z)$ であるという点であり，これはつまり像が閉集合になる，ということである．

観測 6.4. $\mathcal{J}\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ はベール 1 級かつ単射であり，その像 $\mathcal{J}$ は閉集合である，さらに，左逆写像 $\mathcal{J}^{-1}\colon \mathrm{Im}(\mathrm{TJ}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は連続である．

像が閉集合だと何が嬉しいか，といえば $\mathcal{J}^{-1}$ の定義域が $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の閉部分集合となることである．つまり，ワッジ理論において，$\mathcal{J}^{-1}$ は全域関数として取り扱うことができる．これが後の議論において大きな役割を担う．

記法として，定義 6.3 にさらにパラメータ $\mathbf{c}$ を加えて得た写像を $\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ と書くことにする．つまり，$\mathcal{L}_+$ に述語記号を 1 つ増やして，「$(\mathbb{N}, z)$ において」の部分を「$(\mathbb{N}, z, \mathbf{c})$ において」に変えた結果である．この $\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ も観測 6.4 と同じ性質をもつことは容易に確かめられる．このパラメータ $\mathbf{c}$ をしばしば**神託** (*oracle*) と呼び，パラメータ z を**型 1 対象** (*type 1 object*) と呼ぶことにする．

初等計算理論では，型 1 入力と神託を区別しないが，今回のような文脈においては，「対象」と「神託」は別物として認識しておくと便利である．型 1 対象と神託は，共に自然数の無限列という点では変わりはないが，「対象」は超距離空間の点であり，「神託」は計算の補助のための付加的情報である．

6.2 ジャンプの普遍性と透過性

「位相空間的な連続性とは，計算可能性 + 神託である」というものが，**計算可能性解析学の基本定理**である．つまり位相空間論における連続写像とは，神託へのアクセスを自由に許すある種の計算モデルと等価であることが数学的に証明できる．そして，位相的な連続写像の特徴付けにおいて，神託へのアクセスを禁じたものが，計算可能連続写像である．この発想は任意のベール階級に拡張できる．以下の定理は，「ベール 1 級であることとは，相対的停止問題 + 神託である」ということを述べる．この観察は，より一般的な空間に拡張できるが，証明が煩雑になるので，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ だけで考えよう．

命題 6.5. $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ について，次の条件は同値である．

1. f はベール 1 級である．
2. ある神託 $\mathbf{c}$ と $\mathbf{c}$-計算可能写像 Φ が存在して，$f = \Phi \circ \mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ となる．

Proof. $f\colon A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ をベール 1 級写像とする．$(f_s)_{s\in\mathbb{N}}$ を f に収束する連続写像列とする．A は離散集合なので，$(f_s(x))_{s\in\mathbb{N}}$ の収束性より，次を得る．

$$(\exists s \in \mathbb{N})(\forall t \geq s)\ f_s(x)(n) = f_t(x)(n).$$

$\mathbf{c}$ を $(f_s)_{s\in\mathbb{N}}$ のコードとする．$\mathcal{J}_{\mathbf{c}}(x)$ を用いて，各 s 毎に $\forall$ 以下の式の真偽の可算リスト $(v_s)_{s\in\mathbb{N}}$ を計算できる．Φ は，この v_s が真となるような最小の s を見つけて，$\mathbf{c}$ を神託に用いて，$f_s(x)$ を出力すればよい．

逆向きについては，$\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ がベール 1 級であることを示せばよい．e 番目の $\Sigma_1(\mathbf{c})$-論理式 $\varphi_e^{\mathbf{c}}$ がある $t \leq s$ について $x \upharpoonright t$ によって真になるならば，$f_s(x)(e)$ をそのような最小の証拠とし，さもなくば 0 とすればよい．このとき，明らかに $\mathcal{J}_{\mathbf{c}}(x)(e) = \lim_s f_s(x)(e)$ である． □

さて，チューリングジャンプは，一様 $\equiv_T$-準同型の一例である．実際には，前順序集合上の準同型概念を考えることができ，一様 $\leq_T$-準同型（一様順序保存）であることも分かる．

$$x \leq_T y \text{ via } e \implies \mathcal{J}(x) \leq_T \mathcal{J}(y) \text{ via } u(e).$$

この可算前順序に対する一様準同型，という性質が，今後の議論の鍵になる．この性質を，可算個の写像を透過させるものとして理解することができる．具体的には，チューリングジャンプ $\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ の**透過性** (*transparent*) とは以下の性質を指す：

命題 6.6. 任意の $\mathbf{c}$-計算可能写像 φ に対して，ある計算可能写像 ψ が存在して，次が成立する．

$$\psi \circ \mathcal{J}_{\mathbf{c}} = \mathcal{J}_{\mathbf{c}} \circ \varphi.$$

Proof. $\varphi = \varphi_d^{\mathbf{c}}$ を d 番目の $\mathbf{c}$-計算可能写像とする．ある計算可能関数 j が存在して，$\varphi_{j(d,e)}^{\mathbf{c}}(x) = \varphi_e^{\mathbf{c}}\varphi_d^{\mathbf{c}}(x)$ となる．このとき，$\mathcal{J}_{\mathbf{c}}(x)(j(d,e)) = \mathcal{J}_{\mathbf{c}}(\varphi(x))(e)$ が成立する．よって，$\psi(e) = j(d,e)$ が求める性質を満たす． □

可算個の写像だけを透過させる，というような議論を計算可能性理論などを使わずに取り扱うのは難しい．特に，透過性だけでなく，普遍性や，そして後に述べる逆化性を加えるとなると，なおさらである．このような繊細な性質と相性のよいのが計算可能性理論である．

6.3 ジャンプ逆化定理

1950 年代後半，リチャード・フリードバーグ (Richard Friedberg) は，チューリング次数の理論の最初期の時代を牽引することとなる多数の定理を得た．その中で最もよく知られたものがポストの問題の解決であろう．本稿で用いるものは，1957 年にフリードバーグ [16] によって示された，**フリードバーグ・ジャンプ逆化定理** (*Friedberg jump inversion theorem*) である．この定理は，第 1 マスターコード $\mathbf{0}^{(1)}$ 以上に複雑な実数 x は必ずある実数 y に相対的な第 1 マスターコードであ

る，ということを述べる：

$$x \geq_T \mathbf{0}^{(1)} \implies (\exists y \in \mathbb{R})\ x \equiv_T y^{(1)}.$$

実際には，フリードバーグ [16] は，もう少し細かいことを証明している．ジャンプ逆化定理は，$\mathbf{0}^{(1)}$ 以上に複雑な実数にだけ適用可能なものと見るべきではなく，全ての実数に適用可能であるが，少し得られる式が異なる，と考えるべきである．この観点から言うと，ジャンプ逆化定理とは，任意の実数 x はある実数 y のジャンプと $\mathbf{0}'$ を法として同値，つまり $x \oplus \mathbf{0}' \equiv_T y'$ であることを述べるものである．さらに，重要な点は，$x \mapsto y$ が連続写像であり，さらに言えば，$\mathbf{0}'$-計算可能である，という部分である．

補題 6.7 (ジャンプ逆化定理 [16])**.** 任意の神託 $\mathbf{c}$ に対して，次のような $\mathbf{c^1}$-計算可能写像 $\psi\colon A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ が存在する．

$$(\psi(x) \oplus \mathbf{c})' \equiv_T x \oplus \mathbf{c^1}.$$

さらに，この $\equiv_T$-同値性は一様である．実際，ある計算可能写像 $\theta_0\colon \subseteq A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ および $\mathbf{c^1}$-計算可能写像 $\theta_1\colon A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ が存在して，次が成立する．

$$\theta_0 \circ \mathcal{J}_{\mathbf{c}} \circ \psi(x) = x \quad \textit{and} \quad \theta_1(x) = \mathcal{J}_{\mathbf{c}} \circ \psi(x)$$

