第１章　線形代数の基礎のキソ

まずは多様体の解析に欠かせない線形代数の基礎事項について確認する．とくに重要となるのは「基底」と「内積」，および「双対空間」の概念である．線形代数は意味がわからなくてもそこそこ計算が（形式的に）できるので，これらの概念にたいしてもとくに明解なイメージをもたないまま先に進んでしまう，という危険がある．

1.1　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$

1.1.1　集合としてのユークリッド空間

多様体論とは，空間の学問（のひとつ）である．空間の学問とはすなわち,「われわれの空間」，この宇宙に関する学問に還元される．われわれがどのような空間に住んでいるのか．そのような素朴な疑問がわれわれを空間の研究に駆り立てる．

一方，われわれ人間が自身をとりまく空間を３次元ユークリッド的に広がる空間として知覚（もしくは解釈）していることは，ほぼ間違いないだろう．端的に言えば，高校で学ぶ xyz 空間のように解釈している，ということである．

xyz 空間とは何か．それは，３つの実数の組 (x, y, z) によって表現される空間である．具体的には

$$\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

で定義される集合である．改めて考えてみると，この集合は単なる「『数字の組』の集まり」に過ぎず,「われわれの住む空間」という直感的解釈感覚から程遠い，無味乾燥なものである．それがたまたま,「縦・横・高さ」というわれわれの空間認識に適合した．すなわち，

$$\text{空間内の１点} \longleftrightarrow \text{３つの実数の組}$$

という表現方法がうまくいったのである．一般化された空間概念である「多様体」は，このような数字の組をベースに表現されることになる．

ユークリッド空間． まずは次の記号を定義しよう：n を自然数とする．このとき，n 個の実数 $x_1, \ldots, x_n$ を縦もしくは横に並べ，括弧で閉じたもの

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (x_1 \ \cdots \ x_n)$$

をそれぞれ **(n 次元) 縦ベクトル, (n 次元) 横ベクトル**と呼ぶ．とくに表記にこだわらず「(n 個の) 数字の組」とみなす場合は，**(n 次元) 数ベクトル** と呼ぶ．また，文中では $(x_1, \ldots, x_n)$ のような表現も併用する．[1]

以下ではほとんどの場合，縦と横の区別はしない．実際，これらの持つ情報はまったく同じものであるから，区別しないほうが自然だともいえる．そこでワンワンと吠えている動物を「いぬ」と書くか，それとも「イヌ」と書くか．同じように，与えられた n 個の実数を縦に並べて括弧でくくるか，横に並べて括弧でくくるか，必要があれば表現を使いわける，というスタンスである．[2]

考えうる n 次元数ベクトルの全体を $\mathbb{R}^n$ で表し，これを n **次元ユークリッド空間** (n-dimensional Euclidean space) とよぶ．$\mathbb{R}^n$ の元は単に**ベクトル** (vector) とも，**点** (point) ともよばれる．

1.1.2 ユークリッド空間での距離感覚

$\mathbb{R}^n$ は無味乾燥な「数字の組」の集合にすぎない．しかしこれをユークリッド**集合** (set) とよばずユークリッド**空間** (space) と呼ぶからには，なにか「空間」らしい性質があるはずである．実際，$\mathbb{R}^n$ の元，すなわちベクトルは，われわれの感覚にばっちり適合するような「距離感」をもっている．

定義. $\mathbb{R}^n$ 内の二つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1 \ \cdots \ y_n)$ に対し，これらの**距離** (distance) を

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ := \ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定義する．とくに，このように測った距離を**ユークリッド距離** (Euclidean distance) と呼ぶ．

$n = 3$ とすれば，われわれの認識する 3 次元世界でいう「直線距離」である．2 点間を結

[1] ベクトルは数字の組だといっても，牧場の牛のように無造作にちらばっているわけではなく，競走馬のように決められたゲートの中で行儀よく一列に並んでいるのである．数字がその並びの何番目に位置するか，という情報は，常にわれわれの関心にある．

[2] ただし縦ベクトルであることを強調する場合は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ = \ {}^{\mathrm{t}}(x_1 \ \cdots \ x_n)$$

とも表す．とくに右辺の小さな ${}^{\mathrm{t}}$ は，縦ベクトルを $n \times 1$ 行列とみたときの行列の**転置** (transverse) を表す．同様に横ベクトルを $1 \times n$ 行列とみて，

$${}^{\mathrm{t}}(x_1 \ \cdots \ x_n) \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

も成立する．

ぶ最短の長さ，というわけである.（この素朴な距離感覚も，あとで見るように若干の反省を要する.）

$\mathbb{R}^n$ は「数ベクトル全体」という記号の集まりであったが，このユークリッド距離によって初めて，$\mathbb{R}^n$ に「空間」らしい距離感覚と位置感覚が備え (equip) られる．たとえば $\mathbb{R}^n$ においては,「$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}'$ よりも $\boldsymbol{y}$ に近い」というややあいまいな感じのする概念が，明解な数学的表現

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;<\; d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$$

をもつ．また,「$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}'$ からみてあっちの方向にある」 といった方向感覚も，ベクトル $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ の成分により数値的に厳密な表現をもつ．さらに，基点（たとえば原点）からの距離とその方向を数値的に定めることで，点の位置が厳密に表現される.

このような数学的表現の力を味わうには，距離をもたない集合，例えば「世界中で使われている文字全体の集合」といった漠然とした記号の集まりと比較してみるとよい.

1.2 ベクトル空間とその公理的定義

1.2.1 ベクトルとは何か？

これから $\mathbb{R}^n$ をさらに一般化して，ベクトル空間の概念を導入しよう．そもそも，ベクトルとはなんだろうか？高校生のときには数ベクトルを「矢印」と習ったはずだが，これを一般化するとはいったい何を意味するのだろうか．まずは数ベクトルとは何なのか，考えなおしてみよう.

量としてのベクトル. まず数ベクトルは，計測して得られる「量」である．たとえば $\mathbb{R}^2$ 内のひし形 ABCD において，A と B，B と C の距離を測って長さという量（実数）に関する等式

$$\mathrm{AB} \;=\; \mathrm{BC} \;\in\; \mathbb{R}$$

を得る．同様に，A からみた B の位置，D からみた C の位置を測って数ベクトルという量に関する等式

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \;=\; \overrightarrow{\mathrm{DC}} \;\in\; \mathbb{R}^2$$

を得るのである.

代数系の元としてのベクトル. 上のひし形の例で，長さに関する和の式

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC} \;=\; 2\mathrm{AB} \;\in\; \mathbb{R}$$

という式が意味をもつように，数ベクトルに関しても

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}} \;=\; 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \;\in\; \mathbb{R}^2$$

という式が意味を持つ．数ベクトルは長さと同様，足すことができる量であり，2 倍，3 倍といった定数倍も意味をもつ量である.

点としてのベクトル． 数ベクトルは和や定数倍が意味を持つ「量」であった．それらを全部，ただ漠然と集めたものが集合 $\mathbb{R}^n$ である．しかし $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド距離というものがあって，数ベクトルどうしに「近い・遠い」の区別がある．この意味で，集合 $\mathbb{R}^n$ は距離感覚の備わった「空間」であり，ひとつひとつの元（数ベクトル）は空間内の「点」である．これが高校数学でいう「位置ベクトル」の実体である．

1.2.2 ベクトル・ベクトル空間の公理的定義

以上のような数ベクトルの性質を一般化しよう．ただし，以下の 2 点に注意する：

- 数ベクトルの和は可換であった．すなわち，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ がつねに成り立つ．一般化の際にも，この性質は組み込むことにする．
- ふたつのベクトルの間にユークリッド距離のような「距離」が定まることは，かならずしも仮定しない．

とくに最初の条件は，空間が「平ら」であることのひとつの表現になっている．[3]

さて「数ベクトル」を一般化した「ベクトル」とは何か．それは,「ベクトル空間の元」として定義するのである．これに関しては,『理系のための線形代数の基礎』（永田 雅宜著，紀伊国屋書店 ）という本に明解なたとえ話がある：野球選手とは何かを説明するのに，人にユニフォームを着せ，バットとグローブを持たせたところで何の説明にもならない．野球というゲームのルールを説明し，そのプレイヤーとして野球選手を定義するのが筋であろう，と．

$\mathbb{R}^n$ という集合が「『数字の組』の集まり」として定められた時点では，ただの記号の集まりのようなものである．そこに，たとえば「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を足したら $\boldsymbol{c}$ になる（$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$）」といったルール（関係式）を無数に付与したのが「数ベクトル空間」としての $\mathbb{R}^n$ である．その中の元ひとつひとつを,「数ベクトル」と呼び，計算可能なある種の「量」だと考えられる．ベクトル空間とは，このような「量」のおりなす体系（システム）なのである．

ベクトル空間・ベクトルの定義.

定義（ベクトル空間）. 集合 V が $\mathbb{R}$ 上の**ベクトル空間** (vector space) であるとは，以下を満たすときをいう：

(V1) 全ての $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in V$ に対し,「和」 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$ が一意的に (unique に) 定まる．

(V2) 全ての $\alpha\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}\in V$ に対し,「定数倍」 $\alpha\boldsymbol{a}\in V$ が一意的に定まる．

(V3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を任意の V の元, α, β を $\mathbb{R}$ の任意の元とするとき,

[3] 簡単な例を挙げておこう：平面上に東西南北が定まっているときある点から北へ 1km 進み次に東へ 1km 進んだ場合と，東へ 1km 進み次に北へ 1km 進んだ場合とでは，同じ到着地点となる．しかし「平ら」でない空間，たとえば球面では事情がことなる．地球を球面とみなし赤道上の点からスタートした場合，これらふたつのルートは別の到着地点をあたえるからである．詳しい考察は多様体を定義してからじっくり行うことにして，現時点では無批判的に,「平ら」な理想世界を得る条件として「和が可換」であるという条件を採用する．

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.
3. ある $\mathbf{0}\in V$ が存在して，$\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$.
4. 各 $\boldsymbol{a}\in V$ に $\boldsymbol{a}'\in V$ が存在して，$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\mathbf{0}$.
5. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$.
6. $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$.
7. $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$
8. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

V の元を**ベクトル** (vector) とよぶ.

上の公理の $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ で置き換えれば $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間も定義される.

まずは $\mathbb{R}^n$ が上記の性質を満たしていることは明らかであろう．もう少し素朴に，高校時代に学習した「矢印」で表現される（成分を座標で表さない）ベクトルの集合も，上記の性質を満たしている．実際にわれわれの住むこの空間で，適当な点を原点と定め，そこから出る「矢印」の集合を抽象的にイメージすることができるであろう．そして，この「矢印」の集合が，上の (V1)-(V3) を満たす様子もイメージすることができるであろう．一般に，ベクトルは数値によって表現される必要はないのである．ときには，われわれが「矢印」と呼ぶのはははばかられるような集合も「ベクトル」という形で定式化することになるであろう.

具体例. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる集合は沢山ある．いくつかあげておくので，(V1)-(V3) チェックしてみるとよい：

(1) $\mathbb{R}^n$.

(2) $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) := \{\boldsymbol{A}=A : A$ は実 n 次正方行列$\}$

(3) $\mathbb{R}^\infty := \{\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\ldots) :$ 各 $x_j\in\mathbb{R}\}$.

(4) $F := \{\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\ldots)\in\mathbb{R}^\infty : x_{j+2}=x_{j+1}+x_j\}$.

(5) $C^0(\mathbb{R}) := \{\boldsymbol{f}=f(x) : f(x)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数$\}$.

(6) $C^1(\mathbb{R}) := \left\{\boldsymbol{f}=f(x)\in C^0(\mathbb{R}) : \exists f'(x)\in C^0(\mathbb{R})\right\}$.

(7) $\mathrm{Poly}_\infty := \left\{\boldsymbol{f}=f(x)\in C^1(\mathbb{R}) : f(x)\right.$ は実係数多項式$\left.\right\}$.

(8) $\mathrm{Poly}_d := \{\boldsymbol{f}=f(x)\in\mathrm{Poly}_\infty : f(x)$ は d 次以下$\}$.

これら全てに共通の性質を列挙したものが，上のベクトル空間の定義ともいえる.

また，$C^1(\mathbb{R})\subset C^0(\mathbb{R})$ のように，ベクトル空間の部分集合が独立したベクトル空間の構造をもつことがある．これを**部分ベクトル空間** (vector subspace) と呼ぶ.

1.3 ベクトル空間の基底

空間（集合）に座標を入れることを考えよう．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合，すでにそれ自体が座標値の集まりのようなものなので，わざわざ座標をいれよう，という気にならない．ここで考えるのは，われわれの住む宇宙空間のように，座標系があらかじめ与えられていないような空間，もしくは関数の空間，数列の空間といった抽象的な空間に，座標系を定めることができるか，という問題である．

そもそも座標とは何なのか．たとえば，地球上の緯度・経度はある種の座標であろう．これがわれわれにとって信頼できるものであるのは，

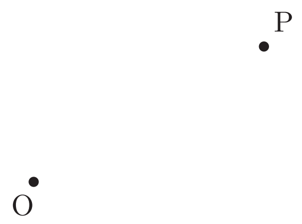
- 数値の組で表現される（よって計算ができる）
- ある点にたいし，その数値の組は一意的に定まる（よって計測者に依存しない）
- （南極・北極を除く）全ての地点に座標値が定まる

という性質が重要であろう．

ここでは（抽象的な）ベクトル空間について，そのような座標系を導入する方法を考える．

1.3.1 白紙の平面に座標を入れるには

下の図のような白紙の平面に，点 O と点 P が与えられている．ここで点 O を原点と定めて，点 P の座標値を定めたい，としよう．



一般的に，次のような方法が考えられる（読者もインストラクションだと思って実行されたい）：

1. 点 O を始点とする同一直線上にないベクトル（矢印）$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を自由に書く（描く）．
2. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ延長して，2 直線 ℓ_1, ℓ_2 をとる．これを座標軸とよぶ．

3. 座標軸 ℓ_1, ℓ_2 に，それぞれ $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ の長さを基準とした目盛りを打つ．

4. この平面上の任意の点 X を固定すると，その点から座標軸 ℓ_1, ℓ_2 それぞれに平行な直線を引き，軸上の目盛りを読むことで
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} \ = \ x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2$$
となる実数の組 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ が定まることがわかる．

5. 逆に，任意の実数の組 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ にたいし，
$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 \ = \ \overrightarrow{\mathrm{OX}}$$
を満たす平面上の点 X が**ただひとつ**定まる．

以上の方法によって，平面上の点と，$\mathbb{R}^2$ の元（実数のペア）が過不足なく対応する．(ここで $\mathbb{R}^2$ は単なる座標値の標本空間であり，ふたつの実数の組の空間とみなしている．）すなわち，ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を基準とした座標系が誕生したわけである．

以上のセッティングにより，図中の点 P に対しても
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \ = \ p_1\boldsymbol{u}_1 + p_2\boldsymbol{u}_2$$
となる実数の組 (p_1, p_2) が**ただひと組**定まるはずである．そのような (p_1, p_2) が $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の座標値である．(図 1.1)

この座標系は一般にはわれわれの慣れ親しんだ直交座標系とは異なるが，上記の「座標系」の満たすべき性質を整えていることにも注意しておこう．

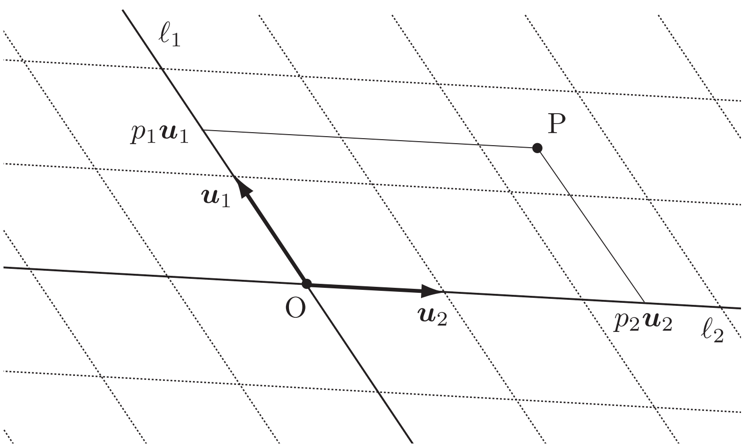


図 1.1: 「白紙の平面」に，(著者が）座標軸などを書き加えたもの．O と P の場所は変わってない．

基底とは． 上の座標系の構成では，基準となるベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を選び方が重要な要素となる．このように，座標系を入れる基準となるベクトルをベクトル空間の**基底** (basis) とよぶ．一般のベクトル空間にたいし，基底の定義を与えよう：

定義. V をベクトル空間とする．あるベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} \subset V$ が以下を満たすとき，これを V の**基底** (basis) とよぶ：

『任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対し $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ が**ただひとつ**定まり

$$\boldsymbol{a} \;=\; x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n \;=\; (\boldsymbol{u}_1 \;\cdots\; \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と書ける.』

また，$\mathbb{R}^n$ の元 $(x_1, \ldots, x_n)$ を $\boldsymbol{x}$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ に関する**座標値** (coordinate value) と呼ぶ．また，このような基底をもつ V は n **次元** (n-dimensional) のベクトル空間という．

式 (1.1) の右端の書き方は行列の記号をまねたもので，抽象的なベクトルからなる基底 $(\boldsymbol{u}_1 \;\cdots\; \boldsymbol{u}_n)$ と具体的な数値からなる座標値 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を分離して書ける，という利点がある．

ベクトル空間 V に n 個の元からなる基底が存在するとき，V と $\mathbb{R}^n$ の元は過不足なく対応する．したがって V がどんなに抽象的であっても，基底をもちいて計測することで座標値による数値化が可能なわけである．[4] 数値化はわれわれ人間にとってひとつの具体化である．また，たとえばコンピュータにとっても，計算可能な対象とするための重要なステップだといえる．

1.4 異なる基底の間の関係

先ほどの $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の問題に立ち返ってみよう．この問題で，Aretha さんはあるベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を基底として選び，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \;=\; a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 \;=\; (\boldsymbol{u}_1 \;\; \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

を得た．ここで a_1, a_2 は具体的な数値であり，「**$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ というベクトルを単位系として計った点 P の座標が** $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$」と解釈できる．

さて一方，Otis さんは別の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を選び，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \;=\; b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 \;=\; (\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

[4] この意味で，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ とは普遍的な「座標値の標本空間」だと考えられる．電話帳の電話番号の部分だけを一覧として集めたようなものだともいえる．

を得た．b_1, b_2 はもちろん，具体的な数値である．このとき明らかに

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

であるから，**同じベクトルにたいし，ふたつの異なる表現**が得られた．すなわち，「同じものを測っているのに，異なる基底（$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ と $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$）を用いたために，異なる座標値（$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$）が得られた」と解釈できる．

この状況は，日常生活をとりまく「単位」にかかわる状況とよく似ている．たとえば，われわれは長さを測るとき，必要に応じて mm, cm, m, km などを使いわける．いま一円玉の直径を L とすれば，$L = 2\mathrm{cm} = 20\mathrm{mm}$ と，**単位によって異なる表現を持つ**．同じ長さでも，異なる単位 (cm と mm) に応じて異なる数値 (2 と 20) をとるのである．このとき，$\mathrm{cm} \times \frac{1}{10} = \mathrm{mm}$ であり，$2 \times 10 = 20$ であるから，単位が $\frac{1}{10}$ 倍されると，数値は 10 倍されることが分かる．

単位を変えれば数値が変わるように，基底を変えれば座標値も変わる．上はともに同じベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表すが，基底によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\text{基} \quad \text{底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}$$

と異なる表現をもつわけである．

異なる基底間を結ぶ式． いまから考えたいのは，異なるふたつの基底が満たす関係式を見つけることである．もういちど長さの例に戻れば，われわれは 1cm= 10mm という関係式をもとに，2cm の長さをもつものが 20mm であることを計算できる．同様に，1 坪（畳 2 枚分）が約 $3.3\mathrm{m}^2$ であることをもとに，広さ $65\mathrm{m}^2$ のマンションが大体 20 坪（40 畳）弱であることを推測できる．

