

【記念公演】

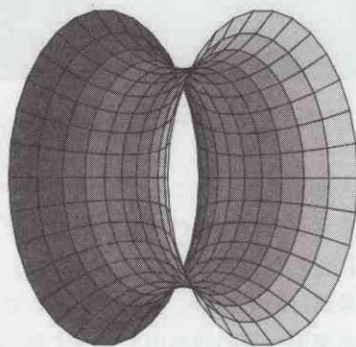
周期的回転超曲面について ～数学者によって発見された美しい曲面～

劔持 勝衛 顧問（昭和41年卒業）

数学者（私も含めて）が見つけた美しい曲面を、今日は紹介したいと思います。



これは石けん膜です。左と右に丸い円を針金で作っておいて、それに石けん膜を張らせたものです。これをモデルとして数学者はどのような曲面を考えたか、そこから始めたいと思います。



懸垂面

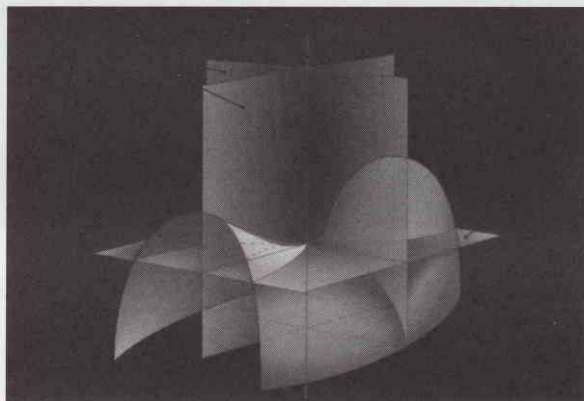
文献によると、オイラー（L.Euler）が1744年だそうですが、先ほどお見せした石けん膜をモデルとする曲面（数学的にきちんと式で書かれているもの—懸垂面—）を発見したということです。オイラーはどのようにしてこの曲面の数式を見つけたのかを説明します。最初にお見せした石けん膜は両側の丸い円を境界とする曲面の中で、表面張力が働くことによって、表面積が最小となっています。このことを数式で書こうということから始めたようです。オイラーの方法と述べましたが、オイラーの原論文を見たのではなく、教科書に書いてある計算式を解釈するところやったのではないかと思います。つまり、オイラーは18世紀中頃、回転面だけに限定して表面積を最小にする計算技法を開発していた。ニュートンが1727年に、ライプニッツは1716年に亡くなっていますから、1744年には微積分学はある程度できていて、当時の最新理論である微積分学を応用すると曲面の表面積の式が書けます。次に、少しその曲面を変化させ、面積が最小となる、すなわち、面積汎関数の第一変分がゼロであることから研究すべき微分方程式を導きだしたようです。

下に見てある 2 行の式がオイラーの研究した回転面の生成曲線を定めている微分方程式です。

$$\begin{cases} x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s) + \frac{x'(s)}{y(s)} = 0 \\ x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1 \end{cases}$$

この方程式を解いて生成曲線 $(x(s), y(s))$ を得たら、それを x 軸の周りに回転させて回転面が得られます。この微分方程式を解くと、 $x(s)$ と $y(s)$ は双曲線関数の式で、生成曲線は懸垂線（カタナリー）と呼ばれている曲線になります。

次に話を進めるには、一つだけ曲面論のことを思い出する必要があります。



主曲率

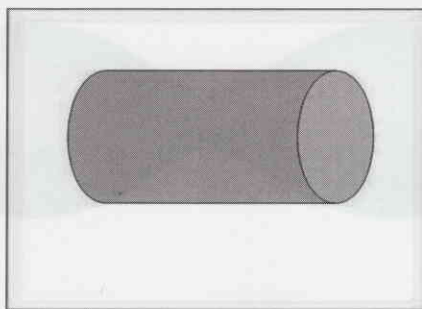
この図は、一般の曲面ですけれども、真中のところで平面で切っています。切ると、切り口に曲線ができています。平面で切っていますから、切り口は平面曲線となります。平面曲線というのは、点と法線方向を固定すると、法線方向に対して、下にくびれているか、上にくびれているかで符号が付きます。平面曲線の場合、曲率には符号が付いていることを思い出してください。切り口をつくる平面をいろいろ変えていくと、その点を通る平面曲線の族が出てきますが、それら平面曲線達の曲率の最大値と最小値（曲面の主曲率という）の平均をとります。これを平均曲率と呼びます。回転面に限ると、曲面

