

2012年度数学I演習第3回

理II・III 21 ～ 24組

5月24日 清野和彦

問題 1. 有界閉区間 $[a, b]$ を定義域とする連続関数 f の値域 $\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ は有界閉区間であることを証明せよ。

問題 2. 有界閉区間を定義域とする連続関数 f で、

「値域に属する任意の y に対し $f(x) = y$ を満たす x がちょうど2個ある」

という性質を持つものは存在しないことを示せ。

関数 g が関数 f の**逆関数**であるとは、 g の定義域および値域はそれぞれ f の値域および定義域と一致し、 f の定義域内の任意の実数 x に対し $g(f(x)) = x$ が成り立ち、また、 g の定義域内の任意の実数 y に対し $f(g(y)) = y$ が成り立つことです。

関数 f は、 f の定義域内の任意の二つの実数 x_1 と x_2 に対し、 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとき**狭義単調増加**であると言い、 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つとき**狭義単調減少**であると言います。

問題 3. 区間を定義域とする連続関数 f について、次の二つを証明せよ。

(1) f が逆関数を持つための必要十分条件は f が狭義単調増加または狭義単調減少であることである。

(2) f が逆関数を持つならば、逆関数 f^{-1} も連続関数である。

問題 4. 微分可能な関数 f が逆関数 f^{-1} を持つとする。 f^{-1} が $f(a)$ で微分可能であるための必要十分条件は $f'(a) \neq 0$ であることであり、そのとき

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

であることを証明せよ。

問題 5. 実数全体を定義域とする関数

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{ただし} \quad f(0) = 0$$

について次の問に答えよ。

(1) $x \neq 0$ において $f'(x)$ を計算せよ。

(2) $f'(0)$ を計算せよ。

(3) 導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で不連続であることを示せ。

$\sin x$ は定義域を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に狭めると狭義単調増加ですので逆関数を持ちます。その逆関数を $\text{Arcsin } x$ と書き**アークサイン**と呼びます。

$\cos x$ は定義域を $[0, \pi]$ に狭めると狭義単調減少ですので逆関数を持ちます。その逆関数を $\text{Arccos } x$ と書き**アークコサイン**と呼びます。

$\tan x$ は定義域を $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に狭めると狭義単調増加ですので逆関数を持ちます。その逆関数を $\text{Arctan } x$ と書き**アークタンジェント**と呼びます。

問題 6. 次の値を計算せよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \text{Arcsin} \frac{1}{2} & (2) \text{Arcsin}(-1) & (3) \text{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (4) \text{Arccos} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & (5) \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} & (6) \text{Arctan}(-\sqrt{3}) \end{array}$$

問題 7. n を整数とする。

(1) $\tan x$ の定義域を $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ に制限したものを $f_n(x)$ と書くことにする。 $f_n(x)$ の逆関数 $f_n^{-1}(x)$ を $\text{Arctan } x$ を用いて表せ。

(2) $\sin x$ の定義域を $[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ に制限したものを $g_n(x)$ 、 $\cos x$ の定義域を $[n\pi, (n+1)\pi]$ に制限したものを $h_n(x)$ と書くことにする。 $g_n(x)$ の逆関数 $g_n^{-1}(x)$ と $h_n(x)$ の逆関数 $h_n^{-1}(x)$ を $\text{Arcsin } x$ を用いて表せ。

問題 8. 次の関数を三角関数も逆三角関数も使わずに表せ。

$$(1) \cos(\text{Arcsin } x) \quad (2) \tan(\text{Arcsin } x) \quad |x| \neq 1 \quad (3) \sin(\text{Arctan } x) \quad (4) \sin(2 \text{Arctan } x)$$

問題 9. 関数の間の等式

$$\text{Arctan}(\tan^2 x) = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}(\cos 2x)$$

が成り立つことを（微分を使わずに）証明せよ。

問題 10. 逆三角関数の微分を計算せよ。ただし、 $\text{Arcsin } x$ と $\text{Arccos } x$ では定義域の両端は除く。

問題 11. 次の関数の導関数を計算せよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \quad (x > 0) & (2) (\tan x)^x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) & (3) x^{x^x} \quad (x > 0) \\ (4) \text{Arcsin}(\cos x) \quad (x \neq n\pi) & (5) \text{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (x \neq \pm 1) \end{array}$$

問題 12. 次を示せ。

$$\begin{array}{ll} (1) f(h) \in o(h^n) \implies n \text{ 以下のすべての } k \text{ に対して } f(h) \in o(h^k) \\ (2) f(h) \in o(h^n), g(h) \in o(h^m), n \leq m \implies f(h) + g(h) \in o(h^n) \\ (3) f(h) \in o(h^n), c \in \mathbb{R} \implies cf(h) \in o(h^n) \\ (4) f(h) \in o(h^n), g(h) \in o(h^m) \implies f(h)g(h) \in o(h^{m+n}) \\ (5) f(h) \in o(h^n), g(h) \in o(h^m) \implies f(g(h)) \in o(h^{mn}) \end{array}$$

2012年度数学I演習第3回解答

理II・III 21～24組

5月24日 清野和彦

目次

1 連続関数の性質	1
1.1 最大最小の定理と中間値の定理	1
1.1.1 問題1の解答	2
1.1.2 問題2の解答	2
1.2 連続関数における逆関数の存在と単調性	3
1.2.1 問題3の解答	4
2 微分	5
2.1 逆関数の微分	6
2.1.1 問題4の解答	6
2.2 導関数は連続とは限らない!	7
2.2.1 問題5の解答	7
3 逆三角関数	8
3.1 定義域を制限する	9
3.1.1 問題6の解答	10
3.1.2 問題7の解答	10
3.1.3 問題8の解答	12
3.1.4 問題9の解答	13
3.2 逆三角関数の微分	14
3.2.1 問題10の解答	14
4 具体的な導関数の計算	15
4.1 問題11の解答	15
5 「無限小」について	17
5.1 演算に対する性質：問題12の解答	18

1 連続関数の性質

1.1 最大最小の定理と中間値の定理

数列の収束の定義と同様に、関数の極限の定義も実数の連続性とは何の関係ありません。たとえ有理数しか数と認めなかったとしても、関数の極限の定義は何の変更も受けないのです。ということは、関数がある点で連続であることの定義や、連続関数の定義も同様です。ですから、関数の

極限や連続関数の一般的な性質、例えば四則演算との関係などはすべて実数の連続性とは関わりなく成り立ちます。

一方、実数列ならではのこととして「有界かつ単調な実数列は収束する」というのがありました。実数の連続性です。ということは、関数の極限にも実数の連続性のおかげで成り立つ性質があるはずで、そのようなもののうち、特に連続関数（すなわち、定義域全体で関数の極限が関数の値と一致する関数）に関する重要な性質が「**最大最小の定理**」と「**中間値の定理**」です。

最大最小の定理 有界閉区間 $[a, b]$ を定義域とする連続関数は最大値と最小値を持つ。

中間値の定理 有界閉区間 $[a, b]$ を定義域とする連続関数 f が $f(a) \neq f(b)$ であるとき、 $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 p に対して $f(c) = p$ となる c が開区間 (a, b) に存在する。