同様の操作を，基底についてやってみよう．Otis の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を Aretha の基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を単位系として測定した場合，

$$\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix}$$

のように座標値が計算できる．もちろん，q_{ij} は具体的な実数値である．

したがって，行列の記法を活用すれば

$$(\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

と書けることがわかる．右に現れた行列 を Q で表そう．Q の行列式が 0 だと仮定すると，上の座標値から $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が同一直線上にあることになってしまい，矛盾である．よって逆

行列 Q^{-1} が存在する．結局，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)Q \\ (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2) &= (\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)Q^{-1}\end{aligned}$$

という関係式が成り立つことがわかる．これが**基底の変換公式**である．これは「長さ」でいえば単位の変換公式 10mm=cm などに対応する．

では，基底の変化による座標値の変化を見てみよう．上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

基底の変換公式を用いれば

$$\underline{(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)}\underline{\underline{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}}} = \underline{(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)Q^{-1}}\underline{\underline{\cdot Q\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}}} = \underline{(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)}\underline{\underline{Q\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}}}$$

となる（下線は補助的なもので数学的な意味はない）．さて $(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)$ は基底である以上，同一点の座標値は同じでなくてはならない．したがって，一般に**座標値の変換公式**

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

を得る．いま，Aretha の基底 $(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)$ を Otis の基底 $(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)$ に変換したい場合,「基底が右から行列 Q 倍されるので，座標値は左から Q^{-1} 倍される」と言える．

ここで，数値 a_1, a_2, b_1, b_2 や，行列 Q の中の数字は，Otis や Aretha など観測者の基底の取り方に依存する人為的な数値であることに注意しておこう．一方で彼らの選んだ基底が「白紙の平面に描いた矢印」に過ぎないことを思うと，このように数値が現れることが不思議ですらある．

1.4.1 基底と座標値の変換公式：一般の場合

上記の議論を，一般的な（抽象的な）ベクトル空間で繰り返すことができる．V を $\mathbb{R}$ 上の（絵に描けない/描かない）ベクトル空間とする．もちろん，関数の空間，行列の空間など，ユークリッド空間以外のものもイメージしている．いま，何らかの方法で V の基底をふたつ見つけてきたとしよう．それぞれ $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ と $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ とおく．[5]

すると，各 $1 \leq k \leq n$ に対し，$\boldsymbol{v}_k$ を基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ で測った座標値は

$$\boldsymbol{v}_k = (\boldsymbol{u}_1\ \cdots\ \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix}q_{1k}\\\vdots\\q_{nk}\end{pmatrix}$$

[5] このとき，これらの元の数 n が一致することは自明ではない．ここではその事実を仮定する．

の形で与えられる．この縦ベクトルはもちろん，具体的な数値からなる．したがって，行列の記法で

$$(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n) \ = \ (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

と書ける．ここに現れる（具体的な実数値からなる）行列を $Q := (q_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ とおけば，さきほどと同様にして一般のベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ が

$$\boldsymbol{a} \ = \ (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \ = \ (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と書けるとき，**基底の変換公式**および**座標値の変換公式**

$$(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n) \ = \ (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)Q, \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \ = \ Q^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

が成立する．

1.5 線形写像，とくに同型写像

U と V をベクトル空間とする．写像 $f : U \to V$ が与えられたとき，これは U の出来事，構造，その他もろもろの情報を V に投影している，と考えられる．このとき，その「写り方」にはどのような性質を期待するべきであろうか．

もっとも素朴な期待は，U はベクトル空間なのだから，写った先 $f(U)$ でもベクトル空間としての代数的構造（ベクトルどうしの和・定数倍に関する関係式）が保存される，という状況である．[6]：

定義. 写像 $f : U \to V$ が**線形写像** (linear map) であるとは，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U, \alpha \in \mathbb{R}$ にたいし

(L1) $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$

(L2) $f(\alpha \boldsymbol{a}) = \alpha f(\boldsymbol{a})$

が成り立つことをいう．

これらの式は動的に解釈するのがよい．たとえば (L1) は，

[6]たとえば自分の証明写真をとるとき，白黒になってしまうのはよいが，顔のパーツの位置関係がばらばらになってしまっては困る．自分の顔という情報を別のものに投影するとき,「保存したい情報」というもの暗に存在しているわけだ．

> U の側で，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が足され，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が得られた．この現象を f というレンズを通して V に写すと，$f(\boldsymbol{a})$ と $f(\boldsymbol{b})$ が足され，$f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})$ が得られたように見える

と解釈できる．[7]

線形写像の具体例を挙げるならば，まずはユークリッド空間における例をみておくべきだろう．$U=\mathbb{R}^m, V=\mathbb{R}^n$ にたいし，適当な $n\times m$ 行列 A をもちいて $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ とすればこれは線形写像である．$n=m$ の場合は，一次変換と呼ばれる類のものである．

線形写像の特徴づけとして,「比例関数の一般化」という考え方もできる．上の例で $m=n=1$ とした場合を考えてみよう．すなわち A を実定数とし，関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=Ax$ を考えるのである．このとき明らかに，いわゆる比例関係 $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ が任意の定数 α について成立する．また，$f(x+y)=f(x)+f(y)$ も明らかである．このように，もっとも簡単な関数である比例関数が満たすべき性質を，高次元なりに抽象化し，実現しているのが線形写像だとも考えられる．

注意． 線形写像は非常にありふれたものに思えるが，実際には非常にまれなものだと考えるべきであろう．たとえば，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$ のような関数すら線形写像でない．しかし，線形写像は「局所的には」ありふれている．次章で見るように，あらゆる可微分写像はあらゆる場所で「線形写像＋誤差」と局所的に表現されるからである．

1.5.1 同型写像

線形写像 $f:U\to V$ が全単射であるとき，**同型写像** (isomorphism) という．全単射性から，U のベクトル全体と V のベクトル全体の間に一対一の対応がつく．また，線形性より和，実数倍といった基本的な演算も対応がつく．これより，V は U を f という精巧なレンズで観測した像であり，実体は同じものだ，とも考えられる．

具体例を見ておこう．V を 3 次元ベクトル空間とし，何でも良いので基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ をひとつ固定する．

このとき，任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ にたいし，$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+a_3\boldsymbol{u}_3\in V$ となる座標値 $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ が一意的に定まる．そこで，写像 $\phi=\phi_{\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}}:V\to\mathbb{R}^3$ を $\phi:\boldsymbol{a}\mapsto(a_1,a_2,a_3)$ で定めることができる．この ϕ は，同型写像となる．

まず全単射であることを確認しよう：任意の $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ をとれば明らかに $\phi(a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+a_3\boldsymbol{u}_3)=(a_1,a_2,a_3)$ となるので ϕ は全射．また，ある $\boldsymbol{a}'=a'_1\boldsymbol{u}_1+a'_2\boldsymbol{u}_2+a'_3\boldsymbol{u}_3\in V$ にたいし $\phi(\boldsymbol{a})=\phi(\boldsymbol{a}')$ が成り立つとき，ϕ の定義より $a_i=a'_i$ $(i=1,2,3)$ が成り立つ．結局 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$ である．よって単射性も示された．

