I. 常微分方程式の初等積分法

1. 変数分離形

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式の解は

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

で与えられる.

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式の解は

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

で与えられる.

$\because \quad G(y) = \int g(y)dy$ 　($g(y)$ の原始関数) とおき, $y = y(x)$ を (1) の解とする.

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式の解は

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

で与えられる.
$\because \quad G(y) = \int g(y)dy$ ($g(y)$ の原始関数) とおき, $y = y(x)$ を (1) の解とする.
このとき,

$$\frac{d}{dx}\{G(y(x))\} = \frac{dG}{dy}\frac{dy}{dx} = g(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(x)$$

となる.

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式の解は

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

で与えられる.
$\because \quad G(y) = \int g(y)dy \quad$ ($g(y)$ の原始関数) とおき, $y = y(x)$ を (1) の解とする.
このとき,

$$\frac{d}{dx}\{G(y(x))\} = \frac{dG}{dy}\frac{dy}{dx} = g(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(x)$$

となる. よって両辺を x で積分して

$$G(y) = \int f(x)dx \qquad \text{つまり} \qquad \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

が解である.

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore \ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore\ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $|y| = e^c x^2 e^x$ なので, $\pm e^c = C$ とおいて

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore\ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $|y| = e^c x^2 e^x$ なので, $\pm e^c = C$ とおいて

$$y = Cx^2 e^x \qquad (C \neq 0 \text{ は定数})$$

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore \ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $|y| = e^c x^2 e^x$ なので, $\pm e^c = C$ とおいて

$$y = Cx^2 e^x \qquad (C \neq 0 \ \text{ は定数})$$

また $y \equiv 0$ (y は恒等的に 0) も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore \ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $|y| = e^c x^2 e^x$ なので, $\pm e^c = C$ とおいて

$$y = Cx^2 e^x \qquad (C \neq 0 \ \text{ は定数})$$

また $y \equiv 0$ (y は恒等的に 0) も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

$$y = Cx^2 e^x \qquad (C \ \text{ は任意の定数})$$

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2 y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は形式的に $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) dx$ と書けるので変数分離形である.

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2 y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は形式的に $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) dx$ と書けるので変数分離形である.

従って, 両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ より $y = Cxe^{\frac{1}{x}} \quad (C \neq 0)$

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2 y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は形式的に $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) dx$ と書けるので変数分離形である.

従って, 両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ より $y = Cxe^{\frac{1}{x}} \quad (C \neq 0)$

また $y \equiv 0$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

1. 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は形式的に $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)dx$ と書けるので変数分離形である.

従って, 両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ より $y = Cxe^{\frac{1}{x}}$ $\quad (C \neq 0)$

また $y \equiv 0$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

$$y = Cxe^{\frac{1}{x}} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

2. 同次形

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおくと,

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ なので,

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ なので, 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

となり u についての変数分離形となる.

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ なので，方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

となり u についての変数分離形となる.
これを $u = u(x)$ について解き

$$y(x) = xu(x)$$

として解が得られる.

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ．}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である．

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて，$\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1 + u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる．

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ．}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である．

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて，$\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1 + u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる．これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2 - 1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore \ \log|u^2 - 1| = -\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ \log|u^2-1| = -\log|x| + c \qquad (c\text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-1)x = C \quad (C \neq 0$ は定数).

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore \log|u^2-1| = -\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-1)x = C$ ($C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて $y^2 - x^2 = Cx$.

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ \log|u^2-1| = -\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-1)x = C \quad (C \neq 0$ は定数). $\quad u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて $y^2 - x^2 = Cx$.
また $y = \pm x$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore \ \log|u^2-1| = -\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-1)x = C$ ($C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて $y^2 - x^2 = Cx$.
また $y = \pm x$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

$$y^2 - x^2 = Cx \qquad (C \ \text{は任意の定数})$$

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x - 2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y} = \frac{2 - \left(\frac{y}{x}\right)}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる.

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ．}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である．

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて， $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる．これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c\text{ は積分定数})$$

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2 - u + 1)x^2 = C \quad (C \neq 0$ は定数).

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である．

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて，$\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる．これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-u+1)x^2 = C$ $(C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて
$x^2 - xy + y^2 = C$.

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ．}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である．

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる．これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int\frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-u+1)x^2 = C$ ($C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて
$x^2 - xy + y^2 = C$. また $x^2 - xy + y^2 = 0$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

2. 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-u+1)x^2 = C$ ($C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて
$x^2 - xy + y^2 = C$. また $x^2 - xy + y^2 = 0$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

$$x^2 - xy + y^2 = C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

3. 完全微分方程式

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが,

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

この微分方程式に対し x, y の関数 $u(x,y)$ で, $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となるものがあれば, $u(x,y) = C$ が (3) の一般解になる.

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

この微分方程式に対し x, y の関数 $u(x,y)$ で, $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となるものがあれば, $u(x,y) = C$ が (3) の一般解になる.

$\because$ $u(x,y) = C$ が x について解けて, $u(x, y(x)) = C$ と y が x の関数として表せる場合

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x, y)\frac{dx}{dy} + N(x, y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

この微分方程式に対し x, y の関数 $u(x, y)$ で, $M(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となるものがあれば, $u(x, y) = C$ が (3) の一般解になる.

$\because$ $u(x, y) = C$ が x について解けて, $u(x, y(x)) = C$ と y が x の関数として表せる場合 $u(x, y(x)) = C$ の両辺を x で微分して,

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

この微分方程式に対し x, y の関数 $u(x,y)$ で, $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となるものがあれば, $u(x,y) = C$ が (3) の一般解になる.

$\because$ $u(x,y) = C$ が x について解けて, $u(x, y(x)) = C$ と y が x の関数として表せる場合 $u(x, y(x)) = C$ の両辺を x で微分して, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

この微分方程式に対し x, y の関数 $u(x,y)$ で, $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となるものがあれば, $u(x,y) = C$ が (3) の一般解になる.