講義では、「最大最小の定理」は理由があって証明しませんでした。その理由を尊重して、ここでも証明しません。「中間値の定理」は講義で証明されましたので、証明は講義のノートを参照してください。これらの定理の証明はいくつか知られていますが、どのような方法で証明するにせよ、実数の連続性を使わなければ証明できません。

さて、この二つの定理を合わせることで、「有界閉区間を連続関数で写すと必ず有界閉区間になる」という重要な性質が分かります。問題1です。

1.1.1 問題1の解答

最大値の定理により、 f は有界閉区間 $[a, b]$ で最大値と最小値を持ちます。 c で最大値 $f(c) = M$ をとり、 d で最小値 $f(d) = m$ をとるとしましょう。 M と m は f の値域に含まれます。

M は最大値なので、 $y > M$ なら $f(x) = y$ となる x は存在しません。同様に、 m が最小値であることから、 $y < m$ なら $f(x) = y$ となる x は存在しません。すなわち、 f の値域は有界閉区間 $[m, M]$ の部分集合です。

まず $M = m$ の場合を考えましょう。この場合、有界閉区間 $[m, M]$ は $M (= m)$ だけからなる集合 $\{M\}$ であり、 M は値域に入っているのですから、 f の値域は $\{M\}$ です。よって、この場合は f の値域は有界閉区間になっています。

次に、 $M \neq m$ 、すなわち $M > m$ の場合を考えましょう。 y を $m < y < M$ を満たす任意の実数とします。すると、中間値の定理により $f(x) = y$ となる x が c と d の間に存在します。つまり、開区間 (m, M) は f の値域に含まれます。 m と M は値域に含まれており、値域は $[m, M]$ の部分集合なので、 f の値域は $[m, M]$ 全体で、有界閉区間です。□

問題2もこの二つの定理を合わせることで分かる事実です。

1.1.2 問題2の解答

最大最小の定理により、 f は最大値 M を持ちます。 M も値域に含まれるのですから、 $f(x) = M$ となる x がちょうど二個あります。それを a_0, b_0 とし、 $a_0 < b_0$ とします。

再び最大最小の定理により、 f は $[a_0, b_0]$ で最小値 m を持ちます。（ f そのものの最小値ではなく、 f の定義域を $[a_0, b_0]$ に制限した関数の最小値です。） $[a, b]$ においては $f(x) = m$ となる x はちょうど2個あります。それを c, c' とし、 $c < c'$ としましょう。

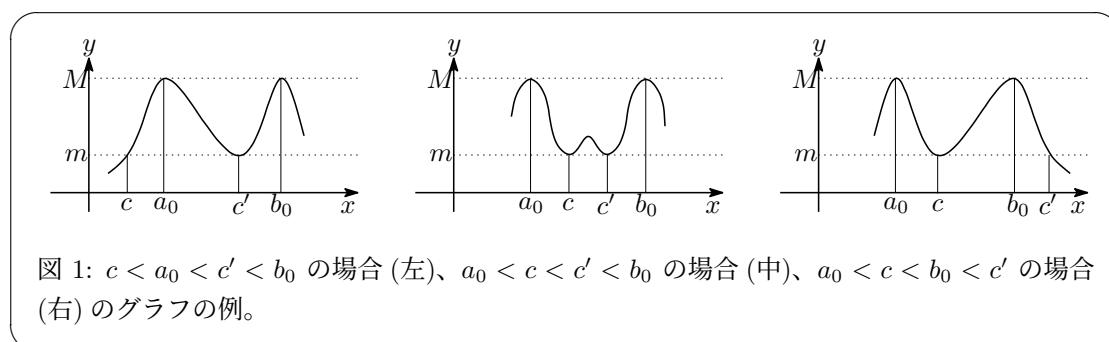
m は $[a_0, b_0]$ における最小値なのですから、 c, c' のうち少なくとも一方は $[a_0, b_0]$ に属します。 $m = M$ だとすると f は $[a_0, b_0]$ 全体で値が $M(=m)$ となってしまう、 $f(x) = M$ となる x が二つしかないという条件に反してしまいますから $m < M$ です。ですから c と c' は a_0 でも b_0 でもありません。よって、 $c < a_0 < c' < b_0$, $a_0 < c < c' < b_0$, $a_0 < c < b_0 < c'$ の三つのどれかでなければならぬことになります。

$c < a_0 < c' < b_0$ とします。すると、中間値の定理により、 $m < y_0 < M$ を満たす y_0 に対して、 $f(x) = y_0$ となる x が (c, a_0) にも (a_0, c') にも (c', b_0) にも存在します。しかし、これは $f(x) = y_0$ となる x はちょうど二つであるという条件に反します。(図1の左側が例です。)

$a_0 < c < b_0 < c'$ のときも同様に条件に反します。(図1の右側が例です。)

$a_0 < c < c' < b_0$ とします。 m は $[a_0, b_0]$ における最小値なのですから $[c, c']$ における最小値でもあります。 $f(x) = m$ となる x は c と c' の二つだけなのですから、 $d \in (c, c')$ に対し $m < f(d) < M$ となります。ということは、中間値の定理により $f(x) = f(d)$ となる x が (a_0, c) にも (c', b_0) にも存在することになります。すなわち $f(x) = f(d)$ となる x が (a_0, c) , (c, c') , (c', b_0) の三つの開区間にそれぞれ少なくとも一つ存在します。しかし、これは問題の条件に反します。(図1の中央が例です。)

以上、背理法により示せました。□



1.2 連続関数における逆関数の存在と単調性

実数の部分集合 A を定義域とする (連続とは限らない) 関数 f の**逆関数**とは、 f の値域

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

を定義域とする関数 g で、 g の値域が A であり、

$$\forall x \in A \text{ に対して } g(f(x)) = x \quad \text{かつ} \quad \forall y \in f(A) \text{ に対して } f(g(y)) = y$$

が成り立つもののことです。このような g を f^{-1} と書きます。(1/f と勘違いしないように注意してください。) この定義から、逆関数は存在するとしてもただ一つであることが分かります。

逆関数が存在するための必要十分条件は**一対一**であること、すなわち、定義域に含まれる任意の二つの数 x_1, x_2 に対し、

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成り立つことです。なぜなら、この条件が成り立っているなら、各 $f(x)$ に x を対応させることができますし、一方、 $x_1 \neq x_2$ なのに $f(x_1) = f(x_2)$ となってしまう x_1 と x_2 がもし一組でも

あったら、値域に含まれる数 $f(x_1)(=f(x_2))$ に x_1 を対応させても x_2 を対応させても逆関数の条件 $f^{-1}(f(x)) = x$ を満たさないからです。

さて、関数に連続性を要求しないなら、逆関数を持つという条件、すなわち一対一であるという条件は大して強い条件ではありません。とにかく定義域に含まれる数の行き先が重なりさえしなければよいだけです。ところが、連続関数に限るとこの条件は大変強く関数の状況を制限します。しかも、逆関数が存在するなら、それは自動的に連続になります。(ということは、不連続関数の逆関数は必ず不連続です。) これを示すことを問題にしておきました。

1.2.1 問題3の解答

(1) まず、「 f が狭義単調増加または狭義単調減少なら逆関数を持つ」ということを証明しましょう。こちらは f が連続でなくても成り立ちます。

定義域から相異なる二つの数 x_1 と x_2 を任意に選びます。 $x_1 < x_2$ としましょう。すると、 f が狭義単調増加なら $f(x_1) < f(x_2)$ 、狭義単調減少なら $f(x_1) > f(x_2)$ となっています。いずれにせよ $f(x_1) \neq f(x_2)$ です。これは f が一対一であることを意味しています。よって、 f は逆関数を持ちます。

次に「連続関数 f が逆関数を持つなら f は狭義単調増加または狭義単調減少である」ということを証明しましょう。これには f の連続性が効いてきます。

定義域から任意に相異なる x_1 と x_2 を選びます。逆関数があると仮定しているのですから、 f は一対一です。よって $f(x_1) \neq f(x_2)$ となっています。とりあえず $x_1 < x_2$ かつ $f(x_1) < f(x_2)$ としてみましょう。

ここで、定義域からもう一つ x_0 を取ります。まず $x_0 < x_1 < x_2$ としましょう。一対一なので $f(x_0) \neq f(x_1)$ かつ $f(x_0) \neq f(x_2)$ です。もしも $f(x_1) < f(x_2) < f(x_0)$ だったとすると、中間値の定理から $f(x_2) = f(x)$ となる x が (x_0, x_1) にあることになり f が一対一であることに反します (図2 左側)。同様に $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ だったとしても中間値の定理から $f(x_0) = f(x)$ となる x が (x_1, x_2) にあることになって f が一対一であることに反します (図2 右側)。よって、 $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$ でなければならない、すなわち狭義単調増加でなければならないことがわかりました。

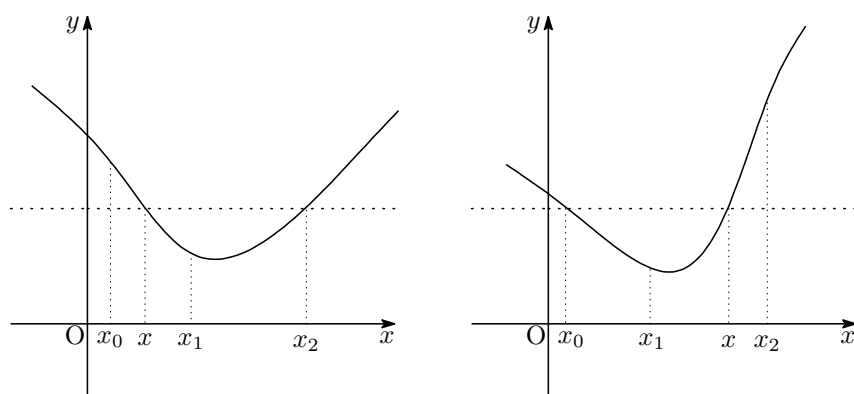


図 2: 中間値の定理より、一対一になっていないことが分かる。

同じ議論で $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ と $x_1 < x_2 < x_0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) < f(x_0)$ も示せます。

また、 $x_1 < x_2$ かつ $f(x_1) > f(x_2)$ という仮定から話を始めれば、結論の方だけ不等号の向きを逆にした結論、すなわち f は狭義単調減少であるという結論が得られます。

以上により、

区間を定義域とする連続関数 f が逆関数を持つならば狭義単調増加または狭義単調増加であるが示せました。□

本当はすべての場合を書くべきですが、サボりました。すみません。 $x_1 < x_0 < x_2$ や $x_1 < x_2 < x_0$ の場合の証明は自分で完成させてみてください。

(2) f の定義域である区間を I とします。中間値の定理によって、値域 $f(I)$ も区間です。それを J と書くことにします。 f^{-1} は J を定義域とし I を値域とする狭義単調な関数です。

示したいことは、

f^{-1} の定義域内の任意の b と任意の正実数 ε に対して、正実数 δ で

$$\forall y \in J \left[|y - b| < \delta \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon \right]$$

の成り立つものが存在する

ということです。

J に含まれる数 b を任意に選び、 $a = f^{-1}(b)$ と書くことにします。正実数 ε が任意に与えられたとし、

$$J' = \{f(x) \mid x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap I\}$$

とします。 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap I$ は区間であり f は連続なので J' も区間です。 $(f$ の定義域を $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap I$ という区間に狭めたと考えれば分かります。) J' は b を含んでいるので、二つの正実数 ($+\infty$ も許します) δ_+ と δ_- によって $J' = (b - \delta_-, b + \delta_+) \cap J$ となっています。よって、 $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$ とすれば (δ_- も δ_+ も $+\infty$ だった場合には、 δ は例えば 1 にしておくことにします)、すると、 $y \in J$ で $|y - b| < \delta$ を満たすものは $y \in J'$ となるので、 $f^{-1}(y) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap I$ となります。 $a = f^{-1}(b)$ なのですから、 $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$ が成り立っていることになります。すなわち

$$\forall y \in J \left[|y - b| < \delta \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon \right]$$

が成り立っています。これで示せました。□

2 微分

微分に付いての基本的な事柄は高校で学んだとおりです。高校で学んだ微分の性質や基本的な関数の微分の計算は、もちろんすべて正しいものです。ただし、高校では定義しなかった関数の値の極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ を定義してしまったので、高校で学んだことを関数の値の極限の定義に基づいて証明しなければなりません。ほとんどは講義で証明されたようですが、逆関数の微分法は証明されなかったようなので、それを証明することを問題にしておきました。それから、導関数について多くの人が誤解していることがあるので、その誤解を解く問題を出題しました。

2.1 逆関数の微分

問題3では連続関数の逆関数が自動的に連続関数になることを見ました。それでは、微分可能な関数の逆関数は自動的に微分可能になるのでしょうか。答は

$f'(a) \neq 0$ である $f(a)$ では f^{-1} は微分可能で、微分係数は $1/f'(a)$ である

です。これはグラフを考えてみると分かります。 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと $y = x$ に関して対称です。接線も同様の関係にあります。 $f'(a) \neq 0$ となる a での $y = f(x)$ のグラフの接線を $y = x$ に関して対称に移すと、傾きが $1/f'(a)$ の直線になります。これが $y = f^{-1}(x)$ のグラフの $x = f(a)$ における接線なのですから、微分係数は $1/f'(a)$ です。一方、 $f'(a) = 0$ となる a での $y = f(x)$ のグラフの接線は x 軸に平行なのですから、 $y = f^{-1}(x)$ の $x = f(a)$ での接線は y 軸に平行、すなわち傾きが発散してしまっています。これは、絵としては接線があるものの、微分係数は発散してしまって存在しません。

グラフで考えればこのように「明らか」なのですが、もちろんこれは証明ではありません。(グラフで想像した結論は間違っていることもよくあります。) というわけで、この証明を問題にしておきました。

2.1.1 問題4の解答

f^{-1} の定義域から任意に b を選び、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h}$$

を計算しましょう。 $f^{-1}(b) = a$ とします。

f^{-1} は一対一なので、 $b+h$ が f^{-1} の定義域に入っている0でない h について、 $f^{-1}(b+h) = a+k$ となる k は0ではありません。また、 $h = f(a+k) - f(a)$ です。これらのことから、

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} &= \frac{f^{-1}(f(a+k)) - f^{-1}(f(a))}{h} \\ &= \frac{f^{-1}(f(a+k)) - f^{-1}(f(a))}{k} \cdot \frac{k}{f(a+k) - f(a)} = \frac{k}{k} \cdot \frac{k}{f(a+k) - f(a)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(a+k) - f(a)}{k}} \end{aligned}$$

と変形できます。($f^{-1}(f(x)) = x$ だからです。) f は微分可能な連続関数であり、問題3で示したように連続関数の逆関数は連続関数なので、 $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ となります。よって、 $f'(a) \neq 0$ のときは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(a+k) - f(a)}{k}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{k}} = \frac{1}{f'(a)}$$

となります。また、 $f'(a) = 0$ のときはこの極限は発散するので、 f^{-1} は $b = f(a)$ で微分できません。□

$f^{-1}(f(x)) = x$ に合成関数の微分公式を適用すると

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$

となるので、

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

が結論される、でいいのではないかと思われるかもしれませ。しかし、この計算は f^{-1} が微分可能であることを仮定した上での計算です。**公式を思い出すのには有用**ですが、この方法では f^{-1} が $f'(a) \neq 0$ のところで微分可能であることを導き出せないで、この問題の解答としては（つまり、逆関数の微分法の証明としては）不十分です。

2.2 導関数は連続とは限らない！

私の経験からすると、導関数は連続だと思い込んでいる人がとても多いと思います。しかし、本当は、導関数は連続とは限りません。このことを理解してもらうには、導関数が連続でない関数の例を挙げるのがもっともよいわけで、その例が問題5です。

2.2.1 問題5の解答

(1) $x \neq 0$ では $f(x)$ は $\sin y$ に $y = 1/x$ を合成したものと x^2 との積ですので、積の微分法と合成関数の微分法で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = (x^2)' \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\sin \frac{1}{x} \right)' \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\sin' \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

と計算できます。□

(2) $x = 0$ を含む範囲では $f(x)$ は一つの式で定義されていないので、(1) のように公式を適用して $f'(0)$ を計算することはできず、微分の定義を直接使って計算しなければなりません。

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

となります。ここで、 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ であることから、

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

という不等式が成り立つことに注意しましょう。すると、 $x \rightarrow 0$ のときこの不等式の右辺と左辺はどちらも0に収束するので、はさみうちの原理によって中辺も0に収束します。以上より、 $f'(0) = 0$ であることがわかりました。□

(3) 関数 $\varphi(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a)$ が成り立つこと、つまり、「 $x \rightarrow a$ としたとき $\varphi(x)$ は収束する」上に、「その極限値が $\varphi(a)$ に一致する」ことです。ということは、 $f'(x)$ が $x = 0$ で不連続であるとは、

$$x \rightarrow 0 \text{ のとき } f'(x) \text{ は収束しない}$$

か、または

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ は存在するが $f'(0)$ と一致しない

のどちらかが成り立つことです。だから、まず $x \rightarrow 0$ のとき $f'(x)$ が収束するかどうかを調べ、収束しなければそれで証明終了、収束するならその値が $f'(0) = 0$ と一致しないことを確認して証明終了となります。

それでは、 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ を計算してみましょう。(1) で計算したように $x \neq 0$ では

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

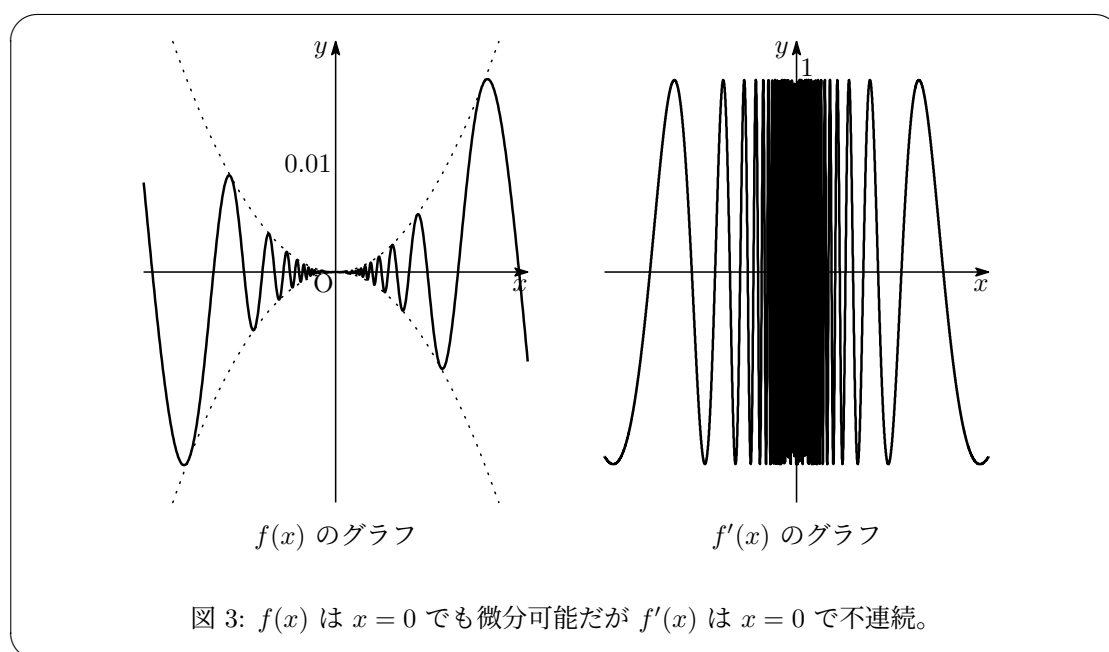
でした。一方、(2) の最後に計算したように、

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

です。ということは、もし $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ が存在するなら、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(f'(x) - 2x \sin \frac{1}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$$

となります。ところが、 $x \rightarrow 0$ のとき、 $1/x$ は x が正なら正の無限大に発散、 x が負なら負の無限大に発散しますので、どちらにせよ $\cos \frac{1}{x}$ は -1 と 1 の間を振動してしまっって収束しません。(第2回問題14の解答を参照して下さい。) ということは $x \rightarrow 0$ のとき $f'(x)$ も収束しません。よって $f'(x)$ は $x = 0$ で不連続です。(図3の右のグラフ。) □



3 逆三角関数

逆関数の具体例として、これから先いろいろなところで活躍することになる逆三角関数を紹介します。

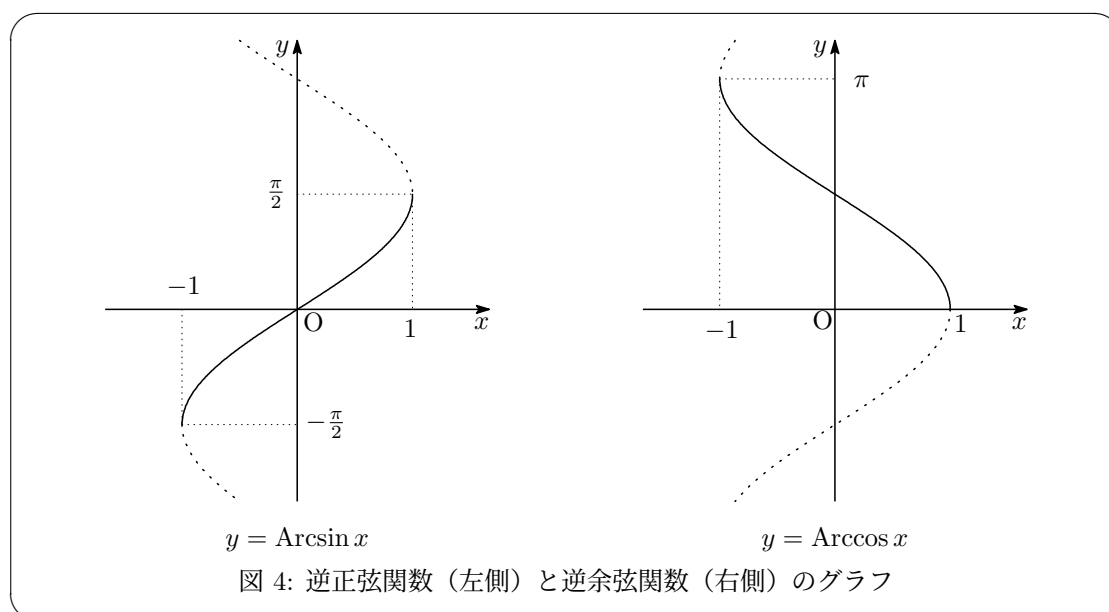
3.1 定義域を制限する

ご存じのように、三つの三角関数はどれも単調増加・減少ではありません。よって、これらの逆関数はあきらめざるを得ません…いや、しかし、これほど基本的な関数の逆関数はどうしてもあきらめられません。三角関数は、無理矢理にでも逆関数を考えたいほど基本的な関数なのです。

ところで、 A' が A の部分集合のとき、 A を定義域とする関数から A' を定義域とする関数を作ることができます。 A' を定義域だと思いこめばいいだけです。このことを**定義域を制限する**といいます。（既に証明の中などで使ってきている考え方です。）三角関数については、この「定義域を制限する」というワザを使って逆関数を持つようにします。

$\sin x$ の逆関数

$\sin x$ は $[(2n - \frac{1}{2})\pi, (2n + \frac{1}{2})\pi]$ で単調増加、 $[(2n + \frac{1}{2})\pi, (2n + \frac{3}{2})\pi]$ で単調減少しています。この中で（図形的に）もっとも自然でなじみの深い範囲は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ でしょう。そこで、ここに定義域を制限した $\sin x$ の逆関数のことを**逆正弦関数**あるいは**アークサイン**と呼び、 $\text{Arcsin } x$ あるいは $\arcsin x$ または $\sin^{-1} x$ と書きます。 $\text{Arcsin } x$ の定義域は $[-1, 1]$ 値域は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で単調増加関数です（図4左側）。



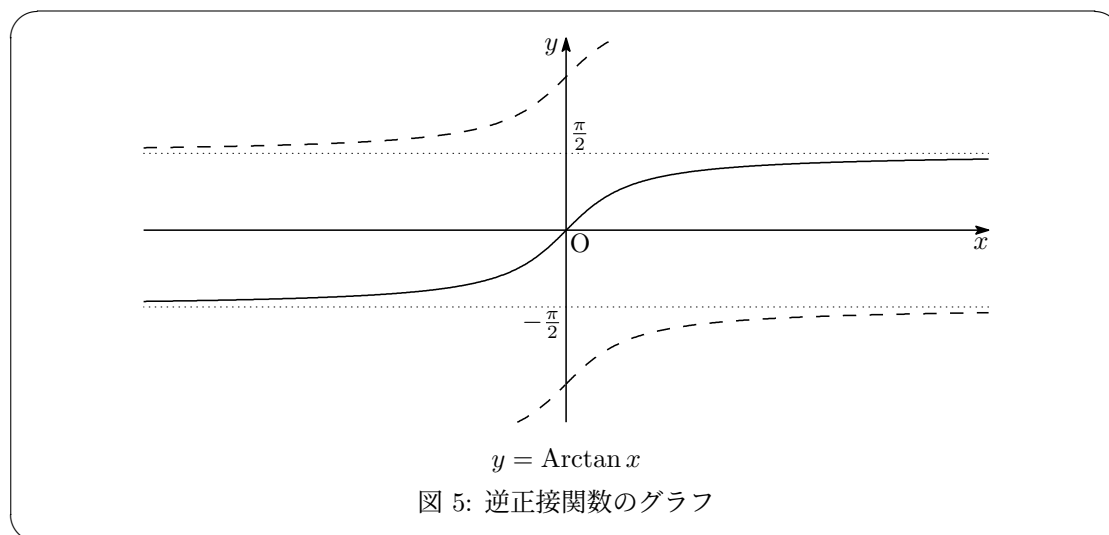
ちなみに、 $\text{Arcsin } x$ の「Arc」は「弧」の意味です。 $\sin x$ が単位円の弧の長さ（の半分）に対して対応する弦の長さ（の半分）を与えるので、逆に「弧の長さを与える」という意味で「sin」の前に「Arc」を付けるのではないかと思います。

$\cos x$ の逆関数

$\cos x$ は $[(2n - 1)\pi, 2n\pi]$ で単調増加、 $[2n\pi, (2n + 1)\pi]$ で単調減少です。この中でもっとも自然な区間は $[0, \pi]$ でしょう。そこで、ここに定義域を制限した $\cos x$ の逆関数のことを**逆余弦関数**あるいは**アークコサイン**と呼び、 $\text{Arccos } x$ あるいは $\arccos x$ または $\cos^{-1} x$ と書きます。 $\text{Arccos } x$ の定義域は $[-1, 1]$ 値域は $[0, \pi]$ で単調減少関数です（図4右側）。

$\tan x$ の逆関数

$\tan x$ の定義域は $x \neq (n + \frac{1}{2})\pi$ で、各区間 $((n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi)$ で単調増加です。これらの区間の中でもっとも自然なのは $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ でしょう。そこで、ここに定義域を制限した $\tan x$ の逆関数のことを**逆正接関数**あるいは**アークタンジェント**と呼び、 $\text{Arctan } x$ あるいは $\arctan x$ または $\tan^{-1} x$ と書きます。 $\text{Arctan } x$ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体で値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 、単調増加関数です（図5）。



3.1.1 問題6の解答

例えば (1) では、「 $\text{Arcsin } \frac{1}{2}$ 」とは

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ を満たす } \theta \text{ のこと}$$

なので

$$\text{Arcsin } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

だ。」と考えます。つまり、**逆関数の定義に戻って考えている**わけです。(2) 以降もすべて同様です。時間がなくて描けませんでした、図を書いてみるとよく分かります。答は

$$(1) \frac{\pi}{6} \quad (2) -\frac{\pi}{2} \quad (3) \frac{\pi}{6} \quad (4) \frac{3}{4}\pi \quad (5) \frac{\pi}{6} \quad (6) -\frac{\pi}{3}$$