[7] 標語的に言えば，(L1) は「和の像は像の和」ということになる．(L2) も同様に実数倍の像は像の実数倍」ということになる．

つぎに線形性を確認する：$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1 + b_2\boldsymbol{u}_2 + b_3\boldsymbol{u}_3 \in V$，$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \phi(\boldsymbol{a}) + \phi(\boldsymbol{b}) \\ \phi(\alpha\boldsymbol{a}) &= \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \alpha\phi(\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

が成り立っている．[8] すなわち，

「和の座標値＝座標値の和」かつ「定数倍の座標値＝座標値の定数倍」

が成立する．この $\phi : V \to \mathbb{R}^3$ という写像は，ベクトル空間 V 内の元とその座標値（ $\mathbb{R}^3$ の数ベクトル）の間に過不足ない対応を与え，かつ V 内の基本的な演算は座標値に正しく反映する．この意味で，ϕ というレンズは「精巧」なのである．

同型写像による「観測」． 同型写像はふたつのベクトル空間を移しあう精巧なレンズである．たとえば同型写像 $\phi : V \to U$ があるとき，V の性質や出来事を U の性質や出来事として「観測」することができる．

われわれは地図上の距離を何 cm か測って，実際の距離を割り出すことがある．これは地図 V と実際の地形 U の精巧な対応（同型写像）ϕ をもとに，V の性質を U の性質とみなして距離の「観測」を行っているのである．

あとで見ていくように，このような考え方は，「引き戻し」や「押し出し」といった概念として数学に深く根付いているのである．

1.6　内積

まずは高校での数学を思い出そう．$n = 2$ もしくは 3 のとき $\mathbb{R}^n$ 内のベクトル $\boldsymbol{a} = [a_1 \ \cdots \ a_n]$, $\boldsymbol{b} = [b_1 \ \cdots \ b_n]$ の**内積** (inner product) を

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := a_1b_1 + a_2b_2 \in \mathbb{R}$$

もしくは

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \in \mathbb{R}$$

と定義した．

内積には $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ という対称性があるので，これベクトルの「積」と考えたくなる気持ちはよくわかる．しかし現代の解析学や幾何学では，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の機能を分離して，「$\boldsymbol{a}$ で $\boldsymbol{b}$ を測って得られる値」と解釈することが多い．以下では内積の「測定器」としての機能について理解しておこう．

[8] 以上の計算は当たり前すぎて，最初は何を証明しているのかわからないかもしれない．ϕ を定義した瞬間にはそれが同型写像かどうかはっきりわからないので，本当に同型写像の定義を満たしていることをわざわざ確認しているのである．

1.6.1 ベクトルを「測る」道具

ベクトルを「測る」ことを考えよう．まずは，すべてのベクトル空間のプロトタイプである，$\mathbb{R}^n$ 内のベクトルについて考えてみる．無駄な抽象化は避けたいので，$n = 2$ で話を進めよう．

ある与えられたベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ について，その xy 座標の値を測定したいとしよう．x 座標値を求めるのに，普通なら $\boldsymbol{x}$ の端点から x 軸に垂線を下ろし，その目盛を読めばよい．y 座標も同様である．しかしここでは，ちょっとひねくれた方法を用いる．

手元に偶然，ふたつの「内積測定器」があったとしよう．ひとつは，与えられたベクトル $\boldsymbol{x}$ にたいして

$$f_1(\boldsymbol{x}) \ := \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

の値を測定する機械である．同様に，もうひとつは

$$f_2(\boldsymbol{x}) \ := \ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

の値を測定する．これらの機械がどのように値を測定するのか，その原理は一切気にしないことにして（この部分が重要である），無批判的に最初に与えられたベクトルをこの機械にかけてみる．たとえば値として，

$$f_1(\boldsymbol{x}) = -3.8 \quad \text{かつ} \quad f_2(\boldsymbol{x}) = 5.2$$

が得られたとしよう．これより，連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y = -3.8 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - 2y = 5.2$$

を解くことで，$x = -0.8, y = -3.0$ を得る．

以上で重要なのは，

- ベクトルを測定する機械（ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数）が複数与えれている．
- それらの機械による測定値を組み合わせれば，ベクトルが特定される

ということである．[9]

さらに「内積測定器」の特殊事情として

- 測定値から得られる連立方程式は連立１次方程式である．
- したがって，連立方程式に対応する行列（上の例の場合 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$）が正方行列かつ正則であれば，ベクトルが一意的に特定できる．

ということがわかる．

[9] ただし，次元を上げて考えればすぐにわかるように，$\mathbb{R}^n$ のベクトルを完全に特定したければ，少なくとも n 個の測定器が必要となる．

1.6.2 「内積測定器」の値分布

もうすこし「内積測定器」の性質について調べてみよう．いま上の「測定器」

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

が，各ベクトル $\boldsymbol{x}$ にどのような値を割り振る関数なのか考えてみる．たとえば $\boldsymbol{x} = (x, y)$ として，ある定数 $k \in \mathbb{R}$ について $f_1(\boldsymbol{x}) = x + y = k$ となる集合は傾き -1 の直線群となる．すなわち,「測定器」 f_1 によって，平面 $\mathbb{R}^2$ に一斉に実数が図 1.2 のように割り振られることになる．

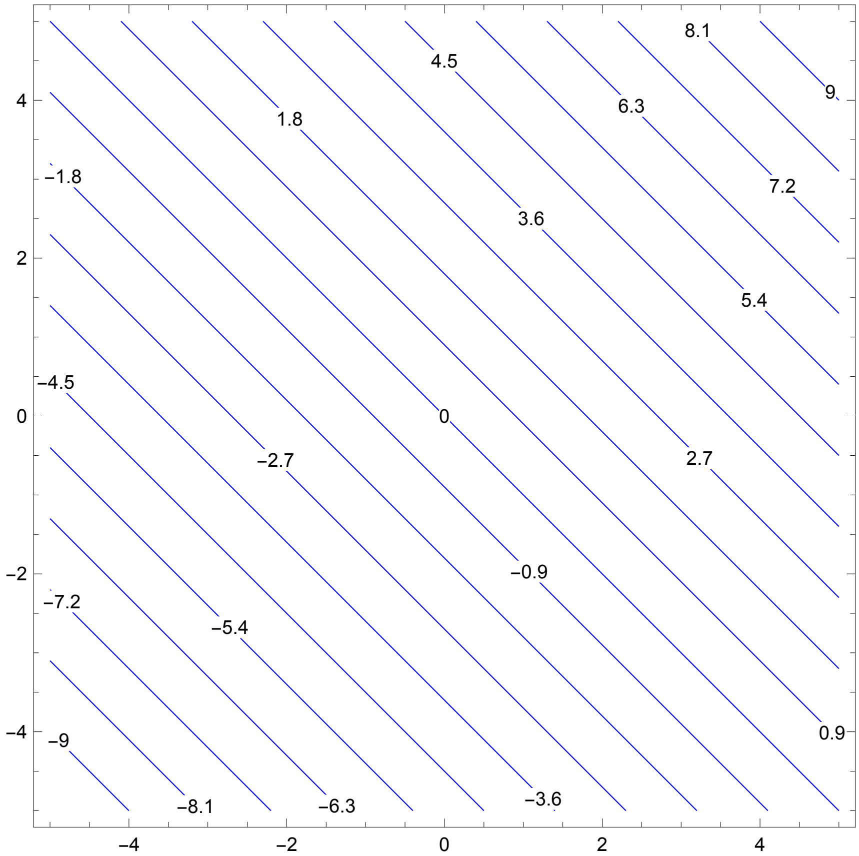


図 1.2: $f_1(\boldsymbol{x}) = x + y$ の値分布．各ベクトル $\boldsymbol{x}$ の「測定値」である．(k が 0.9 の整数倍である部分に等高線が引いてある．)

