数学の基本用語

浪川　幸彦

May 1, 2007

2　関数の体系

2.1　初等関数

Definition 2.1.1.　私たちが通常扱う関数を**初等関数**という。これらは次に挙げる関数に四則演算，合成（，逆）を有限回施して得られる関数として定義される：

- 定数関数；
- x（よって多項式関数，有理関数）；
- べき根関数；
- 三角関数；
- 逆三角関数；
- 指数関数；
- 対数関数

Remark. 以下に述べるように，これらの関数が一つのまとまった世界を形作っていることは偶然ではない。それは数と図形の世界で，和の世界（$\mathbb{R}$），積の世界（$\mathbb{R}_+$），回転の世界（$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$）の三つが基本であることの反映なのである。

　しかし振り返ってみると，これらの関数の厳密な定義や，諸性質の体系的なリストアップはされていないことが分かる。ここでその整理を試みよう。

　教育カリキュラムの上で言えば，そのように整理した上で，それを発達学習課程の上にどう配置するかが課題となるのである。

2.2　多項式関数

　多項式は，もっとも基本的な関数である。ところで二つの多項式 $f(x), g(x)$ が「等しい」というのには，二通りの意味がある。

Definition 2.2.1. （文字式としての）多項式が等しい
　$\iff$　係数がすべて等しい。

Definition 2.2.2. （関数としての）多項式が等しい
　$\iff$　各点での値がすべて等しい。すなわち $\forall x (\in \mathbb{R})\ f(x) = g(x)$.

Theorem 2.2.3. （多項式関数であることが分かっているとき）二つの定義は同値である。

Definition 2.2.1 $\Rightarrow$ **Definition 2.2.2** は明らか。問題は逆を示すことである。
この証明法に二通りある。連続的証明と離散的証明，あるいは局所的証明と大域的証明の別である。まず前者から：
証明１．　$x = 0$ の近くで

$$y = f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ \cdots \ + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n$$

の関数の挙動を調べれば

$$f^{(k)}(0) = k! a_k.$$

証明２．
Step 1)　$x \to \infty$ の挙動を調べることにより，次数と最高次の係数が分かる：

$$f(x) \sim a_n x^n \quad (x \to \infty).$$

Step 2)　以下 $f(x)$ は n 次式としよう：

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ \cdots \ + a_{n-1} x + a_n$$

Theorem 2.2.4. 相異なる $n+1$ 個の点での値が分かれば，$f(x)$ の係数は一意的に定まる。

Proof. $x_1, \ldots, x_{n+1}$ を互いに相異なる $n+1$ 個の点とし，$y_i = f(x_i)$ と置く。a_i を「未知数」として条件を書けば

$$\begin{cases} x_1^n a_0 + x_1^{n-1} a_1 + \cdots + x_1 a_{n-1} + a_n & = & y_1 \\ x_2^n a_0 + x_2^{n-1} a_1 + \cdots + x_2 a_{n-1} + a_n & = & y_2 \\ \cdots & \cdots & \vdots \\ x_{n+1}^n a_0 + x_{n+1}^{n-1} a_1 + \cdots + x_{n+1} a_{n-1} + a_n & = & y_{n+1} \end{cases}$$

これは連立一次方程式である。ところでその係数行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_i - x_j) \neq 0$$

（Vandermonde の行列式）

この係数を具体的に書くこともできる

Theorem 2.2.5 (Lagrange).