となります。□

3.1.2 問題7の解答

この問題も定義に戻って地道に考えるだけです。

(1) 任意の実数 y_0 を一つ固定すると、 $\tan x = y_0$ となるすべての x は $\tan x_0 = y_0$ となる x_0 をひとつ選ぶことにより

$$x = x_0 + m\pi \quad m \text{ は整数}$$

と表せます。Arctan y_0 とは $\tan x = y_0$ を満たす x のうち $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ を満たすもののことで、 $\tan x = y_0$ を満たすすべての x は Arctan y_0 を使って

$$x = \text{Arctan } y_0 + m\pi \quad m \text{ は整数}$$

と表せます。一方、 $f_n(x)$ の定義域は $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ ですので、

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < f_n^{-1}(y_0) < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

という不等式が成り立っています。よって、

$$f_n^{-1}(y_0) = x_n = x_0 + n\pi = \text{Arctan } y_0 + n\pi$$

となります。 y_0 は任意の実数でしたから、この等式は関数として成り立っています。以上より、求める表示は

$$f_n^{-1}(x) = \text{Arctan } x + n\pi$$

です。□

(2) $-1 \leq y_0 \leq 1$ を満たす y_0 を任意にひとつ選びます。すると、 $\sin x = y_0$ を満たすすべての x は、 $\sin x_0 = y_0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす x_0 によって、

$$x = m\pi + (-1)^m x_0 \quad m \text{ は整数}$$

と表せます。また、 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ が成り立っているのを、

$$\cos x = y_0 \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = y_0$$

です。よって $\cos x' = y_0$ を満たすすべての x' は、上と同じ x_0 を使って

$$x' = m\pi + (-1)^m x_0 - \frac{\pi}{2} = \frac{2m-1}{2}\pi + (-1)^m x_0 \quad m \text{ は整数}$$

と表せます。ここで、 $\sin x = y_0$ を満たす x のうち $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすものが Arcsin y_0 であることを思い出しましょう。よって、上の x と x' はそれぞれ

$$x = m\pi + (-1)^m \text{Arcsin } y_0, \quad x' = \frac{2m-1}{2}\pi + (-1)^m \text{Arcsin } y_0 \quad m \text{ は整数}$$

というように Arcsin y_0 を使って表せます。一方、

$$n\pi - \frac{\pi}{2} \leq g_n^{-1}(y_0) \leq n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n\pi \leq h_n^{-1}(y_0) \leq (n+1)\pi \quad n \text{ は整数}$$

ですので、 $g_n^{-1}(y_0)$ は上の x のうち $m = n$ のもの、 $h_n^{-1}(y_0)$ は上の x' のうち $m = n+1$ のものです。つまり、

$$g_n^{-1}(y_0) = n\pi + (-1)^n \text{Arcsin } y_0, \quad h_n^{-1}(y_0) = \frac{2n+1}{2}\pi + (-1)^{n+1} \text{Arcsin } y_0$$

となります。以上と y_0 が $[-1, 1]$ 内の任意実数だったことから、関数として

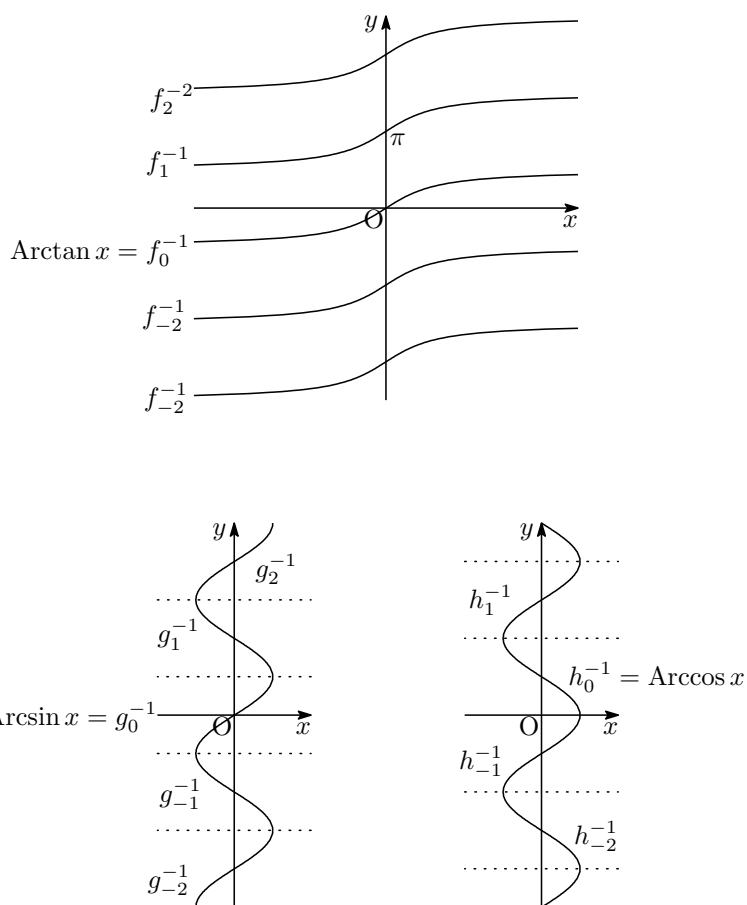
$$g_n^{-1}(x) = (-1)^n \text{Arcsin } x + n\pi, \quad h_n^{-1}(x) = (-1)^{n+1} \text{Arcsin } x + \frac{2n+1}{2}\pi$$

と表示できることが分かりました。□

$h_0^{-1}(x) = \text{Arccos } x$ ですので、

$$\text{Arccos } x = -\text{Arcsin } x + \frac{\pi}{2}$$

が得られていることに注意してください。

図 6: f_n^{-1} , g_n^{-1} , h_n^{-1} のグラフ。

3.1.3 問題 8 の解答

申し訳ないのですが、時間がなくてここに図を描くことができませんでした。是非三角形の図を描いて考えてみてください。

(1) $\sin(\text{Arcsin } x) = x$ ですので、 $\cos \theta$ を $\sin \theta$ で表せれば三角関数と逆三角関数を消すことができそうです。 $\cos \theta$ は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で 0 以上なので、

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

であり、 $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin } x \leq \frac{\pi}{2}$ なので、この θ に $\text{Arcsin } x$ を代入することができます。すると、

$$\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin } x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

となります。□

(2) (1) と同様に、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

と変形してから $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ を代入して計算しましょう。

$$\tan(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x)}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

となります。□

(3) 今度は $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$ を使うために $\sin \theta$ を $\tan \theta$ で表しましょう。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲では $\cos \theta \geq 0$ であることから

$$\cos \theta = \sqrt{\cos^2 \theta}$$

です。一方、

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta + 1$$

という関係があります。よって、

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}}$$

となります。これに $\theta = \operatorname{Arctan} x$ を代入して、

$$\sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan} x)}{\sqrt{\tan^2(\operatorname{Arctan} x) + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

となります。□

(4) 倍角の公式により

$$\sin(2 \operatorname{Arctan} x) = 2 \sin(\operatorname{Arctan} x) \cos(\operatorname{Arctan} x)$$