$\because$ $u(x,y) = C$ が x について解けて, $u(x, y(x)) = C$ と y が x の関数として表せる場合

$u(x, y(x)) = C$ の両辺を x で微分して, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$u(x,y) = C$ が y について解けて, $u(x(y), y) = C$ と x が y の関数として表せる場合

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

この微分方程式に対し x, y の関数 $u(x, y)$ で, $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となるものがあれば, $u(x, y) = C$ が (3) の一般解になる.

$\because$ $u(x,y) = C$ が x について解けて, $u(x, y(x)) = C$ と y が x の関数として表せる場合

$u(x, y(x)) = C$ の両辺を x で微分して, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$u(x,y) = C$ が y について解けて, $u(x(y), y) = C$ と x が y の関数として表せる場合

$u(x(y), y) = C$ の両辺を y で微分して,

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

この微分方程式に対し x, y の関数 $u(x,y)$ で, $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となるものがあれば, $u(x,y) = C$ が (3) の一般解になる.

$\because$ $u(x,y) = C$ が x について解けて, $u(x, y(x)) = C$ と y が x の関数として表せる場合

$u(x, y(x)) = C$ の両辺を x で微分して, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$u(x,y) = C$ が y について解けて, $u(x(y), y) = C$ と x が y の関数として表せる場合

$u(x(y), y) = C$ の両辺を y で微分して, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = M(x,y)\dfrac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$

3. 完全微分方程式

y を x の関数 $y = y(x)$ として, 常に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の関係が成り立つ訳ではないが, (x, y) 毎に

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{または} \quad M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$$

のどちらかが成り立つとき,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

と書く.

この微分方程式に対し x, y の関数 $u(x,y)$ で, $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となるものがあれば, $u(x,y) = C$ が (3) の一般解になる.

$\because$ $u(x,y) = C$ が x について解けて, $u(x, y(x)) = C$ と y が x の関数として表せる場合

$u(x, y(x)) = C$ の両辺を x で微分して, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$u(x,y) = C$ が y について解けて, $u(x(y), y) = C$ と x が y の関数として表せる場合

$u(x(y), y) = C$ の両辺を y で微分して, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = M(x,y)\dfrac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$

よって, $u(x,y) = C$ は (3) を満たす.

3. 完全微分方程式

[判定法]

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ならば, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ なので,

3. 完全微分方程式

[判定法]

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x},\ N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ならば, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ なので,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (*)$$

が成り立つ.(u は二回連続的微分可能とする.)

3. 完全微分方程式

[判定法]

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ならば, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ なので,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (*)$$

が成り立つ.(u は二回連続的微分可能とする.) (*) が成り立つ場合, (3) は完全であるという.

3. 完全微分方程式

[判定法]

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ならば, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ なので,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (*)$$

が成り立つ.(u は二回連続的微分可能とする.) (∗) が成り立つ場合, (3) は完全であるという.

[u の求め方]

3. 完全微分方程式

[判定法]

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ならば, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ なので,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (*)$$

が成り立つ.(u は二回連続的微分可能とする.) (∗) が成り立つ場合, (3) は完全であるという.

[u の求め方]

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ の両辺を x で積分して

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y), \qquad (k(y) \text{ は } y \text{ のみの関数})$$

3. 完全微分方程式

[判定法]

$M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ ならば, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ なので,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (*)$$

が成り立つ.(u は二回連続的微分可能とする.) (*) が成り立つ場合, (3) は完全であるという.

[u の求め方]

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ の両辺を x で積分して

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + k(y), \qquad (k(y) \text{ は } y \text{ のみの関数})$$

これを y で偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M dx + \frac{dk}{dy} = N(x,y)$$

より $k(y)$ を求めると $u(x,y)$ が求まる.

3. 完全微分方程式

[判定法]

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ならば, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ なので,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (*)$$

が成り立つ.(u は二回連続的微分可能とする.) (∗) が成り立つ場合, (3) は完全であるという.

[u の求め方]

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ の両辺を x で積分して

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y), \qquad (k(y) \text{ は } y \text{ のみの関数})$$

これを y で偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M dx+\frac{dk}{dy}=N(x,y)$$

より $k(y)$ を求めると $u(x,y)$ が求まる.

[注]

$u(x,y)=\displaystyle\int N(x,y)dy+l(x)$ として, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ から $l(x)$ を求めても良い.

3. 完全微分方程式

[例題]

$$2x \sin 3y dx + 3x^2 \cos 3y dy = 0 \qquad \text{を解け}$$

3. 完全微分方程式

[例題]

$$2x \sin 3y dx + 3x^2 \cos 3y dy = 0 \qquad \text{を解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x \sin 3y) = 6x \cos 3y = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2 \cos 3y)$ よりこの方程式は完全である.

3. 完全微分方程式

[例題]

$$2x\sin 3y dx + 3x^2\cos 3y dy = 0 \qquad \text{を解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x\sin 3y) = 6x\cos 3y = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2\cos 3y)$ よりこの方程式は完全である． 従って

$$u(x,y) = \int 2x\sin 3y\, dx + k(y) = x^2\sin 3y + k(y).$$

3. 完全微分方程式

[例題]

$$2x\sin 3y dx + 3x^2\cos 3y dy = 0 \qquad \text{を解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x\sin 3y) = 6x\cos 3y = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2\cos 3y)$ よりこの方程式は完全である． 従って

$$u(x,y) = \int 2x\sin 3y\, dx + k(y) = x^2\sin 3y + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\sin 3y + k(y)\right) = 3x^2\cos 3y + \frac{dk}{dy} = 3x^2\cos 3y$$

3. 完全微分方程式

[例題]

$$2x\sin 3y dx + 3x^2\cos 3y dy = 0 \qquad \text{を解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x\sin 3y) = 6x\cos 3y = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2\cos 3y)$ よりこの方程式は完全である． 従って

$$u(x,y) = \int 2x\sin 3y\; dx + k(y) = x^2\sin 3y + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\sin 3y + k(y)\right) = 3x^2\cos 3y + \frac{dk}{dy} = 3x^2\cos 3y$$

よって $\dfrac{dk}{dy} = 0$

3. 完全微分方程式

[例題]

$$2x\sin 3y dx + 3x^2\cos 3y dy = 0 \qquad \text{を解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x\sin 3y) = 6x\cos 3y = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2\cos 3y)$ よりこの方程式は完全である．　従って

$$u(x,y) = \int 2x\sin 3y\,dx + k(y) = x^2\sin 3y + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\sin 3y + k(y)\right) = 3x^2\cos 3y + \frac{dk}{dy} = 3x^2\cos 3y$$

よって $\dfrac{dk}{dy} = 0$ 即ち $k = C'$ (定数)

3. 完全微分方程式

[例題]

$$2x \sin 3y dx + 3x^2 \cos 3y dy = 0 \qquad \text{を解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x \sin 3y) = 6x \cos 3y = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2 \cos 3y)$ よりこの方程式は完全である． 従って

$$u(x,y) = \int 2x \sin 3y \; dx + k(y) = x^2 \sin 3y + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \sin 3y + k(y)\right) = 3x^2 \cos 3y + \frac{dk}{dy} = 3x^2 \cos 3y$$

よって $\dfrac{dk}{dy} = 0$ 即ち $k = C'$ (定数) 従って一般解は

$$x^2 \sin 3y = C$$

3. 完全微分方程式

[練習問題１]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

3. 完全微分方程式

[練習問題 1]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答]

$u(x, y) = x^2 + y^2$ とおくと

3. 完全微分方程式

[練習問題 1]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答]

$u(x, y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$

3. 完全微分方程式

[練習問題１**]**

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答**]**

$u(x, y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$ よって求める微分方程式は

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad \text{（両辺を 2 割って } xdx + ydy = 0 \text{ でも同じ）}$$

3. 完全微分方程式

[練習問題１]

$$x^2 + y^2 = C \qquad を一般解とする完全微分方程式を導け.$$

[解答]

$u(x,y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$ よって求める微分方程式は

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad （両辺を 2 割って\ xdx + ydy = 0 でも同じ）$$

[練習問題２]

$$ydx + xdy = 0 \qquad が完全であることを示し、解け.$$

3. 完全微分方程式

[練習問題１]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答]

$u(x,y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$ よって求める微分方程式は

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad （両辺を 2 割って\ xdx + ydy = 0\ でも同じ）$$

[練習問題２]

$$ydx + xdy = 0 \qquad \text{が完全であることを示し、解け.}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(x)$ より, この方程式は完全である.

3. 完全微分方程式

[練習問題１]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答]

$u(x,y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$ よって求める微分方程式は

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad (\text{両辺を } 2 \text{ 割って } xdx + ydy = 0 \text{ でも同じ})$$

[練習問題２]

$$ydx + xdy = 0 \qquad \text{が完全であることを示し、解け.}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(x)$ より, この方程式は完全である. 従って

$$u(x,y) = \int y\,dx + k(y) = xy + k(y).$$

3. 完全微分方程式

[練習問題１]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答]

$u(x,y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$ よって求める微分方程式は

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad (\text{両辺を } 2 \text{ 割って } xdx + ydy = 0 \text{ でも同じ})$$

[練習問題２]

$$ydx + xdy = 0 \qquad \text{が完全であることを示し、解け.}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(x)$ より, この方程式は完全である. 従って

$$u(x,y) = \int y\,dx + k(y) = xy + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + k(y)) = x + \frac{dk}{dy} = x$$

3. 完全微分方程式

[練習問題１]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答]

$u(x,y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$ よって求める微分方程式は

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad \text{（両辺を 2 割って } xdx + ydy = 0 \text{ でも同じ）}$$

[練習問題２]

$$ydx + xdy = 0 \qquad \text{が完全であることを示し、解け.}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(x)$ より, この方程式は完全である.　従って

$$u(x,y) = \int y\,dx + k(y) = xy + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + k(y)) = x + \frac{dk}{dy} = x$$

よって $\dfrac{dk}{dy} = 0$

3. 完全微分方程式

[練習問題１]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答]

$u(x,y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$ よって求める微分方程式は

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad \text{（両辺を 2 割って } xdx + ydy = 0 \text{ でも同じ）}$$

[練習問題２]

$$ydx + xdy = 0 \qquad \text{が完全であることを示し、解け.}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(x)$ より, この方程式は完全である． 従って

$$u(x,y) = \int y\, dx + k(y) = xy + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + k(y)) = x + \frac{dk}{dy} = x$$

よって $\dfrac{dk}{dy} = 0$ 即ち $k = C'$ (定数)

3. 完全微分方程式

[練習問題１]

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{を一般解とする完全微分方程式を導け.}$$

[解答]

$u(x,y) = x^2 + y^2$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy$ よって求める微分方程式は

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad (\text{両辺を } 2 \text{ 割って } xdx + ydy = 0 \text{ でも同じ})$$

[練習問題２]

$$ydx + xdy = 0 \qquad \text{が完全であることを示し、解け.}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(x)$ より, この方程式は完全である. 従って

$$u(x,y) = \int y\, dx + k(y) = xy + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + k(y)) = x + \frac{dk}{dy} = x$$

よって $\dfrac{dk}{dy} = 0$ 即ち $k = C'$ (定数) 従って一般解は

$$xy = C$$

4. 積分因子

4. 積分因子

与えられた微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

は完全ではないが, 適当な関数 $F(x,y)$ を全体に掛けることにより,

$$F(x,y)P(x,y)dx + F(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

を完全に出来るものがある.

4. 積分因子

与えられた微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

は完全ではないが, 適当な関数 $F(x, y)$ を全体に掛けることにより,

$$F(x, y)P(x, y)dx + F(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

を完全に出来るものがある. この様な $F(x, y)$ を, この微分方程式の積分因子と呼ぶ.

4. 積分因子

与えられた微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

は完全ではないが, 適当な関数 $F(x,y)$ を全体に掛けることにより,

$$F(x,y)P(x,y)dx + F(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

を完全に出来るものがある. この様な $F(x,y)$ を, この微分方程式の積分因子と呼ぶ.

[注意]

積分因子は (存在する場合) 一つではない (実は無限箇).

4. 積分因子

与えられた微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

は完全ではないが, 適当な関数 $F(x,y)$ を全体に掛けることにより,

$$F(x,y)P(x,y)dx + F(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

を完全に出来るものがある. この様な $F(x,y)$ を, この微分方程式の積分因子と呼ぶ.

[注意]

積分因子は (存在する場合) 一つではない (実は無限箇).

[例題]

$F(x,y) = \frac{1}{x^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.

4. 積分因子

与えられた微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

は完全ではないが, 適当な関数 $F(x,y)$ を全体に掛けることにより,

$$F(x,y)P(x,y)dx + F(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

を完全に出来るものがある. この様な $F(x,y)$ を, この微分方程式の積分因子と呼ぶ.

[注意]

積分因子は (存在する場合) 一つではない (実は無限箇).

[例題]

$F(x,y) = \frac{1}{x^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.

[解答]

元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0$$

は完全であり,

4. 積分因子

与えられた微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

は完全ではないが, 適当な関数 $F(x,y)$ を全体に掛けることにより,

$$F(x,y)P(x,y)dx + F(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

を完全に出来るものがある. この様な $F(x,y)$ を, この微分方程式の積分因子と呼ぶ.

[注意]

積分因子は (存在する場合) 一つではない (実は無限箇).

[例題]

$F(x,y) = \frac{1}{x^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.

[解答]

元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0$$

は完全であり, その一般解は $\dfrac{y}{x} = C$ である.

4. 積分因子

[練習問題]

$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.

[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

について,

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.

[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

について,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ よりこの方程式は完全である.

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.

[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

について,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ よりこの方程式は完全である.

従って

$u(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\ dx + k(y)$

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.
[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

について,
$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ よりこの方程式は完全である.
従って
$u(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + k(y) \;= -\frac{1}{y}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx + k(y)$

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx+xdy=0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.
[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$$

について,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ よりこの方程式は完全である.
従って

$$u(x,y)=-\int\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+k(y)\ =-\frac{1}{y}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx+k(y)\ =-\tan^{-1}\frac{x}{y}+k(y).$$

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し，この方程式を解け.
[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

について,
$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ よりこの方程式は完全である.
従って

$$u(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + k(y) \;= -\frac{1}{y}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx + k(y) \;= -\tan^{-1}\frac{x}{y} + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\tan^{-1}\frac{x}{y} + k(y)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2} + \frac{dk}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx+xdy=0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.
[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$$

について,
$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ よりこの方程式は完全である.
従って

$$u(x,y)=-\int\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+k(y)\ =-\frac{1}{y}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx+k(y)\ =-\tan^{-1}\frac{x}{y}+k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\tan^{-1}\frac{x}{y}+k(y)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2}+\frac{dk}{dy}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

よって $\frac{dk}{dy}=0$

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx+xdy=0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.
[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$$

について,
$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ よりこの方程式は完全である.
従って
$$u(x,y)=-\int\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+k(y)\;=-\frac{1}{y}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx+k(y)\;=-\tan^{-1}\frac{x}{y}+k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\tan^{-1}\frac{x}{y}+k(y)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2}+\frac{dk}{dy}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

よって $\dfrac{dk}{dy}=0$ 即ち $k=C'$ (定数).

4. 積分因子

[練習問題]
$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

の積分因子であること示し, この方程式を解け.
[解答] 元の方程式に $F(x,y)$ を掛けた微分方程式

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

について,
$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ よりこの方程式は完全である.
従って

$$u(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + k(y) = -\frac{1}{y}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx + k(y) = -\tan^{-1}\frac{x}{y} + k(y).$$

これを y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\tan^{-1}\frac{x}{y} + k(y)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2} + \frac{dk}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

よって $\frac{dk}{dy} = 0$ 即ち $k = C'$ (定数). 従って一般解は $\tan^{-1}\frac{x}{y} = C$

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

(iii) $F = F(x+y)$, $F = F(x-y)$, 又は $F = F(xy)$

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

(iii) $F = F(x+y)$, $F = F(x-y)$, 又は $F = F(xy)$

[例題]

$$(xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0 \qquad \text{の積分因子を求め, 解け}$$

4. 積分因子

[積分因子の求め方]
一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

(iii) $F = F(x+y)$, $F = F(x-y)$, 又は $F = F(xy)$

[例題]

$$(xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0 \qquad \text{の積分因子を求め, 解け}$$

[解答]

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2) = x + 2y \neq 2x - y = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy)$$ より, この方程式は完全ではない.

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

(iii) $F = F(x+y)$, $F = F(x-y)$, 又は $F = F(xy)$

[例題]

$$(xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0 \qquad \text{の積分因子を求め, 解け}$$

[解答]

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2) = x + 2y \neq 2x - y = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy)$$ より, この方程式は完全ではない.

$F(x, y) = x^m y^n$ を積分因子とすると,

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

(iii) $F = F(x+y)$, $F = F(x-y)$, 又は $F = F(xy)$

[例題]

$$(xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0 \qquad \text{の積分因子を求め, 解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(xy + y^2) = x + 2y \neq 2x - y = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy)$ より, この方程式は完全ではない.

$F(x, y) = x^m y^n$ を積分因子とすると,

$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+2}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^{m+2}y^n - x^{m+1}y^{n+1})$ より

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

(iii) $F = F(x+y)$, $F = F(x-y)$, 又は $F = F(xy)$

[例題]

$$(xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0 \qquad \text{の積分因子を求め, 解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(xy + y^2) = x + 2y \neq 2x - y = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy)$ より, この方程式は完全ではない.

$F(x, y) = x^m y^n$ を積分因子とすると,

$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+2}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^{m+2}y^n - x^{m+1}y^{n+1})$ より $m = -2, n = -1$.

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

(iii) $F = F(x+y)$, $F = F(x-y)$, 又は $F = F(xy)$

[例題]

$$(xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0 \qquad \text{の積分因子を求め, 解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(xy + y^2) = x + 2y \neq 2x - y = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy)$ より, この方程式は完全ではない.

$F(x,y) = x^m y^n$ を積分因子とすると,

$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+2}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^{m+2}y^n - x^{m+1}y^{n+1})$ より $m = -2, n = -1$.

従って $F(x,y) = \frac{1}{x^2 y}$ が積分因子で

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

は完全になる.

4. 積分因子

[積分因子の求め方]

一般に積分因子を求めるのは難しいので, F が以下の様な形をしていると仮定して求める場合が多い：

(i) $F = F(x)$ (x のみの関数) 又は, $F = F(y)$ (y のみの関数)

(ii) $F = x^m y^n$

(iii) $F = F(x+y)$, $F = F(x-y)$, 又は $F = F(xy)$

[例題]

$$(xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0 \qquad \text{の積分因子を求め, 解け}$$

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(xy + y^2) = x + 2y \neq 2x - y = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy)$ より, この方程式は完全ではない.

$F(x, y) = x^m y^n$ を積分因子とすると,

$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+2}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^{m+2}y^n - x^{m+1}y^{n+1})$ より $m = -2, n = -1$.

従って $F(x, y) = \frac{1}{x^2 y}$ が積分因子で

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

は完全になる. この方程式を解いて, 一般解は $xy = Ce^{\frac{y}{x}}$ $(C \neq 0)$

4. 積分因子

[練習問題]

$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$ の積分因子を $F = F(x)$ の形で求め, 解け

4. 積分因子

[練習問題]

$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$ の積分因子を $F = F(x)$ の形で求め, 解け

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3 - 2y) = 12x^2y^2 - 2 \neq 9x^2y^2 - 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^3y^2 - x)$ より, この方程式は完全ではない.

4. 積分因子

[練習問題]

$$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$$ の積分因子を $F = F(x)$ の形で求め, 解け

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3 - 2y) = 12x^2y^2 - 2 \neq 9x^2y^2 - 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^3y^2 - x)$ より, この方程式は完全ではない.

$F = F(x)$ を積分因子とすると,

4. 積分因子

[練習問題]

$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$ の積分因子を $F = F(x)$ の形で求め, 解け

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3 - 2y) = 12x^2y^2 - 2 \neq 9x^2y^2 - 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^3y^2 - x)$ より, この方程式は完全ではない.

$F = F(x)$ を積分因子とすると,

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F(4x^2y^3 - 2y)\} = F(12x^2y^2 - 2) = F'(3x^3y^2 - x) + F(9x^2y^2 - 1) = \frac{\partial}{\partial x}\{F(3x^3y^2 - x)\}$$

より

4. 積分因子

[練習問題]

$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$ 　の積分因子を $F = F(x)$ の形で求め, 解け

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3 - 2y) = 12x^2y^2 - 2 \neq 9x^2y^2 - 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^3y^2 - x)$ より, この方程式は完全ではない.

$F = F(x)$ を積分因子とすると,

$\dfrac{\partial}{\partial y}\{F(4x^2y^3 - 2y)\} = F(12x^2y^2 - 2) = F'(3x^3y^2 - x) + F(9x^2y^2 - 1) = \dfrac{\partial}{\partial x}\{F(3x^3y^2 - x)\}$

より $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{1}{x}F.$

4. 積分因子

[練習問題]

$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$　　の積分因子を $F = F(x)$ の形で求め，解け

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3 - 2y) = 12x^2y^2 - 2 \neq 9x^2y^2 - 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^3y^2 - x)$ より，この方程式は完全ではない．

$F = F(x)$ を積分因子とすると，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{F(4x^2y^3-2y)\right\} = F(12x^2y^2-2) = F'(3x^3y^2-x) + F(9x^2y^2-1) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{F(3x^3y^2-x)\right\}$$

より $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{1}{x}F$．　よって $\displaystyle\int \frac{dF}{F} = \int \frac{dx}{x}$．

4. 積分因子

[練習問題]

$(4x^2y^3-2y)dx+(3x^3y^2-x)dy=0$ 　の積分因子を $F=F(x)$ の形で求め, 解け

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3-2y)=12x^2y^2-2\neq 9x^2y^2-1=\dfrac{\partial}{\partial x}(3x^3y^2-x)$ より, この方程式は完全ではない.

$F=F(x)$ を積分因子とすると,

$\dfrac{\partial}{\partial y}\{F(4x^2y^3-2y)\}=F(12x^2y^2-2)=F'(3x^3y^2-x)+F(9x^2y^2-1)=\dfrac{\partial}{\partial x}\{F(3x^3y^2-x)\}$

より $\dfrac{dF}{dx}=\dfrac{1}{x}F$. よって $\displaystyle\int\frac{dF}{F}=\int\frac{dx}{x}$.

従って $F(x)=x$ が積分因子で

$$(4x^3y^3-2xy)dx+(3x^4y^2-x^2)dy=0$$

は完全になる.

