I. 常微分方程式

1. 初等積分法

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式の解は

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

で与えられる.

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式の解は

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

で与えられる.
$\because \quad G(y) = \int g(y)dy \quad$ ($g(y)$ の原始関数) とおき, $y = y(x)$ を (1) の解とする.

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式の解は

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

で与えられる.
$\because \quad G(y) = \int g(y)dy$ ($g(y)$ の原始関数) とおき, $y = y(x)$ を (1) の解とする.
このとき,

$$\frac{d}{dx}\{G(y(x))\} = \frac{dG}{dy}\frac{dy}{dx} = g(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(x)$$

となる.

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (\text{形式的には} \quad g(y)dy = f(x)dx) \tag{1}$$

の形の常微分方程式を変数分離形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式の解は

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

で与えられる.
$\because \quad G(y) = \int g(y)dy \quad$ ($g(y)$ の原始関数) とおき, $y = y(x)$ を (1) の解とする.
このとき,

$$\frac{d}{dx}\{G(y(x))\} = \frac{dG}{dy}\frac{dy}{dx} = g(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(x)$$

となる. よって両辺を x で積分して

$$G(y) = \int f(x)dx \qquad \text{つまり} \qquad \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

が解である.

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore \ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore \ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $|y| = e^c x^2 e^x$ なので, $\pm e^c = C$ とおいて

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore \ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $|y| = e^c x^2 e^x$ なので, $\pm e^c = C$ とおいて

$$y = Cx^2 e^x \qquad (C \neq 0 \text{ は定数})$$

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore \ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $|y| = e^c x^2 e^x$ なので, $\pm e^c = C$ とおいて

$$y = Cx^2 e^x \qquad (C \neq 0 \ \text{ は定数})$$

また $y \equiv 0$ (y は恒等的に 0) も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[例題]

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] 解は

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\therefore \ \log|y| = x + 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $|y| = e^c x^2 e^x$ なので, $\pm e^c = C$ とおいて

$$y = Cx^2 e^x \qquad (C \neq 0 \ \text{ は定数})$$

また $y \equiv 0$ (y は恒等的に 0) も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

$$y = Cx^2 e^x \qquad (C \ \text{ は任意の定数})$$

[練習問題]

$$x^2y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2 y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は形式的に $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) dx$ と書けるので変数分離形である.

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は形式的に $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)dx$ と書けるので変数分離形である.

従って, 両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ より $y = Cxe^{\frac{1}{x}} \quad (C \neq 0)$

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2 y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は形式的に $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) dx$ と書けるので変数分離形である.

従って, 両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ より $y = Cxe^{\frac{1}{x}}$ $\quad (C \neq 0)$

また $y \equiv 0$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

1. 初等積分法— 1.1 変数分離形 (単に両辺を積分するだけ)

[練習問題]

$$x^2y' = (x-1)y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は形式的に $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)dx$ と書けるので変数分離形である.

従って, 両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ より $y = Cxe^{\frac{1}{x}}$ $(C \neq 0)$

また $y \equiv 0$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

$$y = Cxe^{\frac{1}{x}} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおくと,

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ なので,

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ なので, 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

となり u についての変数分離形となる.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

の形の常微分方程式を同次形の微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ なので, 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

となり u についての変数分離形となる.
これを $u = u(x)$ について解き

$$y(x) = xu(x)$$

として解が得られる.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題**]**

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1 + u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ．}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である．

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて， $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる．これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2 - 1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore \ \log|u^2 - 1| = -\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ \log|u^2-1| = -\log|x| + c \qquad (c\ \text{は積分定数})$$

すなわち $(u^2-1)x = C \quad (C \neq 0$ は定数).

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて， $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1 + u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる．これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2 - 1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore \ \log|u^2 - 1| = -\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2 - 1)x = C$ $(C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて $y^2 - x^2 = Cx$.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ \log|u^2-1| = -\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-1)x = C$ $(C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて $y^2 - x^2 = Cx$.
また $y = \pm x$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[例題]

$$2xyy' = x^2 + y^2 \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.
$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2xu}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{2u}{u^2-1}du = -\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ \log|u^2-1| = -\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-1)x = C$ ($C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて $y^2 - x^2 = Cx$.
また $y = \pm x$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

$$y^2 - x^2 = Cx \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x - 2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u=\frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int\frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c\text{ は積分定数})$$

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2 - u + 1)x^2 = C \quad (C \neq 0$ は定数).

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int\frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-u+1)x^2 = C$ ($C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて
$x^2 - xy + y^2 = C$.

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int\frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-u+1)x^2 = C$ ($C \neq 0$ は定数). $u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて
$x^2 - xy + y^2 = C$. また $x^2 - xy + y^2 = 0$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

1. 初等積分法— 1.2 同次形 ($u=\frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着)

[練習問題]

$$(x-2y)y' = 2x - y \qquad \text{の一般解を求めよ.}$$

[解答] この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{2-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので同次形である.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ すなわち $y(x) = xu(x)$ とおいて, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ より 方程式は

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2-u}{1-2u} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{du}{dx} = 2\frac{1-u+u^2}{x(1-2u)}$$

となり u についての変数分離形となる. これを解くと

$$\int \frac{1-2u}{1-u+u^2}du = 2\int \frac{dx}{x} \qquad \therefore\ -\log|1-u+u^2| = 2\log|x| + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

すなわち $(u^2-u+1)x^2 = C$ $\quad$ ($C \neq 0$ は定数). $\quad u(x) = \frac{y}{x}$ とおいて
$x^2 - xy + y^2 = C$. また $x^2 - xy + y^2 = 0$ も解なので, $C = 0$ も含めて最終的な答えは

$$x^2 - xy + y^2 = C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ.

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (3) に代入すると

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \qquad (*)$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ. (*) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C\ \text{は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (3) に代入すると

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\exp\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\exp\{-\int p(x)dx\}$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.

この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (3) に代入すると

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\}$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (3) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} \\ &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} = q(x)\end{aligned}$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (3) に代入すると

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\}$$

$$= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} = q(x)$$

$$\therefore \frac{dC}{dx} = q(x)\exp\{\int p(x)dx\}$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C\ \text{は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (3) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} \\ &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} = q(x)\end{aligned}$$

$\therefore\ \dfrac{dC}{dx} = q(x)\exp\{\int p(x)dx\}$ 従って $C(x) = \int q(x)\exp\{\int p(x)dx\}dx$ となり,

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

x を独立変数とし, $y = y(x)$ を未知関数とするとき

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

の形の常微分方程式を一階線形微分方程式とよぶ.
この形の微分方程式は, 先ず次の変数分離形の方程式を解く：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{$*$}$$

この方程式を, 方程式 (3) に対応する線形同次方程式とよぶ. ($*$) の解は

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \qquad \text{より} \qquad y = C\exp\{-\int p(x)dx\} \qquad (C \text{ は定数})$$