は 2 次元ですけど主曲率 κ_1 、 κ_2 は s の一変数関数となっていますが、その平均をとったものです。

それで、平均曲率は $H(s) = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ と書かれます。平均曲率という概念が、どのようにして出てきたのか興味があります。単に 2 つ主曲率があるから、それらをたして 2 で割ると平均ですけども、それだけでは誰も重要だとは思わなかったわけです。 どうして重要だと思われるようになったのか、それは、ジェルメン(S. Germain)が 1820 年代に弾性体理論を研究したときに出てきた式を表現するために平均曲率が必要だったのです。 オイラーの発見した曲面は平均曲率が恒等的にゼロで、現代ではそのような曲面を極小曲面と呼んでいます。

オイラーの研究が 1744 年で、平均曲率という概念が出てきて平均曲率一定曲面に対しての研究は 1820 年代から始まるのですが、数学者はその間何をやっていたかという、回転面より一般的な極小曲面の研究をずっとやってきました。1820 年に話を戻すと、ジェルメンが平均曲率という概念を考え、「平

平均曲率一定曲面というのは、体積を一定にしておいて表面積を最小にする変分問題の停留曲面として特徴づけられる」ということが分かって、平均曲率一定の曲面に対して興味が沸いてきたということです。

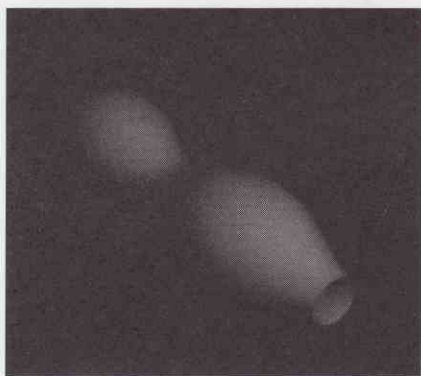


円柱面

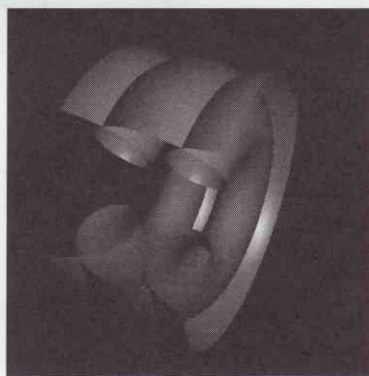
これは、平均曲率一定曲面の例です。この円柱面ですと、 x 軸に平行に伸びた方が直線だからその曲率はゼロで、それに直交した方向に切った切り口として円がありその曲率は正の一定値ですから、2つの主曲率は曲面上のどこでも同じです。従って、それらの平均も一定です。このような例だけだったら平均曲率一定曲面はあまり興味を持たれなかったわけです。しかし、主曲率は変化するがそれらの平均が一定となる曲面が、1841年デローネイ (C. Delaunay) によって発見されました。

はじめから回転面に限って、平均曲率一定の曲面を考えます。平均曲率はゼロでないとします。平均曲率がゼロの場合はオイラーが見つけた懸垂曲面です。ゼロでない場合はどうなっているかというところ、球面、円柱面、アンデュロイド、又はノドイドの4種類に限るということをデローネイは証明しました。

では、アンデュロイドやノドイドはどのような曲面かといいますと、

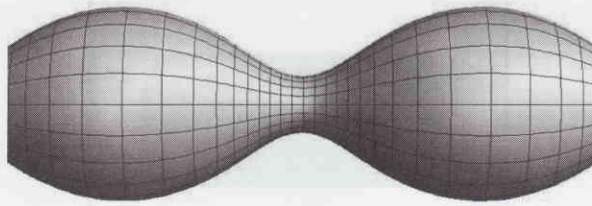


アンデュロイド



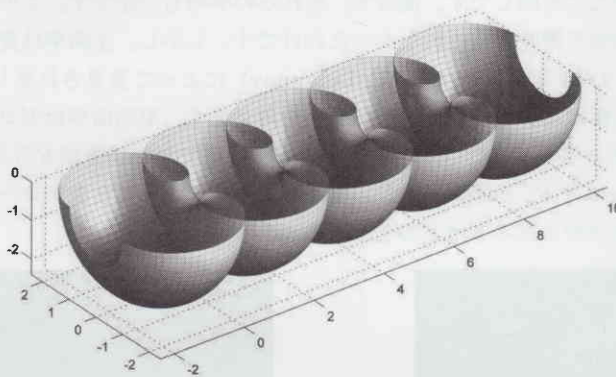
ノドイド

です。左側がアンデュロイドで周期的曲面ですね。右側がノドイドで、生成曲線が自分自身と切り交わっています。だから、ノドイドは現実世界にある物体の表面にはなりえないのですが、左側の方だと、それに似た生物はあります。円柱の両端を固定して体積一定のままで変形していくと、あのようなタイプの曲面となるわけです。これらの曲面の図示には数式処理ソフトウェア・マセマティカ (Wolfram Mathematica) とレイトレーシングソフトウェア・ポヴレイ (POV-Ray) を使いました。アンデュロイドとノドイドは有名な曲面なので、いろいろな人が多様なソフトウェアを使って描いていてネット上に公開されています。例えば、次の図はヴァーチャル・マス・ミュージアム (<http://www.virtualmathmuseum.org>) にあるアンデュロイドです。



アンデュロイド

次の図はノドイドで、ここでは曲面の中がどうなっているかを見るために、半分に切っており
(<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nodoid.png>)。



ノドイド

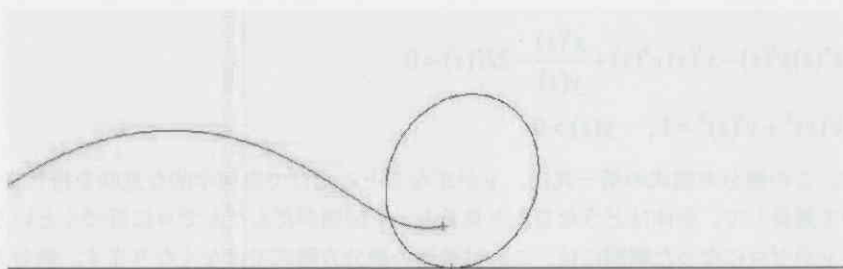
デローネイの研究した方程式は

$$\begin{cases} x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s) + \frac{x'(s)}{y(s)} - 2H = 0 \\ x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1 \end{cases}$$

です。ここで $x(s)$ 、 $y(s)$ が生成曲線の座標関数で、第二式は単に弧長 s をパラメータにとっていることを表しているだけです。第一式が大事な式ですが、 H が定数でゼロではないということがポイントです。これを幾何学的に解釈すると、第1項 $x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s)$ が一つの主曲率で、第2項 $x'(s)/y(s)$ がもう一つの主曲率で加えて一定の値 $2H$ となるという式です。

1841年にデローネイはこの連立微分方程式を解いて、4種類の曲面しかないと言ったわけです。これを彼はどうやって証明したのでしょうか。先ほどお見せした図はもちろんあるわけない、コンピュータもないわけですから。現在では、デローネイの回転構成法と呼ばれていますが、楕円（または双曲線）を直線上で滑ることなく転がします。転がした時の楕円の一つの焦点の軌跡を考えます。実は、その焦点の軌跡が、先ほどの微分方程式の解となっています。また逆に、解はそういうもの（双曲線の場合も含める）しかないことを示しました。この楕円の焦点が描く軌跡は、ヴァーチャル・マス・ミュージア

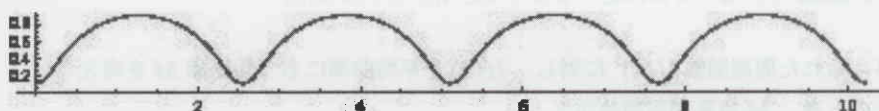
ムのサイト (<http://www.virtualmathmuseum.org/unduloid.mov>) で見るすることができます。



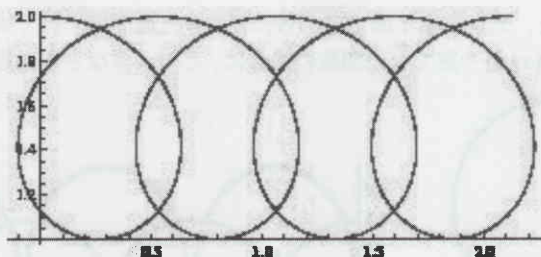
楕円の焦点の軌跡

これがヴァーチャル・マス・ミュージアムのサイトにある動画です。サイトを見るだけならいつでも見られるのですが、ダウンロードしたファイルを見るためには、有料の Quick Time が必要です。今日のために投資したので、もう一回お見せします。

アンチュロイドとノドイドの生成曲線



アンチュラリのグラフ



ノードリのグラフ

これは、アンデュロイドとノドイドの生成曲線だけを描いたものです。上の方がアンデュラリで、横軸 (x 軸) の周りに回転させるとアンデュロイドになります。下側がノードリで、これを x 軸の周りに回転させるとノドイドになります。

デローネイの仕事の現代における意義ですけれども、彼は体積一定で表面積最小な非自明な曲面を最初に発見しました。それが、1840 年代ですけれども、回転面とは限らない平均曲率一定曲面の本格的な研究は、ここ 30 年ぐらいで大きな進歩を遂げています。デローネイ曲面は、一般な平均曲率一定曲面の無限遠での形状を理解するために使われています。デローネイの曲面はその発見からおよそ 140 年たって現代幾何学において重要な役割を演じているのです。

さらに一般にして、 H が定数とは限らない場合を考えましょう。

$H(s)$ を与えられた関数とし、

$$\begin{cases} x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s) + \frac{x'(s)}{y(s)} - 2H(s) = 0 \\ x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1, \quad y(s) > 0 \end{cases}$$

を考えます。この微分方程式の第一式は、 y が正なとこだけで幾何学的な意味を持ちますけれども、これを解いて延長して、全体はどうなるかを見ると、 y 座標がだんだんゼロに近づくということがおこります。 y がゼロになった瞬間には、これは普通の微分方程式ではなくなります。微分方程式論の一般論からさっきの微分方程式は y が正なところで局所解を持つことがわかるわけですが、この微分方程式の場合は、局所解は一意に延長できます。

私は1980年にこの微分方程式の厳密解を求めました。私のアイデアは

$$Z(s) := y(s)y'(s) + iy(s)x'(s)$$

という複素数値関数を考えることで、先ほどの微分方程式は

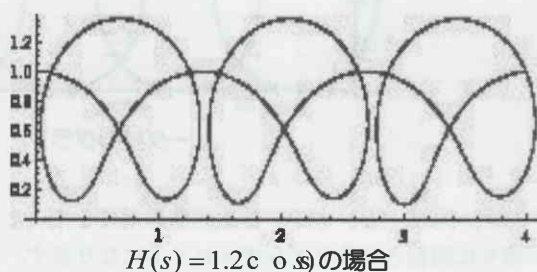
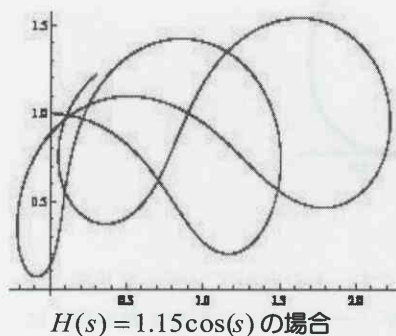
$$Z'(s) - 2iH(s)Z(s) - 1 = 0$$

という1階の線形の微分方程式になります。この微分方程式は、理系の2年生の応用数学の授業で習った方法で解けます。ここで得られた式で $H(s) = \text{一定}$ とすると、デローネイの定理(1841年)の別証明ができます。しかし、定数ではない $H(s)$ に対して、私の解法はどのような使い方があるかわからなかったのですが、2003年になって次に述べるような応用がありました。

問題 与えられた周期関数 $H(s)$ に対し、 $H(s)$ を平均曲率にもつ回転面 M を考える

そのとき、 M 自身が周期的か？

という問題を自分で設定しました。ただこれだけですと、答えはダメなわけで、 $H(s) \equiv 0$ だとすると、最初に述べたオイラーが求めた懸垂面ですから、ゼロの場合は周期的ではないわけです。でも、 $H(s)$ が一定でゼロでないとする、デローネイの定理から、できた曲面はすべて周期的となっているわけです。このようなことが、 $H(s)$ が一定でない関数の場合に、どのようなときに起こるかという問題です。



この図は、マセマティカを使って数値実験したものです。左側は $H(s) = 1.15 \cos(s)$ を微分方程式に代入して、マセマティカで解かせるわけです。初期条件は $x=0$ のところで $y=1$ になっています。初期ベクトルは x 軸と平行として、マセマティカで描かせると、左側の図になります。次に、 $H(s) = 1.2 \cos(s)$ として、同じ計算をコンピュータにやらせると、右側の図になります。係数を変化させると、だんだん周期的になってきたので、条件を求める気になったわけです。

私が発見した判定条件は、次のようなものです。

$\eta(u) := 2 \int_0^u H(s) ds$ とおく。

定理(Kenmotsu, 2003) : $H(s)$ を周期 L の周期関数、 M を回転面でその平均曲率が

$H(s)$ とする。そのとき、

M : 周期的 $\Leftrightarrow H(s)$:

$$(**) \quad \frac{\int_0^L \cos \eta(u) du}{\sin \eta(L)} = \frac{\int_0^L \sin \eta(u) du}{1 - \cos \eta(L)}$$

約束 : 分母 = 0 $\Leftrightarrow$ 分子 = 0

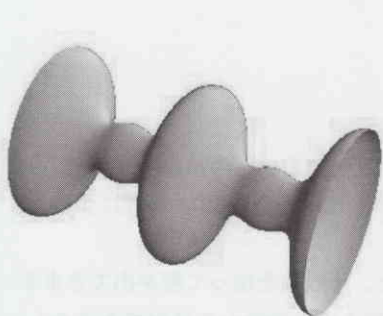
これで周期的回転面になるための必要十分条件がでたわけですが、等式 (**) を満たすような周期関数 $H(s)$ はどのようなものがあるか？ がつぎの問題です。先行結果としては、 $H(s)$ が定数でゼロでない場合がありますが、私が見つけた解答は次です。

定理(Kenmotsu, 2003) : $k(s)$ を長さ L の滑らかな平面閉曲線の曲率（弧長径数）とする。

そのとき、 $k(s)/2$ は条件 (**) を満たす。従って、 $k(s)/2$ を平均曲率にもつ周期的 回転面が存在する。

どんな平面閉曲線でも、その曲率 $k(s)$ に対し、 $k(s)/2$ を $H(s)$ として、先ほどの式に代入してやると、周期的回転面がいくらかでも得られるという結果です。デローネイの定理は、この立場から見ると、平面閉曲線として円をとった場合だったということです。円の曲率は一定ですから、アンデュロイドやノドイドになります。

実際に描いてみます。まず、平面閉曲線を楕円とするとどうなるのでしょうか？



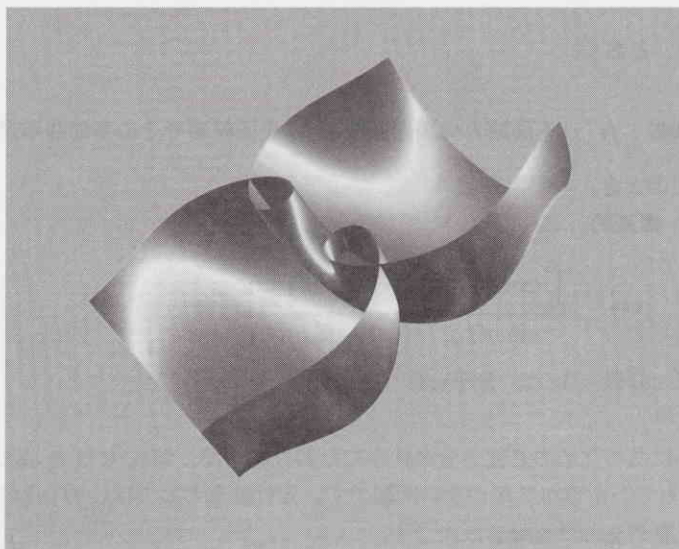
一般アンデュロイドの図



一般ノドイドの図

左側が、一般アンデュロイドになります。右側が一般ノドイドとなります。右側の曲面は中で交わっています。

次に紹介したいのが、2001年に坂根由昌氏が描いてくれた図です。



彼はあの頃、プロが使う高価なレンダリングソフトウェアを研究室に導入したばかりで、試しに描いてあげるといふことで、私の研究が実験材料になったのですが、この図を見た時はうれしかったですね。2001年ですから、この研究に関する論文も書いてない頃で、誰もやってなくて寂しいときに、彼が面白いと言ってくれて、それで研究を続ける気になりました。私にとっては思い出の曲面です。