4. 積分因子

[練習問題]

$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$ の積分因子を $F = F(x)$ の形で求め, 解け

[解答]

$\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3 - 2y) = 12x^2y^2 - 2 \neq 9x^2y^2 - 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^3y^2 - x)$ より, この方程式は完全ではない.

$F = F(x)$ を積分因子とすると,

$\dfrac{\partial}{\partial y}\{F(4x^2y^3-2y)\} = F(12x^2y^2-2) = F'(3x^3y^2-x) + F(9x^2y^2-1) = \dfrac{\partial}{\partial x}\{F(3x^3y^2-x)\}$

より $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{1}{x}F$. よって $\displaystyle\int \frac{dF}{F} = \int \frac{dx}{x}$.

従って $F(x) = x$ が積分因子で

$$(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$$

は完全になる. この方程式を解いて, 一般解は

$$x^4y^3 - x^2y = C$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ.

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \qquad (*)$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ. $(*)$ の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (4) に代入すると

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (4) に代入すると

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\exp\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\exp\{-\int p(x)dx\}$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (4) に代入すると

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\}$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (4) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} \\ &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} = q(x)\end{aligned}$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (4) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\xcancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\xcancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} \\ &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} = q(x)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dC}{dx} = q(x)\exp\{\int p(x)dx\}$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (4) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} \\ &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} = q(x)\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{dC}{dx} = q(x)\exp\{\int p(x)dx\}$ 従って $C(x) = \int q(x)\exp\{\int p(x)dx\}dx$ となり,

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \qquad (*)$$

この方程式を, 方程式 (4) に対応する線形同次方程式とよぶ. (∗) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (4) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} \\ &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} = q(x)\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{dC}{dx} = q(x)\exp\{\int p(x)dx\}$ 従って $C(x) = \int q(x)\exp\{\int p(x)dx\}dx$ となり, (4) の解は

$$y = \left(\int q(x)\exp\{\int p(x)dx\}dx\right)\exp\{-\int p(x)dx\} \text{ となる.}$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

$y = \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ として (5) に代入すると

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

$y = \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ として (5) に代入すると $\qquad \dfrac{C'}{x^2+1} = 4x$ *i.e.* $C' = 4x(x^2+1)$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

$y = \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ として (5) に代入すると $\quad \dfrac{C'}{x^2+1} = 4x \quad$ *i.e.* $\quad C' = 4x(x^2+1)$

$$\therefore C(x) = x^4 + 2x^2 + c \qquad (c\ \text{は積分定数})$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

$y = \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ として (5) に代入すると $\qquad \dfrac{C'}{x^2+1} = 4x$ *i.e.* $C' = 4x(x^2+1)$

$$\therefore C(x) = x^4 + 2x^2 + c \qquad (c\ \text{は積分定数})$$

従って解は $\qquad y = \dfrac{x^4+2x^2+c}{x^2+1} \qquad (c$ は任意の定数).

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ．} \tag{6}$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{6}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{6}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{6}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

$y = C(x)x$ として (6) に代入すると

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{6}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

$y = C(x)x$ として (6) に代入すると $\quad C'x = x\cos x \quad i.e. \quad C' = \cos x$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{6}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

$y = C(x)x$ として (6) に代入すると $\qquad C'x = x\cos x \quad i.e. \quad C' = \cos x$

$$\therefore C(x) = \sin x + c \qquad (c\text{ は積分定数})$$

5. 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{6}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

$y = C(x)x$ として (6) に代入すると $\qquad C'x = x\cos x \quad i.e. \quad C' = \cos x$

$$\therefore C(x) = \sin x + c \qquad (c\text{ は積分定数})$$

従って解は $\qquad y = x\sin x + cx \qquad$ (c は任意の定数).

6. 一その他

6. 一その他

[変数分離形に帰着出来る微分方程式]

6. 一その他

[変数分離形に帰着出来る微分方程式]

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる．

6. 一その他

[変数分離形に帰着出来る微分方程式]

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる.

[練習問題] $y' = (x + y)^2$ の一般解を求めよ.

6. 一その他

[変数分離形に帰着出来る微分方程式]

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる.

[練習問題] $y' = (x + y)^2$ の一般解を求めよ.

[解答] $y = \tan(x + c) - x$ (c は任意の定数)

6. 一その他

[クレーローの方程式**]**

6. その他

[クレーローの方程式]

$$y = xy' + f(y')$$

の形の方程式はクレーローの方程式という.

6. その他

[クレーローの方程式]

$$y = xy' + f(y')$$

の形の方程式はクレーローの方程式という． この形の方程式は, $p = y'$ とおいて $y = xp + f(p)$ の両辺を微分して

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \qquad \text{つまり} \qquad (x + f'(p))p' = 0$$

となる．

6. その他

[クレーローの方程式]

$$y = xy' + f(y')$$

の形の方程式はクレーローの方程式という． この形の方程式は, $p = y'$ とおいて
$y = xp + f(p)$ の両辺を微分して

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \qquad \text{つまり} \qquad (x + f'(p))p' = 0$$

となる． $p' = 0$ の場合, $p = C$ (定数) より解は

6. 一その他

[クレーローの方程式]

$$y = xy' + f(y')$$

の形の方程式はクレーローの方程式という． この形の方程式は, $p = y'$ とおいて
$y = xp + f(p)$ の両辺を微分して

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \qquad \text{つまり} \qquad (x + f'(p))p' = 0$$

となる． $p' = 0$ の場合, $p = C$ (定数) より解は

$$y = Cx + f(C) \qquad \text{(一般解または 1 パラメタ解とよぶ)}$$

6. 一その他

[クレーローの方程式]

$$y = xy' + f(y')$$

の形の方程式はクレーローの方程式という．　この形の方程式は, $p = y'$ とおいて $y = xp + f(p)$ の両辺を微分して

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \qquad \text{つまり} \qquad (x + f'(p))p' = 0$$

