

2 関数の極限と連続性

微積分学の目的の一つに、関数とその振る舞いの理解がある。ここでは、関数の中でも最も基本的「連続関数」の概念とその性質を考察する。

定義 2.1. 一般に関数とは、ある集合 X からある集合 Y への対応であり、 X の元 $x \in X$ を決めると Y の元がただひとつに決まるものである。関数 f を $f: X \rightarrow Y$ と書き、 $x \in X$ に対してその「値」を $f(x) \in Y$ と書く。このとき集合 X を関数 f の定義域と呼び、 $\text{Dom}(f)$ と書く。また、 Y の部分集合 $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ を関数 f の値域と呼ぶ。また、定義域 X の元を独立変数とよぶこともある。

ここでは、定義域 X および値域は、実数 $\mathbb{R}$ またはその部分集合であるような関数を考える。すなわち、ここでの「関数」とは、実数またはその部分集合で定義され、実数値を取るものとする。このような関数を特に 1 変数関数と呼ぶ。

例 2.2.

1. $c \in \mathbb{R}$ を定数としたとき、 $f(x) = c$ となる関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定数関数と呼ぶ。特に言及しない限り、 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ と考える。
2. $n+1$ 個の定数 $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ ($a_n \neq 0$) に対して、 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ と定義した関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を多項式関数と呼ぶ。このとき、 n をこの多項式関数の次数という。特に言及しない限り、 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ と考える。
3. 任意の $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$) に対して、 $f(x) = \frac{1}{x}$ と定義した関数 $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ を考えると、 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ である。

2.1 関数の極限

定義 2.3. 数列の極限と同様に関数の極限が定義できる。

1. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ の $x = a$ での極限が α であるとは、任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の数 $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことを言い、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と書く。簡単に $f(x) \rightarrow \alpha$ ($x \rightarrow a$) と書くこともある。この定義を論理式で書くと、 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \text{Dom}(f))(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$ と書き表される。
2. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ の $x \rightarrow \infty$ での極限が α であるとは、任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の数 $K > 0$ が存在して、 $x > K$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことを言い、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ と書く。簡単に $f(x) \rightarrow \alpha$ ($x \rightarrow \infty$) と書くこともある。この定義を論理式で書くと、 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in \text{Dom}(f))((x > K) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$ と書き表される。

3. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $x \rightarrow \infty$ の時, 正の無限大に発散するとは, 任意の正の数 $M > 0$ に対して, ある正の数 $K > 0$ が存在して, $x > K$ ならば $f(x) > M$ が成り立つことを言い, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ と書く. 簡単に $f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$ と書くこともある. この定義を論理式で書くと, $(\forall M > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in \text{Dom}(f))((x > K) \Rightarrow (f(x) > M))$ と書き表される.

例 2.4. 以下の極限は, 高校数学でもでてきたものである.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

【証明の概略】 1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \varepsilon/2$ と取れば, $|x| < \delta = \varepsilon/2$ ならば $|x| < \varepsilon$ が成り立つ. 2. 任意の $M > 0$ に対して, $K = 2\varepsilon$ と取れば, $x > K = 2M$ ならば $x > M$ が成り立つ. 3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $M = 2/\varepsilon$ と取れば, $1/|x| > M = 2/\varepsilon$ ならば $|x| < \varepsilon$ が成り立つ. $\square$

注意 2.5. 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ を考えるときに, $a \in \text{Dom}(f)$ である必要はないが, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon(a) \cap \text{Dom}(f) \neq \emptyset$ である必要がある. ここで, $B_\varepsilon(a)$ は $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ で定義される集合であり, $a \in \mathbb{R}$ の ε -近傍と呼ぶ. つまり, 極限を考える点のいくらでも近くに定義域に入る点が存在する必要がある.

注意 2.6. 極限が存在しない例として, 例えば, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ をあげることができる. この例では, $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x}{|x|} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{|x|} = 1$ となり, 左極限と右極限が一致しない.

定義 2.7. 注意 2.6 に出てきた左極限と右極限は, 以下のように定義される.

関数 f の $x = a$ での左極限 (右極限) が α であるとは, 任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある正の数 $\delta > 0$ が存在して, $0 < a - x < \delta$ ($0 < x - a < \delta$) ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことを言い, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$) と書く. 左極限の定義を論理式で書けば, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \text{Dom}(f))((0 < a - x < \delta) \Rightarrow (|f(x) - \alpha| < \varepsilon))$ と書き表される.

定理 2.8. 数列の収束と同様に, 以下の性質が成り立つ.

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{x \rightarrow a} (kf)(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x),$
- $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right),$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$

注意 2.9. 定理 2.8 において, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ であり, この式によって, 関数 $f + g$ を定義する. それぞれの等式は, 関数 f, g の $x \rightarrow a$ での極限が存在するとき, 左辺の極限も存在して, その極限值が右辺と一致することを意味している.

【定理 2.8 の証明】 証明は、数列の極限の場合 (定理 1.8) とほぼ同様なので、ここでは 3, 4 を証明しよう. いま, $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\beta = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある δ_1, δ_2 が存在して, $|x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ならば,

$$|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \quad |g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \alpha\beta| &\leq |f(x)(g(x) - \beta)| + |(f(x) - \alpha)\beta| \\ &= |f(x)| |g(x) - \beta| + |\beta| |f(x) - \alpha| \leq \frac{\varepsilon(|f(x)| + |\beta|)}{|\alpha| + |\beta| + 1} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \left(|\alpha| + |\beta| + \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \right) = \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta| + 1)^2} + \frac{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha| + |\beta| + 1} \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \alpha\beta$ が成り立つ.

4 については, $\lim_{x \rightarrow a} (1/g(x)) = 1/\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ を証明すれば十分である. いま, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, δ が存在して, $|x - a| < \delta$ ならば $|g(x) - \beta| < \varepsilon$ と仮定する. このとき, $||g(x) - \beta|| \leq |g(x) - \beta| < \varepsilon$ より, $|\beta| - \varepsilon < |g(x)| < |\beta| + \varepsilon$ が成り立つ. したがって,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|g(x) - \beta|}{|\beta| |g(x)|} \leq \frac{|g(x) - \beta|}{|\beta|(|\beta| - \varepsilon)}$$

が成り立つ. ここで, $\varepsilon < |\beta|/2$ と考えてよいので,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} \right| \leq \frac{|g(x) - \beta|}{|\beta|(|\beta| - \varepsilon)} \leq \frac{2\varepsilon}{|\beta|^2}$$

が成り立つ. よって, $\lim_{x \rightarrow a} (1/g(x)) = 1/\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ が成り立つ. $\square$

注意 2.10. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ が無限大に発散する場合でも, 無限大を含んだ形式的な計算

$$k + \infty = \infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad k \times \infty = \text{sign}(k)\infty \quad \infty \times \infty = \infty, \quad 1/\infty = 0$$

の下に 定理 2.8 と同様の結果が成り立つ. ここで, $k \in \mathbb{R}$ であり, 3 番目の式に関しては $k \neq 0$ を仮定している.

定理 2.11.

1. ある $\delta > 0$ が存在して, 関数 f, g, h が, $|x - a| < \delta$ をみたす任意の x に対して $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ をみたし, さらに, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ をみたすと仮定する. このとき, 極限 $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ が存在し, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ が成り立つ.
2. ある $M > 0$ が存在して, 関数 f, g, h が, $x > M$ をみたす任意の x に対して $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ をみたし, さらに, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ をみたすと仮定する. このとき, 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ が存在し, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ が成り立つ.

3. ある $M > 0$ が存在して、関数 f, g が、 $x > M$ をみたす任意の x に対して $f(x) \leq g(x)$ をみたすと仮定する. このとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ が成り立つ.

証明は、定理 1.11 とほぼ同様である.

例 2.12 (関数の極限等の例).

1. 任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$ が成り立つ.
2. 最高次係数が正である多項式関数 f に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ が成り立つ.

【証明】 $f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right)$ と書き換えればよい. □

定理 2.13. 関数 f に対して $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ であるための必要十分条件は、 a に収束する任意の数値列 $\{a_n\}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \alpha$ が成り立つことである.

【証明の概略】 $f(x) \rightarrow \alpha$ ($x \rightarrow a$), $a_n \rightarrow a$ と仮定して、それぞれの収束の定義に戻れば、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $n > N$ に対して $|a_n - a| < \delta$ となるような $N \in \mathbb{N}$ が存在することがわかる. 逆は、 a に収束する数値列 $\{a_n\}$ で、 $\{f(a_n)\}$ は a に収束しないものが存在すると仮定して矛盾を導く. □

定義 2.14. 関数 f, g の「収束の速さ」を以下のように定義する.

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ となるとき、 $f = O(g)$ ($x \rightarrow a$), または、 $f \sim g$ ($x \rightarrow a$) と書く.
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ となるとき、 $f = o(g)$ ($x \rightarrow a$) と書く.