ここで, $C = C(x)$ と定数が変化すると考えて (3) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} - Cp(x)\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\} + p(x)C\cancel{\exp}\{-\int p(x)dx\}\\ &= \frac{dC}{dx}\exp\{-\int p(x)dx\} = q(x)\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{dC}{dx} = q(x)\exp\{\int p(x)dx\}$ 従って $C(x) = \int q(x)\exp\{\int p(x)dx\}dx$ となり, (3) の解は

$$y = \left(\int q(x)\exp\{\int p(x)dx\}dx\right)\exp\{-\int p(x)dx\} \text{ となる.}$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{4}$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{4}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{4}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{4}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

$y = \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ として (4) に代入すると

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{4}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

$y = \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ として (4) に代入すると $\qquad \dfrac{C'}{x^2+1} = 4x \quad$ *i.e.* $\quad C' = 4x(x^2+1)$

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{4}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

$y = \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ として (4) に代入すると $\quad \dfrac{C'}{x^2+1} = 4x \quad$ *i.e.* $\quad C' = 4x(x^2+1)$

$$\therefore C(x) = x^4 + 2x^2 + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[例題]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{4}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$$

この解は $\log|y| = -\log(x^2+1) + c$ すなわち $y = \dfrac{C}{x^2+1}$

$y = \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ として (4) に代入すると $\qquad \dfrac{C'}{x^2+1} = 4x$ *i.e.* $C' = 4x(x^2+1)$

$$\therefore C(x) = x^4 + 2x^2 + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

従って解は $\qquad y = \dfrac{x^4+2x^2+c}{x^2+1} \qquad$ (c は任意の定数).

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ．} \tag{5}$$

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

$y = C(x)x$ として (5) に代入すると

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ．} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

$y = C(x)x$ として (5) に代入すると $\qquad C'x = x\cos x \quad i.e. \quad C' = \cos x$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

$y = C(x)x$ として (5) に代入すると　$C'x = x\cos x \quad i.e. \quad C' = \cos x$

$$\therefore C(x) = \sin x + c \qquad (c\text{ は積分定数})$$

1. 初等積分法— 1.3 一階線形微分方程式 (定数変化法)

[練習問題]

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \qquad \text{の一般解を求めよ.} \tag{5}$$

[解答] 対応する線形同次方程式は

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

この解は $\log|y| = \log|x| + c$ すなわち $y = Cx$

$y = C(x)x$ として (5) に代入すると $\qquad C'x = x\cos x \quad i.e. \quad C' = \cos x$

$$\therefore C(x) = \sin x + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$

従って解は $\qquad y = x\sin x + cx \qquad$ (c は任意の定数).

1. 初等積分法— 1.4 一その他

1. 初等積分法— 1.4 一その他

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる.

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる.

[練習問題] $y' = (x + y)^2$ の一般解を求めよ.

1. 初等積分法— 1.4 一その他

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる.

[練習問題] $y' = (x + y)^2$ の一般解を求めよ.

[解答] $y = \tan(x + c) - x$ (c は任意の定数)

1. 初等積分法— 1.4 一その他

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる.

[練習問題] $\quad y' = (x + y)^2 \quad$ の一般解を求めよ.

[解答] $\quad y = \tan(x + c) - x \quad$ (c は任意の定数)

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

の形の方程式はベルヌーイの方程式という. この形の方程式は $u = y^{(1-\alpha)}$ とおき, 方程式全体に $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ を掛けた

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}y' + (1 - \alpha)p(x)y^{(1-\alpha)} = (1 - \alpha)q(x)$$

を考えると, 一階線形微分方程式に帰着できる.

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる.

[練習問題] $\quad y' = (x + y)^2 \quad$ の一般解を求めよ.

[解答] $\quad y = \tan(x + c) - x \quad$ (c は任意の定数)

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

の形の方程式はベルヌーイの方程式という. この形の方程式は $u = y^{(1-\alpha)}$ とおき, 方程式全体に $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ を掛けた

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}y' + (1 - \alpha)p(x)y^{(1-\alpha)} = (1 - \alpha)q(x)$$

を考えると, 一階線形微分方程式に帰着できる.

[練習問題] $\quad y' + y = \dfrac{4x(x + 1)}{y} \quad$ の一般解を求めよ.

1. 初等積分法— 1.4 —その他

$$y' = f(ax + by + c)$$

の形の方程式は $u = ax + by + c$ とおくと変数分離形に帰着できる.

[練習問題] $y' = (x + y)^2$ の一般解を求めよ.

[解答] $y = \tan(x + c) - x$ (c は任意の定数)

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

の形の方程式はベルヌーイの方程式という. この形の方程式は $u = y^{(1-\alpha)}$ とおき, 方程式全体に $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ を掛けた

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}y' + (1 - \alpha)p(x)y^{(1-\alpha)} = (1 - \alpha)q(x)$$

を考えると, 一階線形微分方程式に帰着できる.

[練習問題] $y' + y = \dfrac{4x(x + 1)}{y}$ の一般解を求めよ.

[解答] $y^2 = ce^{-2x} + 4x^2$ (c は任意の定数)

2. 定数係数線形常微分方程式

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,
$e^{i\cdot 0}$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$e^{i\cdot 0} \ = \cos 0 + i\sin 0$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$e^{i\cdot 0} \ = \cos 0 + i\sin 0 \ = 1$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,
$e^{i\cdot 0} \ = \cos 0 + i\sin 0 \ = 1 \ = e^0$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$e^{i\cdot 0} \ = \cos 0 + i\sin 0 \ = 1 \ = e^0$

$e^{-i\theta}$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} \ = \cos 0 + i\sin 0 \ = 1 \ = e^0$$

$$e^{-i\theta} \ = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \end{aligned}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{\theta}} \end{aligned}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \end{aligned}$$

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)
\end{aligned}
$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2) \end{aligned}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}
$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}
\end{aligned}
$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{\theta}} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy}$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{\theta}} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると,

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} \;= \cos 0 + i\sin 0 \;= 1 \;= e^0$$

$$\begin{aligned}
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \;= \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} \;= \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \;= \frac{1}{e^{\theta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \;= e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} \;= e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると,
複素数 z についても指数公式が成り立つ.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると, 複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$$i.e.\quad e^0 = 1,\quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^{0} \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{\theta}} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^{z} = e^{x}\cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$ と定めると,
複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$$i.e.\quad e^{0} = 1,\quad e^{-z} = \frac{1}{e^{z}},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

さらに, x を実数とし $\lambda = s + it$ (s, t は実数) とすると

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{\theta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると,

複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$i.e.\quad e^0 = 1,\quad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

さらに, x を実数とし $\lambda = s + it$ (s, t は実数) とすると

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると,
複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$$i.e.\quad e^0 = 1,\quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

さらに, x を実数とし $\lambda = s + it$ (s, t は実数) とすると

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}\left\{e^{sx+itx}\right\}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると,
複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$i.e.\quad e^0 = 1,\quad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