このような単純な「測定器」(関数) でも，ベクトルを区別するには十分役に立つ．もし $f_1(\boldsymbol{x}) \neq f_1(\boldsymbol{x}')$ であれば，それだけで $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ が結論できるからである．[10] 仮に $f_1(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}')$ でも (このような確率はかなり低い)，別の「測定器」，たとえば f_2 を使えば $f_2(\boldsymbol{x}) \neq f_2(\boldsymbol{x}')$ が得られるかもしれない．

[10] 足のサイズが違えば別の人，という素朴なロジック．

一般に，$\boldsymbol{a} = (a, b)$ として，

$$f_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \ = \ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

で与えられる「内積測定器」の値分布は（$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ でない限り）直線群 $\{ax + by = k\}_{k \in \mathbb{R}}$ で与えられる．しかもその値は，ベクトル $\boldsymbol{a} = (a, b)$ 方向に，**一様に**割り振られている．

この「内積測定器」$f_{\boldsymbol{a}}$ は，次を満たしている：

- **（線形性）**$f_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は線形写像である．すなわち，$f_{\boldsymbol{a}}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \alpha f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})+\beta f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y})$ がなりたつ．とくに，$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{0}) = 0$ である．
- **（等高線の性質）**$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}')$ であれば，$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \perp \boldsymbol{a}$. したがって，等高線は $\boldsymbol{a}$ と直交する直線群となる．
- **（一意性）**$f_{\boldsymbol{a}}$ と $\boldsymbol{a}$ は一対一に対応する．すなわち，$f_{\boldsymbol{a}} = f_{\boldsymbol{a}'}$ が同一の値分布を与える「内積測定器」であれば，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$.

これらの性質を確かめるのは実質的に高校生レベルの計算なので，読者にまかせよう．

1.6.3 線形汎関数

「内積測定器」の性質を一般化して，線形性をもった「測定器」の一群をかんがえよう．一般に $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が線形写像であるとき，これを $\mathbb{R}^n$ の **線形汎関数** (linear functional) とよび，$(\mathbb{R}^n)^*$ と書き表す．明らかに,「内積測定器」$f_{\boldsymbol{a}}$ は線形汎関数である．

じつは，$\mathbb{R}^n$ の線形汎関数はすべて「内積測定器」である：

> **定理 1.6.1** 任意の線形汎関数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ にたいし，ある $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ がただひとつ存在して，$g = f_{\boldsymbol{a}}$ をみたす．

証明. とくに意味はないが $n = 7$ のときを証明する．$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_7\}$ を $\mathbb{R}^7$ の標準基底とする．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^7$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_7\boldsymbol{e}_7$ の形で書けるので，線形性より

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 g(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_7 g(\boldsymbol{e}_7) = \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{e}_1) \\ \vdots \\ g(\boldsymbol{e}_7) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix}$$

よって $\boldsymbol{a} = (g(\boldsymbol{e}_1), \cdots, g(\boldsymbol{e}_7))$ とすれば，$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．$\boldsymbol{x}$ は任意だったので，主張をえる．$\boldsymbol{a}$ の一意性は上でみたとおり． ■

余談：「縦と横」による解釈. 以上より，すべてのベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ は線形汎関数 $f_{\boldsymbol{a}}$（「内積測定器」）をひとつ定め，逆にすべての線形汎関数 $g \in (\mathbb{R}^n)^*$ は上の定理の意味でベクトル $\boldsymbol{a}$ をひとつ定める．すなわち $\mathbb{R}^n$ のベクトルと $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の間に

は全単射が存在している．このような状況では,「本来同じものに，異なる表現（名前と役割）をあたえているのではないか」と解釈したくなる．[11]

この状況を具体的に表現する一つの手法として，$\boldsymbol{a}$ たちを横ベクトルだとみなす，という方法がある: さきほどの証明で重要なのは,

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 g(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n g(\boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{e}_1) \\ \vdots \\ g(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

の部分であった．これをあえて，行列の積の要領で

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 g(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n g(\boldsymbol{e}_n) = (g(\boldsymbol{e}_1) \ \cdots \ g(\boldsymbol{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と，横ベクトルと縦ベクトルの積として表現してみる．便宜的に「横ベクトル全体」，すなわち $1 \times n$ 行列の全体を $\mathbb{R}_n$ と表すことにすると，g は実質的に「横ベクトル」$(g(\boldsymbol{e}_1) \ \cdots \ g(\boldsymbol{e}_n)) \in \mathbb{R}_n$ に対応することがわかる．一般に，任意のベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ を「横ベクトル」$\boldsymbol{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in \mathbb{R}_n$ と意識的に解釈し，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を「縦ベクトル」と解釈して

$$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \ = \ \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \quad \leftarrow\text{行列の積}$$

のよう考えることができる．すなわち,『線形汎関数はある「横ベクトル」との行列の意味での積』であり,『この「横ベクトル」が線形汎関数の実体』だと解釈できるのである．

同様に，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ をともに「縦ベクトル」と意識的に解釈して

$$\text{内積}\rightarrow \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \ = \ {}^{t}\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \quad \leftarrow\text{行列の積}$$

と解釈することもできる．この場合,『「縦ベクトル」が線形汎関数の実体』と解釈していることになるだろう．

これらの解釈に，正解とか正統とかいうものはない．数学的対象の表現（書き表し方）を変えているだけで，本質は何も変化していないのである.（ここでいう「本質」とは，$\boldsymbol{a}$ というベクトルのもつ実質的情報と，ベクトルを測定する線形汎関数としての機能ことである.）われわれは習慣的に行列を多用するため，それと相性の良い表現や解釈をしてみただけのことである．

1.6.4 双対空間

内積は任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ にたいし，

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x} \ = \ \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}) \quad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

を満たしている．これは，集合 $(\mathbb{R}^n)^*$ の中で線形汎関数（=「内積測定器」）たちが満たす無数の関係式

$$f_{\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) \ = \ \alpha f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \beta f_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) \quad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