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) I_i(x)$$

ただし

$$I_i(x) = \frac{P(x)}{(x - x_i)P'(x_i)}, \quad P(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Exercise 1. これを証明せよ。

Hint. $I_i(x)$ は $I`_i(x_j) = \delta_{ij}$（Kronecker の δ） の条件で（一意的に）定まる n 次多項式。

また微分などに関して，多項式関数は次のようにも特徴付けられる

Theorem 2.2.6 (連続的特徴付け). 無限回微分可能な関数が，多項式関数であるための必要十分条件は

$$\text{ある } n \text{ が存在して} \quad f^{(n)} \equiv 0.$$

Theorem 2.2.7 (離散的特徴付け). ある関数が整数値上の値だけで定まっているとする。この関数が多項式関数であるための必要十分条件は

ある n が存在して，その第 n 階差がつねに 0 になることである．

一言で言えば，多項式関数は「加法的世界」の上の基本関数だと言うことである。
加法的世界の一番基本的な関数はもちろん「一次関数」であるが，多項式関数はそこから「あまり遠くない」。

2.3 指数関数と自然対数の底

2.3.1 線型関数の特徴付け

まず次のような考察から始めよう。

Proposition 2.3.1. $y = f(x)$ を実数 $\mathbb{R}$ 全体で定義された**連続**関数とする。さらにこれが加法を保つ，すなわち

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

とすると，実数 $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$f(x) = ax$ と書ける。つまり $y = f(x)$ は線型関数である。

Remark. すなわちこの性質は（連続性の仮定の下に）線型関数を特徴付けている。
Idea of Proof. 1. $f(0) = 0 \quad \because f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$;
2. $f(nx) = nf(x)$. 数学的帰納法;
3. $f(-x) = -f(x) \quad \because f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$;
4. $a = f(1)$ と置けば，2. で $x = 1$ と置くことにより，任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $f(n) = an$.
5. $x = m/n$ と置いて，2. を用いることにより，$f(m/n) = a(m/n)$. つまり

任意の**有理数** $q \in \mathbb{Q}$ に対して　$f(q) = aq \qquad (*)$

6. 任意の実数 x は有理数列 $\{q_n\}, q_n \in \mathbb{Q}$ で近似できる（$q_n \to x(n \to \infty)$）ので

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} aq_n = ax$$

Remark. １）連続性がないとこの命題は成り立たない。ただし $(*)$ 式までは正しい。
２）関数の増減は a の正負によって次のように変わる：

- $a > 0$　単調増加
- $a = 0$　一定
- $a < 0$　単調減少

３）$y = f(x) = ax$ は（至る所）微分可能で $f'(x) = a$.
４）上のステップ６．で用いた手法は次の定理として一般化できる。

Theorem 2.3.2. 開区間 I 上で定義された二つの連続関数 $f(x), g(x)$ がある。この二つの関数の値が有理数上（$I \cap \mathbb{Q}$）で一致するならば，全体で等しい（$f = g$）。

2.3.2　指数関数の特徴付け

Theorem 2.3.3. $y = f(x)$ を実数 $\mathbb{R}$ 全体で定義された**連続正値**関数とする。さらにこれが加法を乗法に換える，すなわち

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

とすると，実数 $a > 0$ が存在して，$f(x) = a^x$ と書ける。つまり $y = f(x)$ は指数関数である。

Remark. １）すなわちこの性質は（連続性の仮定の下に）指数関数を特徴付けている。
２）指数関数 $y = a^x$ の定義はできており，これに対して上の性質は成り立つものとしている。
Idea of Proof. 前節の命題の証明の仕方をそのまま繰り返す。

Proposition 2.3.4. 指数関数 $f(x)$ は 次の性質を持つ：

- $a > 1$　単調増加
- $a = 1$　一定
- $a < 1$　単調減少

Idea of Proof. 上の論法を繰り返すことで例えば $a > 1$ のとき $x > 0 \Rightarrow f(x) > 1$ を示し，上の性質を使う。
さらに $x > 0$ では a が大きくなるほど指数関数の値は大きくなり，$x < 0$ では逆になることに注意しよう。