Proof. 次のような埋め込み写像 $g\colon A^{<\omega} \to A^{<\omega}$ を構成するのは難しくない：任意の $\sigma \in A^{<\omega}$ と $e = |\sigma| - 1$ について，

$$(\exists D \subset_{\mathrm{fin}} A)\ \varphi_e(g(\sigma), c \upharpoonright D) \quad \text{または} \quad (\forall \tau \sqsupseteq g(\sigma))(\forall D \subseteq_{\mathrm{fin}} A)\ \neg\varphi_e(\tau, c \upharpoonright D).$$

たとえば，任意の $\sigma \in A^{<\omega}$ と $a \in A$ に対して，$\mathbf{c^1}$ を用いて，$g(\sigma)^\frown a$ の拡張 τ と有限集合 $D \subseteq A$ で $\varphi_e(\tau, \mathbf{c} \upharpoonright D)$ となるものが存在するかどうかを尋ねる．より正確には，次の Σ_1-論理式を考える．

$$\psi(\sigma, a, \rho) \ \equiv\ (\exists \tau \sqsupseteq g(\sigma)^\frown a)\ \varphi_e(\tau, \rho)$$

もし $\psi(\sigma, a, c \upharpoonright D)$ がある D について真となるならば，$g(\sigma\lambda)$ をその証拠となる τ とする．さもなくば，$g(\sigma^\frown a) = g(\sigma)^\frown a$ と定義する．明らかに構成は一様であり，$\sigma^\frown a$ のみを用いて $g(\sigma^\frown a)$ を定義している．これより，g は $\mathbf{c^1}$-計算可能であり，埋め込み写像であることは明らかである．

いま，$\psi\colon A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ を g から生成される $\mathbf{c^1}$-計算可能な連続単射とする．まず，$x \leq_T (\psi(x) \oplus \mathbf{c})'$ が一様に成立することを示そう．g の計算には $\mathbf{c^1}$ が必要なので，g を使わずに示したい．このため，$q(t)$ を $\psi(x) \upharpoonright (t+1)$ を拡張するある τ について上の $\Sigma_1(\mathbf{c})$-論理式が真であることを表すクエリのインデックスとする．いま，$\psi(x)$ に沿う n 番目の分岐の高さが t_n であることを計算し終えていたとしよう．構成より，$\psi(x)(t_n) = x(n)$ であることが保証されている．このとき，$\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ を用いて，$q(t_n)$ クエリの真偽を尋ね，もし偽ならば，$t_{n+1} = t_n + 1$ とする．もし，真であり，その証拠が τ ならば，$t_{n+1} = |\tau|$ とする．構成より，明らかに t_{n+1} は $\psi(x)$ に沿う $n+1$ 番目の分岐の高さを与える．

つづいて，$(\psi(x)\oplus\mathbf{c})' \leq_T x\oplus\mathbf{c^1}$ が一様に成立することを示す．まず，$\mathbf{c^1}$-計算可能な方法で，$\sigma\sqsubseteq x$ から $g(\sigma)$ を得る．この $g(\sigma)$ と $a\in A$ をパラメータとして，上の $\Sigma_1(\mathbf{c})$-論理式の真偽を $\mathbf{c^1}$ に尋ねる．構成より，$e=|\sigma|-1$ について，真ならば $(\psi(x)\oplus\mathbf{c})'(e)=1$ であり，さもなくば $(\psi(x)\oplus\mathbf{c})'(e)=0$ となる．以上より，定理が示された． □

あくまで最初期の定理だけあって，計算可能性理論における最も簡単な定理のひとつであるが，本稿における証明の鍵となる．有限級ボレル写像の構造解析，つまり定理 5.5 の証明は，フリードバーグのジャンプ逆化定理と他の種々の概念のトリッキーな組合せによって成し遂げられる．

その証明の詳細を述べる前に，無限ボレル階数の写像の構造解析についてもコメントしておこう．まず，単発のジャンプ逆化定理では，それを繰り返しても，有限級ボレル写像を階下に引き摺り落とすことしかできない．したがって，超限級ボレル階数を取り扱う場合には，超限ジャンプ逆化定理が必要になる．これについては，1977 年の MacIntyre [44] が，算術的コーエン強制法を利用して証明している．1963 年にポール・コーエンが**強制法** (*forcing*) を導入して連続体仮説の独立性を証明した翌年には，フェファーマンが算術的コーエン強制法を導入し，再帰理論における幾つかの結果を得ていた．MacIntyre の証明は，このラインに沿った直接的な証明である．

6.3.1 ☕ ボレル集合，ボレル関数と計算可能性理論

なぜボレル集合やボレル写像の分析に計算不可能性が有用なのであろうか．それは，ほとんどのボレル集合やボレル写像はある種の計算不可能性を孕むからである．たとえば，多くのボレル写像が不連続関数であることは容易に分かる．ところで，いわゆる連続関数の ε-δ 論法による定義というのは，任意精度近似可能性を意味する．実際，計算可能性（つまり任意精度近似可能性）の定義とは，この連続性の ε-δ による定義を強めたものであった．したがって，対偶を取れば，不連続性は計算不可能性を導く．

ボレル集合やボレル写像は，計算可能に近い，と一般的には認識されている．実際，そのとおりである．計算不可能性がありふれた数学の世界においては，ボレル集合やボレル写像は，比較的，計算可能に近い部類に属すと言ってよい．それでも，計算不可能に満ちている．しかし，それは逆に，計算可能性理論にとってはメリットになり得る．このような適度に計算可能で適度に計算不可能である，という境界線的な概念であることが，計算可能性理論が効力を発揮する理由であるのだから．

以下，本稿とはあまり関係のない余談である．ルジンの定理が述べるように，ボレル写像（可測写像）は，十分大きな測度の集合上で連続写像と一致する．したがって，ボレル写像を連続写像（おおよそ計算可能写像）の議論に持ち込めるのではないか，と思うかもしれない．しかし，これにはむずかしい点が少しばかりある．

ルジン型の定理は，可測性だけではなく，あらゆる正則性に対して考察されている．たとえば，Ellentuck 位相のところでも議論したように，ボレル写像が与えられたとき，generic な点を含む大きな集合上で連続写像と一致する，というのが，イデアル強制法における continuous reading of names である．このように，ルジンの定理やその拡張は，ボレル関数というものは**十分に超越的な**

点の入力に対しては連続関数のように振る舞うよ，と教えてくれるものである．そして，**可算個しかない計算可能点などは，その性質を満たさない例外点**となる．

「少数の例外を除いて一般的に成立する」という形の定理の多くについて，その少数の例外が「計算可能なもの」であり，じつは「計算不可能なもの」でしか成り立っていない，ということが時々起こる．測度論においては，それは「十分に測度が大きい集合上で成立する」「ほとんど至る所××である」といった形の定理である．この種の主張は，十分にランダムな入力で成立する，と読み替えることができる．そのランダムが疑似乱数程度で良いこともあれば，真に計算不可能なランダム性が要求されることもある．「ほとんど至る所」の中に含まれるためには，どれくらいの超越的なランダム性が必要なのか，どれくらいの計算不可能性が必要なのか，ということを学ぶのが計算論的ランダムネスの理論である．