さらに, x を実数とし $\lambda = s + it$ (s, t は実数) とすると

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}\left\{e^{sx+itx}\right\} = \frac{d}{dx}\{e^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx)\}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると,
複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$$
i.e.\quad e^0 = 1,\quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}
$$

さらに, x を実数とし $\lambda = s + it$ (s, t は実数) とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{\lambda x} &= \frac{d}{dx}\left\{e^{sx+itx}\right\} = \frac{d}{dx}\{e^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx)\} \\
&= se^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx) + e^{sx}\cdot(-t\sin tx + it\cos tx)
\end{aligned}
$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると, 複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$$
i.e.\quad e^0 = 1,\quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}
$$

さらに, x を実数とし $\lambda = s + it$ (s, t は実数) とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{\lambda x} &= \frac{d}{dx}\left\{e^{sx+itx}\right\} = \frac{d}{dx}\{e^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx)\} \\
&= se^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx) + e^{sx}\cdot(-t\sin tx + it\cos tx) \\
&= (s+it)e^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx)
\end{aligned}
$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{\theta}} \\
e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると, 複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$$
i.e.\quad e^0 = 1,\quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}
$$

さらに, x を実数とし $\lambda = s + it$ (s, t は実数) とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{\lambda x} &= \frac{d}{dx}\left\{e^{sx+itx}\right\} = \frac{d}{dx}\{e^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx)\} \\
&= se^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx) + e^{sx}\cdot(-t\sin tx + it\cos tx) \\
&= (s+it)e^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx) \\
&= \lambda e^{\lambda x}
\end{aligned}
$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.1 準備 (オイラーの公式)

実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定義する. これをオイラーの公式とよぶ. このとき,

$$\begin{aligned}
e^{i\cdot 0} &= \cos 0 + i\sin 0 \;= 1 \;= e^0 \\
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \;= \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^\theta} \\
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \;= e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

となり, 指数公式が成り立つ.

これより $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} \;= e^x(\cos y + i\sin y)$ と定めると, 複素数 z についても指数公式が成り立つ.

$$i.e.\quad e^0 = 1,\quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

さらに, x を実数とし $\lambda = s + it$ (s, t は実数) とすると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{\lambda x} &= \frac{d}{dx}\left\{e^{sx+itx}\right\} = \frac{d}{dx}\{e^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx)\} \\
&= se^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx) + e^{sx}\cdot(-t\sin tx + it\cos tx) \\
&= (s+it)e^{sx}\cdot(\cos tx + i\sin tx) \\
&= \lambda e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

となり, 微分公式も成り立つ.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

次の形の微分方程式を定数係数線形常微分方程式とよぶ：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{6}$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

次の形の微分方程式を定数係数線形常微分方程式とよぶ：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{6}$$

特に $Q(x) \equiv 0$ (常に 0) の場合, すなわち

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

を同次 (斉次) 方程式とよぶ.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

次の形の微分方程式を定数係数線形常微分方程式とよぶ：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{6}$$

特に $Q(x) \equiv 0$ (常に 0) の場合, すなわち

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

を同次 (斉次) 方程式とよぶ.

定数係数線形常微分方程式 (6) について, 次の λ についての多項式を特性多項式とよぶ：

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

次の形の微分方程式を定数係数線形常微分方程式とよぶ：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{6}$$

特に $Q(x) \equiv 0$ (常に 0) の場合, すなわち

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

を同次 (斉次) 方程式とよぶ.

定数係数線形常微分方程式 (6) について, 次の λ についての多項式を特性多項式とよぶ：

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

また, 方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式, その根を特性根とよぶ.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

次の形の微分方程式を定数係数線形常微分方程式とよぶ：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{6}$$

特に $Q(x) \equiv 0$ (常に 0) の場合, すなわち

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

を同次 (斉次) 方程式とよぶ.

定数係数線形常微分方程式 (6) について, 次の λ についての多項式を特性多項式とよぶ：

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

また, 方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式, その根を特性根とよぶ.

以下では記号を簡単にする為に $\frac{d}{dx}$ を D と書き, 1 を D^0, $\frac{d^n}{dx^n}$ を D^n と書くことにする.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

次の形の微分方程式を定数係数線形常微分方程式とよぶ：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数}) \tag{6}$$

特に $Q(x) \equiv 0$ (常に 0) の場合, すなわち

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

を同次 (斉次) 方程式とよぶ.
定数係数線形常微分方程式 (6) について, 次の λ についての多項式を特性多項式とよぶ：

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

また, 方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式, その根を特性根とよぶ.
以下では記号を簡単にする為に $\frac{d}{dx}$ を D と書き, 1 を D^0, $\frac{d^n}{dx^n}$ を D^n と書くことにする.
この記号の下で,

$$L := P(D) = D^n + a_1 D^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

を微分作用素とよぶ.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

次の形の微分方程式を定数係数線形常微分方程式とよぶ：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=Q(x) \qquad (a_1,\dots,a_n \text{ は実定数 }) \tag{6}$$

特に $Q(x)\equiv 0$ (常に 0) の場合, すなわち

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

を同次 (斉次) 方程式とよぶ.
定数係数線形常微分方程式 (6) について, 次の λ についての多項式を特性多項式とよぶ：

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

また, 方程式 $P(\lambda)=0$ を特性方程式, その根を特性根とよぶ.
以下では記号を簡単にする為に $\frac{d}{dx}$ を D と書き, 1 を D^0, $\frac{d^n}{dx^n}$ を D^n と書くことにする.
この記号の下で,

$$L:=P(D)=D^n+a_1D^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$$

を微分作用素とよぶ.
(6) は $Ly=Q(x)$ または $P(D)y=Q(x)$ と書かれる.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

次の形の微分方程式を定数係数線形常微分方程式とよぶ：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{6}$$

特に $Q(x) \equiv 0$ (常に 0) の場合, すなわち

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

を同次 (斉次) 方程式とよぶ.
定数係数線形常微分方程式 (6) について, 次の λ についての多項式を特性多項式とよぶ：

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

また, 方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式, その根を特性根とよぶ.
以下では記号を簡単にする為に $\frac{d}{dx}$ を D と書き, 1 を D^0, $\frac{d^n}{dx^n}$ を D^n と書くことにする.
この記号の下で,

$$L := P(D) = D^n + a_1 D^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

を微分作用素とよぶ.
(6) は $Ly = Q(x)$ または $P(D)y = Q(x)$ と書かれる.
特に同次方程式は $Ly = 0$ または $P(D)y = 0$ と書かれる.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解**]**

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解**]**

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる.

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる．$\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる． $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x} = C \qquad \therefore y = Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

[同次方程式の解]

(i) $n=1$ のとき：$y'-\lambda y=0$

$y'-\lambda y=0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ と変形できる． $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x}=C \qquad \therefore y=Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(i) $n=1$ のとき：$y'-\lambda y=0$

$y'-\lambda y=0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ と変形できる．$\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x}=C \qquad \therefore y=Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x} \frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x} \dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる．$\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x} = C \qquad \therefore y = Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D - \alpha)(D - \beta)y$$

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる． $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x} = C \qquad \therefore y = Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D - \alpha)(D - \beta)y \ = (D - \alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}$$

[同次方程式の解]

(i) $n=1$ のとき：$y'-\lambda y=0$

$y'-\lambda y=0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ と変形できる. $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x}=C \qquad \therefore y=Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\beta)y \ =(D-\alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる．$\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x} = C \qquad \therefore\ y = Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = (D-\alpha)(D-\beta)y \ &= (D-\alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる. $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x} = C \qquad \therefore y = Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = (D-\alpha)(D-\beta)y &= (D-\alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0$$

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる． $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x} = C \qquad \therefore y = Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = (D-\alpha)(D-\beta)y &= (D-\alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0 \quad \text{従って} \quad e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right) = C_1'$$

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる． $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x} = C \qquad \therefore y = Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = (D-\alpha)(D-\beta)y &= (D-\alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0$ 従って $e^{(\beta-\alpha)x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right) = C_1'$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right) = C_1' e^{(\alpha-\beta)x}$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ と変形できる． $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x} = C \qquad \therefore y = Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$\begin{aligned}
y'' + ay' + by = (D-\alpha)(D-\beta)y &= (D-\alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} \\
&= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] \\
&= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0
\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} = 0$ 従って $e^{(\beta-\alpha)x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right) = C_1'$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right) = C_1' e^{(\alpha-\beta)x}$ 従って $ye^{-\beta x} = \dfrac{C_1'}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x} + C_2.$

[同次方程式の解]

(i) $n=1$ のとき：$y'-\lambda y=0$

$y'-\lambda y=0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ と変形できる．$\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x}=C \qquad \therefore y=Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$\begin{aligned}
y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\beta)y \ &= (D-\alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}\\
&= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]\\
&= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}=0
\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}=0$ 従って $e^{(\beta-\alpha)x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)=C_1'$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)=C_1'e^{(\alpha-\beta)x}$ 従って $ye^{-\beta x}=\dfrac{C_1'}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x}+C_2.$

よって $\dfrac{C_1'}{\alpha-\beta}=C_1$ とおいて, 一般解は

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(i) $n=1$ のとき：$y'-\lambda y=0$

$y'-\lambda y=0$ は $e^{\lambda x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ と変形できる. $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda x}=C \qquad \therefore y=Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$\begin{aligned} y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\beta)y &= (D-\alpha)\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\beta x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] \\ &= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}=0 \end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)\right\}=0$ 従って $e^{(\beta-\alpha)x}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)=C_1'$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\beta x}\right)=C_1'e^{(\alpha-\beta)x}$ 従って $ye^{-\beta x}=\dfrac{C_1'}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x}+C_2.$

よって $\dfrac{C_1'}{\alpha-\beta}=C_1$ とおいて, 一般解は $\quad y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x} \quad (C_1, C_2$ は任意の定数)

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x} \frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D - \alpha)^2 y$$

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D - \alpha)^2 y \ = (D - \alpha) \left\{ e^{\alpha x} \frac{d}{dx} \left(ye^{-\alpha x} \right) \right\}$$

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D - \alpha)^2 y \; = (D - \alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 $\left(\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})\right)$

[同次方程式の解]

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重根 α を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)^2y\ =(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]=e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$$

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D-\alpha)^2 y \ = (D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] = e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D - \alpha)^2 y \;= (D - \alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] = e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0 \text{ 従って } \frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right) = C_1$$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重根 α を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)^2y \ =(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]=e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$$

$\therefore\ \frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$ 従って $\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)=C_1$ よって $ye^{-\alpha x}=C_1x+C_2$

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D-\alpha)^2 y \ = (D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] = e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0$$

$\therefore\ \dfrac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0$ 従って $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right) = C_1$ よって $ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2$

従って, 一般解は $\quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \quad$ (C_1, C_2 は任意の定数)

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D-\alpha)^2 y \ = (D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] = e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0 \ \text{従って} \ \frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right) = C_1 \ \text{よって} \ ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2$$

従って, 一般解は　$y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x}$　(C_1, C_2 は任意の定数)

(c) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重根 α を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)^2 y\ =(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]=e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$$

$\therefore\ \dfrac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$ 従って $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)=C_1$ よって $ye^{-\alpha x}=C_1x+C_2$

従って, 一般解は $y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$ (C_1,C_2 は任意の定数)

(c) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が共役な複素数根 $\alpha,\bar{\alpha}$ を持つとき：

$y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\bar{\alpha})y$

[同次方程式の解]

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (D-\alpha)^2 y \ = (D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$
$$= e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right] = e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0$$

$\therefore \dfrac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right) = 0$ 従って $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right) = C_1$ よって $ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2$

従って, 一般解は $\quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \quad$ (C_1, C_2 は任意の定数)

(c) 特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$y'' + ay' + by = (D-\alpha)(D-\bar{\alpha})y$

(a) と同様にして, $y = C_1 e^{\alpha x} + C_1 e^{\bar{\alpha} x} \quad$ (C_1, C_2 は任意の定数)

[同次方程式の解]

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重根 α を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)^2y \ =(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]=e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$$

$\therefore\ \dfrac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$ 従って $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)=C_1$ よって $ye^{-\alpha x}=C_1x+C_2$

従って, 一般解は $y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$ (C_1, C_2 は任意の定数)

(c) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\bar{\alpha})y$

(a) と同様にして, $y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}$ (C_1, C_2 は任意の定数)

ここで $\alpha=r+i\omega$ (r, ω は実数) とすると,

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[同次方程式の解]

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重根 α を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)^2y \;=(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]=e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$$

$$\therefore\ \frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0 \ \text{従って}\ \frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)=C_1 \ \text{よって}\ ye^{-\alpha x}=C_1x+C_2$$

従って, 一般解は　$y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$　(C_1, C_2 は任意の定数)

(c) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が共役な複素数根 $\alpha,\bar{\alpha}$ を持つとき：

$y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\bar{\alpha})y$

(a) と同様にして, $y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}$　(C_1, C_2 は任意の定数)

ここで $\alpha=r+i\omega$　(r,ω は実数) とすると,

$y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}=C_1e^{rx}(\cos\omega x+i\sin\omega x)+C_2e^{rx}(\cos\omega x-i\sin\omega x)$

[同次方程式の解]

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重根 α を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)^2y\ =(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$
$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]=e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$$

$\therefore\ \frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$ 従って $\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)=C_1$ よって $ye^{-\alpha x}=C_1x+C_2$

従って, 一般解は　$y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$　(C_1, C_2 は任意の定数)

(c) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が共役な複素数根 $\alpha,\bar{\alpha}$ を持つとき：

$y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\bar{\alpha})y$

(a) と同様にして, $y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}$　(C_1, C_2 は任意の定数)

ここで $\alpha=r+i\omega$　(r,ω は実数) とすると,

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}=C_1e^{rx}(\cos\omega x+i\sin\omega x)+C_2e^{rx}(\cos\omega x-i\sin\omega x)$$
$$=(C_1+C_2)e^{rx}\cos\omega x+i(C_1-C_2)e^{rx}\sin\omega x$$

[同次方程式の解]

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重根 α を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)^2y \ =(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]=e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$$

$$\therefore \ \frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0 \ \text{従って} \ \frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)=C_1 \ \text{よって} \ ye^{-\alpha x}=C_1x+C_2$$

従って, 一般解は　$y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$　(C_1, C_2 は任意の定数)

(c) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\bar{\alpha})y$

(a) と同様にして, $y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}$　(C_1, C_2 は任意の定数)

ここで $\alpha=r+i\omega$　(r, ω は実数) とすると,

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}=C_1e^{rx}(\cos\omega x+i\sin\omega x)+C_2e^{rx}(\cos\omega x-i\sin\omega x)$$

$$=(C_1+C_2)e^{rx}\cos\omega x+i(C_1-C_2)e^{rx}\sin\omega x$$

よって $C_1+C_2=A_1$, $i(C_1+C_2)=A_2$ とおいて, 一般解は

[同次方程式の解]

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(b) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重根 α を持つとき：

$$y''+ay'+by=(D-\alpha)^2y\ =(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left[\left\{e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)\right\}e^{-\alpha x}\right]=e^{\alpha x}\frac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$$

$\therefore\ \dfrac{d^2}{dx^2}\left(ye^{-\alpha x}\right)=0$ 従って $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\alpha x}\right)=C_1$ よって $ye^{-\alpha x}=C_1x+C_2$

従って, 一般解は $y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$ (C_1,C_2 は任意の定数)

(c) 特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$ が共役な複素数根 $\alpha,\bar{\alpha}$ を持つとき：

$y''+ay'+by=(D-\alpha)(D-\bar{\alpha})y$

(a) と同様にして, $y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}$ (C_1,C_2 は任意の定数)

ここで $\alpha=r+i\omega$ (r,ω は実数) とすると,

$y=C_1e^{\alpha x}+C_1e^{\bar{\alpha}x}=C_1e^{rx}(\cos\omega x+i\sin\omega x)+C_2e^{rx}(\cos\omega x-i\sin\omega x)$

$\quad=(C_1+C_2)e^{rx}\cos\omega x+i(C_1-C_2)e^{rx}\sin\omega x$

よって $C_1+C_2=A_1,\ i(C_1+C_2)=A_2$ とおいて, 一般解は

$$y=A_1e^{rx}\cos\omega x+A_2e^{rx}\sin\omega x\quad(A_1,A_2\text{は任意の定数})$$

[練習問題]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

1. $y'' + y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $y'' - 2y' + 5y = 0$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

[練習問題]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

1. $y'' + y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $y'' - 2y' + 5y = 0$

[解答]

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$
2. $y = (C_1 x + C_2)e^{2x}$
3. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
4. $y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$

(iii) 一般の n について： $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

(iii) 一般の n について： $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$
特性多項式 $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ が
$P(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\alpha_i)^{l_i}\cdot\{(\lambda-\beta_1)(\lambda-\bar{\beta_1})\}^{m_1}\cdots\{(\lambda-\beta_j)(\lambda-\bar{\beta_j})\}^{m_j}$
と因数分解されたとする.(但し $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$ は実数とし, $\beta_1,\ldots,\beta_j$ は実数ではないとする.)

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

(iii) 一般の n について： $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$
特性多項式 $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ が
$P(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\alpha_i)^{l_i}\cdot\{(\lambda-\beta_1)(\lambda-\bar{\beta_1})\}^{m_1}\cdots\{(\lambda-\beta_j)(\lambda-\bar{\beta_j})\}^{m_j}$
と因数分解されたとする.(但し $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$ は実数とし, $\beta_1,\ldots,\beta_j$ は実数ではないとする.)
このとき, 一般解は

$$y=(C_{1,1}x^{l_1-1}+C_{1,2}x^{l_1-2}+\cdots+C_{1,l_1-1}x+C_{1,l_1})e^{\alpha_1x}+\cdots$$
$$+(D_{1,1}x^{m_1-1}+D_{1,2}x^{m_1-2}+\cdots+D_{1,m_1-1}x+D_{1,m_1})e^{\mathrm{Re}\beta_1x}\cos\mathrm{Im}\beta_1x+\cdots$$
$$+(E_{1,1}x^{m_1-1}+E_{1,2}x^{m_1-2}+\cdots+E_{1,m_1-1}x+E_{1,m_1})e^{\mathrm{Re}\beta_1x}\sin\mathrm{Im}\beta_1x+\cdots$$

となる. (但し $C_{*,*},D_{*,*},E_{*,*}$ は任意の定数)

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

(iii) 一般の n について： $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$
特性多項式 $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ が
$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \alpha_i)^{l_i} \cdot \{(\lambda - \beta_1)(\lambda - \bar{\beta_1})\}^{m_1} \cdots \{(\lambda - \beta_j)(\lambda - \bar{\beta_j})\}^{m_j}$
と因数分解されたとする.(但し $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ は実数とし, $\beta_1, \ldots, \beta_j$ は実数ではないとする.)
このとき, 一般解は

$$y = (C_{1,1}x^{l_1-1} + C_{1,2}x^{l_1-2} + \cdots + C_{1,l_1-1}x + C_{1,l_1})e^{\alpha_1 x} + \cdots$$
$$+(D_{1,1}x^{m_1-1} + D_{1,2}x^{m_1-2} + \cdots + D_{1,m_1-1}x + D_{1,m_1})e^{\mathrm{Re}\beta_1 x}\cos \mathrm{Im}\beta_1 x + \cdots$$
$$+(E_{1,1}x^{m_1-1} + E_{1,2}x^{m_1-2} + \cdots + E_{1,m_1-1}x + E_{1,m_1})e^{\mathrm{Re}\beta_1 x}\sin \mathrm{Im}\beta_1 x + \cdots$$

となる. (但し $C_{*,*}, D_{*,*}, E_{*,*}$ は任意の定数)
このとき $\{x^l e^{\alpha_m}, x^l e^{\mathrm{Re}\beta_m}\cos \mathrm{Im}\beta_m, x^l e^{\mathrm{Re}\beta_m}\sin \mathrm{Im}\beta_m\}$ を解の基本系とよぶ.

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

(iii) 一般の n について： $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$
特性多項式 $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ が
$P(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\alpha_i)^{l_i}\cdot\{(\lambda-\beta_1)(\lambda-\bar{\beta_1})\}^{m_1}\cdots\{(\lambda-\beta_j)(\lambda-\bar{\beta_j})\}^{m_j}$
と因数分解されたとする.(但し $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$ は実数とし, $\beta_1,\ldots,\beta_j$ は実数ではないとする.)
このとき, 一般解は

$$y=(C_{1,1}x^{l_1-1}+C_{1,2}x^{l_1-2}+\cdots+C_{1,l_1-1}x+C_{1,l_1})e^{\alpha_1x}+\cdots$$

$$+(D_{1,1}x^{m_1-1}+D_{1,2}x^{m_1-2}+\cdots+D_{1,m_1-1}x+D_{1,m_1})e^{\mathrm{Re}\beta_1x}\cos\mathrm{Im}\beta_1x+\cdots$$
$$+(E_{1,1}x^{m_1-1}+E_{1,2}x^{m_1-2}+\cdots+E_{1,m_1-1}x+E_{1,m_1})e^{\mathrm{Re}\beta_1x}\sin\mathrm{Im}\beta_1x+\cdots$$

となる. (但し $C_{*,*},D_{*,*},E_{*,*}$ は任意の定数)
このとき $\{x^le^{\alpha_m},x^le^{\mathrm{Re}\beta_m}\cos\mathrm{Im}\beta_m,x^le^{\mathrm{Re}\beta_m}\sin\mathrm{Im}\beta_m\}$ を解の基本系とよぶ.

[練習問題]

次の方程式の一般解を求めよ.

1. $(D^3-D^2-D+1)y=0$ 2. $(D^4-1)y=0$ 3. $(D^2-4D+5)^2y=0$

2. 定数係数線形常微分方程式— 2.2 同次方程式 ($\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(ye^{-\lambda x})$)

(iii) 一般の n について： $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$
特性多項式 $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ が
$P(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\alpha_i)^{l_i}\cdot\{(\lambda-\beta_1)(\lambda-\bar{\beta_1})\}^{m_1}\cdots\{(\lambda-\beta_j)(\lambda-\bar{\beta_j})\}^{m_j}$
と因数分解されたとする.(但し $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$ は実数とし, $\beta_1,\ldots,\beta_j$ は実数ではないとする.)
このとき, 一般解は

$$y=(C_{1,1}x^{l_1-1}+C_{1,2}x^{l_1-2}+\cdots+C_{1,l_1-1}x+C_{1,l_1})e^{\alpha_1x}+\cdots$$
$$+(D_{1,1}x^{m_1-1}+D_{1,2}x^{m_1-2}+\cdots+D_{1,m_1-1}x+D_{1,m_1})e^{\mathrm{Re}\beta_1x}\cos\mathrm{Im}\beta_1x+\cdots$$
$$+(E_{1,1}x^{m_1-1}+E_{1,2}x^{m_1-2}+\cdots+E_{1,m_1-1}x+E_{1,m_1})e^{\mathrm{Re}\beta_1x}\sin\mathrm{Im}\beta_1x+\cdots$$

となる. (但し $C_{*,*},D_{*,*},E_{*,*}$ は任意の定数)
このとき $\{x^le^{\alpha_m},x^le^{\mathrm{Re}\beta_m}\cos\mathrm{Im}\beta_m,x^le^{\mathrm{Re}\beta_m}\sin\mathrm{Im}\beta_m\}$ を解の基本系とよぶ.

[練習問題]

次の方程式の一般解を求めよ.

1. $(D^3-D^2-D+1)y=0$ 2. $(D^4-1)y=0$ 3. $(D^2-4D+5)^2y=0$

[解答]

1. $y=(C_1x+C_2)e^x+C_3e^{-x}$
2. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$
3. $y=(C_1x+C_2)e^{2x}\cos x+(C_3x+C_4)e^{2x}\sin x$

2. 定数係数線形常微分方程式 - 2.3 非同次方程式 (特殊解+同次方程式の一般解)

非同次 (非斉次) の定数係数線形常微分方程式を考える：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{7}$$

非同次 (非斉次) の定数係数線形常微分方程式を考える：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=Q(x) \qquad (a_1,\ldots,a_n \text{ は実定数 }) \tag{7}$$

[定理]

$y=y_0(x)$ が (7) の一つの特殊解ならば, この方程式の一般解は対応する同次方程式：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

の一般解 $y=y(x;C_1,\ldots,C_n)$ ($C_1,\ldots,C_n$ は任意の定数) を用いて

$$y=y_0(x)+y(x;C_1,\ldots,C_n) \qquad (C_1,\ldots,C_n \text{ は任意の定数})$$

と書ける.

非同次 (非斉次) の定数係数線形常微分方程式を考える：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{7}$$

[定理]

$y = y_0(x)$ が (7) の一つの特殊解ならば, この方程式の一般解は対応する同次方程式：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

の一般解 $y = y(x; C_1, \ldots, C_n)$ ($C_1, \ldots, C_n$ は任意の定数) を用いて

$$y = y_0(x) + y(x; C_1, \ldots, C_n) \qquad (C_1, \ldots, C_n \text{ は任意の定数})$$

と書ける.

[例題]

$y' - \lambda y = x$ 　　の一般解を求めよ.

非同次 (非斉次) の定数係数線形常微分方程式を考える：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{7}$$

[定理]

$y = y_0(x)$ が (7) の一つの特殊解ならば, この方程式の一般解は対応する同次方程式：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

の一般解 $y = y(x; C_1, \ldots, C_n)$ ($C_1, \ldots, C_n$ は任意の定数) を用いて

$$y = y_0(x) + y(x; C_1, \ldots, C_n) \qquad (C_1, \ldots, C_n \text{ は任意の定数})$$

と書ける.

[例題]

$y' - \lambda y = x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

$y = -\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda^2}$ はこの方程式の特殊解の一つである.

非同次 (非斉次) の定数係数線形常微分方程式を考える：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \tag{7}$$

[定理]

$y = y_0(x)$ が (7) の一つの特殊解ならば, この方程式の一般解は対応する同次方程式：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

の一般解 $y = y(x; C_1, \ldots, C_n)$ ($C_1, \ldots, C_n$ は任意の定数) を用いて

$$y = y_0(x) + y(x; C_1, \ldots, C_n) \qquad (C_1, \ldots, C_n \text{ は任意の定数})$$

と書ける.

[例題]

$y' - \lambda y = x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

$y = -\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda^2}$ はこの方程式の特殊解の一つである.
対応する同次方程式：$y' - \lambda y = 0$
の一般解は $y = Ce^{\lambda x}$ (C は任意の定数) である.

非同次 (非斉次) の定数係数線形常微分方程式を考える：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x) \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ は実定数 }) \qquad (7)$$

[定理]

$y = y_0(x)$ が (7) の一つの特殊解ならば, この方程式の一般解は対応する同次方程式：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

の一般解 $y = y(x; C_1, \ldots, C_n)$ ($C_1, \ldots, C_n$ は任意の定数) を用いて

$$y = y_0(x) + y(x; C_1, \ldots, C_n) \qquad (C_1, \ldots, C_n \text{ は任意の定数})$$

と書ける.