2.3.3　指数関数の厳密な定義

実は上の考察を用いて，指数関数を厳密に定義することができる。
すなわち，正数 $a > 0$ を取って固定する。簡単のため $a > 1$ としよう。
１．自然数 n に対し，べき a^n が定義され，指数法則をみたし，値 > 1 である。
２．逆数を取ることにより，整数 n に対し，べき a^n が定義され，指数法則をみたし，値正である。
３．べき根を取ることにより，有理数 $r = p/q$ に対し a^r が定義され，指数法則をみたし，値正である。また $r > 0$ なら値 > 1 であり，したがって狭義単調増加であることが分かる。
４．任意の実数 r に対し集合 $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x \leq r\}$ を考える。単調増加性から，

$$a^r = \sup\{a^x\ ;\ x \in A\}$$

が定まる。
５．こうして拡張された関数が指数法則をみたし，かつ狭義単調増大であることが示せる。
６．補題：$a^{1/n} \to 1\ (n \to \infty)$（つまり a^x が $x = 0$ で連続である）を用いると，指数法則と併せて連続性が示せる。

2.3.4　指数関数の微分＝増大度

ここで指数関数の微分の求め方を考える：

Proposition 2.3.5. 補題 $b = \lim_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$ が存在する（すなわち a^x は $x = 0$ で微分可能である）ことを承認すると，指数関数 a^x は至る所微分可能で

$$(a^x)' = ba^x.$$

Proof.

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} a^x = ba^x.$$

Definition 2.3.6. 先の注意から，$b=1$ となる $a>1$ がただ一つ存在する。これを**自然対数の底**とよび，e で表す。

Remark このとき $(e^x)'=e^x$ となる。

Exercise 2. $b=\lim_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ が存在することを証明せよ。

Exercise 3. 命題と定義から，通常の e の定義を導け。

2.3.5 まとめ

指数関数は，加法の世界を乗法の世界へと写す。
そのスケールが $x=0$ のところで**同一になる**のが e^x である（$\Leftrightarrow (e^x)'=e^x$）。
以上を纏めると次の定理が得られたことになる。

Theorem 2.3.7. 指数関数 $y=\exp(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ は次の性質を持つ：

０） $\exp(0)=1;$

１）（狭義の）単調増加連続関数で，全射である（すべての正数を値として取る）;

２）無限回連続微分可能である；

３） $\dfrac{d}{dx}\exp(x)=\exp(x)$；

４）（指数公式）$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$；

５） 任意の自然数 n に対し，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{\exp(x)}=0$（つまりどんな多項式よりも増大度が大きい）

2.4 対数関数

Definition 2.4.1. 指数関数 $y=a^x$ の逆関数を（a を**底**とする）**対数関数**とよび， $y=\log_a x$ と表す。特に e を底とする対数を**自然対数とよび**，単に $y=\log x$ と表す。

一般的に次の定理が成り立つ。

Theorem 2.4.2. 狭義単調関数 $y=f(x):I\to J$ の逆関数を $y=g(x):J\to I$ とすると

０） g も狭義単調である；

１） f が連続ならば，g も連続である；

２） f が（有限回，無限回）微分可能ならば，g も（同じ回数だけ）微分可能である；

したがって上の指数関数での定理と併せて，対数関数に関する次の基本性質が容易に導ける。

Theorem 2.4.3. $a > 0, \neq 1$ を底とする対数関数 $y = \log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が存在し，次の性質を持つ：

0） $\log_a 1 = 0$;

1）（狭義の）単調（$a > 1$ で増加，$a < 1$ で減少）連続関数で，全射である（すべての実数を値として取る）;

2）無限回連続微分可能である；

3） $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{\log a}\dfrac{1}{x}$;

4）（対数公式）$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

5） 任意の正数 ε に対し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\varepsilon}} = 0$

Corollary 2.4.4 (底の変換公式).

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

前節のまとめに倣えば，乗法の世界を加法の世界に写すのが対数関数で，自然対数は $x = 1$ のところでそのスケールが同じになるものとして特徴付けられる。

2.5 三角関数と円周率

2.5.1 三角関数の定義と加法公式

三角関数については大まかな話に止める。

Definition 2.5.1. 単位円周上の “角”θ の座標 $(\cos\theta, \sin\theta)$ により**余弦関数・正弦関数**を定義する。

Remark. ピタゴラスの定理から

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{T1}$$

Theorem 2.5.2 (加法公式).