次は高次元に拡張します。回転超曲面（タイトルにありましたが）というのは、 n 次元ユークリッド空間を考えて、その中の xy 平面に曲線を描いて、それを x 軸の周りに $n-1$ 次元空間の中で回転させてできる超曲面のことです。次元が高くなっても、式としてはほとんど同じです。

$H(s)$ を平均曲率とする回転超曲面の生成曲線 $(x(s), y(s))$ の方程式です：

$$\begin{cases} x''y' - x'y'' + (n-2)\frac{x'}{y} - (n-1)H(s) = 0 \\ x'^2 + y'^2 = 1, \quad y(s) > 0 \end{cases}$$

上の式を解こうとして、 $n=3$ のときに私が使ったアイデアでは、ダメだというのがわかります。一方、 n が4以上で $H(s)$ が一定とすると、それは Hsiang-Yu(1981) や Hsiang (1982)の研究によって、デローネイの方法は一般化できるということがわかっています。

では、 $H(s)$ が一定でないときですが、 y が正のところだけですと、一般論を使って解が出てきますが、出てきた解が x 軸に到達した時どうなるかという問題に対する答えは一般論からは出てきません。最初に調べるべき問題というのは、「 n が4以上で、与えられた連続関数 $H(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) に対して、上の微分方程式の解は大域的に存在するか？」です。もし解が大域的に存在しなければ、下の問題(2)は考える意义がありません。解が大域的に存在したとわかったときに、(2)にあるような問題「 M が周期的となるための $H(s)$ の条件は何か」を考えることができます。

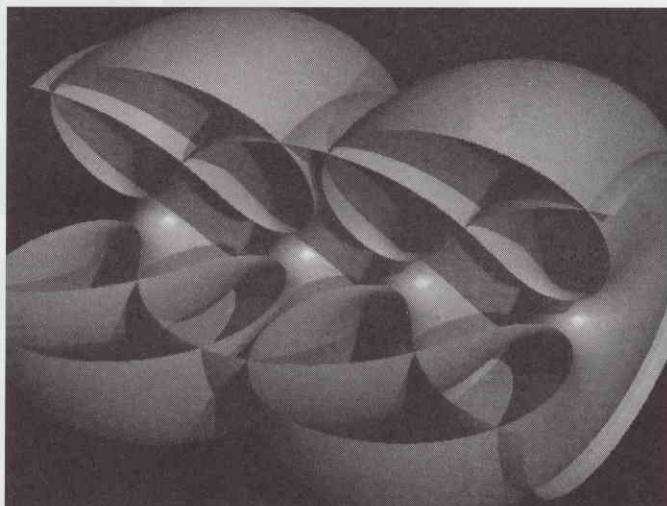
問題 $n \geq 4$ 、 $H(s) \neq c$ とき、

(1) 与えられた非定数連続関数 $H(s)$ に対し、上の微分方程式の解は大域的に存在するか？

(2) $H(s)$ を平均曲率にもつ大域的な回転超曲面を M とする。そのとき、 M が周期的となるための $H(s)$ の条件はなにか？

これについて、(1) は最近解決されました。最初、 $H(s)$ が実解析的な場合に、ドイツの数学者ドルフマイスター (J. Dorfmeister) といっしょに研究しました (Dorfmeister - Kenmotsu, DGA, 2009)。 $H(s)$ が連続関数の場合は、埼玉大学教授の長澤くん、微分方程式の専門家ですが、彼の助けを借りて解決されたと思っています (Kenmotsu-Nagasawa, preprint 2012)。(2) は未解決です。次元が高い時の必要十分条件、これはまだわかっていません。

結びですけれど、今日お話ししたことは、与えられた周期関数に対し、それを平均曲率にもつ回転面が周期的になるための判定条件を見つけたこと。応用として、任意の滑らかな平面閉曲線の曲率を使って、周期的回転面を数学的に構成できる (数式で表せる) ことを示しました。例えば、次の曲面は具体的に式で書かれていて、その数学的構造はすべてわかります。



そして、高次元の場合への拡張については未完成であることも報告しました。本日の講演はオイラーの定理から始めました。それは18世紀中頃の結果で、約百年経って、平均曲率一定曲面の意義、その重要性がわかって、デローネイがオイラーの定理を拡張しました。私は20世紀の終わる頃になってデローネイの定理を拡張し、そのあと次元を高くした場合の研究として、Dorfmeister や長澤くんと共同研究を行っています。周期的回転面という特殊な研究対象ですが、18世紀から現代へと続く研究となっていることを報告しました。