となる．　$p' = 0$ の場合, $p = C$ (定数) より解は

$$y = Cx + f(C) \qquad\qquad \text{(一般解または 1 パラメタ解とよぶ)}$$

$x + f'(p) = 0$ の場合, 解は p を媒介変数として：

6. 一その他

[クレーローの方程式]

$$y = xy' + f(y')$$

の形の方程式はクレーローの方程式という． この形の方程式は, $p = y'$ とおいて
$y = xp + f(p)$ の両辺を微分して

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \qquad \text{つまり} \qquad (x + f'(p))p' = 0$$

となる． $p' = 0$ の場合, $p = C$ (定数) より解は

$$y = Cx + f(C) \qquad \text{(一般解または 1 パラメタ解とよぶ)}$$

$x + f'(p) = 0$ の場合, 解は p を媒介変数として：

$$x = -f'(p) \qquad y = xp + f(p) \qquad \text{(特異解とよぶ)}$$

6. 一その他

[クレーローの方程式]

$$y = xy' + f(y')$$

の形の方程式はクレーローの方程式という． この形の方程式は, $p = y'$ とおいて $y = xp + f(p)$ の両辺を微分して

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \qquad \text{つまり} \qquad (x + f'(p))p' = 0$$

となる． $p' = 0$ の場合, $p = C$ (定数) より解は

$$y = Cx + f(C) \qquad \text{(一般解または 1 パラメタ解とよぶ)}$$

$x + f'(p) = 0$ の場合, 解は p を媒介変数として：

$$x = -f'(p) \qquad y = xp + f(p) \qquad \text{(特異解とよぶ)}$$

[練習問題]

次の方程式を解け：$y = xy' + \dfrac{1}{2}(y')^2$

6. 一その他

[クレーローの方程式]

$$y = xy' + f(y')$$

の形の方程式はクレーローの方程式という． この形の方程式は, $p = y'$ とおいて
$y = xp + f(p)$ の両辺を微分して

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \qquad \text{つまり} \qquad (x + f'(p))p' = 0$$

となる． $p' = 0$ の場合, $p = C$ (定数) より解は

$$y = Cx + f(C) \qquad \text{(一般解または 1 パラメタ解とよぶ)}$$

$x + f'(p) = 0$ の場合, 解は p を媒介変数として：

$$x = -f'(p) \qquad y = xp + f(p) \qquad \text{(特異解とよぶ)}$$

[練習問題]

次の方程式を解け：$y = xy' + \dfrac{1}{2}(y')^2$

[解答]

$$y = Cx + \frac{1}{2}C^2 \qquad \text{及び} \qquad y = -\frac{1}{2}x^2$$

6. ーその他

[ベルヌーイの方程式**]**

6. 一その他

[ベルヌーイの方程式]

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

の形の方程式はベルヌーイの方程式という. この形の方程式は $u = y^{(1-\alpha)}$ とおき, 方程式全体に $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ を掛けた

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)p(x)y^{(1-\alpha)} = (1-\alpha)q(x)$$

を考えると, 一階線形微分方程式:

6. 一その他

[ベルヌーイの方程式]

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

の形の方程式はベルヌーイの方程式という. この形の方程式は $u = y^{(1-\alpha)}$ とおき, 方程式全体に $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ を掛けた

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)p(x)y^{(1-\alpha)} = (1-\alpha)q(x)$$

を考えると, 一階線形微分方程式:

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$$

に帰着出来る.

6. 一その他

[ベルヌーイの方程式]

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

の形の方程式はベルヌーイの方程式という. この形の方程式は $u = y^{(1-\alpha)}$ とおき, 方程式全体に $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ を掛けた

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)p(x)y^{(1-\alpha)} = (1-\alpha)q(x)$$

を考えると, 一階線形微分方程式:

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$$

に帰着出来る.

[練習問題] $\quad y' + y = \dfrac{4x(x+1)}{y} \quad$ の一般解を求めよ.

6. 一その他

[ベルヌーイの方程式]

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

の形の方程式はベルヌーイの方程式という. この形の方程式は $u = y^{(1-\alpha)}$ とおき, 方程式全体に $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ を掛けた

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)p(x)y^{(1-\alpha)} = (1-\alpha)q(x)$$

を考えると, 一階線形微分方程式:

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$$

に帰着出来る.

[練習問題] $\quad y' + y = \dfrac{4x(x+1)}{y}$ $\quad$ の一般解を求めよ.

[解答] $\quad y^2 = ce^{-2x} + 4x^2$ $\quad$ (c は任意の定数)

6. 一その他

[リッカチの方程式**]**

6. 一その他

[リッカチの方程式]

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

の形の方程式はリッカチの方程式という.

6. 一その他

[リッカチの方程式]

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

の形の方程式はリッカチの方程式という． この方程式の特殊解 $y = y_1(x)$ が一つ分かっているとき $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ とおいて方程式に代入すると

6. 一その他

[リッカチの方程式]

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

の形の方程式はリッカチの方程式という．　この方程式の特殊解 $y = y_1(x)$ が一つ分かっているとき $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ とおいて方程式に代入すると

$$y_1'(x) - \frac{u'}{u^2} = p(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right)^2 + q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right) + r(x)$$

6. 一その他

[リッカチの方程式]

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

の形の方程式はリッカチの方程式という． この方程式の特殊解 $y = y_1(x)$ が一つ分かっているとき $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ とおいて方程式に代入すると

$$y_1'(x) - \frac{u'}{u^2} = p(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right)^2 + q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right) + r(x)$$

両辺に u^2 を掛けて

$$y_1'(x)u^2 - u' = p(x)\left(y_1(x)u + 1\right)^2 + q(x)\left(y_1(x)u^2 + u\right) + r(x)u^2$$

6. 一その他

[リッカチの方程式]

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

の形の方程式はリッカチの方程式という． この方程式の特殊解 $y = y_1(x)$ が一つ分かっているとき $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ とおいて方程式に代入すると

$$y_1'(x) - \frac{u'}{u^2} = p(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right)^2 + q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right) + r(x)$$