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2; \tag{T2a}$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2. \tag{T2b}$$

Exercise 4. これを幾何学的に証明せよ。

2.5.2 「角度」をどう定義するか？

Reflection. 前項の三角関数の定義で「角度」は幾何的な「量」であって,「数」ではない。「関数」と見るためには,「角度」を「数」とみなす方法を指定しなければならない。

1）通常の**度数法**は円周の $1/360$ を 1° とする。

2）これに対し，**弧度法**は周の「長さ」そのものを「角度」とする。半径と等しい円弧の長さが「1 ラジアン」である。

これは単位円に糸を巻き付けると考えればよい。これによって（直径が乗っている）直線と円周とは同じスケールで測られる（つまり実数と同一視される）ことになる。

このときの円周の長さが 2π である。円周を一周すると元に戻ることから,

$$\text{三角関数は}\textbf{周期}\ 2\pi\text{を持つ.} \tag{T3}$$

Remark. ただしこのとき「円周の長さ」が厳密に定義されていなければならない。このためには積分（線積分）の概念が必要になる。

2.5.3 三角関数の導関数

さて，角度をラジアンで考えることは，円周を「速さ１」の等速円運動で回ることに他ならない。特に

$$\theta = 0 \text{ で速さ } 1 \ \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

であることに注意すれば

Theorem 2.5.3. 三角関数は微分可能で

$$\begin{aligned} (\cos\theta)' &= -\sin\theta \\ (\sin\theta)' &= \cos\theta \end{aligned}$$

Proof. 加法公式により，$\theta = 0$ の場合に帰着される（指数関数の場合と同様)。

Remark. 円に接線を引くとして，幾何的に証明することも可能である。直感的に分かりよい。

Corollary 2.5.4.

$$\begin{aligned} (\cos\theta)'' &= -\cos\theta \\ (\sin\theta)'' &= -\sin\theta \end{aligned}$$

Exercise 5. 従来の度数法を用いて角度を表したら，三角関数の微分はどうなるか？

2.5.4 まとめ

三角関数は「直線の世界」を「円の世界」へと写す。

このときの「長さ」と「角度」のスケールを合わせると,「周期」として円周率が出てくる。

レポートについて（再記）

次の問題から１題以上（数理学科学生は２題以上）を選んでレポートを書いて下さい：
●問題１：実数の完備性の同値条件についての定理（**Theorem 1.5.13**）に証明を与えてください。
●問題２：$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ として対数関数を，指数関数をその逆関数として定義することにより，両関数の基本的な性質を証明して下さい。
●問題３：日常言語の論理と数学での論理とはどのような点が共通しており，また異なるのか，具体的な例を挙げて論じて下さい。そのことから学校で数学を学ぶことが論理的な思考力を養うのに役立つか否かについて，自分の考えを述べて下さい（結論よりも，自分の考えがきちんと述べられているかどうかを見ます）。
・長さは A4 レポート用紙 2〜3 枚（ワープロ印刷），3〜5 枚（手書き）程度（もっと長くてもいい）。提出は５月８日授業時まで。電子メールによる提出も可（ただしファイル様式は pdf, MSWord のいずれか）。
・レポートには**学生番号・氏名および選んだ問題**を最初に必ず明記してください。
・このレポートは返却しません。
・参考にした書籍あるいはウェブページがある場合にはその書名あるいは URL を明記すること。引用なしに引き写しのあることが判明した場合には（たとえ内容を多少書き換えていても）不合格点を付けます。
・電子メールで受け取ったときは必ず受領した旨返事します。提出後 3 日経っても受け取りの連絡がない場合には，もう一度連絡して下さい。

連絡先等

- 研究室：理１号館 506 号室
- オフィスアワー：木曜日 11：30〜12：30（それ以外の場合は事前にアポを）
- E-mail : namikawa@math.nagoya-u.ac.jp
- Tel.: (052-789-) 4746
- Website : http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜namikawa/