



圧縮センシングを用いた CT画像再構成

—制限X線投影における再構成—

京都産業大学大学院
先端情報学研究科
先端情報学専攻
蚊野研究室 垣内 友希

X線コンピュータ断層撮影

- 一般的なX線CT撮影装置
 - ・ X線源とX線検出器が対向して設置されている
 - ・ X線源とX線検出器は360° または180° 回転



Aquilion ONE
(東芝メディカルシステムズ)

X線CTの利点と問題点

- 利点
 - 人体内部の三次元構造が取得できる
 - 人体内部の異常を容易に発見可能
- 問題点
 - 他のX線を用いた診断装置と比較すると被曝線量が多い
 - 装置自体が大規模(設置スペースの確保が必要)

X線CTが抱える問題の解決方法

- X線の投影回数を減らす
- 全周囲方向からの撮影の必要性をなくす
- X線を照射する領域を狭める

→いずれも取得データ量が少なくなり、
画像再構成が困難になる

少数データからのCT画像再構成

- 圧縮センシング
 - Donoho, Candesが2006年に提唱
 - 不十分なサンプル数のデータから原信号を復元可能
- CT画像再構成への応用
 - 従来よりX線の投影回数が少ない状態での画像再構成が可能

本研究の目的

- 圧縮センシングを用いた
投影条件制限下におけるCT画像再構成の検証
 - (i) X線投影回数が少ない場合 (従来研究の追試)
 - (ii) X線を照射する領域を制限した場合
 - (iii) X線源とX線検出器の回転角度を制限した場合
- 以上の条件において、十分な画質で再構成可能
→ 被曝量の低減・装置の小型化

圧縮センシング

- 信号がスパース性を持つとき，少数のサンプリングデータから原信号を復元可能とする技術
- スパース性を持つ信号：線形変換を施すことで，信号成分の大半が0になる信号

圧縮センシングの原理(1 / 5)

- 一般の線形観測問題
 - 未知ベクトルを線形観測に基づいて推定

$$Ax=b$$

A : 観測行列 x : 未知ベクトル b : 観測結果

- A を既知としたとき、 b から x を推定する問題は、 x を変数とした線形方程式を解くことと等価

圧縮センシングの原理(2 / 5)

- 線形方程式 $Ax=b$ を解く
 - ・ 行列 A のランク = 未知数 x の数
 - 行列 A の行数 = 未知数 x の数 \rightarrow 解が一意に求まる
 - 行列 A の行数 $>$ 未知数 x の数 \rightarrow $\|Ax - b\|^2$ が最小になる x を求める
 - ・ 行列 A のランク $<$ 未知数 x の数 \rightarrow 通常, 解が一意に求まらない

圧縮センシングの原理(3 / 5)

- 行列 A のランク < 未知数 \mathbf{x} の数の場合
 1. 解が真に近いほど値が小さくなる評価関数 $F(\mathbf{x})$ を構成
 2. $F(\mathbf{x})$ を最小化する

- 評価関数 $F(\mathbf{x})$

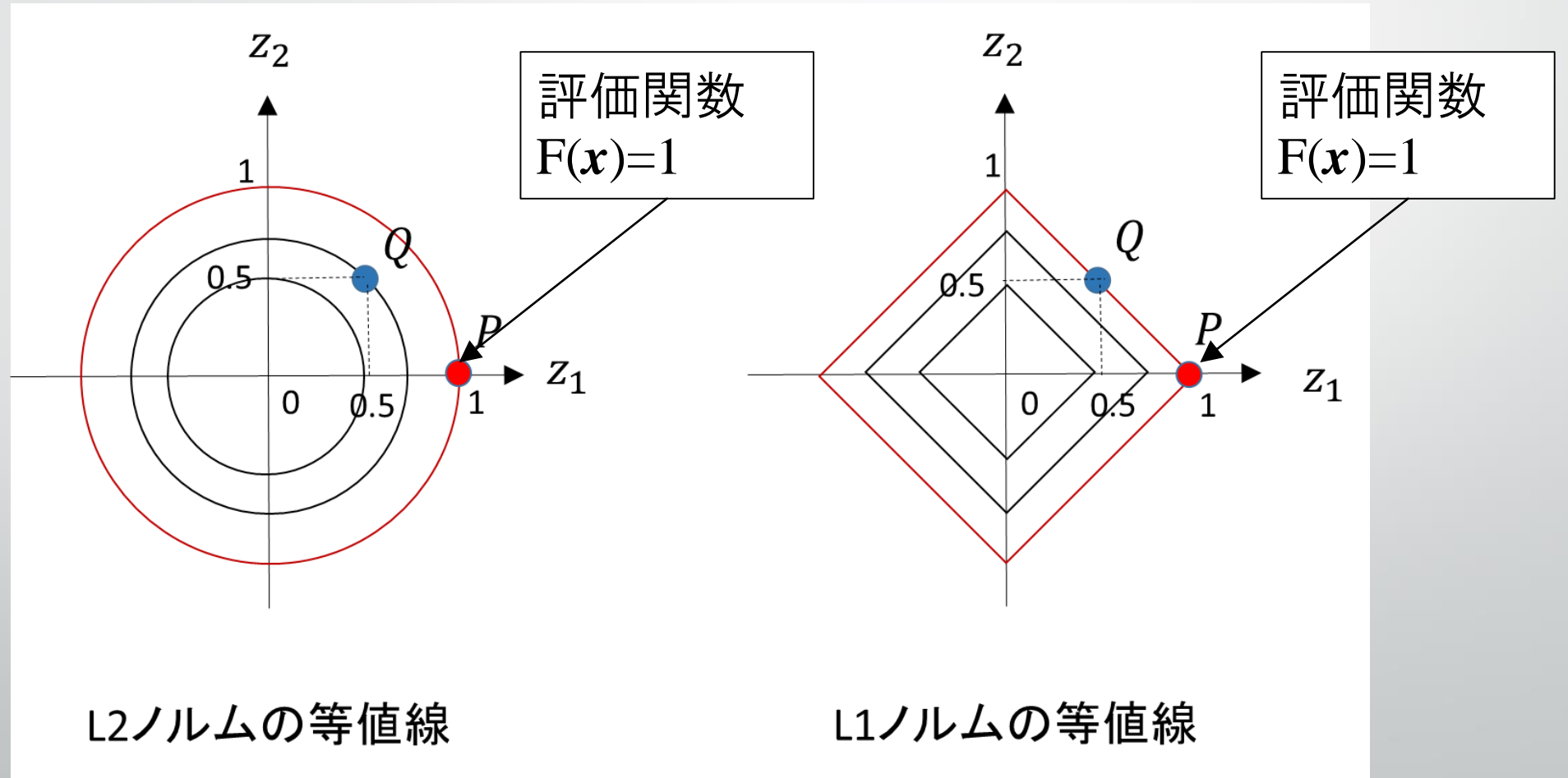
従来：解のL2ノルム

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$$

圧縮センシング：解のL1ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_N|$$

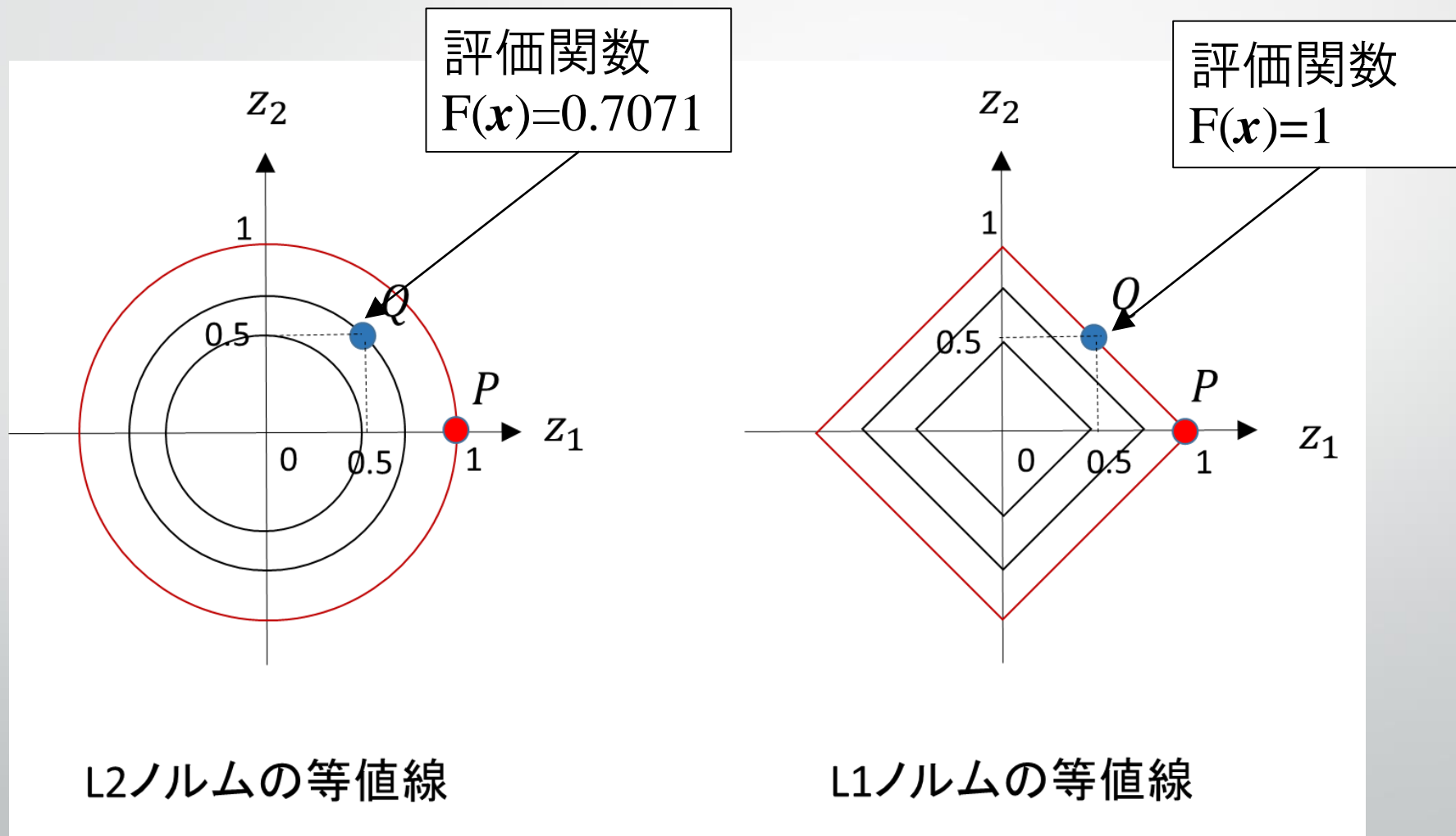
圧縮センシングの原理(4 / 5)



L2ノルムの等値線

L1ノルムの等値線

圧縮センシングの原理(5 / 5)



圧縮センシングの問題設定

- 圧縮センシングの問題は
条件付最小化問題を解くことである

$$\mathbf{x} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

圧縮センシングの問題設定

- $\mathbf{x} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- 補助変数 z_i^+ , z_i^- を導入して絶対値を外し,
線形計画問題に帰着できる

z_i^+ : $x_i \geq 0$ のとき $z_i^+ = x_i$, それ以外のとき $z_i^+ = 0$

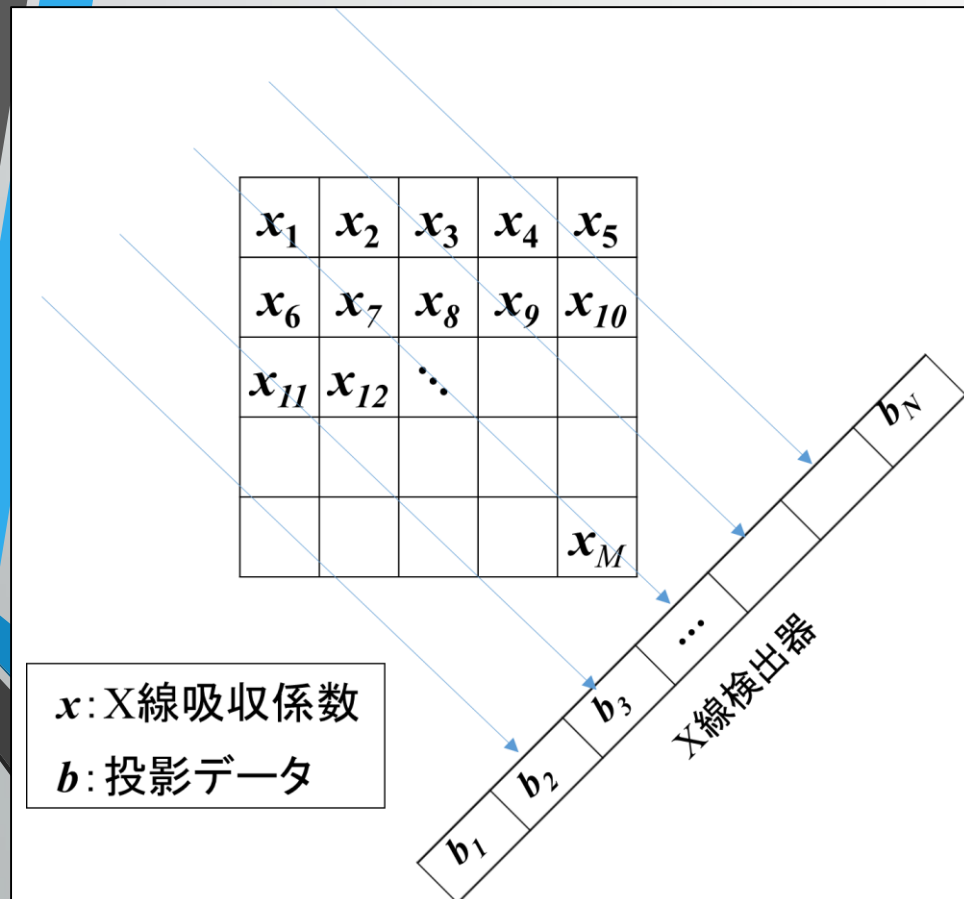
z_i^- : $x_i \leq 0$ のとき $z_i^- = -x_i$, それ以外のとき $z_i^- = 0$

$$\min \sum [z_i^+ + z_i^-] \text{ subject to } A(z_i^+ - z_i^-) = \mathbf{b}$$

$$z_i^+ \geq 0, \quad z_i^- \geq 0$$

圧縮センシングの CT画像再構成への応用(1 / 2)

- CT画像再構成：被写体のX線吸収係数分布を表す断面画像を投影データから推定



- 投影データ = X線が検出器に到達するまでに通過した領域のX線吸収係数を加算したもの

$$Ax=b$$

A : X線吸収係数と投影データの
関係を表す行列

x : X線吸収係数 b : 投影データ

圧縮センシングの CT画像再構成への応用(2 / 2)

- 被写体のX線吸収係数は，同一組織内部では一定であり，組織の境界でのみ変化すると仮定
→ 断面画像の勾配がスパースである
- 最終的には以下の最小化問題を解くことにより，再構成画像が得られる

$$\mathbf{x} = \operatorname{argmin} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{p-1} \{|x_{i,j} - x_{i+1,j}| + |x_{i,j} - x_{i,j+1}|\} \text{ subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

p : 断面画像の一边の画素数

i : 画素の行番号 j : 画素の列番号

実験 1

(圧縮センシングを用いたCT画像再構成)

- X線CTシミュレーションプログラムを作成
 - 実験を効率的に行うため
- 投影条件(投影回数・投影領域・投影角度)を様々に変更

実験 1

(圧縮センシングを用いたCT画像再構成)

- X線CTシミュレーションプログラムを作成
 - 実験を効率的に行うため
- 投影条件(投影回数・投影領域・投影角度)を様々に変更

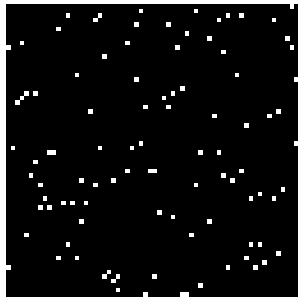
X線CTシミュレーションプログラム

- シミュレーションプログラムの構成
 1. 被写体の設定
 2. 投影データの取得
 3. 圧縮センシングによる画像再構成

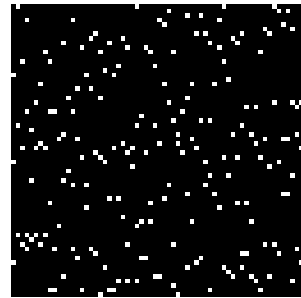
被写体の設定

- 被写体のX線減衰係数を表す 64×64 画素(4096画素)の2次元画像を使用して投影データを取得

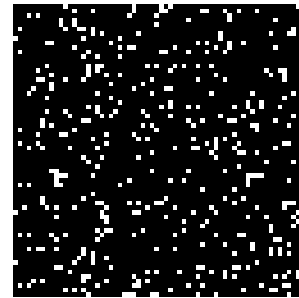
(1) ランダムドット画像



100スパース



200スパース



400スパース

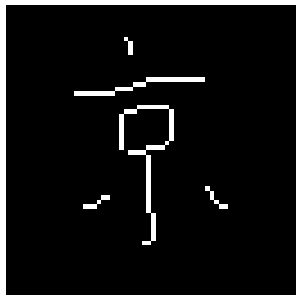


800スパース

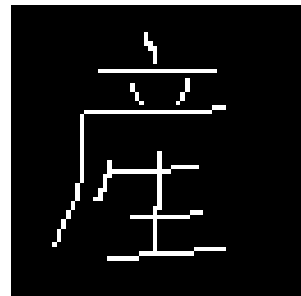


1600スパース

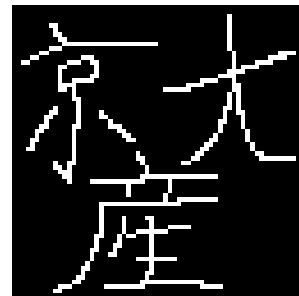
(2) 文字画像



100スパース



200スパース



400スパース

(3) Logan-Sheppファントム



502スパース(勾配画像)

再構成画像の画質評価

- 再構成画像の画質を評価する指標として、**PSNR(ピーク信号対雑音比)**を使用

$$PSNR=20 \log_{10} \frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}} \quad MSE=\frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} [I(i,j)-K(i,j)]^2$$

m :画像の高さ n :画像の幅 I :元画像 K :再構成画像

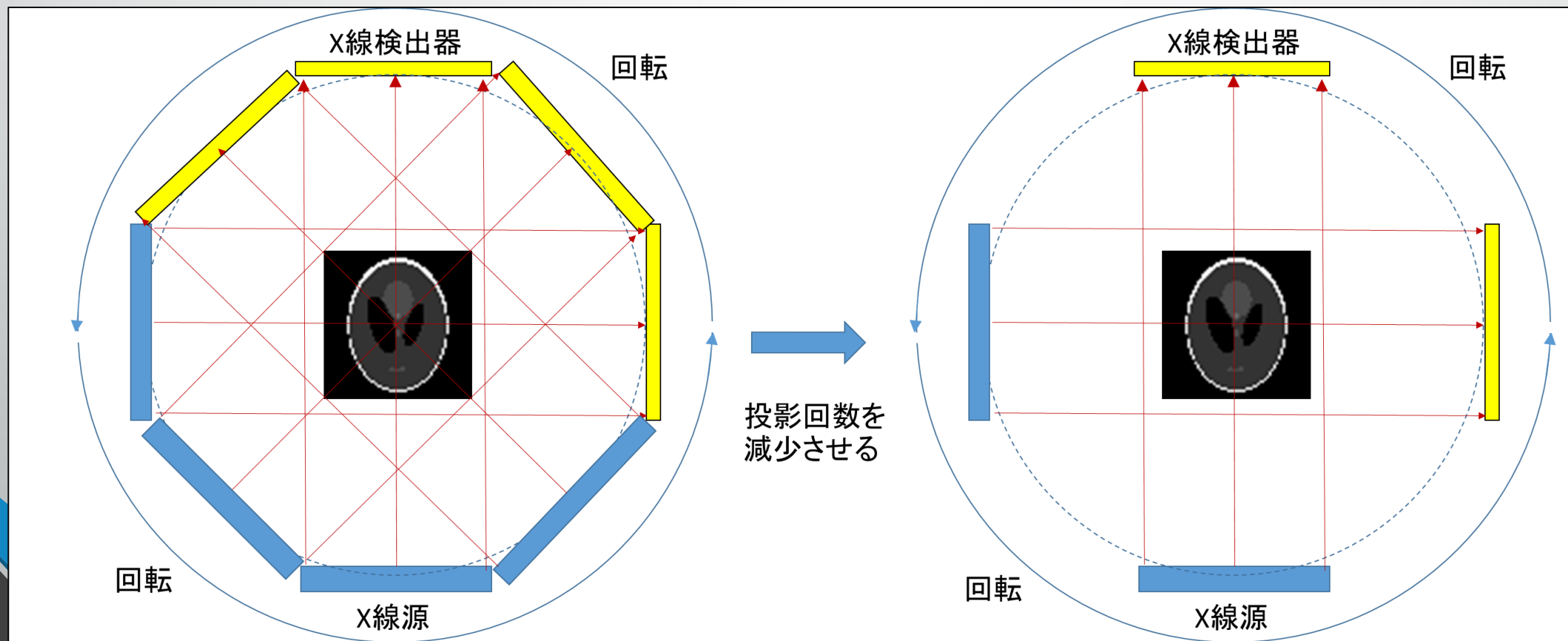
- 元画像と再構成画像の誤差が小さいほど値が高くなる
- PSNRは一般的に**40dB**以上であれば、劣化がほとんど知覚されない