[例題]

$y' - \lambda y = x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

$y = -\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda^2}$ はこの方程式の特殊解の一つである.

対応する同次方程式：$y' - \lambda y = 0$

の一般解は $y = Ce^{\lambda x}$ (C は任意の定数) である. よって元の方程式の一般解は

$$y = -\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda^2} + Ce^{\lambda x} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

[特殊解の求め方 **(**未定係数法**)]**

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

[例題]

$y'' + y' = x^2$ 　　の一般解を求めよ.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

[例題]

$y'' + y' = x^2$　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ なので 0 は一重の特性根である.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

[例題]

$y'' + y' = x^2$ の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ なので 0 は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + y_0' = 3A_0x^2 + (6A_0 + 2A_1)x + 2A_1 + A_2 = x^2$

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める．

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める．

[例題]

$y'' + y' = x^2$ 　　の一般解を求めよ．

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1) = 0$ なので 0 は一重の特性根である．

$y_0(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + y_0' = 3A_0x^2 + (6A_0 + 2A_1)x + 2A_1 + A_2 = x^2$

$\therefore\ A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = -1,\ A_2 = 2$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1} x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m (A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1} x + A_k)$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

[例題]

$y'' + y' = x^2$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ なので 0 は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A_0 x^2 + A_1 x + A_2)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + y_0' = 3A_0 x^2 + (6A_0 + 2A_1)x + 2A_1 + A_2 = x^2$

$\therefore A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = -1,\ A_2 = 2$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$

よって一般解は　$y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C_1 e^{-x} + C_2$　$(C_1, C_2$ は任意の定数)

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

[例題]

$y'' + y' = x^2$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ なので 0 は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + y_0' = 3A_0x^2 + (6A_0 + 2A_1)x + 2A_1 + A_2 = x^2$

$\therefore A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = -1,\ A_2 = 2$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$.

よって一般解は 　$y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C_1e^{-x} + C_2$ 　　$(C_1, C_2$ は任意の定数)

[練習問題] 　$y'' - 5y' + 6y = 12x + 8$ の一般解を求めよ.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(i) $Q(x)$ が k 次多項式のとき：

(a) 0 が特性根ではないとき：

$y_0(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

(b) 0 が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)$

とおいて方程式に代入し $A_0, \ldots, A_k$ を求める.

[例題]

$y'' + y' = x^2$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ なので 0 は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + y_0' = 3A_0x^2 + (6A_0 + 2A_1)x + 2A_1 + A_2 = x^2$

$\therefore A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = -1,\ A_2 = 2$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$

よって一般解は 　$y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C_1e^{-x} + C_2$ 　(C_1, C_2 は任意の定数)

[練習問題] 　$y'' - 5y' + 6y = 12x + 8$ の一般解を求めよ.

[解答] 　$y = 2x + 3 + C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$ 　(C_1, C_2 は任意の定数)

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ (r, p は定数) の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

(b) p が m 重の特性根のとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

(b) p が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = Ax^m e^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める．

(b) p が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = Ax^m e^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める．

[例題]

$y'' - 2y' + y = e^x$ の一般解を求めよ．

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

(b) p が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = Ax^m e^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

[例題]

$y'' - 2y' + y = e^x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ なので 1 は二重の特性根である.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

(b) p が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = Ax^m e^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

[例題]

$y'' - 2y' + y = e^x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ なので 1 は二重の特性根である.

$y_0(x) = Ax^2 e^x$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 2y_0' + y_0 = 2Ae^x = e^x$

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

(b) p が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = Ax^m e^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

[例題]

$y'' - 2y' + y = e^x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ なので 1 は二重の特性根である.

$y_0(x) = Ax^2 e^x$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 2y_0' + y_0 = 2Ae^x = e^x$

$\therefore A = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ (r, p は定数) の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

(b) p が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = Ax^m e^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

[例題]

$y'' - 2y' + y = e^x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ なので 1 は二重の特性根である.

$y_0(x) = Ax^2 e^x$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 2y_0' + y_0 = 2Ae^x = e^x$

$\therefore A = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$.

よって一般解は 　$$y = \frac{1}{2}x^2 e^x + C_1 x e^x + C_2 e^x$$ 　(C_1, C_2 は任意の定数)

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ **(**r, p は定数**)** の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める．

(b) p が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = Ax^m e^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める．

[例題]

$y'' - 2y' + y = e^x$ 　の一般解を求めよ．

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ なので 1 は二重の特性根である．

$y_0(x) = Ax^2 e^x$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 2y_0' + y_0 = 2Ae^x = e^x$

$\therefore A = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$.

よって一般解は 　$y = \dfrac{1}{2}x^2 e^x + C_1 x e^x + C_2 e^x$ 　$(C_1, C_2$ は任意の定数$)$

[練習問題] 　$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ の一般解を求めよ．

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(ii) $Q(x) = re^{px}$ (r, p は定数) の形のとき：

(a) p が特性根ではないとき：

$y_0(x) = Ae^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

(b) p が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = Ax^m e^{px}$

とおいて方程式に代入し A を求める.

[例題]

$y'' - 2y' + y = e^x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ なので 1 は二重の特性根である.

$y_0(x) = Ax^2 e^x$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 2y_0' + y_0 = 2Ae^x = e^x$

$\therefore A = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$.

よって一般解は 　$y = \dfrac{1}{2}x^2 e^x + C_1 xe^x + C_2 e^x$ 　(C_1, C_2 は任意の定数)

[練習問題] 　$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ の一般解を求めよ.

[解答] 　$y = -xe^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ 　(C_1, C_2 は任意の定数)

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[例題]

$y'' + 4y = 4\cos 2x$ 　　の一般解を求めよ.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[例題]

$y'' + 4y = 4\cos 2x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$ なので $2i$ は一重の特性根である.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[例題]

$y'' + 4y = 4\cos 2x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$ なので $2i$ は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + 4y_0 = 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) = 4\cos 2x$

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[例題]

$y'' + 4y = 4\cos 2x$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$ なので $2i$ は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + 4y_0 = 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) = 4\cos 2x$

$\therefore A = 0, B = 1$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = x\sin 2x$.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[例題]

$y'' + 4y = 4\cos 2x$ の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$ なので $2i$ は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + 4y_0 = 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) = 4\cos 2x$

$\therefore A = 0, B = 1$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = x\sin 2x$.

よって一般解は $y = x\sin 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$ (C_1, C_2 は任意の定数)

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[例題]

$y'' + 4y = 4\cos 2x$ の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$ なので $2i$ は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + 4y_0 = 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) = 4\cos 2x$

$\therefore A = 0, B = 1$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = x\sin 2x$.