7 主定理の証明

さて，ここからが計算可能性理論が本領を発揮するところである．計算可能性理論のおかげで，残りの議論はとてつもなく簡単である．

7.1 ジャンプ作用素と逆化

次が，高いボレル階層にある写像を低いボレル階層に引き摺り落とすために用いる演算子である．

定義 7.1. 写像 $f\colon U \to \mathcal{Q}$ が与えられているとする．神託 $\mathbf{c}$ に対して，f の **$\mathbf{c}$-ジャンプ逆化** ($\mathbf{c}$-*jump inversion*) とは，以下によって定義される写像 $f^{\not\nearrow \mathbf{c}}\colon \mathrm{Im}[\mathcal{J}_{\mathbf{c}}] \to \mathcal{Q}$ である．

$$f^{\not\nearrow \mathbf{c}} = f \circ \mathcal{J}_{\mathbf{c}}^{-1}.$$

思い出して欲しい点としては，ジャンプの像 $\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ は閉集合であったから，$f^{\not\nearrow \mathbf{c}}$ は U 全域で定義された写像だと思って差し支えないということである．このジャンプ逆化の意味は理解しづらいところであるが．とにかく，この写像を考えると，なぜか事がうまく運び，極めて簡単な議論によって主定理が証明されるのである．

観測 7.2. $\mathcal{Q}$-値写像 $f\colon U \to \mathcal{Q}$ を固定し，$\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{R}$ を神託とする．このとき，

$$\mathbf{c} \leq_T \mathbf{d} \quad \Longrightarrow \quad f^{\not\nearrow \mathbf{c}} \geq_w f^{\not\nearrow \mathbf{d}}.$$

Proof. 仮定 $\mathbf{c} \leq_T \mathbf{d}$ より，$\theta(\cdot, \mathbf{d}) = (\cdot, \mathbf{c})$ となる計算可能関数 θ が存在する．ジャンプ $\mathcal{J}$ の透過

性より，$\theta' \circ \mathcal{J} = \mathcal{J} \circ \theta$ となる計算可能関数 θ' が存在する．このとき，以下に注意する．

$$\mathcal{J}^{\mathbf{c}}(x) = \mathcal{J}(x, \mathbf{c}) = \mathcal{J}\theta(x, \mathbf{d}) = \theta' \mathcal{J}(x, \mathbf{d}) = \theta' \mathcal{J}^{\mathbf{d}}(x)$$

よって，以下の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_{\mathbf{d}}[U] \arrow[rr, "\theta'"] \arrow[dr, bend right=40, "f^{\not\nearrow\mathbf{d}}"'] & & \mathcal{J}_{\mathbf{c}}[U] \arrow[dl, bend left=40, "f^{\not\nearrow\mathbf{c}}"] \\
& U \arrow[ul, "\mathcal{J}_{\mathbf{d}}"] \arrow[ur, "\mathcal{J}_{\mathbf{c}}"'] \arrow[d, "f"] & \\
& \mathcal{Q} &
\end{tikzcd}$$

これより，θ' が $f^{\not\nearrow\mathbf{d}} \leq_W f^{\not\nearrow\mathbf{c}}$ を保証することが示された． □

さて，$\leq_W$ はベター擬順序であり，特に整礎であった．また，$\leq_T$ が上半束であることから，補題 7.2 から以下が導かれる．

系 7.3. 任意の f について，$\{f^{\not\nearrow\mathbf{c}} : \mathbf{c} \in \mathbb{R}\}$ の中で $\leq_W$-順序最小となるものが存在する．つまり，ある $\mathbf{c}$ が存在して，次が成立する．

$$(\forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}) \quad f^{\not\nearrow\mathbf{c}} \leq_W f^{\not\nearrow\mathbf{d}}.$$

以後，そのような $f^{\not\nearrow\mathbf{c}}$ を単に $f^{\not\nearrow}$ と書く．

それでは，ジャンプ逆化が実際にボレル可測写像の階数を引き下げ，さらに様々な良い性質を持つことを示していこう．

補題 7.4. ボレル写像 $f, g \colon U \to \mathcal{Q}$ に対して，以下が成立する．

1. もし f がベール $n+1$ 級ならば，$f^{\not\nearrow}$ はベール n 級写像に連続双還元可能である．
2. $f \leq_W g$ ならば $f^{\not\nearrow} \leq_W g^{\not\nearrow}$ である．
3. もし $f^{\not\nearrow}$ または $g^{\not\nearrow}$ が非自己双対ならば，$g^{\not\nearrow} \leq_W f^{\not\nearrow}$ は $g \leq_W f$ を導く．

Proof. (1) $f^{\not\nearrow} \equiv_W f^{\not\nearrow\mathbf{c}}$ となる神託 $\mathbf{c} \in \mathbf{R}$ を固定する．もし f がベール $n+1$ 級ならば，ある $\mathbf{d} \geq_T \mathbf{c}$ と $\mathbf{d}$-計算可能関数 Φ が存在して，$f = \Phi \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}}^{n+1}$ と書ける．このとき，観測 7.2 より $\equiv_W f^{\not\nearrow\mathbf{c}} \geq_W f^{\not\nearrow\mathbf{d}} \geq_W f^{\not\nearrow}$ であるから，$f^{\not\nearrow} \equiv_W f^{\not\nearrow\mathbf{d}}$ である．また，$\mathcal{J}_{\mathbf{d}}^{n+1} = \mathcal{J}_{\mathbf{d}'}^{n} \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}}$ であることに注意すると，

$$f^{\not\nearrow} \equiv_W f^{\not\nearrow\mathbf{d}} = \Phi \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}}^{n+1} \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}}^{-1} = \Phi \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}'}^{n} \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}} \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}}^{-1} = \Phi \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}'}^{n}$$

であるから，これはベール n 級写像に連続双還元可能である．

(2) $f \leq_W g$ を保証する連続写像 θ を固定する．このとき，ある神託 $\mathbf{c} \in \mathbf{R}$ に対して，θ は $\mathbf{c}$-計算可能である．いま，$\mathbf{d}$ を $f^{\nsim} \equiv_W f^{\nsim\mathbf{d}}$ および $g^{\nsim} \equiv_W g^{\nsim\mathbf{d}}$ を満たす神託とする．いま $\mathbf{c} \leq_T \mathbf{d}$ なので，ジャンプ $\mathcal{J}_{\mathbf{d}}$ の透過性により，$\theta' \circ \mathcal{J}_{\mathbf{d}} = \mathcal{J}_{\mathbf{d}} \circ \theta$ が成立する．よって，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_{\mathbf{d}}[U] \arrow[r, "\theta'"] \arrow[dd, bend right=60, "f^{\nsim\mathbf{d}}"'] & \mathcal{J}_{\mathbf{d}}[U] \arrow[dd, bend left=60, "g^{\nsim\mathbf{d}}"] \\
U \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{d}}"] \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] & U \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{d}}"'] \arrow[d, "g"'] \\
\mathcal{Q} \arrow[r, dotted, "\leq_{\mathcal{Q}}"] & \mathcal{Q}
\end{tikzcd}$$