となります。 $\sin(\operatorname{Arctan} x)$ の方は (3) で三角関数と逆三角関数を使わない表示を得てありますので、 $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ の同じような表示を得られればよいことになります。(3) で利用した式

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

に $\theta = \operatorname{Arctan} x$ を代入することにより、

$$\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

と分かります。これらを合わせて、

$$\sin(2 \operatorname{Arctan} x) = 2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

が得られます。□

3.1.4 問題9の解答

$\tan \theta$ の θ のところに左辺を代入すると、 $\tan(\operatorname{Arctan} y) = y$ であることから、

$$\tan(\operatorname{Arctan}(\tan^2 x)) = \tan^2 x$$

となります。

一方、右辺を代入すると、加法定理

$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - (\tan \theta)(\tan \varphi)}$$

と $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ から、

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}(\cos 2x)\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan(\operatorname{Arctan}(\cos 2x))}{1 + (\tan \frac{\pi}{4})(\tan(\operatorname{Arctan}(\cos 2x)))} \\ &= \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \tan^2 x \end{aligned}$$

となります。

両辺を $\tan$ に入れた値が一致したので、両辺の値の違いは π の整数倍です。すなわち、

$$\operatorname{Arctan}(\tan^2 x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}(\cos 2x) + n\pi$$

となる n が存在します。 n を決めるために $x = 0$ を代入してみると、

$$0 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan} 1 + n\pi$$

となります。 $\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$ ですので、結局 $n = 0$ となり、問題の等式が得られました。□

問題8のような「三角関数に逆三角関数を入れたもの」に比べて、この問題のような「逆三角関数に三角関数を入れたもの」が扱いにくいのは何故か、図を書いて考えてみるとよいと思います。

なお、「微分を使わずに」という条件が付いているということは、微分を使った解法もあるということです。それは、両辺の導関数が一致することを示す方法です。しかし、導関数が一致する二つの関数は定数の差しかないということを結論するには平均値の定理が必要です。ですから、今回は「微分を使わずに」という制限を付けておきました。もちろん、微分が0の関数が定数関数しかないことは高校のときからよくご存知のことですので、講義の進み具合など気にせず両辺の導関数が一致することを確認してみるとよいと思います。(逆三角関数の微分は次の問題10の解答にあります。)

3.2 逆三角関数の微分

三角関数の微分を知っているので、逆三角関数の微分は問題4で証明してもらった**逆関数の微分法**で計算可能です。というわけで、逆三角関数の導関数を求めることを問題にしておきました。

3.2.1 問題10の解答

$\sin x$ の導関数は $\cos x$ であり、これは $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ においては端の二つ $x = \pm\frac{\pi}{2}$ でのみ0です。 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ における $\sin x$ の値は ± 1 です。よって、 $\operatorname{Arcsin} x$ は ± 1 以外、すなわち $(-1, 1)$ で微分可能で、

$$\frac{d \operatorname{Arcsin} x}{dx} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}$$

となります。ここで、 $-\frac{\pi}{2} < \text{Arcsin } x < \frac{\pi}{2}$ なので $\cos(\text{Arcsin } x) > 0$ です。従って、

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\text{Arcsin } x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

となります。

$\cos x$ の導関数は $-\sin x$ であり、これは $[0, \pi]$ においては端の二つ $x = 0$ と $x = \pi$ のみで 0 です。 $x = 0, \pi$ における $\cos x$ の値は ± 1 です。よって、 $\text{Arccos } x$ は ± 1 以外、すなわち $(-1, 1)$ で微分可能で、

$$\frac{d \text{Arccos } x}{dx} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos } x)}$$

となります。ここで、 $0 < \text{Arccos } x < \pi$ なので $\sin(\text{Arccos } x) > 0$ です。従って、

$$= \frac{1}{-\sqrt{1 - (\cos(\text{Arccos } x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

となります。

$\tan x$ の導関数は $1 + \tan^2 x$ であり、これは定義域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 全体で 0 になりません。よって、 $\text{Arctan } x$ も定義域 $\mathbb{R}$ 全体で微分可能で、

$$\frac{d \text{Arctan } x}{dx} = \frac{1}{1 + (\tan(\text{Arctan } x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

となります。□

4 具体的な導関数の計算

対数微分法などを使って計算ミスを減らす工夫をするとよいでしょう。対数微分法とは

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

の両辺に $f(x)$ を掛けると

$$f'(x) = f(x)(\log |f(x)|)'$$

となることを利用する計算方法のことです。

4.1 問題 11 の解答

(1) 積の微分法により

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \right)' = \left((e^x - e^{-x})^{\frac{1}{2}} (e^x + e^{-x})^{-\frac{1}{2}} \right)' \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})^{-\frac{1}{2}} (e^x + e^{-x}) (e^x + e^{-x})^{-\frac{1}{2}} + (e^x - e^{-x})^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) (e^x + e^{-x})^{-\frac{3}{2}} (e^x - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})^{-\frac{1}{2}} (e^x + e^{-x})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})^{\frac{3}{2}} (e^x + e^{-x})^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})^{-\frac{1}{2}} (e^x + e^{-x})^{-\frac{3}{2}} \left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^3}} \end{aligned}$$

と計算できます。

対数微分法を使うともう少し楽に計算できます。

$$\log \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{1}{2} \log(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2} \log(e^x + e^{-x})$$

を微分すると、

$$\frac{1}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}$$

となるので、

$$\left(\sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \right)' = \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \frac{2}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} = \frac{2}{\sqrt{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^3}}$$

となります。□

(2) これも対数微分法を使うとよいでしょう。

$$\begin{aligned} (\log(\tan x)^x)' &= (x \log(\tan x))' = \log(\tan x) + x \frac{\tan' x}{\tan x} = \log(\tan x) + x \frac{1/\cos^2 x}{\sin x / \cos x} \\ &= \log(\tan x) + \frac{x}{\sin x \cos x} \end{aligned}$$

なので、

$$((\tan x)^x)' = \left(\log(\tan x) + \frac{x}{\sin x \cos x} \right) (\tan x)^x$$

となります。□

(3) これまた対数微分法を使います。 $f(x) = x^{x^x}$ と置きましょう。

$$\log f(x) = \log x^{x^x} = x^x \log x$$

ですので、 $g(x) = x^x$ と置くと、

$$f'(x) = f(x)(\log f(x))' = f(x) \left(g'(x) \log x + \frac{g(x)}{x} \right) = x^{x^x} (g'(x) \log x + x^{x-1})$$

となります。 $g'(x)$ も対数微分法で計算しましょう。 $\log g(x) = x \log x$ ですので、

$$g'(x) = g(x)(\log g(x))' = x^x (\log x + 1)$$

となります。以上より、

$$(x^{x^x})' = x^{x^x} x^x \left((\log x + 1) \log x + \frac{1}{x} \right)$$

となります。

(4) 合成関数の微分法により、

$$(\operatorname{Arcsin}(\cos x))' = \frac{\cos' x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} 1 & (2n-1)\pi < x < 2n\pi \\ -1 & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \end{cases}$$