この記号の下で、 $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow a$) であつて、 $f = o(g)$ が成り立つとき、「 $x \rightarrow a$ の時、 g は f より速く発散する」という. また、 $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$) であつて、 $f = o(g)$ が成り立つとき、「 $x \rightarrow a$ の時、 f は g より速く収束する」という. 同様に $f \sim g$ ($x \rightarrow a$) は、その収束または発散の速さが同じことをあらわしている.

例 2.15.

1. $f(x) = x, g(x) = x^2$ のとき、 $f(x)/g(x) = 1/x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) となるので、 $x = o(x^2)$ ($x \rightarrow \infty$) となり、 $x \rightarrow \infty$ の時、関数 x^2 は x より速く発散する.
2. $f(x) = 1/x^2, g(x) = 1/x$ のとき、 $f(x)/g(x) = 1/x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) となるので、 $1/x^2 = o(1/x)$ ($x \rightarrow 0$) となり、 $x \rightarrow 0$ の時、関数 $1/x^2$ は $1/x$ より速く収束する.
3. $f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = dx^2$ のとき (ただし、 $a^2 + d^2 \neq 0$ と仮定する)、 $f(x)/g(x) = a/d$ ($n \rightarrow \infty$) となるので、 $f \sim g$ が成り立つ.

2.2 連続関数とその基本的な性質

定義 2.16. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $a \in X$ で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことを言う. この定義を論理式で書けば $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \text{Dom}(f))(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ と書き表すことができる.

また, f が定義域上で連続または連続関数であるとは, 任意の $a \in \text{Dom}(f)$ において連続であることを言う. この定義を論理式で書けば $(\forall x \in \text{Dom}(f))(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in \text{Dom}(f))(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$ と書き表すことができる.

注意 2.17. 簡単に言ってしまうと, 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $a \in X$ で連続であるとは, $a \in \mathbb{R}$ が f の定義域の点であって $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つことである. 別の言い方をすれば, $a \in \mathbb{R}$ が f の定義域の点であって $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$ が成り立つことと考えることもできる. すなわち, $a \in \text{Dom}(f)$ で連続であるとは, 「関数の記号 f と極限の記号 $\lim_{x \rightarrow a}$ を交換」してもよいことである.

例 2.18.

1. $\mathbb{R}$ 全体で定義された定数関数は連続関数である.
2. $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x) = x$ は連続関数である.
3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上で定義された関数 $f(x) = 1/x$ は連続関数である. つまり, $1/x$ は定義域上で連続である. しかし, $\mathbb{R}$ 上では連続ではない (もともと $\mathbb{R}$ 全体で定義されていない.)

定理 2.19. 関数 f, g は, $a \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ で f, g は連続であると仮定する. このとき, 以下が成り立つ.

1. 関数 $f + g$ は $x = a$ で連続である.
2. 定数 $k \in \mathbb{R}$ に対して, 関数 kf は $x = a$ で連続である.
3. 関数 fg は $x = a$ で連続である.
4. $a \in \text{Dom}(f/g)$ ならば, 関数 f/g は $x = a$ で連続である.

証明は 定理 2.8 より明らかである.

例 2.20. 定理 2.19 から, 以下のような連続関数の例を得ることができる.

1. 任意の多項式関数は $\mathbb{R}$ 全体で連続である.
2. f, g を多項式関数としたとき, 有理関数 f/g は, その定義域 $\text{Dom}(f/g) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ 上で連続である.

例 2.21. 連続でない関数の例としては, 次のようなものを挙げるることができる.

1. $f(x) = [x]$ は, $x = n \in \mathbb{Z}$ で連続ではない.
2. $x \neq 0$ に対しては $f(x) = x/|x|$, $x = 0$ に対しては $f(x) = a$ と定義した関数は, どのように a を取っても $x = 0$ で連続とすることはできない.
3. 関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

とおくと, f は任意の $x \in \mathbb{R}$ において連続ではない.

4. 関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p, q \text{ は互いに素}, q > 0, x \neq 0, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ or } x = 0, \end{cases}$$

とおくと, f は $x = 0$ を除く有理数の点で連続でなく, $x = 0$ または無理数の点で連続である.

注意 2.22. 関数 f が $x = a \in \text{Dom}(f)$ で連続ではないことを ε - δ 論法で書けば, 「ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ をみたす $x \in \text{Dom}(f)$ が存在する」と書くことができる. つまり, 「ある小さな値 $\varepsilon > 0$ があって, $f(x)$ の値が $f(a)$ と ε 以上となる x が, a のいくらでも近くにとれる」ことが, $x = a$ において f が連続ではないことを意味している.