つまり，θ' が $f^{\nsim} \leq_W g^{\nsim}$ を保証する．

(3) $g^{\nsim} \leq_W f^{\nsim}$ だが $g \nleq_W f$ であると仮定して，$f^{\nsim}$ と $g^{\nsim}$ が共に自己双対であることを示す．もし $g \nleq_W f$ ならば，ボレル決定性より，ある $\mathbf{c}$-計算可能非拡大写像 θ が存在して，$g \circ \theta(x) \nleq_{\mathcal{Q}} f(x)$ を得る．上と同じように $\mathbf{d}, \theta'$ を取る．また，$g^{\nsim} \leq_W f^{\nsim}$ を保証する連続写像 η を取ると，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_{\mathbf{d}}[U] \arrow[r, "\eta"] \arrow[dd, "g^{\nsim\mathbf{d}}"'] & \mathcal{J}_{\mathbf{d}}[U] \arrow[r, "\theta'"] \arrow[dd, bend right=60, "f^{\nsim\mathbf{d}}"'] & \mathcal{J}_{\mathbf{d}}[U] \arrow[r, "\eta"] \arrow[dd, bend left=60, "g^{\nsim\mathbf{d}}"] & \mathcal{J}_{\mathbf{d}}[U] \arrow[dd, "f^{\nsim\mathbf{d}}"] \\
 & U \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{d}}"] \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] & U \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{d}}"'] \arrow[d, "g"'] & \\
\mathcal{Q} \arrow[r, dotted, "\leq_{\mathcal{Q}}"] & \mathcal{Q} \arrow[r, dotted, "\ngeq_{\mathcal{Q}}"] & \mathcal{Q} \arrow[r, dotted, "\leq_{\mathcal{Q}}"] & \mathcal{Q}
\end{tikzcd}$$

これより，$g^{\nsim\mathbf{d}}(z) \ngeq_{\mathcal{Q}} g^{\nsim\mathbf{d}}\theta'\eta(z)$ および $f^{\nsim\mathbf{d}}(z) \ngeq_{\mathcal{Q}} f^{\nsim\mathbf{d}}\eta\theta'(z)$ が導かれるから，$f^{\nsim\mathbf{d}}$ も $g^{\nsim\mathbf{d}}$ も自己双対でないことが従う． □

次の補題の証明のために，フリードバーグのジャンプ逆化定理を用いる．この補題によって，ボレル階級の高い議論をボレル階級の低い議論に落とすことが可能になる．

補題 7.5 (ベール・ジャンプ打ち消し補題)**.** $f\colon U \to \mathcal{Q}$ を融和的ボレル写像とする．このとき，

$$(f \circ \beta)^{\nsim} \equiv_W f$$

が成立する．特に，もし $T \in \mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ ならば，$\Omega^{\nsim}_{\langle T \rangle} \equiv_W \Omega_T$ である．

Proof. 最初に $(f \circ \beta)^{\nsim} \leq_W f$ を示す．まず，ある神託 $\mathbf{c}$ に対して $(f \circ \beta)^{\nsim} = f \circ \beta \circ \mathcal{J}_{\mathbf{c}}^{-1}$ である．また，β は計算可能ベール 1 級なので，ある計算可能写像 φ に対して，β と $\varphi \circ \mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ は p-同値となる．特に，$\beta \circ \mathcal{J}_{\mathbf{c}}^{-1}$ と φ はその定義域上で p-同値である．f は融和的なので，以下の図式の

ように，$(f\circ\beta)^{\not\sim}\leq_W f$ を導く．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_{\mathbf{c}}[U] \arrow[rrdd, "\varphi"] \arrow[dddr, bend right=60, "(f\circ\beta)^{\not\sim}"'] & & \\
U \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{c}}"'] \arrow[d, "\beta"'] & & \\
U \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{U} \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"'] & U \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, "f"] \\
& \mathcal{Q} &
\end{tikzcd}
$$

次に，$f\leq_W (f\circ\beta)^{\not\sim}$ を示すためには，フリードバーグのジャンプ逆化定理が必要になる．与えられた神託 $\mathbf{c}$ に相対的なジャンプ逆化定理より，ある計算可能写像 θ_0 と $\mathbf{c}'$-計算可能写像 ψ,θ_1 が存在して，$\theta_0\circ\mathcal{J}_{\mathbf{c}}\circ\psi=\mathrm{id}$ および $\theta_1=\mathcal{J}_{\mathbf{c}}\circ\psi$ が成立する．いま，β の融和的ベール 1 級完全性より，ある $\mathbf{c}$-計算可能写像 φ が存在して，$\theta_0\circ\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ と $\beta\circ\varphi$ は p-同値となる．さらに，ジャンプ $\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ の透過性より，ある $\mathbf{c}$-計算可能関数 φ' が存在して，$\varphi'\circ\mathcal{J}_{\mathbf{c}}=\mathcal{J}_{\mathbf{c}}\circ\varphi$ が成立する．よって，以下の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{J}_{\mathbf{c}}[U] \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dl, bend left, "\theta_0"] & \mathcal{J}_{\mathbf{c}}[U] \arrow[ddd, bend left=60, "(f\circ\beta)^{\not\sim}"] \\
U \arrow[ur, bend left, "\theta_1"] \arrow[r, "\psi"'] \arrow[dr, "p"] \arrow[ddr, "f"'] & U \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{c}}"'] \arrow[r, "\varphi"] & U \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{c}}"] \arrow[d, "\beta"] \\
& \tilde{U} \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"'] & U \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, "f"] \\
& \mathcal{Q} &
\end{tikzcd}
$$

上の可換図式より，連続写像 $\varphi'\circ\theta_1$ が $f\leq_w (f\circ\beta)^{\not\sim}$ を保証していることが分かる．これより，$\Omega^{\not\sim}_{\langle T\rangle}=(\Omega_T\circ\beta)^{\not\sim}\equiv_w\Omega_T$ も従う． □

定義 7.6. 写像 $f\colon U\to\mathcal{Q}$ が**自己相似**であるとは，任意の開集合 $V\subseteq U$ に対して，$f\equiv_W f\upharpoonright V$ であることを意味する．

つまり，f が自己相似であるとは，ワッジ核が U 全体であることを指す．この定義は，$\mathcal{Q}=U$ に離散順序を入れた場合，上の定義は，以前の定義 5.19 と一致することに注意しよう．さて，定理 4.35 より，f が自己双対であることとワッジ核が空であったことを思い出そう．すなわち，自己相似性は，自己双対性から程遠いことを表す．

補題 7.7. f が自己相似ならば，$f^{\not\sim}$ は非自己双対である．

Proof. 仮定より，f の自己相似なので，任意の τ に対してワッジ還元 $f \leq_w f \upharpoonright [\tau]$ が存在する．このとき，$\mathbf{c}$ を任意の τ に対してワッジ還元 $f \leq_w f \upharpoonright [\tau]$ を計算する神託とする．いま，σ が **$\mathbf{c}$-ジャンプを強制する**とは，τ が σ を拡張するならば $J_{\mathbf{c}}(\tau)$ も $J_{\mathbf{c}}(\sigma)$ を拡張することを意味する．これは，$\mathcal{J}_{\mathbf{c}}[\sigma] \subseteq [J_{\mathbf{c}}(\sigma)]$ であることと同値である．任意のそのような σ に対して，次が成立することを示そう．

$$f^{\not\sim\mathbf{c}} \leq_W f^{\not\sim\mathbf{c}} \upharpoonright [J_{\mathbf{c}}(\sigma)].$$

これを証明するために，$f \leq_W f \upharpoonright [\sigma]$ を保証する連続写像 θ を取る．$\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ の透過性より，ある $\mathbf{c}$-計算可能写像 θ' が存在して，$\theta' \circ \mathcal{J}_{\mathbf{c}}(X) = \mathcal{J}_{\mathbf{c}}(\sigma^\frown\theta(X))$ となる．いま，σ は $\mathbf{c}$-ジャンプを強制するので，以下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_{\mathbf{c}}[U] \arrow[r, "\theta'"] \arrow[dd, bend right, "f^{\not\sim}"'] & \mathcal{J}_{\mathbf{c}}[\sigma] \arrow[r, hook, "\mathrm{id}"] & {[J_{\mathbf{c}}(\sigma)]} \arrow[ddl, "f^{\not\sim}\upharpoonright[J_{\mathbf{c}}(\sigma)]"] \\
U \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{c}}"] \arrow[r, "\sigma\theta"] \arrow[d, "f"] & {[\sigma]} \arrow[u, "\mathcal{J}_{\mathbf{c}}"'] \arrow[d, "f\upharpoonright[\sigma]"'] & \\
\mathcal{Q} \arrow[r, dotted, "\leq_{\mathcal{Q}}"'] & \mathcal{Q} &
\end{tikzcd}$$