となります。□

(5) これも合成関数の微分法により、

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' &= \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}^2} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

となります。□

5 「無限小」について

関数 f が a で連続であることの定義

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

を

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$$

と書き換えたり、微分可能であることの定義

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ が存在する}$$

を

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - ph}{h} = 0 \text{ となる数 } p \text{ が存在する}$$

と書き換えたりすることによって、連続性や微分可能性というものを

$h \rightarrow 0$ としたときに 0 に収束する関数の性質

として表現することができます。「性質」とはどういうことを指しているのか説明しましょう。連続性の定義の方では、

$$\eta(h) = f(a+h) - f(a) \text{ と定義すると、} h \rightarrow 0 \text{ のとき } \eta(h) \rightarrow 0 \text{ となる}$$

ですが、微分可能性の定義の方では

$\lambda(h) = f(a+h) - f(a) - ph$ と定義すると、 $h \rightarrow 0$ のとき $\lambda(h) \rightarrow 0$ となるだけでなく、 h で割っても $\lambda(h)/h \rightarrow 0$ となる

というように、「 h で割るとどうなるか」ということが「性質」の内容です。

もちろん、微分可能性の定義の方でも $\lambda(h)/h$ を $\mu(h)$ と置けば「 $h \rightarrow 0$ のとき $\mu(h)$ が 0 になる」というように連続性の定義のときと同じように書けます。しかし、この後学んで行く**テイラー展開**（に関わる話）では、「 h で割る」という行為と「 $h \rightarrow 0$ の極限を考える」という行為を分けて考えた方が状況をはっきり捉えられるので、上のように h で割る前を h の関数と考えます。

さて、上の性質を簡単に表す記号として**ランダウの記号** $o(h^n)$ というものが使われます。（ n は 0 以上の整数です。）定義は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(h)}{h^n} = 0 \text{ となる関数全体の集合を } o(h^n) \text{ と書く}$$

です。そして $o(h^n)$ に属する関数のことを **n 位の無限小**といいます。この記号を使うと、 f が a で連続であることは

$$f(a+h) - f(a) \in o(1)$$

となり (h^0 のことを 1 と書く習慣があります)、 a で微分可能であることは

$$f(a+h) - f(a) - ph \in o(h) \text{ となる実数 } p \text{ が存在する}$$

となります。テイラー展開の話に進むと 2 位以上の無限小がどんどん出てきます。

ところで、関数というものは定数倍されたり足されたりかけられたり合成されたりしよっちゅういろいろいじられるものです。ですので、無限小にこれらの操作を施したらどうなるかを先に調べておくのが後々都合がよいでしょう。というわけで、それを問題にしておきました。

無限小の具体例はテイラー展開の話に進めば沢山出てきますので、それまで待っていただくことにして出題はしませんでした。その前に例をどうしてもみたい方は、鋤田先生の「宿題」を参照して下さい。

5.1 演算に対する性質：問題 12 の解答

すべて定義を満たしていることを確認するだけです。

(1) f が n 位の無限小であることは仮定されているので、 $k < n$ とします。すると $n - k > 0$ ですので $h \rightarrow 0$ のとき $h^{n-k} \rightarrow 0$ となります。よって、

$$\frac{f(h)}{h^k} = \frac{f(h)}{h^n} h^{n-k} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \times 0 = 0$$

となります。□

この問題の結論は、

$$o(1) \supset o(h) \supset o(h^2) \supset o(h^3) \supset \cdots \supset o(h^{n-1}) \supset o(h^n) \supset \cdots$$

という包含関係があるということです。

(2) (1) より $g(h) \in o(h^n)$ ですから

$$\frac{f(h) + g(h)}{h^n} = \frac{f(h)}{h^n} + \frac{g(h)}{h^n} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 + 0 = 0$$

となります。□

$n < m$ のとき $f(h) + g(h) \in o(h^m)$ とはならない場合があります。 $f(h) = h^{n+1}$, $g(h) = h^{m+1}$ が例です。

(3) 極限をとる操作と定数倍するという操作は施す順序を入れ替えられるので、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(h)}{h^n} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^n} = c \times 0 = 0$$

となります。□

$$(4) \quad \frac{f(h)g(h)}{h^{m+n}} = \frac{f(h)}{h^n} \frac{g(h)}{h^m} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \times 0 = 0$$

□

(5) $g(h)$ は m 位の無限小ですので、(1) より $g(h)$ は 0 位の無限小でもある、すなわち $h \rightarrow 0$ のとき $g(h) \rightarrow 0$ となります。よって、

$$\frac{f(g(h))}{h^{mn}} = \frac{f(g(h))}{g(h)^n} \left(\frac{g(h)}{h^m} \right)^n \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \times 0^n = 0$$

となります。□

第2回への補足：有理数の稠密性の証明

第2回の問題3(1)（有理数の稠密性を証明する問題）に私が付けた解答があまりにも雑すぎたために、演習当日にも何人もから質問を受けましたし、提出用紙にも疑問が多く寄せられました。申し訳ありませんでした。

以下に解答（証明）をもう少し詳しく書き直します。

問題 $a < b$ を満たす任意の実数に対し $a < x < b$ を満たす有理数 x が存在することを証明せよ。

$\frac{1}{n}$ が $b - a$ より小さくなるように n を選べば、

$$\dots, -\frac{3}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \dots$$

のうちの少なくとも一つは a と b の間に入らざるを得ない、というのが証明の方針です。もちろん、複数個入っている場合もあるわけですから、上の数のうち a と b の間に入っているいちばん小さいものを捕まえようとしてみます。

解答. 問題の要求していることは、整数 m と自然数 n の組みで $a < \frac{m}{n} < b$ となるものが存在することを証明するということです。アルキメデスの原理は自然数に関する定理ですので、分母を払って

$$na < m < nb \text{ を満たす整数 } m \text{ と自然数 } n \text{ の組みが存在する}$$

ということを証明することにします。

na と nb の間に必ず整数が入るようにするには、 na と nb の間が 1 より大きく空いていればよいでしょう。というわけで、 $1 < nb - na = n(b - a)$ を満たす自然数 n を一つ選びます。（アルキメデスの原理によって、このような自然数が存在します。）

選んだ n に対し、 m を $na < m$ となる最小の整数とします。このような m が存在することは、次のようにしてわかります。

$na \geq 0$ ならばアルキメデスの原理より $na < m'$ となる自然数 m' が存在します。よって、そのような m' のうち最小のものが m です。（正確には、 $na < m'$ を満たさない自然数 m' が有限個しかないので、その有限個のうちいちばん大きいものを m_0 とし、 $m = m_0 + 1$ とします。有限個が「0 個」の場合は $m = 1$ です。） $na < 0$ の場合には $m' < -na$ を満たす自然数または 0 のうち最大のものを m_- とすれば、 $m = -m_-$ が求める最小の整数になります。

m は $na < m$ を満たす最小の整数なので $m - 1 \leq na$ となっています。すなわち $m \leq na + 1$ です。一方、 n は $1 < nb - na$ を満たすように選んであります。以上より、

$$na < m \leq na + 1 < na + (nb - na) = nb$$

となって、 $na < m < nb$ となっています。これで示せました。□