よって一般解は $y = x\sin 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$ (C_1, C_2 は任意の定数)

[練習問題] $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ の一般解を求めよ.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iii) $Q(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ (r, α, β は定数) の形のとき：

(a) $\alpha + i\beta$ が特性根ではないとき：

$y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

(b) $\alpha + i\beta$ が m 重の特性根のとき：

$y_0(x) = x^m e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

とおいて方程式に代入し A, B を求める.

[例題]

$y'' + 4y = 4\cos 2x$ の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$ なので $2i$ は一重の特性根である.

$y_0(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' + 4y_0 = 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) = 4\cos 2x$

$\therefore$ $A = 0, B = 1$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = x\sin 2x$.

よって一般解は $y = x\sin 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$ (C_1, C_2 は任意の定数)

[練習問題] $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ の一般解を求めよ.

[解答] $y = \dfrac{\sin x}{10} - \dfrac{3\cos x}{10} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ (C_1, C_2 は任意の定数)

[特殊解の求め方 **(**未定係数法**)]**

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k$ 次多項式$) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x} \cos\beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x} \sin\beta_2 x$ の形のとき：

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k$ 次多項式$) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x) = (A_0 x^k + \cdots + A_k) + Be^p x + e^{\alpha_1 x}(C_1\cos\beta_1 x + C_2\sin\beta_2 x) + \cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x)=(k$ 次多項式$)+r_0e^px+r_1e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x+r_2e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x)=(A_0x^k+\cdots+A_k)+Be^px+e^{\alpha_1 x}(C_1\cos\beta_1 x+C_2\sin\beta_2 x)+\cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[例題]

$y''-3y'+2y=4x+e^{3x}$ 　　の一般解を求めよ.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k$ 次多項式$) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x) = (A_0 x^k + \cdots + A_k) + B e^p x + e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_2 x) + \cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[例題]

$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$ の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k$ 次多項式$) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x) = (A_0 x^k + \cdots + A_k) + B e^p x + e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_2 x) + \cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[例題]

$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$ の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$y_0(x) = A_0 x + A_1 + B e^{3x}$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = 2A_0 x + (-3A_0 + 2A_1) + 2Be^{3x}) = 4x + e^{3x}$

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k$ 次多項式$) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x} \cos\beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x} \sin\beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x) = (A_0 x^k + \cdots + A_k) + Be^p x + e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos\beta_1 x + C_2 \sin\beta_2 x) + \cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[例題]

$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$y_0(x) = A_0 x + A_1 + Be^{3x}$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = 2A_0 x + (-3A_0 + 2A_1) + 2Be^{3x}) = 4x + e^{3x}$

$\therefore A_0 = 2, A_1 = 3, B = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = 2x + 3 + \frac{1}{2}e^{3x}$.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k$ 次多項式$) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x) = (A_0 x^k + \cdots + A_k) + B e^p x + e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_2 x) + \cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[例題]

$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$y_0(x) = A_0 x + A_1 + B e^{3x}$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = 2A_0 x + (-3A_0 + 2A_1) + 2Be^{3x}) = 4x + e^{3x}$

$\therefore A_0 = 2, A_1 = 3, B = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = 2x + 3 + \frac{1}{2}e^{3x}$.

よって一般解は　$y = 2x + 3 + \dfrac{1}{2}e^{3x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$　　$(C_1, C_2$ は任意の定数$)$

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k$ 次多項式$) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x) = (A_0 x^k + \cdots + A_k) + Be^p x + e^{\alpha_1 x}(C_1\cos\beta_1 x + C_2\sin\beta_2 x) + \cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[例題]

$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$y_0(x) = A_0 x + A_1 + Be^{3x}$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = 2A_0 x + (-3A_0 + 2A_1) + 2Be^{3x}) = 4x + e^{3x}$

$\therefore A_0 = 2, A_1 = 3, B = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = 2x + 3 + \frac{1}{2}e^{3x}$.

よって一般解は　$y = 2x + 3 + \dfrac{1}{2}e^{3x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$　(C_1, C_2 は任意の定数)

その他 $Q(x) = (k$ 次多項式$)e^{px}$ または $(k$ 次多項式$)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 等の形のときは

$y_0(x) = (A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)e^{px}$ または

$y_0(x) = x^m(A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)e^{px}$ 等とおく.

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k \text{ 次多項式}) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x) = (A_0 x^k + \cdots + A_k) + Be^p x + e^{\alpha_1 x}(C_1\cos\beta_1 x + C_2\sin\beta_2 x) + \cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[例題]

$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$y_0(x) = A_0 x + A_1 + Be^{3x}$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = 2A_0 x + (-3A_0 + 2A_1) + 2Be^{3x}) = 4x + e^{3x}$

$\therefore A_0 = 2, A_1 = 3, B = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = 2x + 3 + \frac{1}{2}e^{3x}$.

よって一般解は　　$y = 2x + 3 + \dfrac{1}{2}e^{3x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 　　(C_1, C_2 は任意の定数)

その他 $Q(x) = (k \text{ 次多項式})e^{px}$ または $(k \text{ 次多項式})e^{\alpha x}\cos\beta x$ 等の形のときは

$y_0(x) = (A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)e^{px}$ または

$y_0(x) = x^m(A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)e^{px}$ 等とおく.

[練習問題] 　　$y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 e^x$ の一般解を求めよ.

2. 定数係数線形常微分方程式-2.3 非同次方程式(特殊解+同次方程式の一般解)

[特殊解の求め方 (未定係数法)]

(iv) (i),(ii)(iii) がたし合わされた形, すなわち

$Q(x) = (k\text{ 次多項式}) + r_0 e^p x + r_1 e^{\alpha_1 x} \cos\beta_1 x + r_2 e^{\alpha_2 x} \sin\beta_2 x$ の形のとき：

$y_0(x) = (A_0 x^k + \cdots + A_k) + Be^p x + e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos\beta_1 x + C_2 \sin\beta_2 x) + \cdots$

等とおく.(各パターンを足し合わせる.)

[例題]

$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$ 　　の一般解を求めよ.

[解答]

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$y_0(x) = A_0 x + A_1 + Be^{3x}$ とおいて方程式に代入すると：

$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = 2A_0 x + (-3A_0 + 2A_1) + 2Be^{3x}) = 4x + e^{3x}$

$\therefore A_0 = 2, A_1 = 3, B = \frac{1}{2}$ となり特殊解の一つは $y_0(x) = 2x + 3 + \frac{1}{2}e^{3x}$.

よって一般解は 　$y = 2x + 3 + \dfrac{1}{2}e^{3x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 　$(C_1, C_2$ は任意の定数)

その他 $Q(x) = (k\text{ 次多項式})e^{px}$ または $(k\text{ 次多項式})e^{\alpha x}\cos\beta x$ 等の形のときは

$y_0(x) = (A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)e^{px}$ または

$y_0(x) = x^m(A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k)e^{px}$ 等とおく.

[練習問題] 　$y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 e^x$ の一般解を求めよ.

[解答] 　$y = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \dfrac{1}{4}e^x(x^2 - 4x + 4)$