[11] ある大学教授の男性が，家に帰れば父親という役割を演じていたりする．ひとつの実体が複数の役割を演じることはよくあるではないか．

にほかならない．このような関係式は，集合 $(\mathbb{R}^n)^*$ にベクトル空間としての構造をもたらす．

> **定義（双対空間）** 任意の線形汎関数 $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$，定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ について，
>
> - **和：** $f + g \in (\mathbb{R}^n)^*$ を $(f+g)(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \ \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$
> - **スカラー倍：** $\alpha f \in (\mathbb{R}^n)^*$ を $(\alpha f)(\boldsymbol{x}) := \alpha f(\boldsymbol{x}) \ \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$
>
> と定義する．これにより，集合 $(\mathbb{R}^n)^*$ はベクトル空間の公理をみたす．このベクトル空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ は $\mathbb{R}^n$ の**双対空間** (dual space，そうついくうかん) と呼ばれる．

$(\mathbb{R}^n)^*$ が実際にベクトル空間の公理を満たすことをチェックするのはさほど難しくない．たとえば，このベクトル空間のゼロベクトルは $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ にすべて $0 \in \mathbb{R}$ を対応させる線形汎関数である．[12] とりあえず，

- 「ベクトル測定器」である線形汎関数の集合に和・スカラー倍といった演算を導入し，（別の）ベクトル空間とみなすことができる

という点が新しい．いま，線形汎関数の集合は無数の関係式で満たされていて，ひとつのベクトル空間になったのである．

1.6.5 双対性：「ベクトル測定器」を「測定」する

ある未知の線形汎関数がふたつ， $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ として与えられているとき，これらを区別することはできるだろうか？もっともシンプルな方法は，実際にこれら「ベクトル測定器」でベクトルを測定させてみて，その値を比べることである．たとえば $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ を測ってみて，$f(\boldsymbol{e}_1) \neq g(\boldsymbol{e}_1)$ であれば，この時点で $f \neq g$ が結論できる．ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ は線形汎関数 $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ に実数 $f(\boldsymbol{e}_1) \in \mathbb{R}$ を対応させる,「『ベクトル測定器』測定器」として機能したのである.「線形汎関数測定器」と呼んでもいいだろう．

一般に，未知の線形汎関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が与えれていても，以下のように，複数のベクトルを測定した値から，f の具体的な形を特定することだって可能である．

次のふたつの「線形汎関数測定器」を準備しよう：ひとつは，あたえられた線形汎関数から $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ での値を「測定」するもの.（これは，線形汎関数の $\boldsymbol{e}_1$ における値を読み取るだけのことである.）もうひとつは，$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ での値を「測定」するもの．

これらを用いて，測定値として，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = 3.1, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = 4.8$$

が得られたとしよう．このとき，任意の $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ にたいし

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) = xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2)$$

[12] もともと $(\mathbb{R}^n)^*$ の元の実体は $\mathbb{R}^n$ の元（数ベクトル）と解釈できるのであるから，ベクトル空間の構造をもつことは納得できるであろう．しかし，この定義によれば，内積を経由しそのような解釈をしなくても，線形汎関数という枠組みのままでベクトル空間の構造が入ってしまうことに注意したい．

であるから，結果的に $f(\boldsymbol{x}) = 3.1x + 4.8y$ と特定される．

これは，

> 『線形汎関数 f をふたつの「線形汎関数測定器」 $\boldsymbol{e}_1$ および $\boldsymbol{e}_2$ で測定し，その値をもとに f の形を完全に特定した』

と解釈できる．ここでは話を簡単にするのに標準基底を「線形汎関数測定器」として用いたが，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ にはそのような機能があると考えられる．

練習問題． 一般に $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ が基底であるとき，$f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$ の値が測定できれば，f を特定できることを証明せよ．

双対性． これまでの考察をまとめると，

- 線形汎関数 $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ はベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を測定し，その測定値は $\boldsymbol{x}$ に関して線形である．
- ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は線形汎関数 $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ を測定し，その測定値は f に関して線形である．

という対称な関係が見てとれる．互いに測り・測られる，このような対称性は，特別なことばで「双対性」（そうついせい）と呼ばれる．この性質を強く認識した上で，$(\mathbb{R}^n)^*$ を $\mathbb{R}^n$ の**双対空間** (dual space) と呼ぶ．

線形汎関数の実体はあるベクトルとの内積を計算するものだから，この関係は内積のもつ対称性を言い替えたものにほかならない．しかし一般化を考える場合，内積の存在を内部原理とはせず，単にベクトルと線形汎関数の関係だけに着目するほうが都合がよい．

1.6.6 一般化（まとめ）

以上の結果を，一般の（有限次元）ベクトル空間 V に拡張してみよう．

ベクトル測定器としての線形汎関数． 関数 $f : V \to \mathbb{R}$ が線形写像であるとき，f は V の**線形汎関数** (linear functional) とよばれる．線形性より，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ について

(LF1) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$

(LF2) $f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$

が成立する．線形汎関数は，ベクトル空間 V 全体に一斉に実数値を割り振る．しかもその分布は，(LF1) と (LF2) に由来する一様性を持っている．

線形汎関数は，どんなに抽象的なベクトルであっても，「測定値」として実数を返す．具体例を見ておこう：

例． $V = \mathbb{R}^\infty$ にたいし，関数 $f : V \to \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, \ldots) \in V$ に

$$f(\boldsymbol{x}) \;:=\; a_7 \;\in\; \mathbb{R}$$

を対応させるものだとする．この f はたしかに (LF1)，(LF2) をみたし，線形写像である．7 という数字にとくに意味はないが，とにかく V の元（数列）にたいし 7 項目を測定する線形汎関数である．

例． $V = \mathrm{Poly}_2$ にたいし，関数 $f: V \to \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{x} = x(t) \in V$ に

$$f(\boldsymbol{x}) \ := \ x(0) \ \in \ \mathbb{R}$$

を対応させるものとする．この f も (LF1)，(LF2) をみたす線形写像である．2 以下の多項式の，$t = 0$ での値を測定する線形汎関数だともいえる.（先ほどの例とよく似ている.）

例． $V = \mathrm{Poly}_2$ にたいし，関数 $f: V \to \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{x} = x(t) \in V$ に

$$f(\boldsymbol{x}) \ := \ \int_0^1 tx(t)dt \ \in \ \mathbb{R}$$

を対応させるものとする．これもちゃんと，線形写像になっている．この積分の意味は不明だが，とにかく f は 2 次以下の多項式 $\boldsymbol{x} = x(t)$ を計測し，実数値を返す線形汎関数である．

これらのような抽象的な例にたいしても，図 1.2 のような等高線の図をイメージしておくと良いかもしれない．

双対空間． V 上の線形汎関数全体の集合を V の**双対空間** (dual space) とよび，V^* と表す．この集合は，次の和と定数倍によりベクトル空間となる：$f, g \in V^*, \alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，

(DS1) $f + g \in V^*$ は $\boldsymbol{x} \in V$ に $f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ を対応させる線形汎関数.