実験 1 : 圧縮センシングを用いた CT画像再構成

- 圧縮センシングを用いたCT画像再構成を行う
- X線CTシミュレーションプログラムを作成, 使用
- 実験を効率的に行うため
- X線の投影条件(投影回数・投影領域・投影角度)を
様々に変更

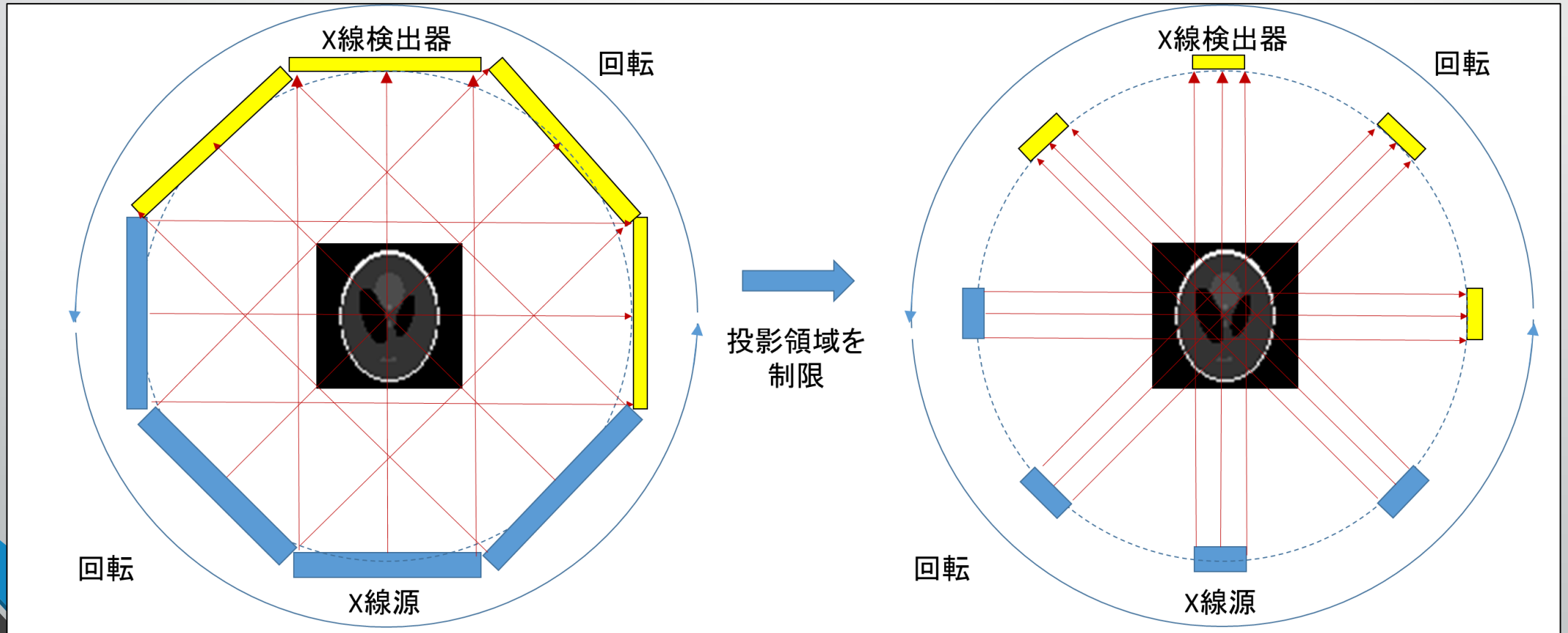
投影条件（投影回数）

- 投影回数：投影データの取得を行う回数
- **最低投影回数**：十分な再構成画像が得られる最低限の投影回数



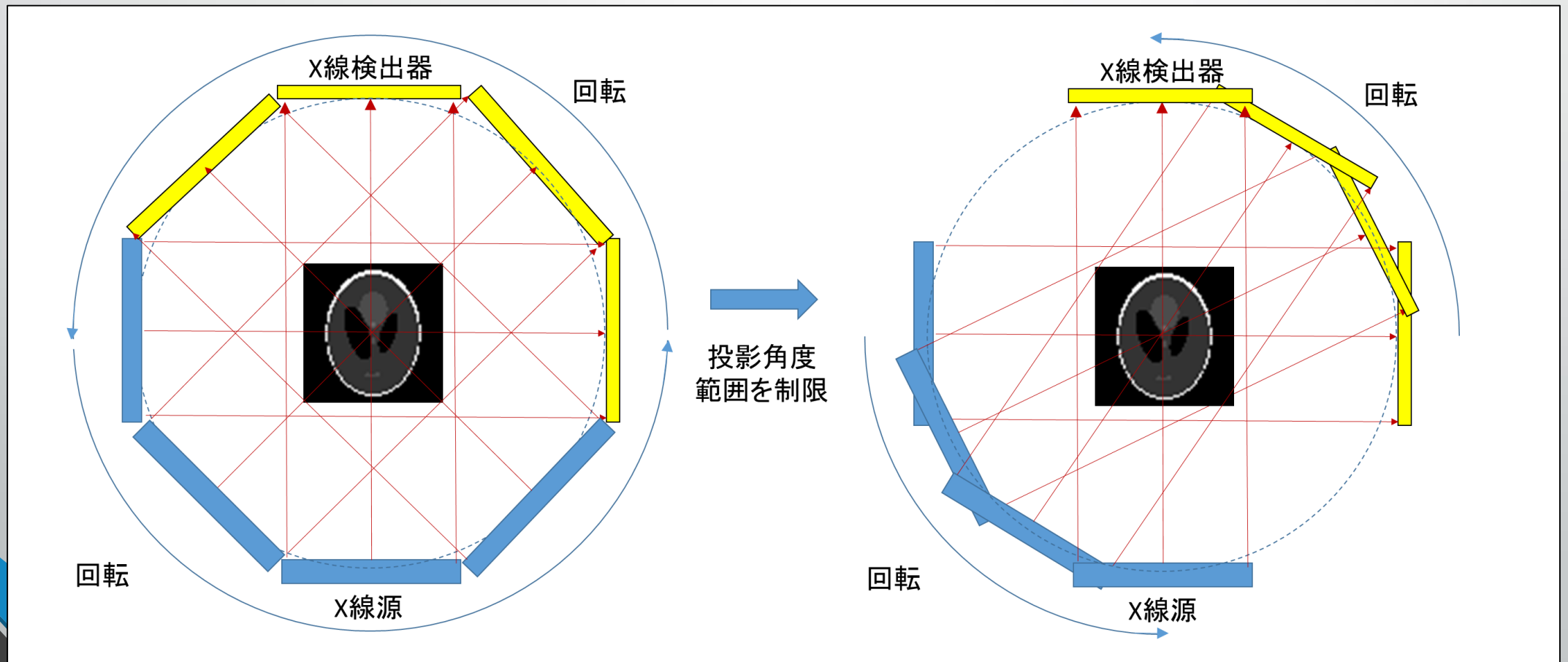
投影条件（投影領域）

- 投影領域：投影においてX線の照射を行う領域
- 被写体全体をカバーする大きさを100%とする



投影条件（投影角度範囲）

- 投影角度範囲：投影データの取得を行う角度の範囲



実験 1 における X 線の投影条件

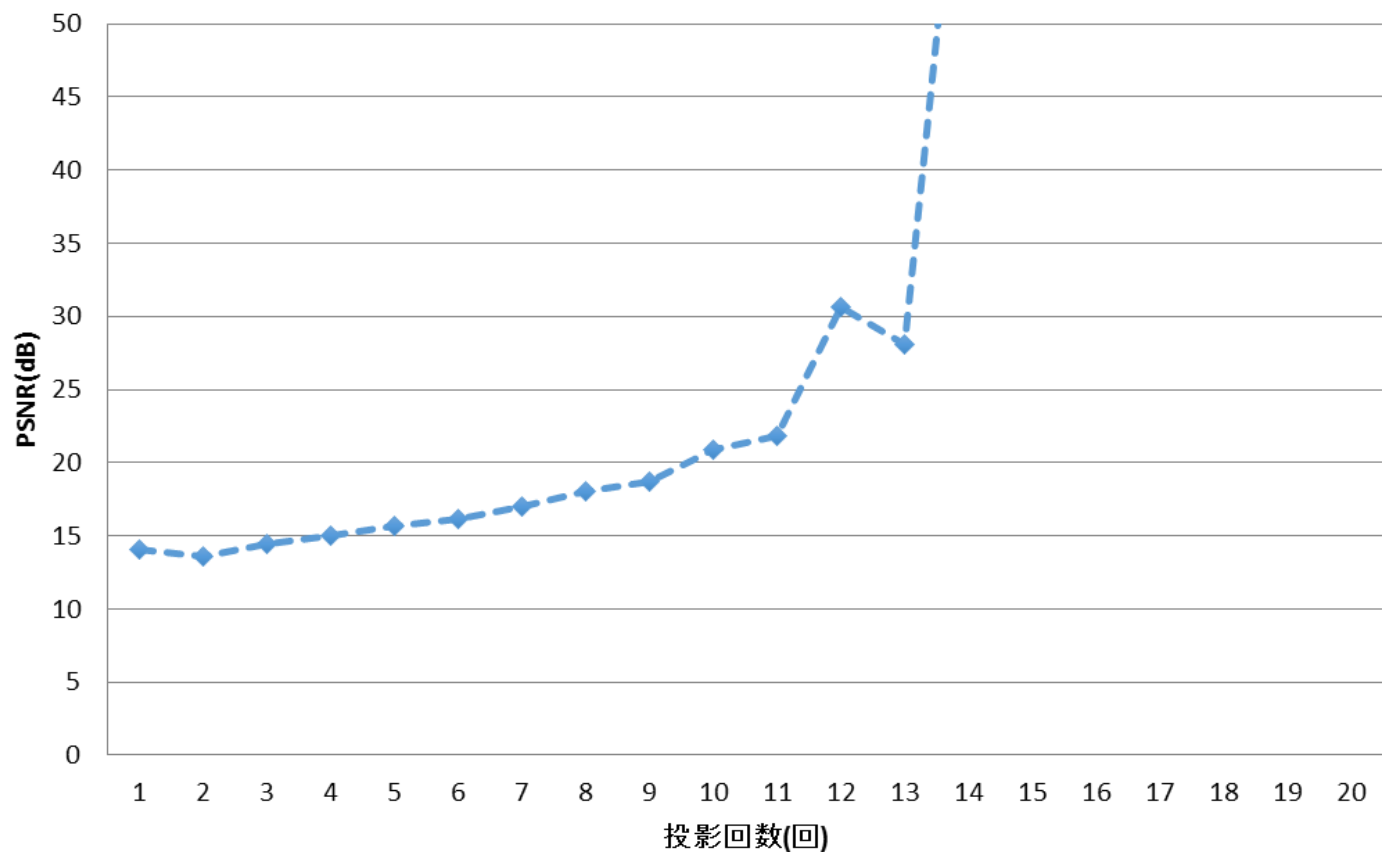
	投影回数(回)	投影角度範囲 (°)	投影領域(%)
実験 1 - 1	1~20	180	100
実験 1 - 2	最低投影回数, 最低投影回数の 2倍	180	10~90
実験 1 - 3	最低投影回数, 最低投影回数の 2倍	10~170	100

実験 1 における X 線の投影条件

	投影回数(回)	投影角度範囲 (°)	投影領域(%)