よって θ' によって $f^{\not\sim\mathbf{c}} \leq_W f^{\not\sim\mathbf{c}} \upharpoonright [J_{\mathbf{c}}(\sigma)]$ が保証される．

いま，強制の稠密性より，うまく $x \in U$ を構成すれば，ある無限上昇列 $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が存在して，各 $x \upharpoonright t_i$ が $\mathbf{c}$-ジャンプを強制することは容易に分かる．したがって，$\mathcal{J}_{\mathbf{c}}(x)$ の任意の開近傍 V は，ある i について $[\mathcal{J}_{\mathbf{c}}(x \upharpoonright t_i)]$ を含む．上の主張より，$f^{\not\sim\mathbf{c}} \leq_W f^{\not\sim\mathbf{c}} \upharpoonright [\mathcal{J}_{\mathbf{c}}(x \upharpoonright t_i)] \leq_W f^{\not\sim\mathbf{c}} \upharpoonright V$ を得る．よって，そのような $x \in U$ は $f^{\not\sim\mathbf{c}}$ のワッジ核に含まれるから，ワッジ核は空ではない．定理 4.35 より，これは $f^{\not\sim}$ が非自己双対であることを導く． □

7.2 連続還元順序と組合せ論的順序の同型性証明

7.2.1 単射性

それでは，準同型順序をベースにして，連続還元を構成していこう．

定理 7.8. S, T を $\mathcal{L}_{\mathrm{tree}}(\mathcal{Q})$-項とする．このとき，$S \trianglelefteq T$ であることと，任意の Σ_S-写像がある Σ_T-写像に連続還元可能であることは同値である．

Proof. 項の構成上の帰納法による補題 5.24 より，任意の $\mathcal{L}_{\mathrm{tree}}(\mathcal{Q})$-項 S, T について，$\Omega_S \leq_W \Omega_T$ であることと，$S \trianglelefteq T$ であることを示せば十分である．一方向は，補題 5.26 による．いま，$\Omega_S \leq_W \Omega_T$ を仮定する．

まず，定数記号については，$\Omega_p \leq_w \Omega_q$ と $p \trianglelefteq q$ が同値であることは明らかである．木型項 U, V について，$\Omega_{\langle U\rangle} \leq_w \Omega_{\langle V\rangle}$ を仮定する．ベール・ジャンプ打ち消し補題 7.5 により，$\Omega^{\not\sim}_{\langle U\rangle} \equiv_w \Omega_U$

を得る．V についても同様である．よって補題 7.4 (2) より $\Omega_U \leq_w \Omega_V$ を得る．したがって，帰納的仮定より $U \trianglelefteq V$ を得るから，$\trianglelefteq$ の定義によって $\langle U\rangle \trianglelefteq \langle V\rangle$ を得る．

いま，根型項 U, V と森型項 $S = \sqcup_i S_i$ と $T = \sqcup_j T_j$ について，$\Omega_{U\to S} \leq_W \Omega_{V\to T}$ を仮定する．まず，$U \trianglelefteq V$ の場合を考える．この場合，$\trianglelefteq$ の定義より，$U^{\to}S \trianglelefteq V^{\to}T$ であることと，任意の $i\in\mathbb{N}$ について $S_i \trianglelefteq V^{\to}T$ であることは同値である．いま，$\Omega_{U\to S} \leq_W \Omega_{V\to T}$ を仮定しているから，特に任意の $i \in \mathbb{N}$ について，$\Omega_{S_i} \leq_W \Omega_{V\to T}$ であり，帰納的仮定より $S_i \trianglelefteq V^{\to}T$ を得る．したがって，$U^{\to}S \trianglelefteq V^{\to}T$ が導かれる．

いま，$U \not\trianglelefteq V$ を仮定する．この場合，$\trianglelefteq$ の定義より，$U^{\to}S \trianglelefteq V^{\to}T$ であることと，$U^{\to}S \trianglelefteq T_j$ となる $j \in \mathbb{N}$ が存在することは同値である．いま，$\Omega_{U\to S} \leq_W \Omega_{T_j}$ となる j が存在することを示したい．

仮定より，$\Omega_{U\to S} \leq_W \Omega_{V\to T}$ となる連続写像 θ が存在する．$U \not\trianglelefteq V$ を仮定しているから，帰納的仮定より $\Omega_U \not\leq_W \Omega_V$ である．したがって，変心を起こさないようなある x について，x をある時点 $x \upharpoonright s$ まで読み込んだ段階で $\theta(x)$ は変心を起こす必要がある．$\theta(x)$ の変心後の最初の出力を k とする．つまり，$\theta(x)$ は T_k への連続還元に切り替える．いま，U は根型項なので，Ω_U は自己相似である．特に，ある連続写像 τ によって Ω_U は $\Omega_U \upharpoonright [x \upharpoonright s]$ に還元可能である．いま，$x \upharpoonright s$ を拡張する列については，$\Omega_{U\to S}$ は Ω_{T_k} に θ によって還元可能であるから，τ と θ を併せることによって，$\Omega_{U\to S} \leq_W \Omega_{T_k}$ が示せる．これより，$U^{\to}S \trianglelefteq V^{\to}T$ が示された．この議論の形式的な記述については，読者の演習問題とする． □

7.2.2 全射性

残すところは，次を示すのみである．

定理 7.9. 任意の有限階級のベール級写像 $f\colon U \to \mathcal{Q}$ に対して，f と Ω_T が連続双還元可能となる $\mathcal{L}_{\mathrm{tree}}(\mathcal{Q})$-項 T が存在する．

実際，f がベール n 級写像と連続双還元可能ならば，次が成立する．

1. f が自己双対ならば，$f \equiv_W \Omega_T$ となる森型項 $T \in {}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ が存在する．
2. f が非自己双対ならば，$f \equiv_W \Omega_T$ となる木型項 $T \in \mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ が存在する．
3. f が自己相似ならば，$f \equiv_W \Omega_T$ となる根型項 $T \in \mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ が存在する．

ここで，$\leq_W$ がベター擬順序であり，よって整礎であったことを思い出そう．これにより，$\leq_W$ 上の帰納法が利用できる．いま，f はベール n 級であると仮定し，証明は，写像 f の性質毎によって場合分けされる．

Case 1 (定数写像). もし f が定数写像と連続双還元可能ならば，明らかに，ある $q \in \mathcal{Q}$ について Ω_q に連続双還元可能である．

Case 2 (自己双対写像). もし f が自己双対ならば， 定理 4.35 より，$f \equiv_w \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} f_i$ となる．

ここで，各 f_i は非自己双対であり，$f_i <_W f$ である．帰納的仮定より，$f_i \equiv_W \Omega_{T_i}$ となる木 $T_i \in \mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ が存在する．よって，$f \equiv_w \Omega_{\sqcup_i T_i}$ が成立する．