(DS2) $\alpha f \in V^*$ は $\boldsymbol{x} \in V$ に $\alpha f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ を対応させる線形汎関数.

すなわち，集合 V^* には，和と定数倍による無数の関係式が導入され，ベクトル空間としての構造が入るのである．

双対空間の元の測定． 線形汎関数，すなわち V^* の元はベクトル空間 V のベクトルを線形に測定する機械である．たとえばベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を区別したいとき，ある $f \in V^*$ について $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{y})$ であれば，われわれは $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ を結論できる．

一方，V の元もまた，V^* の元（これ自身もベクトルである）を測定する機械なのである．たとえば線形汎関数 f と g を区別したいとき，ある $\boldsymbol{x} \in V$ について $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ であれば，われわれは $f \neq g$ を結論できる．

そのようなベクトルと線形汎関数の対称な，もしくは陰と陽のように相補的な関係に着目したのが双対性の考え方である.（これまでの定義では,「内積」の概念を用いていないことに注意.）

双対基底． V の元を座標値で数値的に表現するには，基底をまず固定しなければならない．このとき，V^* にも次のような都合の良い基底を見つけることができる：

定理 1.6.2 V を有限次元ベクトル空間，$\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\} \subset V$ をその基底（のひとつ）とする．このとき，双対空間 V^* にもある基底 $\{f_1, \dots f_n\} \subset V^*$ が存在して，

$$f_i(\boldsymbol{u}_j) \ = \ \delta_{ij} \ := \ \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たす．とくに，$\dim V = \dim V^*$.

この基底 $\{f_1, \dots, f_n\}$ を基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ の**双対基底** (dual basis) と呼ぶ.

証明． 深い意味はないが $n = 6$ とする．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は

$$\boldsymbol{x} \ = \ x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots x_6\boldsymbol{u}_6 \ = \ (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_6) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$$

と表現される．ただし，$x_1, \dots, x_6$ は $\boldsymbol{x}$ に応じて変化する実数たち（座標値たち）である．

このとき，$f_i : V \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, 6)$ を

$$f_i : \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_6) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \mapsto x_i$$

と定める．すなわち，

『$\boldsymbol{x} \in V$ を基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_6\}$ で測定して得られる第 i 座標値』

と定義する．これが実数値の線形写像（よって線形汎関数）であり，$f_i(\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ を満たすことは（基底の意味を考えれば）あきらか.

つぎに，$\{f_1, \dots, f_6\}$ が V^* の基底となっていることを示そう．$g \in V^*$ を任意に選ぶと，具体的な実数値 $\alpha_j = g(\boldsymbol{u}_j)$ $(j = 1, \dots, 6)$ が定まる．このとき，

$$g(\boldsymbol{x}) = g(x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_6\boldsymbol{u}_6) = x_1 g(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + x_6 g(\boldsymbol{u}_6) = x_1\alpha_1 + \cdots + x_6\alpha_6.$$

一方，

$$(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_6 f_6)(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_6 f_6(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_6 x_6.$$

$\boldsymbol{x} \in V$ は任意だったからよって $g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_6 f_6$ と表される．すなわち，任意の V^* の元 g は $\{f_1, \dots, f_6\}$ の線形結合で表現され，その座標値は $(\alpha_1, \dots, \alpha_6) \in \mathbb{R}^6$ となる．

つぎに，この座標値が一意的であることを示そう．もし $g = \alpha'_1 f_1 + \cdots + \alpha'_6 f_6$ が V^* の元として成り立つなら，$\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, \dots, 6)$ を測定した値を比較することで $g(\boldsymbol{u}_j) = \alpha_j = \alpha'_j$ が成り立つ．これは $\{f_1, \dots, f_6\}$ で測った座標値の一意性を意味する．以上から，$\{f_1, \dots, f_6\}$ は双対空間 V^* の基底である． ■

内積． 次に，内積を一般化してみよう．[13]

定義（内積）． 一般の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V にたいして，関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ で，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ および $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

(IN1) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$

(IN2) $\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$

(IN3) $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \alpha \boldsymbol{b} \rangle$

(IN4) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$（ただし等号は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときのみ）

が成り立つようなものを，**内積** (inner product) と呼ぶ．また，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$ を $\|\boldsymbol{a}\|$ で表し，$\boldsymbol{a}$ の**ノルム**もしくは**長さ**とよぶ．

言葉の濫用ではあるが，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**という．このような幾何学的な表現は，数学の可能性を広げるという意味で異常なほど威力を発揮することがある．

例． この内積の定義においては，慣れ親しんだ $\mathbb{R}^n$ の内積も単に「特殊な例」とみなされてしまう．

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ にたいし，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \ := \ (a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \ = \ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \ \in \ \mathbb{R}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**標準内積** (canonical inner product) と呼ぶ．必要に応じて，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ で表すこともある．

例． $\boldsymbol{P}$ を n 次正則行列とし，$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ という写像を考えると，次の式で定義された $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\boldsymbol{P}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は内積となる：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{P}} \ := \ \langle \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} \ \in \ \mathbb{R}$$

これは，同型写像 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ で写した先の標準内積を，もとのベクトルたちの内積として採用する．これも，(IN1)–(IN4) をみたす $\mathbb{R}^n$ の内積である．

例． 閉区間 $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ 上の連続関数全体の集合を $C^0(I)$ で表す．このとき，$\boldsymbol{f} = f(t), \boldsymbol{g} = g(t) \in C^0(I)$ の内積（のひとつ）として

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle \ := \ \int_I f(t) g(t) dt \ \in \ \mathbb{R}$$

と定義できる．このとき，たとえば偶関数と奇関数は必ず直交する．

[13] 実数の積も，「2 変数」関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ とみなすことができる．同様に，内積も「2 ベクトル変数」関数 $f : V \times V \to \mathbb{R}$ の一種として定義するのである．

内積測定器. V に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ が与えられているとしよう．一般に，$\boldsymbol{a} \in V$ を固定した場合,「内積測定器」

$$f_{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle \in \mathbb{R}$$

は V 上の線形汎関数，すなわち V^* の元を定める.

逆に，次のことが成立する：

> **命題 1.6.3** V に上のような内積が定められているとする．このとき，任意の $g \in V^*$ にたいし，ある $\boldsymbol{a} \in V$ が存在して $g = f_{\boldsymbol{a}}$ となる.

すなわち，任意の V^* の元は「内積測定器」である．もちろん，V に内積が定義されていれば，の話だが.

練習問題. 上の命題を証明せよ．(Hint: 内積があれば，グラム-シュミットの直交化法により，V の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が取れる．その双対基底を $\{f_1, \ldots, f_n\}$ とすれば，$f_i(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x} \rangle$ が成り立つ．$g = \sum_i \alpha_i f_i$ と書けるので，$\boldsymbol{a} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{u}_i$ とすれば $g = f_{\boldsymbol{a}}$ をみたす．)