この主張を論理式で書けば, $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \text{Dom}(f))((|x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon))$ と書き表すことができる. ここで, $(|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ は $(|x - a| > \delta) \vee (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ と同値であり, これを否定すると, $(|x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$ となることに注意してほしい.

連続関数を持つ重要な性質は, 以下にのべる「中間値の定理」と「有界閉区間上での最大値・最小値の存在定理」である.

補題 2.23. 有界閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 f は有界である.

【証明の概略】 f が上に有界でないと仮定すると, $f(a_n) \rightarrow \infty$ をみたす有界数列 $\{a_n\}$ が存在する. 一方, Bolzano-Weierstrass の定理から, $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ で, ある α に収束するものが存在し, $f(a_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$ が成り立つ. これは矛盾である. $\square$

定理 2.24 (有界閉区間上での最大値・最小値の存在定理). 関数 f は有界閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数とする. このとき, f の最大値 $\max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ と最小値 $\min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ が存在する.

【証明の概略】 f は有界である (補題 2.23) ことから, $x_n \rightarrow \alpha \in [a, b]$ かつ $f(x_n) \rightarrow M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ をみたす数列 $\{x_n\}$ を構成すればよい.

実際, a_n を $M - 1/n < f(a_n) < M$ をみたすように選ぶと, $\{a_n\}$ は有界となり, Bolzano-Weierstrass の定理によつて, 収束部分列 $\{a_{n_k}\}$ を取り出すことができる. そこで, $a_{n_k} \rightarrow \alpha$ とおくと, f の連続性により, $f(a_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$ が成り立つ. 最後に, $\{a_n\}$ の構成法から $f(\alpha) = M$ を示せばよい. $\square$

定理 2.25 (中間値の定理). 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f が, $f(a)f(b) < 0$ をみたすならば, ある $c \in (a, b)$ が存在して, $f(c) = 0$ が成り立つ.

【証明の概略】 $a_0 = a, b_0 = b, I_0 = [a_0, b_0]$ とおき, $f(a_0) < 0, f(b_0) > 0$ とする. さらに, 帰納的に, $I_n = [a_n, b_n]$ が定義され, $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ であると仮定する. このとき, $c_n = (a_n + b_n)/2$ とおき, $f(c_n) \neq 0$ ならば, $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ を区間縮小法と同様に定義すれば, $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$ が成り立つ. したがって, 区間縮小法 (定理 1.25) により, ある $c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ が存在する. ここで見つけた c に対して, $f(c) = 0$ が成り立つことを, f の連続性を用いて証明すればよい. 実際には, $f(c) > 0$ と仮定して矛盾を導く. $\square$

定義 2.26. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が, 区間 $I \subset X$ で単調増加 (単調減少) であるとは, 任意の $x, y \in I$ に対して $x < y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$) が成り立つことを言う. 特に, 任意の $x, y \in I$ に対して $x < y$ ならば $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$) が成り立つときには, 狭義単調増加 (狭義単調減少) であるという.

系 2.27. 有界閉区間 $[a, b]$ 上の狭義単調な連続関数 f が, $f(a)f(b) < 0$ をみたすならば, ある $c \in (a, b)$ が一意に存在して, $f(c) = 0$ が成り立つ.

【証明の概略】 $f(c) = 0$ をみたす $c \in [a, b]$ が 2 つあると仮定して, 単調性と矛盾することを示せばよい. $\square$

例 2.28. 中間値の定理を用いると, 良く知られた以下の事実を証明できる.

1. 任意の正の実数 $a > 0$ に対して, $x^2 = a$ をみたす正の数がただひとつ存在する. この数を a の正の平方根と呼び, $\sqrt{a}$ と書く.

【証明】 この事実は, 空でない集合 $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 < a\}$ を考えて, $\sup X$ の存在を使っても示すことができるが, ここでは, 関数 $f(x) = x^2 - a$ に中間値の定理を適用することで証明する.