連続写像は定数写像の開集合上の和として書けるので，これによって，連続写像の分類は完了した．

Case 3 (自己相似写像). いま，f は自己相似であると仮定する．まず，$f^{\not\sim} <_W f$ であることを示そう．$f^{\not\sim} \leq_w f$ であることは，$\mathcal{J}_{\mathbf{c}}^{-1}$ が連続であることから従う．いま，n を f がベール n 級写像 g と連続双還元可能であるような最小の n とする．補題 7.4 (2) より，$f \equiv_W g$ は $f^{\not\sim} \equiv_W g^{\not\sim}$ を導く．また，補題 7.4 (1) より $g^{\not\sim}$ はベール $(n-1)$ 級であるから，n の選択より，$f \not\equiv_W g^{\not\sim} \equiv_W f^{\not\sim}$ である．さらに，f は自己相似であるから，補題 7.7 より，$f^{\not\sim}$ は非自己双対である．帰納的仮定より，ある木型項 $T \in \mathrm{Tree}^{n-1}(\mathcal{Q})$ が存在して，$f^{\not\sim} \equiv_W \Omega_T$ と書ける．さらに，ベール・ジャンプ打ち消し補題 7.5 を Ω_T に適用すれば，$\Omega_T \equiv_w \Omega_{\langle T\rangle}^{\not\sim}$ を得るから，$f^{\not\sim} \equiv_w \Omega_{\langle T\rangle}^{\not\sim}$ である．故に，補題 7.4 (3) より，$f \equiv_w \Omega_{\langle T\rangle}$ を得る．ここで，$\langle T\rangle \in \mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ である．

Case 4 (非自己双対かつ非自己相似). いま，f は非自己双対であり，どんな自己相似写像にも連続双還元可能でないとする．

写像を自己相似部 S_f と剰余部 R_f に分解する．$\mathcal{F}(f)$ を f のワッジ核としたとき，$S_f = f \restriction \mathcal{F}(f)$ とする．いま，V を $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ の補集合である開集合の生成子とし，$\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を V の枚挙とする．このとき，剰余部を $R_f = \bigoplus_n (f \restriction [\sigma_n])$ によって定義する．f がベール n 級ならば S_f と R_f も共にベール n 級であることは容易に確認できる．S_f が自己相似であることを示すために，自己相似写像の次の基本的性質を用いる．

補題 7.10. もし f のワッジ核 $\mathcal{F}(f)$ が空でないならば，$f \restriction \mathcal{F}(f)$ は自己相似である．

さらに，もし f が自己相似写像に連続双還元可能ならば，$f \equiv_W f \restriction \mathcal{F}(f)$ である．

Proof. F をワッジ核 $\mathcal{F}(f)$ に対応する木とする．各 $\sigma \in F$ に対して，連続還元 $\theta \restriction \mathcal{F}(f) \leq_W f \restriction \mathcal{F}(f) \cap [\sigma]$ が存在することを示す必要がある．ワッジ核の定義より，任意の $\sigma \in F$ に対して，ある連続還元 $\theta\colon f \leq_W f \restriction [\sigma]$ が存在する．この $\underline{\theta}[F] \subseteq F$ を満たすことを示す．そうでないならば，ある $\tau \in F$ に対して $\underline{\theta}(\tau) \notin F$ となる．このとき，$f \restriction [\tau] \leq_W f \restriction [\theta(\tau)]$ が導かれるが，ワッジ核の定義より $f \equiv_W f \restriction [\tau] \leq_W f \restriction [\theta(\tau)] <_W f$ となるから矛盾である．

2 つめの主張については，もし $f \equiv_W g$ ならば $f \restriction \mathcal{F}(f) \equiv_W g \restriction \mathcal{F}(g)$ である．いま，もし g が自己相似ならば，$\mathcal{F}(g) = U$ であり，したがって $f \restriction \mathcal{F}(f) \equiv_W g \restriction \mathcal{F}(g) = g \equiv_W f$ を得る． $\square$

まず，$S_f, R_f <_W f$ を確かめる．明らかに $S_f, R_f \leq_W f$ である．補題 7.10 より S_f は自己相似なので，f に連続双還元可能ではない．次に，ワッジ核の定義より，$\sigma \in \underline{V}$ について $f \restriction [\sigma] <_w f$ であるから，R_f は σ-結び可約である．よって，もし $R_f \equiv_W f$ ならば，定理 4.35 より，f は非自己双対となり，これは仮定に矛盾する．したがって，$S_f, R_f <_W f$ を得た．

いま，$f \equiv_W S_f {}^\to R_f$ を示したい．まず，$\leq_W$ については明らかである．それでは，$S_f {}^\to R_f \leq_W f$ の連続還元を与えよう．与えられた x が変心を行わないうちは，x をそのままフォローする．もし x が変心を行い，R_f における初手として σ_n を選んだとしよう．変心を行ったラウンド s では

$x \restriction s$ はまだワッジ核の中にいるから，$f \restriction [\sigma_n] \leq_W f \restriction [x \restriction s]$ である．この還元を組み合わせることで，容易に $S_f \vec{\to} R_f \leq_W f$ の還元は構成できる．

帰納的仮定より，ある根型項 $U \in \mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ と森型項 $S \in {}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^n(\mathcal{Q})$ が存在して，$S_f \equiv_W \Omega_U$ かつ $R_f \equiv_W \Omega_S$ となる．したがって，$f \equiv_W \Omega_{U \to S}$ を得る．

8　あとがき

本稿では，計算可能性理論における最大の未解決問題である「マーティン予想」を取り巻く様々な研究の解説を目指した．本来は，マーティン予想周辺の証明も含めようと思ったのだが，実際に証明を書き下してみると，やはり学生に要求する予備知識が多すぎて，講義でやるにはむずかしいな，という印象であった．そこで，証明に関しては，ほとんど予備知識の不要なワッジの連続還元順序の理論に焦点を絞ることにした．

そういうわけで，主定理の証明は驚くほど簡単である．しかし，ここまで明らかな証明を得るのにはかなりの苦労を要した．実際は，ここで証明した主定理よりも遥かに弱い主張が，ほんの一年くらい前まではかなり難解な定理として知られていたのである．

たとえば，ここに書いてあるものよりも遥かに弱い結果，つまり 2 値関数の場合には，Wadge [79], Duparc [12, 11] 辺りが基本的な文献であろう．とはいえ，2 値関数の場合ですら，かなり難しい．Duparc が論文 [11] を書き上げて 20 年経った現在に至っても，誰も正しさを検証することができず，それが出版されることはなかった．しかし，その異質な雰囲気を醸し出す Duparc の二次元的記法は趣き深いので，一度目を通してみるのも良いかもしれない．有限値ベール 2 級写像の場合は Selivanov [64] によるが，ベール 2 級までの証明にも関わらず，熟練した人でないと読むのは難しいだろう．

ボレル集合の連続還元順序まわりは，極めて基礎的な定理にも関わらず，専門家ですらほとんどの人が証明を読めていないという状況であったように感じる．これはどうにかならないかと思って，色々と努力したのであるが，最終的にめちゃくちゃ簡単になったので嬉しい．木原-Montalbán [32] の時点でかなり簡単になっていたと思う[*11]が，それよりも本稿の方が更に明瞭になったと思う．

以下に，代表的な参考文献を挙げる．

■第 1 節:　算術的階層や $\leq_T$-順序に関する古典的な内容については，Odifreddi [57, 58] が文献としてはまとまっている．教科書は無数にあるので，Odifreddi を眺めて興味を持ったキーワードで検索するといいかもしれない．$\mathbb{R}_T$ のリジッド性予想および双翻訳可能性予想の概説について

[*11] Wadge [79] は（基礎的な理論の構築から始めているとはいえ）300 ページ以上，Duparc [12, 11] は 80 ページ強である．一方，木原-Montalbán [32] では，それらを遥かに拡張した定理を示し，その完全な証明を 1 つの論文内で与えているにも関わらず，わずか 40 ページ程度である．ある研究集会での発表後に，聴講者から「お前のその論文は何百ページあるのか」と訊かれたので，「たったの 40 ページだ」と答えたら驚かれた．ついでなので自慢すると，[32] は，レフェリーからは “extremely well-presented” という評価を頂き，“without hesitation” で Trans. Amer. Math. Soc. にアクセプトしてもらえたヤッター :)