両辺に u^2 を掛けて

$$y_1'(x)u^2 - u' = p(x)\left(y_1(x)u + 1\right)^2 + q(x)\left(y_1(x)u^2 + u\right) + r(x)u^2$$

これを整理すると u に関する一階線形常微分方程式を得る：

$$u' + \left(2p(x)y_1(x) + q(x)\right)u = -p(x)$$

6. その他

[リッカチの方程式]

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

の形の方程式はリッカチの方程式という．　この方程式の特殊解 $y = y_1(x)$ が一つ分かっているとき $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ とおいて方程式に代入すると

$$y_1'(x) - \frac{u'}{u^2} = p(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right)^2 + q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right) + r(x)$$

両辺に u^2 を掛けて

$$y_1'(x)u^2 - u' = p(x)\left(y_1(x)u + 1\right)^2 + q(x)\left(y_1(x)u^2 + u\right) + r(x)u^2$$

これを整理すると u に関する一階線形常微分方程式を得る：

$$u' + \left(2p(x)y_1(x) + q(x)\right)u = -p(x)$$

これを u について解いて $y = y_1(x) + \dfrac{1}{u(x)}$ が元の方程式の一般解である．

6. 一その他

[リッカチの方程式]

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

の形の方程式はリッカチの方程式という． この方程式の特殊解 $y = y_1(x)$ が一つ分かっているとき $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ とおいて方程式に代入すると

$$y_1'(x) - \frac{u'}{u^2} = p(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right)^2 + q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right) + r(x)$$

両辺に u^2 を掛けて

$$y_1'(x)u^2 - u' = p(x)\left(y_1(x)u + 1\right)^2 + q(x)\left(y_1(x)u^2 + u\right) + r(x)u^2$$

これを整理すると u に関する一階線形常微分方程式を得る：

$$u' + \left(2p(x)y_1(x) + q(x)\right)u = -p(x)$$

これを u について解いて $y = y_1(x) + \dfrac{1}{u(x)}$ が元の方程式の一般解である．

[練習問題] $y' = xy^2 - (2x-1)y + x - 1$ の一般解を求めよ．

6. 一その他

[リッカチの方程式]

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

の形の方程式はリッカチの方程式という． この方程式の特殊解 $y = y_1(x)$ が一つ分かっているとき $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ とおいて方程式に代入すると

$$y_1'(x) - \frac{u'}{u^2} = p(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right)^2 + q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u}\right) + r(x)$$

両辺に u^2 を掛けて

$$y_1'(x)u^2 - u' = p(x)\left(y_1(x)u + 1\right)^2 + q(x)\left(y_1(x)u^2 + u\right) + r(x)u^2$$

これを整理すると u に関する一階線形常微分方程式を得る：

$$u' + \left(2p(x)y_1(x) + q(x)\right)u = -p(x)$$

これを u について解いて $y = y_1(x) + \dfrac{1}{u(x)}$ が元の方程式の一般解である．

[練習問題] $y' = xy^2 - (2x-1)y + x - 1$ の一般解を求めよ．

[解答] $y = 1$ 及び $y = 1 + \dfrac{1}{1 - x + Ce^{-x}}$ (C は任意の定数)

6. 一その他

[一階に帰着出来る二階の微分方程式**]**

6. 一その他

[一階に帰着出来る二階の微分方程式]

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, y 含まず

$$F(x, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと方程式は p の一階の方程式になる.

6. 一その他

[一階に帰着出来る二階の微分方程式]

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, y 含まず

$$F(x, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと方程式は p の一階の方程式になる.

[練習問題] $xy'' + y' = 0$ を一階の方程式に帰着させて解け.

6. 一その他

[一階に帰着出来る二階の微分方程式]

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, y 含まず

$$F(x, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと方程式は p の一階の方程式になる.

[練習問題] $xy'' + y' = 0$ を一階の方程式に帰着させて解け.

[解答] $y = C_1 \log |x| + C_2$ (C_1, C_2 は任意の定数)

6. 一その他

[一階に帰着出来る二階の微分方程式]

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, y 含まず

$$F(x, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと方程式は p の一階の方程式になる.

[練習問題] $xy'' + y' = 0$ を一階の方程式に帰着させて解け.

[解答] $y = C_1 \log|x| + C_2$ (C_1, C_2 は任意の定数)

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, x 含まず

$$F(y, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$ となり, y を独立変数とする p についての一階の常微分方程式が得られる.

6. 一その他

[一階に帰着出来る二階の微分方程式]

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, y 含まず

$$F(x, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと方程式は p の一階の方程式になる.

[練習問題] $xy'' + y' = 0$ を一階の方程式に帰着させて解け.

[解答] $y = C_1 \log|x| + C_2$ (C_1, C_2 は任意の定数)

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, x 含まず

$$F(y, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$ となり, y を独立変数とする p についての一階の常微分方程式が得られる.

[練習問題] $y'' + (y')^2 = 0$ を一階の方程式に帰着させて解け.

6. 一その他

[一階に帰着出来る二階の微分方程式]

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, y 含まず

$$F(x, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと方程式は p の一階の方程式になる.

[練習問題] $xy'' + y' = 0$ を一階の方程式に帰着させて解け.

[解答] $y = C_1 \log|x| + C_2$ (C_1, C_2 は任意の定数)

独立変数 x 従属変数 y の二階の常微分方程式が, x 含まず

$$F(y, y', y'') = 0$$

の形をしているとき, $y' = p$ とおくと $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$ となり, y を独立変数とする p についての一階の常微分方程式が得られる.

[練習問題] $y'' + (y')^2 = 0$ を一階の方程式に帰着させて解け.

[解答] $y = \log(C_1 x + C_2)$ (C_1, C_2 は任意の定数)