$0 < a < 1$ の時には, $\sqrt{a} = 1/\sqrt{1/a}$ であるので, $a > 1$ の時に証明すれば十分である. いま, 関数 $f(x) = x^2 - a$ は $[0, a]$ 上で連続であり, $f(0) = -a < 0$, $f(a) = a^2 - a > 0$ が成り立つ. さらに, 任意の正の実数 $x > 0, y > 0$ に対して, $x < y$ ならば $x^2 < y^2$ が成り立つ. よって, f は区間 $[0, a]$ 上で狭義単調増加である. よって, 中間値の定理 (系 2.27) を使えば, ある $c \in [0, a]$ が一意的に存在して, $f(c) = 0$ をみたす. $\square$

同様にして, 任意に自然数 $n \in \mathbb{N}$ を与えたとき, 正の実数 $a > 0$ の正の n 乗根 $a^{1/n}$ がただひとつ存在することが, 中間値の定理を用いて証明できる.

2. 奇数次の多項式関数 f は, $\mathbb{R}$ 上で少なくとも一つの零点を持つ. すなわち, ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $f(a) = 0$ をみたす.

【証明】 いま, f の最高次の係数は正であると仮定しよう. すると, 簡単な極限の計算から, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ が成り立つ. よって, ある $M > 0, K > 0$ が存在して, $x > K$ ならば $f(x) > M, x < -K$ ならば $f(x) < -M$ が成

り立つ. 特に, $f(K) \geq M > 0$ かつ $f(-K) \leq -M < 0$ が成り立つ. したがって, 区間 $[-K, K]$ で f に中間値の定理を適用すれば, ある $a \in [-K, K]$ が存在して $f(a) = 0$ をみたす. $\square$

定義 2.29. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $X \subset \mathbb{R}$ で一様連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して, $|x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つことを言う. この定義を論理式で書くと, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\forall y \in X)((|x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon))$ と書き表される.

注意 2.30. 単なる連続性の定義では, $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ は x に依存してもかまわない. しかし, 一様連続性の定義では, δ が $x \in X$ に依存せずに「一様」に取れることを要請している.

微積分では, 極限操作の順序を無条件に「交換」することはできない. 極限操作の順序をいつ交換できるかが重要な問題であり, そのための条件として, 一般には, 何らかの「一様性」が要求される. 例えば, 「連続関数の積分可能性」もこの種の問題に帰着される.

定理 2.31. 有界閉区間 I 上の連続関数は I 上で一様連続である.

2.3 合成関数・逆関数

ここでは, 合成関数および逆関数の定義とその連続性を考察する.

定義 2.32.

1. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ が $f(X) \subset Y$ をみたすとき, f と g の合成関数 $h = g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(x) = g(f(x))$ ($x \in X$) で定義する.
2. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が, 任意の $x, y \in X$, ($x \neq y$) に対して, $f(x) \neq f(y)$ をみたすとき, f を 1 対 1 または単射という.
3. 関数 $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ が, 任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して, $f(x) = y$ をみたすとき, f を全射という.
4. 関数 $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ が, 全射かつ単射であるとき, f を全単射という.
5. 関数 $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ が全単射であるとき, 任意の $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただひとつ決まる. このとき, 関数 $g: Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}$ を $g(y) = x$ と定め, f の逆関数と呼び, g を f^{-1} と書く.

注意 2.33. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が, X 上で狭義単調ならば単射であることは, その定義から明らかである. また, 任意の関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は, $f(X) \subset \mathbb{R}$ 上への全射と考えることができる. よって, 狭義単調な関数 $f: X \rightarrow f(X)$ は全単射であり, その逆関数 $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ が存在する.

また, f に逆関数が存在するとき, 任意の $x \in X$ に対して, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ が成り立つ. さらに, 任意の $y \in f(X)$ に対して $(f \circ f^{-1})(y) = y$ が成り立つ.

補題 2.34. 全単射な関数 $f: X \rightarrow Y$ が狭義単調増加ならば, $f^{-1}: Y \rightarrow X$ も狭義単調増加である.

【証明】 逆関数 f^{-1} が狭義単調増加でないと仮定して矛盾を導く. ある $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ が存在して, $y_1 < y_2$ かつ $f^{-1}(y_1) = x_1 \geq x_2 = f^{-1}(y_2)$ と仮定する. すると, f が狭義単調増加であることから, $x_1 \geq x_2$ より $f(x_1) \geq f(x_2)$ が成り立つ. すなわち $y_1 \geq y_2$ が成り立つ. これは $y_1 < y_2$ と仮定したことに矛盾する. よって, f^{-1} は狭義単調増加である. $\square$

定理 2.35. 合成関数および逆関数の連続性については, 以下が成り立つ.

1. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ が $f(X) \subset Y$ をみたし, f は $a \in X$ で連続, g は $f(a) \in Y$ で連続ならば, 合成関数 $g \circ f$ は a で連続となる.
2. 関数 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であり, $a \in X$ で連続ならば, f の逆関数 f^{-1} は $f(a) \in Y$ で連続となる.

【証明】 1. 関数 g の $b = f(a)$ での連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|y - b| < \delta$ ならば $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ が成り立つ. 次に f の a における連続性を使うと, ここで得た δ に対して, ある $\delta_2 > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta_2$ ならば $|f(x) - f(a)| < \delta$ が成り立つ. よって, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ が成り立つ. したがって $g \circ f$ は a で連続である.

2. いま f^{-1} が $b = f(a)$ で連続であることを示すには, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|y - b| < \delta$ ならば $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$ が成り立つことを示せばよい.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $y_1 = f(a - \varepsilon)$, $y_2 = f(a + \varepsilon)$ と取り, f が狭義単調増加と仮定すると, $y_1 < b < y_2$ および $f^{-1}(b) - f^{-1}(y_1) = \varepsilon$ が成り立つ. ここで, $\delta = \min\{|y_2 - a|, |y_1 - a|\}$ と取れば, f^{-1} が狭義単調増加と仮定したので, $|y - b| < \delta$ をみたす y は $f^{-1}(b - \delta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(b + \delta)$ をみたす. よって, $f^{-1}(y) - f^{-1}(b) < f^{-1}(b + \delta) - f^{-1}(b) \leq f^{-1}(y_2) - f^{-1}(b) = \varepsilon$ が成り立つ. 同様に, $f^{-1}(y) - f^{-1}(b) > -\varepsilon$ が成り立つので, f^{-1} は b で連続である. $\square$

例 2.36. いくつかの関数の逆関数を求めてみよう.

1. $f(x) = x$ は, $\mathbb{R}$ 全体で狭義単調増加かつ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ が成り立つ. よって, 逆関数 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, $f^{-1}(x) = x$ である.
2. $f(x) = x^3$ は, $\mathbb{R}$ 全体で狭義単調増加かつ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ が成り立つ. よって, 逆関数 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ である.
3. $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 全体で 1 対 1 ではないが, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ と考えると, $[0, \infty)$ 上で狭義単調増加かつ全単射となる. よって, 逆関数 $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在し, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である.

★ 問題

演習問題 2.1. 以下の極限が存在すればそれを求めなさい. ただし, $q > 0$ は正の有理数とする.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^q} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x - 1}{|x|}$$

演習問題 2.2. f を区間 $[a, b]$ 上の連続関数とし, その最大値, 最小値を M, m とする. このとき, 関数 f の値域 $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ は $[m, M]$ に一致することを示しなさい. 【ヒント】 中間値の定理を使う.

演習問題 2.3. 実数全体で定義された連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ が存在するならば, f は有界であることを示しなさい.

演習問題 2.4. 関数 f の極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在すれば, その極限值は一意的であることを証明しなさい. ただし, $a \in \mathbb{R}$ と仮定する. また, $a = \pm\infty$ の時はどうか?

演習問題 2.5. 区間縮小法を用いて, $\sqrt{2}$ の近似値を 10 進数で小数点以下第 3 桁まで求めなさい. また, 漸化式 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, $a_1 = 2$ で定義される数列の値が $\sqrt{2}$ と 10 進数で小数点以下第 3 桁まで一致する最小の n はいくつか?

演習問題 2.6. 例 2.21 の 3, 4 で与えた関数の連続性を調べなさい.

演習問題 2.7. 関数 f, g は $\mathbb{R}$ 上定義された連続関数であり, 任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対して $f(q) = g(q)$ が成り立つと仮定する. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことを証明しなさい.

演習問題 2.8. 関数 f, g が連続ならば, $F(x) = |f(x)|$, $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ も連続であることを証明しなさい.

演習問題 2.9. 関数 f は $[a, b]$ 上で連続であると仮定する. このとき, $g(x) = \max\{f(t) : a \leq t \leq x\}$ も $[a, b]$ 上で連続であることを示しなさい.

演習問題 2.10. 関数 f は $\mathbb{R}$ 上連続であり, 逆関数を持つと仮定する. このとき, 次が成り立つことを示しなさい.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = \infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ かつ $f(x) > 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow 0+} f^{-1}(x) = -\infty$.

演習問題 2.11. 有界閉区間 I 上の連続関数は I 上で一様連続であることを証明しなさい. 【ヒント】 一様連続でないと仮定して矛盾を導く.