は Slaman [68] があり，その数学的詳細は Slaman-Woodin [70] による．微細構造理論やマスターコードの理論は Jensen [25] による．計算可能性理論の観点からは，Chong-Yu の教科書 [9] でも少し触れられている．

マーティン予想に関する最初の発展は，Steel [72] および Slaman-Steel [69] である．マーティン予想に関する良いサーヴェイとして，Marks-Slaman-Steel [46] がある．Victoria-Delfino 問題の歴史については，[8] に載っている．

■第 3 節: 不変記述集合論に関する最も読みやすい入門書は Gao [18] であると思われる．少し古いが Becker-Kechris [4] や軌道同値関係に関しては Kechris-Miller [29] などもある．

可算ボレル同値関係とマーティン予想の関わりについては，Marks [47] にまとまっている．可算ボレル同値関係全般に関しては，最近の Kechris [26] によるサーヴェイを眺めるとよいと思う．

■第 4 節: 古典記述集合論については，Kechris [27] と Moschovakis [52] が最も基本的な入門書である．連続還元順序は Wadge の博士論文 [79] において導入された．70 年代におけるワッジ理論の発展については，Cabal のリプリント版 [28] を読むのが良いと思う．

少し古い文献であるが，80 年代前半までの BQO 理論の基礎は Simpson [66] にまとまっている．Ellentuck 位相の観点から見た BQO 理論の基礎としては，Prömel-Voigt [60] などがある．WQO 理論のハンドブックが近刊予定らしく，そのため，最近，BQO 理論のサーヴェイが多数公開されている．たとえば Pequignot [59] は非常に読みやすい入門的な文献である．

■余談について: 本稿は，主定理とあまり関係のない余談を多数含めた．この周辺分野について，筆者の知る限り，日本語で書かれた文献がほとんど存在しないため，どのような関連分野があるのかというガイドとしての役割を持つことも目指して記述した．本稿の余談のどれかにでも興味を持って，その分野を勉強する人が現れてくれたなら，本稿の目的は成功と言える．

たとえば，本稿の主題とは全く関係ないが，Σ_1-排中律や構成的逆数学などに興味を持つ人などが現れても嬉しい．この場合，Kohlenbach [34] などが優れた教科書である．構成的数学とまでは行かないまでも，古典二階算術における逆数学に興味を持ったならば，Simpson の教科書 [67] を勧める．最近，逆数学の教科書は他にも幾つか出版されている．たとえば，Hirschfeldt の教科書 [24] では，Simpson 本との重複を避けるように話題がチョイスされており，Simpson 本の良い補完となっている．しかし，逆数学における数学的証明技術を学ぶには良いが，若干スコープが狭いのもあって，最初に読む本ではないと思う．Stillwell [73] にも目を通してみたが，教科書ではなく一般向け啓蒙書のようである．この 2 冊と比較すると，Simpson の教科書はバランスが良く（特に β-モデルや ω-モデルの章の後半のような内容に言及されている点がよい），個人的に Simpson の教科書を再評価する良い機会となった．

参考文献

[1] Yohji Akama, Stefano Berardi, Susumu Hayashi, and Ulrich Kohlenbach. An arithmetical hierarchy of the law of excluded middle and related principles. In *19th IEEE Symposium on Logic in*

Computer Science (LICS 2004), 14-17 July 2004, Turku, Finland, Proceedings, pages 192–201. IEEE Computer Society, 2004.

[2] Alessandro Andretta, Riccardo Camerlo, and Greg Hjorth. Conjugacy equivalence relation on subgroups. *Fund. Math.*, 167(3):189–212, 2001.

[3] Howard Becker. A characterization of jump operators. *J. Symbolic Logic*, 53(3):708–728, 1988.

[4] Howard Becker and Alexander S. Kechris. *The descriptive set theory of Polish group actions*, volume 232 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] Alexander C. Block. Operations on a Wadge-type hierarchy of ordinal-valued functions. Master's thesis, Universiteit van Amsterdam, 2014.

[6] Alexander C. Block and Benedikt Löwe. A multiplication operation for the hierarchy of norms. *Ann. Pure Appl. Logic*, 169(7):656–673, 2018.

[7] George Boolos and Hilary Putnam. Degrees of unsolvability of constructible sets of integers. *J. Symbolic Logic*, 33:497–513, 1968.

[8] Andrés Eduardo Caicedo and Benedikt Löwe. The fourteen Victoria Delfino problems and their status in the year 2015. submitted.

[9] Chi Tat Chong and Liang Yu. *Recursion theory*, volume 8 of *De Gruyter Series in Logic and its Applications*. De Gruyter, Berlin, 2015. Computational aspects of definability, With an interview with Gerald E. Sacks.

[10] Randall Dougherty and Alexander S. Kechris. How many Turing degrees are there? In *Computability theory and its applications (Boulder, CO, 1999)*, volume 257 of *Contemp. Math.*, pages 83–94. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[11] J. Duparc. Wadge hierarchy and Veblen hierarchy, part II: Borel sets of infinite rank. unpublished.

[12] J. Duparc. Wadge hierarchy and Veblen hierarchy. I. Borel sets of finite rank. *J. Symbolic Logic*, 66(1):56–86, 2001.

[13] Erik Ellentuck. A new proof that analytic sets are Ramsey. *J. Symbolic Logic*, 39:163–165, 1974.

[14] Ju. L. Eršov. A certain hierarchy of sets. II. *Algebra i Logika*, 7(4):15–47, 1968.

[15] Thomas Forster. Better-quasi-orderings and coinduction. *Theoret. Comput. Sci.*, 309(1-3):111–123, 2003.

[16] Richard Friedberg. A criterion for completeness of degrees of unsolvability. *J. Symb. Logic*, 22:159–160, 1957.

[17] Fred Galvin and Karel Prikry. Borel sets and Ramsey's theorem. *J. Symbolic Logic*, 38:193–198, 1973.

[18] Su Gao. *Invariant descriptive set theory*, volume 293 of *Pure and Applied Mathematics (Boca Raton)*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[19] E. Mark Gold. Language identification in the limit. *Inform. and Control*, 10(5):447–474, 1967.

[20] Vassilios Gregoriades, Takayuki Kihara, and Keng Meng Ng. Turing degrees in Polish spaces and decomposability of Borel functions. submitted. arXiv:1410.1052.

[21] L. A. Harrington, A. S. Kechris, and A. Louveau. A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(4):903–928, 1990.

[22] Leo Harrington. A powerless proof of a theorem of silver. submitted.

[23] Peter Hertling. *Unstetigkeitsgrade von Funktionen in der effectiven Analysis.* PhD thesis, FernUniversität Hagen, 1996.

[24] Denis R. Hirschfeldt. *Slicing the truth*, volume 28 of *Lecture Notes Series. Institute for Mathematical Sciences. National University of Singapore.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,

Hackensack, NJ, 2015. On the computable and reverse mathematics of combinatorial principles, Edited and with a foreword by Chitat Chong, Qi Feng, Theodore A. Slaman, W. Hugh Woodin and Yue Yang.

[25] R. Björn Jensen. The fine structure of the constructible hierarchy. *Ann. Math. Logic*, 4:229–308; erratum, ibid. 4 (1972), 443, 1972. With a section by Jack Silver.

[26] Alexander S. Kechris. The theory of countable borel equivalence relations. submitted.