実験 1 - 1	1~20	180	100
実験 1 - 2	最低投影回数, 最低投影回数の 2倍	180	10~90
実験 1 - 3	最低投影回数, 最低投影回数の 2倍	10~170	100

圧縮センシングを用いたCT画像再構成 (実験 1 - 1, PSNR)

投影回数と再構成画像のPSNRの関係
(Shepp-Loganファントム画像)

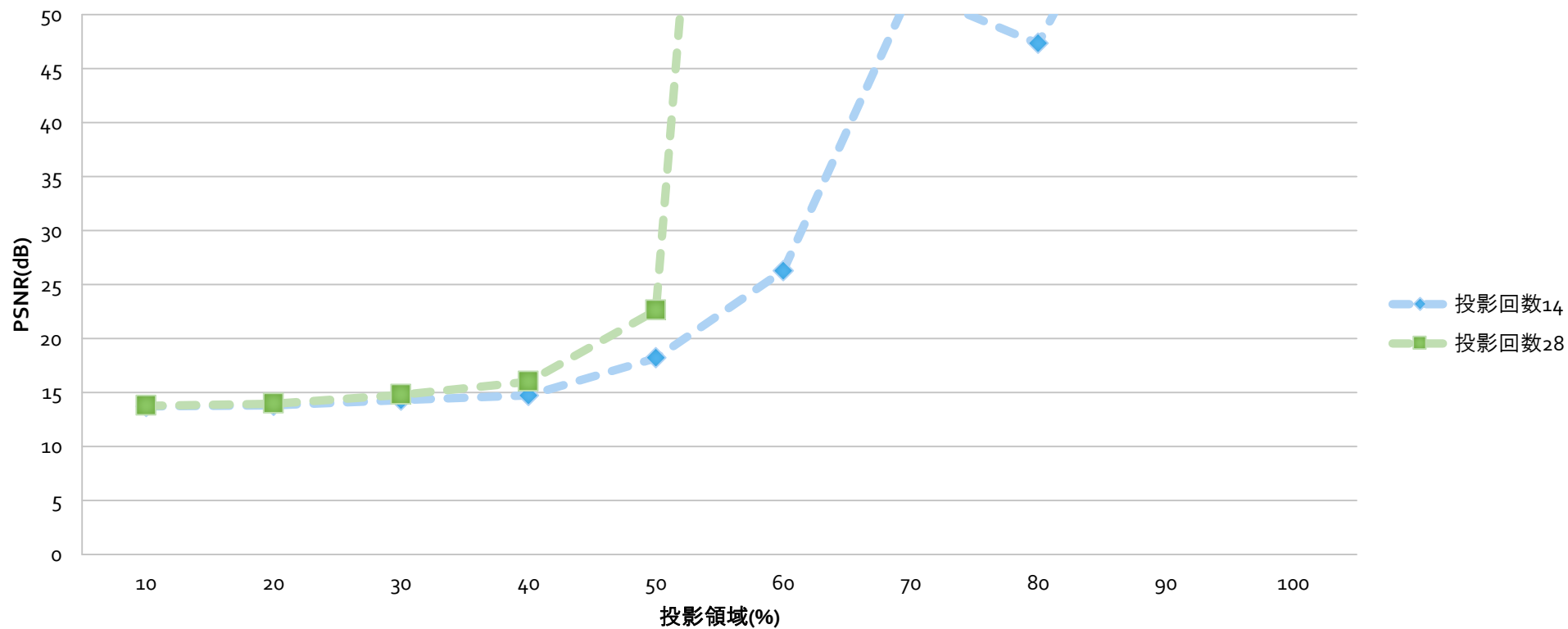


実験 1 における X 線の投影条件

	投影回数(回)	投影角度範囲 (°)	投影領域(%)
実験 1 - 1	1~20	180	100
実験 1 - 2	最低投影回数, 最低投影回数の 2倍	180	10~90
実験 1 - 3	最低投影回数, 最低投影回数の 2倍	10~170	100

圧縮センシングを用いたCT画像再構成 (実験1-2, PSNR)

投影領域制限時の投影回数と再構成画像のPSNRの関係 (Shepp-Logan
ファントム画像)

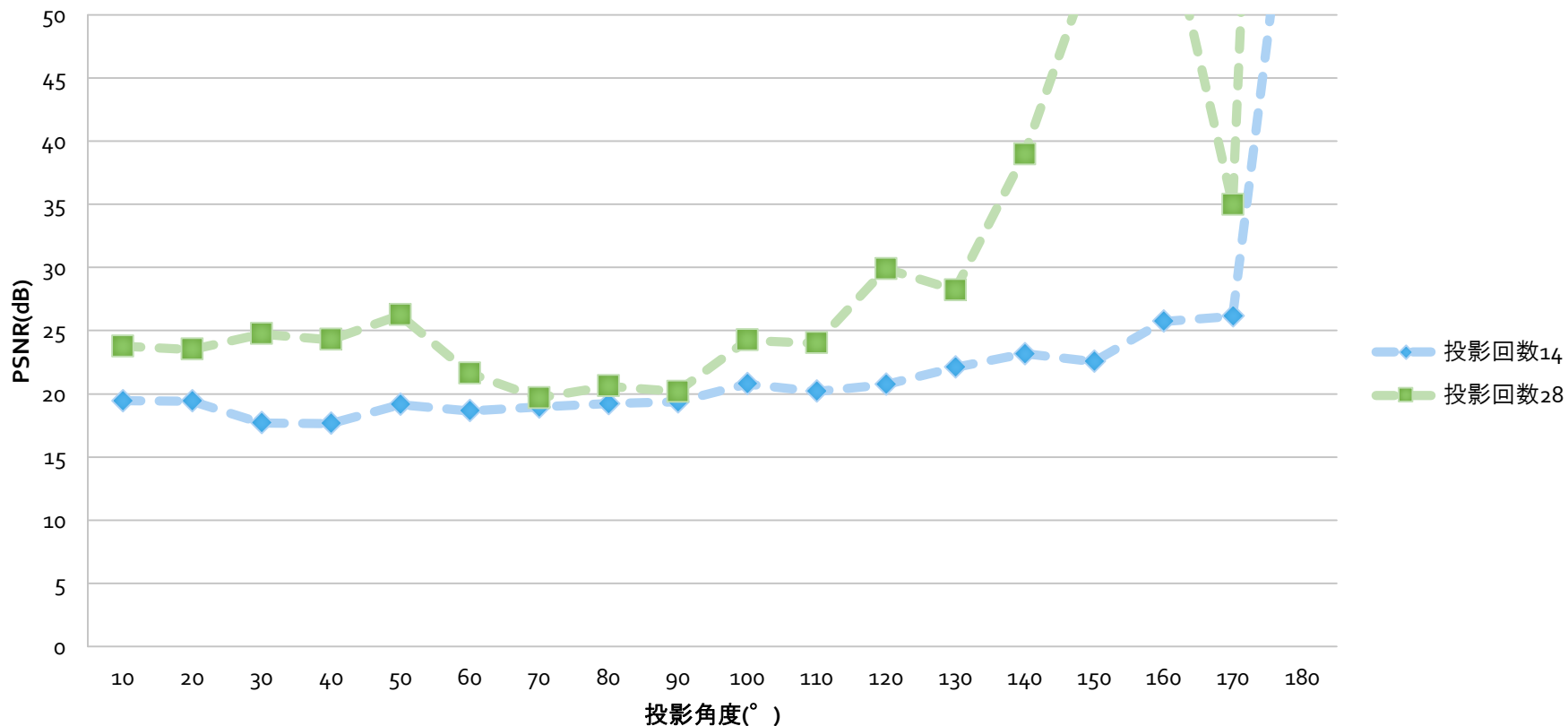


実験 1 における X 線の投影条件

	投影回数(回)	投影角度範囲 (°)	投影領域(%)
実験 1 - 1	1~20	180	100
実験 1 - 2	最低投影回数, 最低投影回数の 2倍	180	10~90
実験 1 - 3	最低投影回数, 最低投影回数の 2倍	10~170	100

圧縮センシングを用いたCT画像再構成 (実験 1 - 3, PSNR)

投影角度制限時の投影回数と再構成画像のPSNRの関係 (Shepp-Loganファントム画像)



圧縮センシングによる CT画像再構成結果のまとめ

- 実験 1 – 1（最低投影回数の検証）
今回の実験では，14回以上の投影回数で十分な再構成画像が得られた
- 実験 1 – 2（投影領域制限）
 - 投影回数を増加させていくことで，投影領域制限下においても十分な画像再構成が可能となる傾向がみられた
- 実験 1 – 3（投影角度範囲制限）
 - 投影回数を増加させていくことで，投影角度範囲制限下においても十分な画像再構成が可能となる傾向がみられた

実験 2 : 圧縮センシングと従来手法の比較

- 圧縮センシングと従来手法を比較する
 - CT画像再構成の代表的な手法と比較
 - (1) FBP法(フィルタ補正逆投影法)
 - (2) 逐次近似法
 - (3) 従来の線形方程式を解く方法

圧縮センシングと従来手法の比較方法

- 従来手法について、以下の条件で画像再構成を行う

	投影回数(回)	投影角度範囲(°)	投影領域(%)
実験 2-1	180	180	100
実験 2-2	14	180	100
実験 2-3	180	180	50
実験 2-4	180	90	100

圧縮センシングと従来手法の比較方法

- 従来手法について、以下の条件で画像再構成を行う

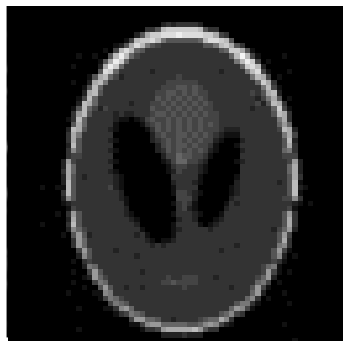
	投影回数(回)	投影角度範囲(°)	投影領域(%)
実験 2-1	180	180	100
実験 2-2	14	180	100
実験 2-3	180	180	50
実験 2-4	180	90	100

圧縮センシングと従来手法の比較(1)

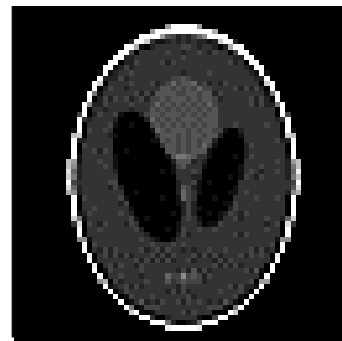
- 投影回数：180回
投影領域：100% 投影角度範囲：180°



元画像



FBP法



逐次近似法



線形方程式を
解く方法



※投影回数14回
圧縮センシング

圧縮センシングと従来手法の比較方法

- 従来手法について、以下の条件で画像再構成を行う

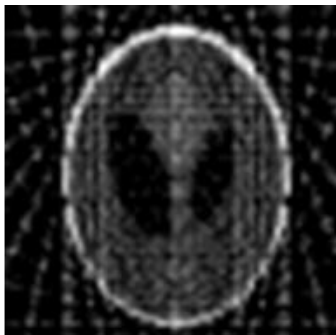
	投影回数(回)	投影角度範囲(°)	投影領域(%)
実験 2-1	180	180	100
実験 2-2	14	180	100
実験 2-3	180	180	50
実験 2-4	180	90	100

圧縮センシングと従来手法の比較(2)

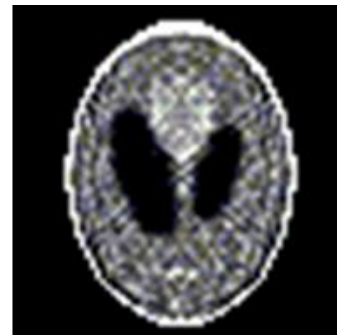
- 投影回数：14回
投影領域：100% 投影角度範囲：180°



元画像



FBP法



逐次近似法



線形方程式を
解く方法



圧縮センシング

圧縮センシングと従来手法の比較方法

- 従来手法について、以下の条件で画像再構成を行う

	投影回数(回)	投影角度範囲(°)	投影領域(%)
実験 2-1	180	180	100
実験 2-2	14	180	100
実験 2-3	180	180	50
実験 2-4	180	90	100

圧縮センシングと従来手法の比較(3)

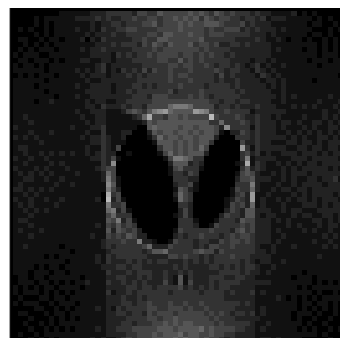
- 投影回数：180回
投影領域：50% 投影角度範囲：180°



元画像



FBP法



逐次近似法



線形方程式を
解く方法



※投影回数34回
圧縮センシング

圧縮センシングと従来手法の比較方法

- 従来手法について、以下の条件で画像再構成を行う

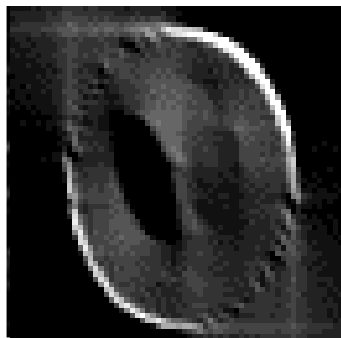
	投影回数(回)	投影角度範囲(°)	投影領域(%)
実験 2-1	180	180	100
実験 2-2	14	180	100
実験 2-3	180	180	50
実験 2-4	180	90	100

圧縮センシングと従来手法の比較(4)

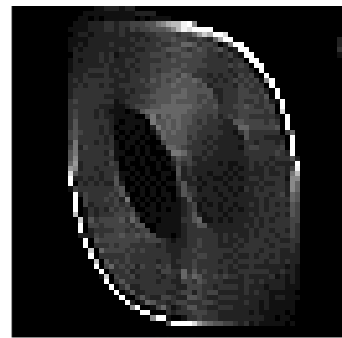
- 投影回数：180回
投影領域：100% 投影角度：90°



元画像



FBP法



逐次近似法



線形方程式を
解く方法



※投影回数36回
圧縮センシング

圧縮センシングと従来手法の比較まとめ

	実験 2-1	実験 2-2 (投影回数： 14回)	実験 2-3 (投影領域： 50%)	実験 2-4 (投影角度範 囲：90°)
FBP法	○	×	×	×
逐次近似法	○	×	×	×
線形方程式 を解く方法	○	×	○	○
圧縮 センシング	—	○	○	○

成果と課題

- 成果

1. 投影回数・投影領域・投影角度それぞれが制限される状況下において、圧縮センシングを用いれば十分な再構成画像が得られることを示した
2. 従来手法と比較すると、圧縮センシングは少ない投影回数で十分な再構成画像が得られることを示した

→ 被曝量の低減・装置の小型化

成果と課題

- 課題

1. 従来手法と比較すると計算に長い時間がかかる
2. 十分な再構成画像が得られる投影領域・投影角度の限界が確認できていない

圧縮センシングの CT画像再構成への応用(1 / 2)

- CT画像再構成：断面画像と投影データの関係を表す行列と投影データから断面画像を推定する
- X線CTにおける断面画像と投影データの間係を行列とベクトルの計算式に置き換える

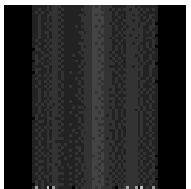
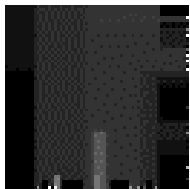
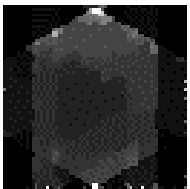
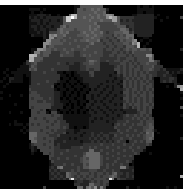
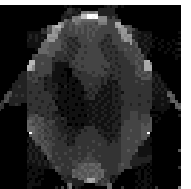

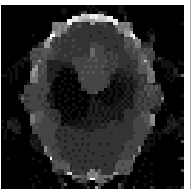
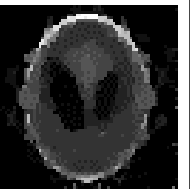
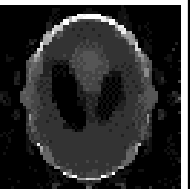
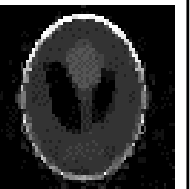

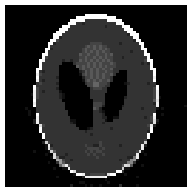
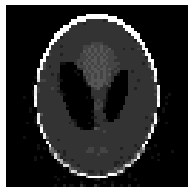







$$Ax=b$$

A ：断面画像と投影データの間係を表す行列

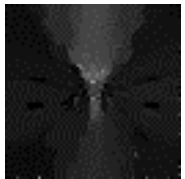
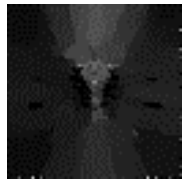
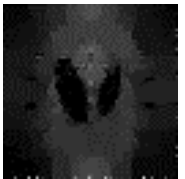






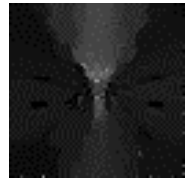


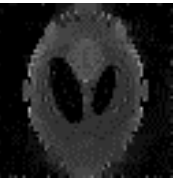





x ：断面画像 b ：投影データ

未知ベクトル x を線形観測に基づいて推定する問題
→圧縮センシングを適用することができる


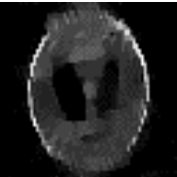
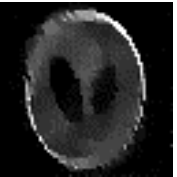





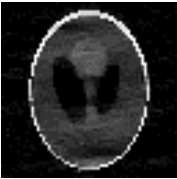
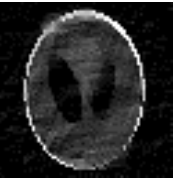
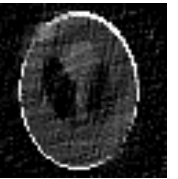



圧縮センシングを用いたCT画像再構成 (実験 1 - 1, 再構成画像)

投影回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
再構成画像										
投影回数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
再構成画像										

圧縮センシングを用いたCT画像再構成 (実験 1 - 2, 再構成画像)

投影領域 (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
最低投影回数									
最低投影回数の2倍									

圧縮センシングを用いたCT画像再構成 (実験 1 - 3, 再構成画像)

投影角度 (°)	10	30	60	90	120	150	180
最低投影 回数							
最低投影 回数の2 倍							

圧縮センシングの原理(6 / 6)

- スパースでない点において,
L1ノルムの評価関数の値 > L2ノルムの評価関数の値
となる.
- L1ノルムはL2ノルムよりもスパースな点を解として選びやすい
→原信号がスパースであれば, 解のL1ノルム最小化により
正しい解を求められる可能性が高い

追加実験

- 投影領域制限・投影角度制限における圧縮センシングと線形方程式を解く方法の比較を行うため、以下について調査した
 - (1) 投影領域を50%に制限した場合に十分な再構成画像が得られる最低投影回数
 - (2) 投影角度を 90° に制限した場合に十分な再構成画像が得られる最低投影回数

実験結果

十分な再構成画像が得られる最低限の投影回数

	投影領域制限 (50%に制限)	投影角度制限 (90° に制限)
圧縮センシング	34回	36回
線形方程式を解く 方法	87回	59回

X線コンピュータ断層撮影（2 / 2）

- 撮影の手順

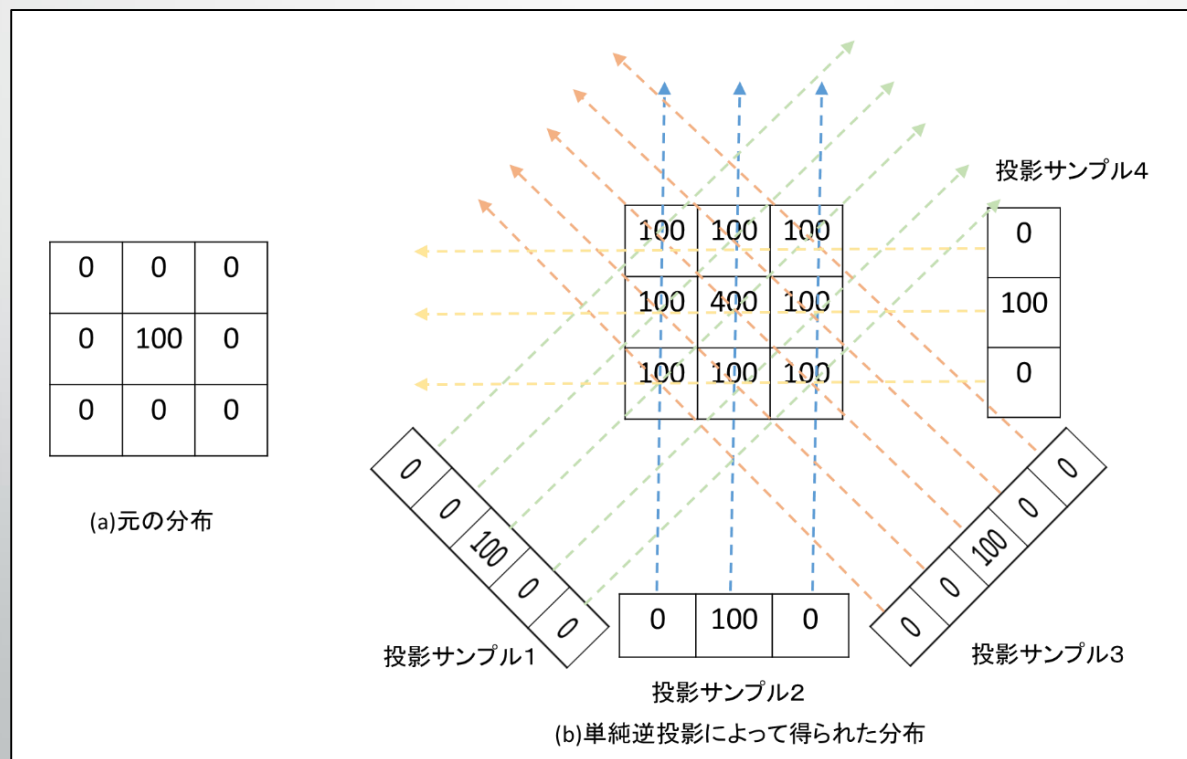
- (i) 被写体をX線源とX線検出器の間に設置
- (ii) X線源とX線検出器が回転しながら被写体を走査
- (iii) 取得したデータをコンピュータで処理
→ 物体の内部画像を再構成(CT画像再構成)

CT画像再構成法

- FBP(Filtered Back Projection)法
- 逐次近似法
- 線形方程式を解く方法
 - 従来の線形方程式を解く方法
(解の L_2 ノルム最小化, 最小二乗法)
 - 圧縮センシングを用いた方法(解の L_1 ノルム最小化)

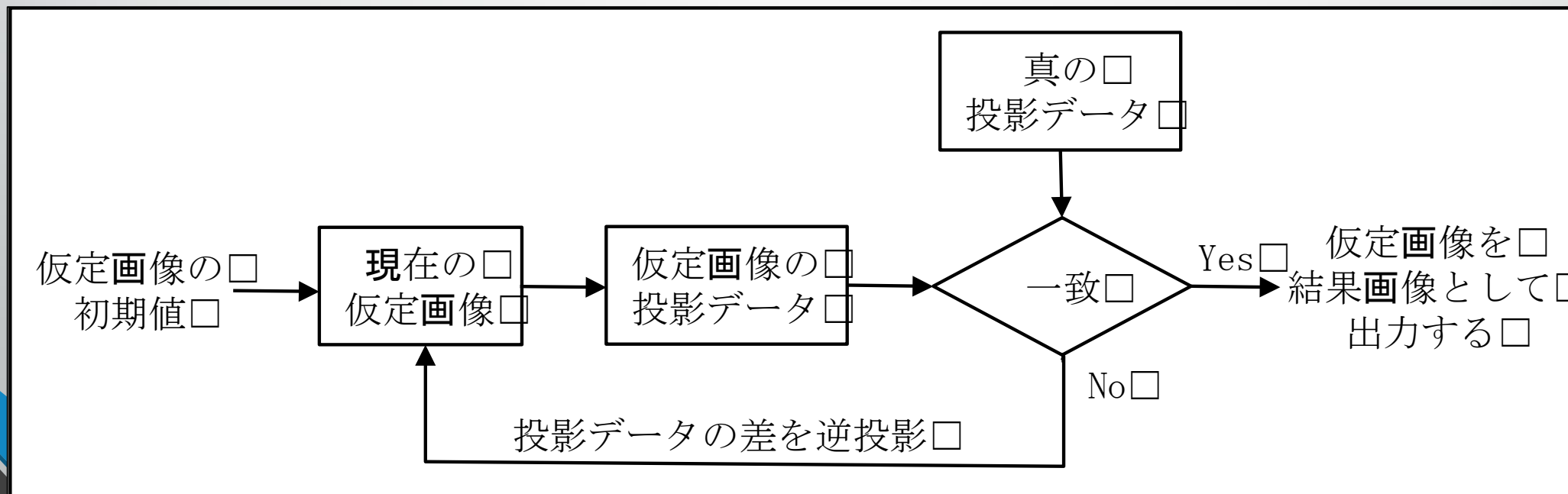
FBP法による画像再構成

- 投影データの逆投影を繰り返して得られる分布は，元の分布よりも広がりをもった値になる
→ 投影データに対して広がりをキャンセルするようなフィルタリング処理を行ってから逆投影を行う



逐次近似法による画像再構成

- 推定画像の投影データと測定データの比や差分を推定画像にフィードバックする
- 繰り返しフィードバックを行うことで，推定画像が正解画像に近づいていく



線形方程式を解くことによる画像再構成

- 画像再構成は以下の線形方程式を解く問題として定式化される

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

画像の画素値を一行に並べたベクトル： \vec{x}

測定された投影データ： \vec{b}

画像と投影データの関係を表す行列： A

- 行列 A の逆行列 A^{-1} が求めれば、連立一次方程式を解くことができ、画像が得られる

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

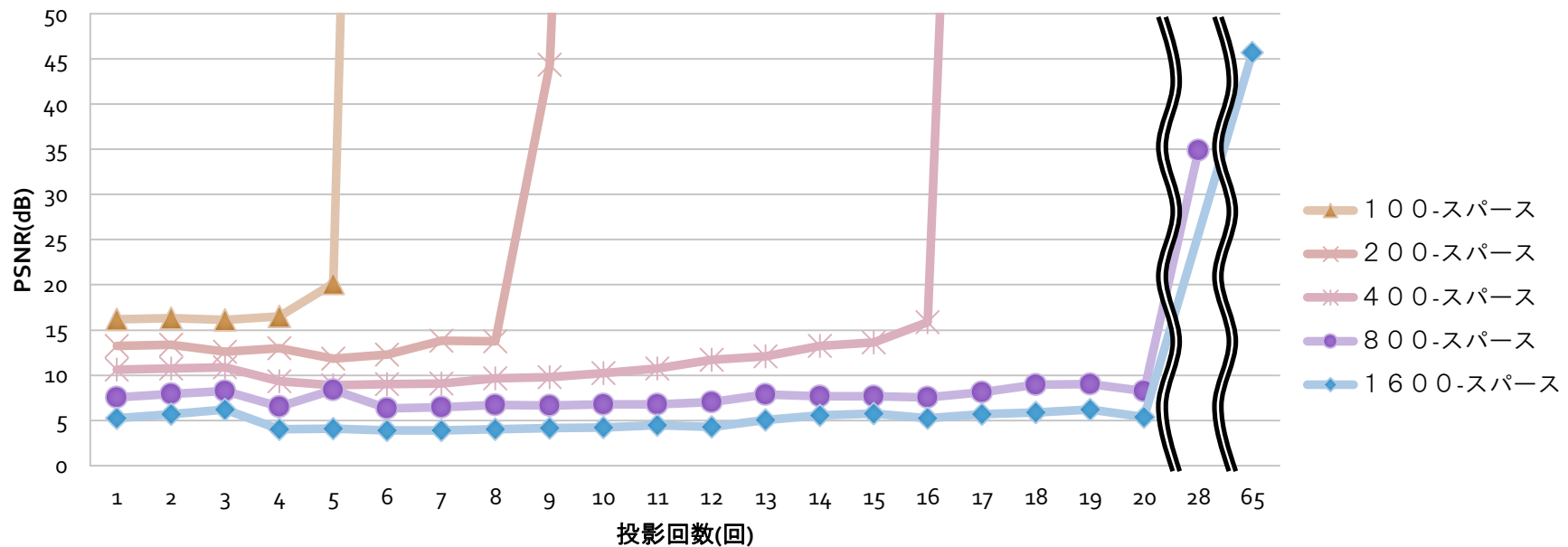
最小二乗法を利用した画像再構成

- 式の数 $>$ 未知数の数 \rightarrow 通常の逆行列を求めることができない
- 擬似的な逆行列を用いることにより、解くことができる

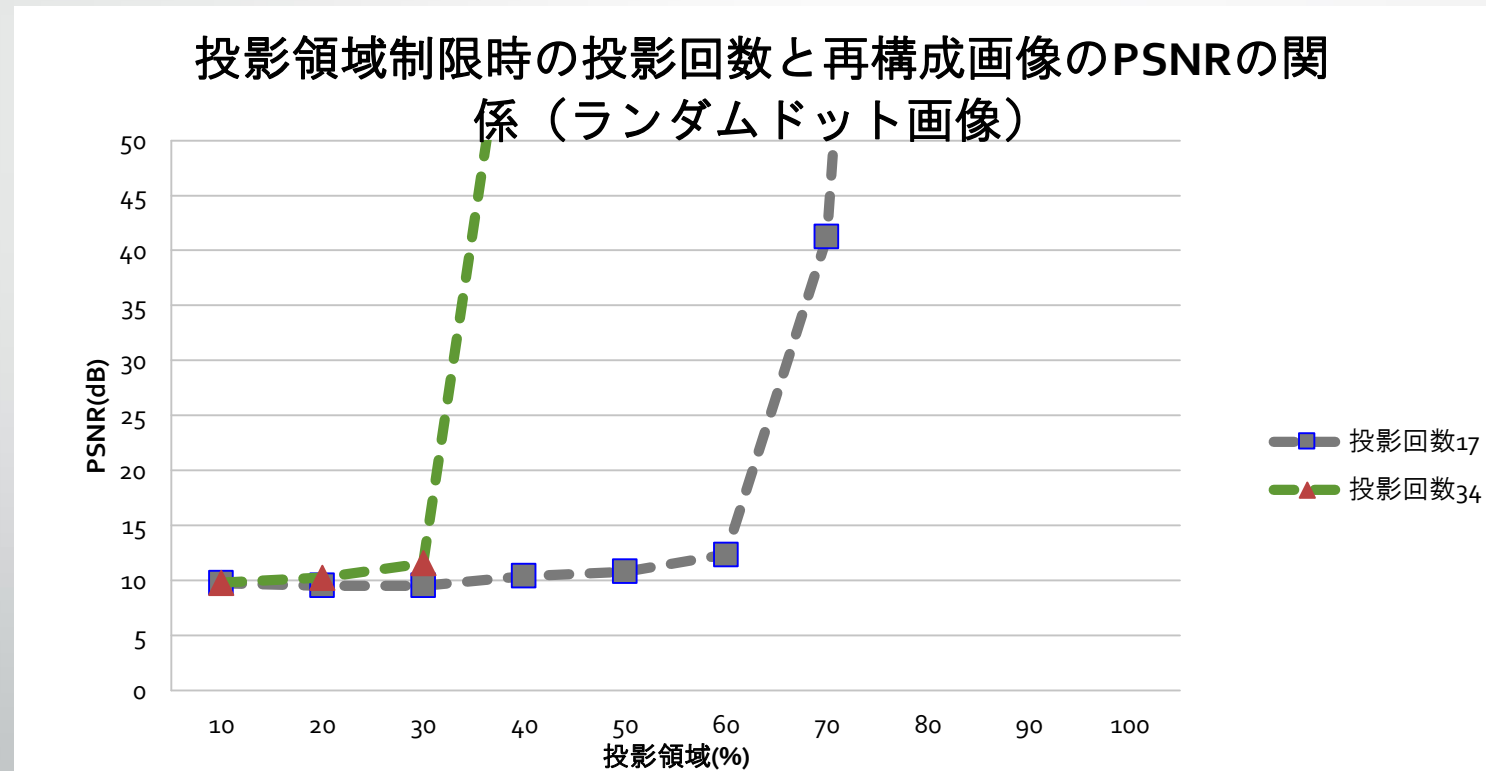
$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成

非投影制限時における投影回数と再構成画像のPSNRの関係
(ランダムドット画像)

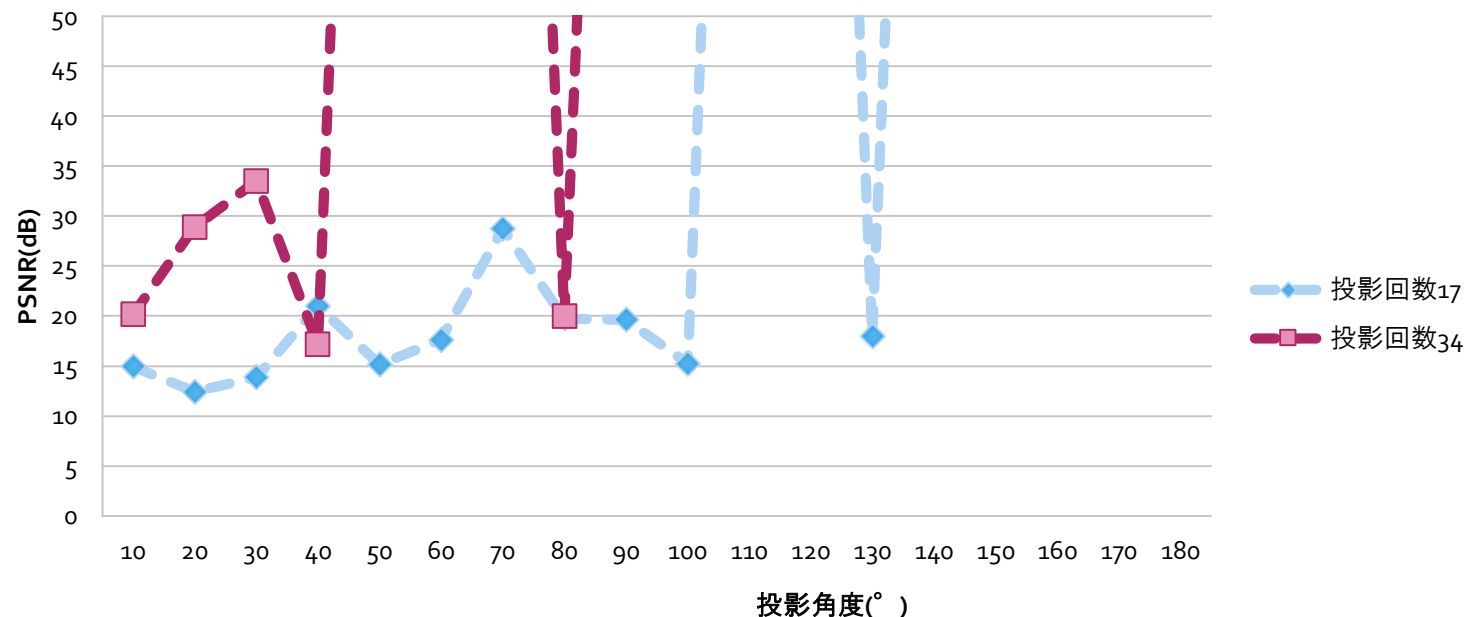


疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影領域制限)



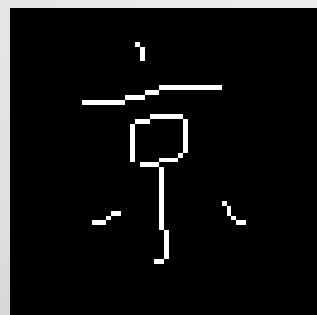
疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影角度制限)

投影角度制限時の投影回数と再構成画像のPSNRの関係
(ランダムドット画像)

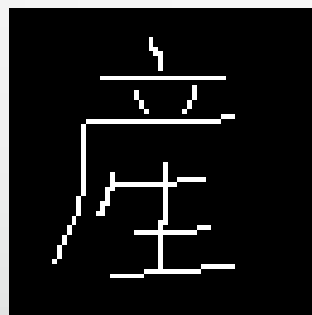


疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成

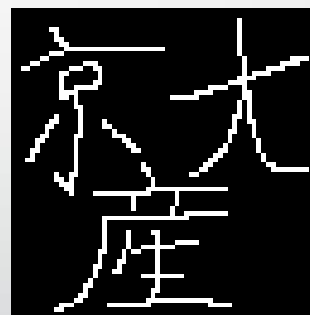
- 以下の文字画像に対し，画像再構成を行った



100スパース


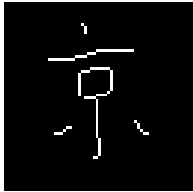
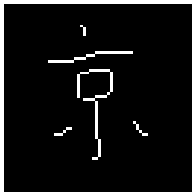
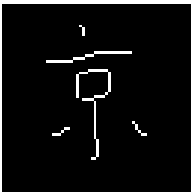
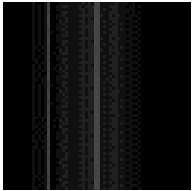
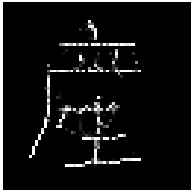
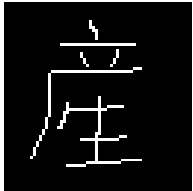
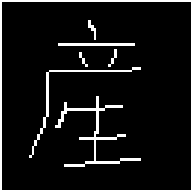
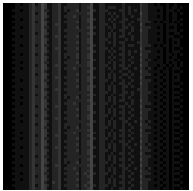
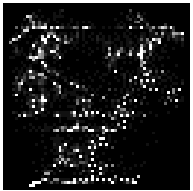
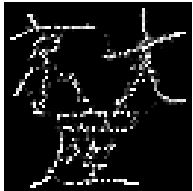
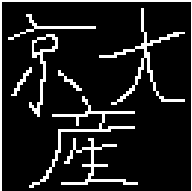