[27] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[28] Alexander S. Kechris, Benedikt Löwe, and John R. Steel, editors. *Wadge degrees and projective ordinals. The Cabal Seminar. Volume II*, volume 37 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[29] Alexander S. Kechris and Benjamin D. Miller. *Topics in orbit equivalence*, volume 1852 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[30] Takayuki Kihara. Decomposing Borel functions using the Shore-Slaman join theorem. *Fund. Math.*, 230(1):1–13, 2015.

[31] Takayuki Kihara and Antonio Montalbán. The uniform Martin's conjecture for many-one degrees. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(12):9025–9044, 2018.

[32] Takayuki Kihara and Antonio Montalbán. On the structure of the Wadge degrees of BQO-valued Borel functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2019. to appear.

[33] Takayuki Kihara and Arno Pauly. Point degree spectra of represented spaces. submitted. arXiv:1405.6866.

[34] U. Kohlenbach. *Applied proof theory: proof interpretations and their use in mathematics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[35] Joseph B. Kruskal. The theory of well-quasi-ordering: A frequently discovered concept. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13:297–305, 1972.

[36] Richard Laver. On Fraïssé's order type conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 93:89–111, 1971.

[37] Richard Laver. Better-quasi-orderings and a class of trees. In *Studies in foundations and combinatorics*, volume 1 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 31–48. Academic Press, New York-London, 1978.

[38] Alain Louveau. A separation theorem for Σ^1_1 sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 260(2):363–378, 1980.

[39] Alain Louveau and Jean Saint-Raymond. On the quasi-ordering of Borel linear orders under embeddability. *J. Symbolic Logic*, 55(2):537–560, 1990.

[40] B. Löwe. The length of the full hierarchy of norms. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 63(2):161–168, 2005.

[41] Jack H. Lutz and Neil Lutz. Algorithmic information, plane Kakeya sets, and conditional dimension. *ACM Trans. Comput. Theory*, 10(2):Art. 7, 22, 2018.

[42] Neil Lutz and D. M. Stull. Bounding the dimension of points on a line. In *Theory and applications of models of computation*, volume 10185 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 425–439. Springer, Cham, 2017.

[43] Neil Lutz and Donald M. Stull. Projection theorems using effective dimension. In Igor Potapov, Paul G. Spirakis, and James Worrell, editors, *43rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, MFCS 2018, August 27-31, 2018, Liverpool, UK*, volume 117 of *LIPIcs*, pages 71:1–71:15. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2018.

[44] John M. Macintyre. Transfinite extensions of Friedberg's completeness criterion. *J. Symbolic*

Logic, 42(1):1–10, 1977.

[45] Richard Mansfield and Galen Weitkamp. *Recursive aspects of descriptive set theory.* Oxford University Press, New York, 1985. with a chapter by Stephen Simpson.

[46] Andrew Marks, Theodore Slaman, and John Steel. Martin's conjecture, arithmetic equivalence, and countable Borel equivalence relations. In *Ordinal Definability and Recursion Theory: The Cabal Seminar, Volume III*, pages 493–519. Cambridge University Press, 2016.

[47] Andrew S. Marks. Uniformity, universality, and computability theory. *J. Math. Log.*, 17(1):1750003, 50, 2017.

[48] Donald A. Martin. Borel determinacy. *Ann. of Math. (2)*, 102(2):363–371, 1975.

[49] A. R. D. Mathias. Happy families. *Ann. Math. Logic*, 12(1):59–111, 1977.

[50] Antonio Montalbán. A computability theoretic equivalent to Vaught's conjecture. *Adv. Math.*, 235:56–73, 2013.

[51] Antonio Montalbán. Analytic equivalence relations satisfying hyperarithmetic-is-recursive. *Forum Math. Sigma*, 3:e8, 11, 2015.

[52] Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive set theory*, volume 155 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2009.

[53] Jan Mycielski and H. Steinhaus. A mathematical axiom contradicting the axiom of choice. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 10:1–3, 1962.

[54] Alexander Nabutovsky. Fundamental group and contractible closed geodesics. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(12):1257–1270, 1996.

[55] Alexander Nabutovsky and Shmuel Weinberger. The fractal nature of Riem/Diff. I. *Geom. Dedicata*, 101:1–54, 2003.

[56] C. St. J. A. Nash-Williams. On well-quasi-ordering infinite trees. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 61:697–720, 1965.

[57] Piergiorgio Odifreddi. *Classical recursion theory*, volume 125 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. The theory of functions and sets of natural numbers, With a foreword by G. E. Sacks.

[58] Piergiorgio Odifreddi. *Classical recursion theory. Vol. II*, volume 143 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1999.

[59] Yann Pequignot. Towards better: a motivated introduction to better-quasi-orders. *EMS Surv. Math. Sci.*, 4(2):185–218, 2017.

[60] Hans Jürgen Prömel and Bernd Voigt. From wqo to bqo, via Ellentuck's theorem. *Discrete Math.*, 108(1-3):83–106, 1992. Topological, algebraical and combinatorial structures. Frolík's memorial volume.

[61] Hilary Putnam. A note on constructible sets of integers. *Notre Dame J. Formal Logic*, 4:270–273, 1963.

[62] Hilary Putnam. Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski. *J. Symbolic Logic*, 30:49–57, 1965.

[63] Victor L. Selivanov. Hierarchies of Δ^0_2-measurable k-partitions. *MLQ Math. Log. Q.*, 53(4-5):446–461, 2007.

[64] Victor L. Selivanov. Extending Wadge theory to k-partitions. In *Unveiling Dynamics and Complexity - 13th Conference on Computability in Europe*, volume 10307 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 387–399. Springer, 2017.

[65] Jack Silver. Every analytic set is Ramsey. *J. Symbolic Logic*, 35:60–64, 1970.

[66] Stephen G. Simpson. Bqo-theory and Fraïssé's conjecture. Chapter 9 of [45], 1985.

[67] Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, Cambridge; Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, NY, second edition, 2009.

[68] Theodore A. Slaman. Degree structures. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, pages 303–316. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[69] Theodore A. Slaman and John R. Steel. Definable functions on degrees. In *Cabal Seminar 81–85*, volume 1333 of *Lecture Notes in Math.*, pages 37–55. Springer, Berlin, 1988.

[70] Theodore A. Slaman and W. Hugh Woodin. Definability in degree structures. available at https://math.berkeley.edu/~slaman/talks/sw.pdf, 2005.

[71] John R. Steel. Determinateness and the separation property. *J. Symbolic Logic*, 46(1):41–44, 1981.

[72] John R. Steel. A classification of jump operators. *J. Symbolic Logic*, 47(2):347–358, 1982.

[73] John Stillwell. *Reverse mathematics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2018. Proofs from the inside out.

[74] Simon Thomas. Martin's conjecture and strong ergodicity. *Arch. Math. Logic*, 48(8):749–759, 2009.

[75] Simon Thomas. Popa superrigidity and countable Borel equivalence relations. *Ann. Pure Appl. Logic*, 158(3):175–189, 2009.

[76] Simon Thomas. Universal Borel actions of countable groups. *Groups Geom. Dyn.*, 6(2):389–407, 2012.

[77] Fons van Engelen, Arnold W. Miller, and John Steel. Rigid Borel sets and better quasi-order theory. In *Logic and combinatorics (Arcata, Calif., 1985)*, volume 65 of *Contemp. Math.*, pages 199–222. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[78] Robert A. Van Wesep. Separation principles and the axiom of determinateness. *J. Symbolic Logic*, 43(1):77–81, 1978.

[79] William Wilfred Wadge. *Reducibility and Determinateness on the Baire Space*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1983. Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley.

[80] 吉永 正彦. **周期と実数の *0*-認識問題*: Kontsevich-Zagier* の予想**. 数学書房, 2016.