200スパース



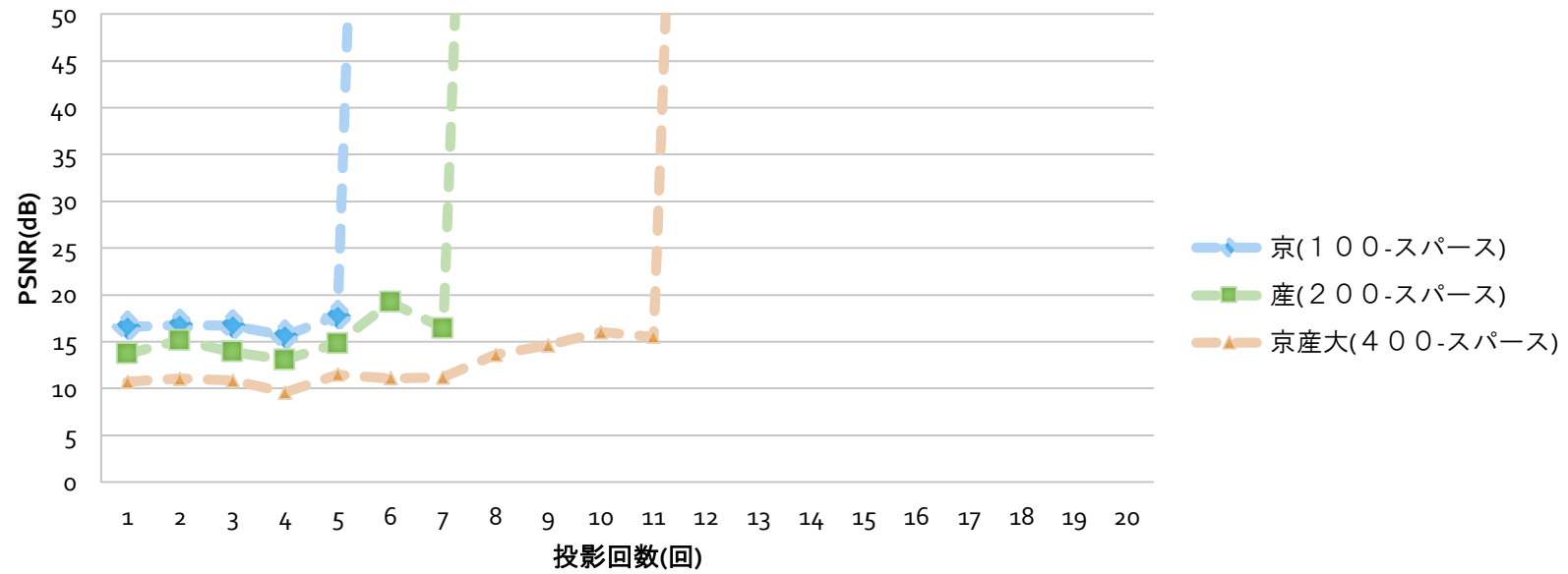
400スパース

疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成

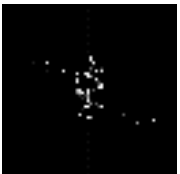

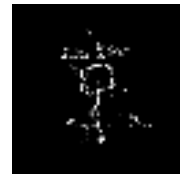
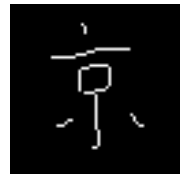
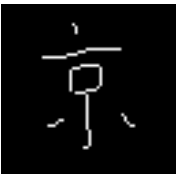
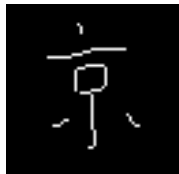
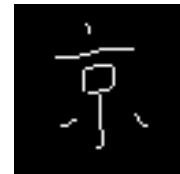
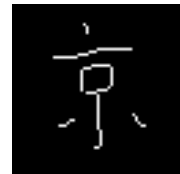
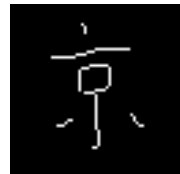


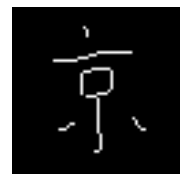
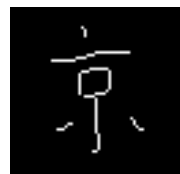
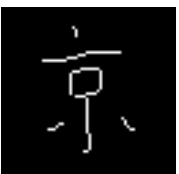
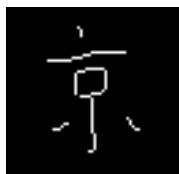
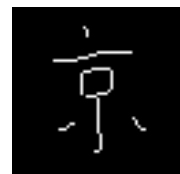
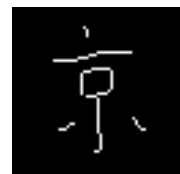
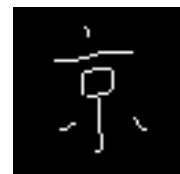
投影回数（回）	1	6	8	12
文字画像“京” （100スパーズ）				
文字画像“産” （200スパーズ）				
文字画像“京産大” （400スパーズ）				

疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成

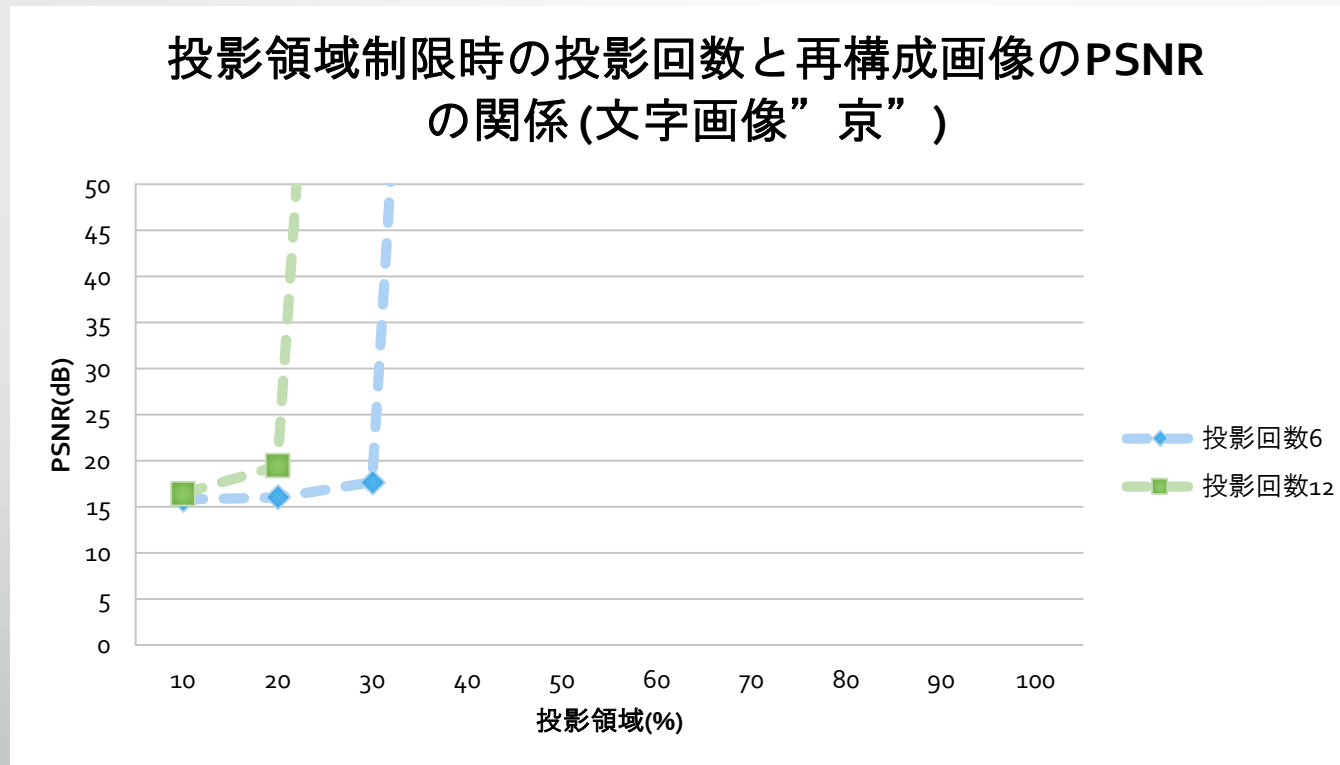
非投影制限時における投影回数と再構成画像のPSNRの関係
(文字画像)




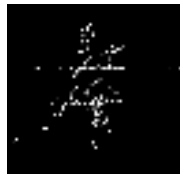
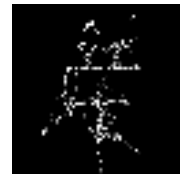

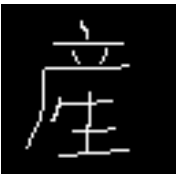
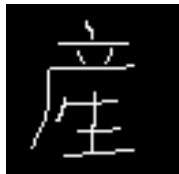
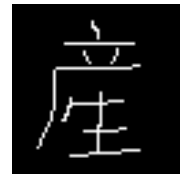

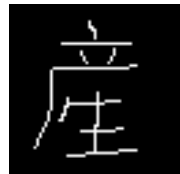



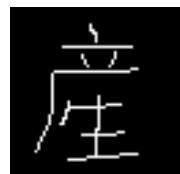

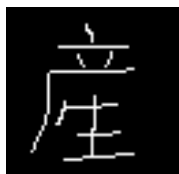
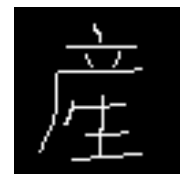
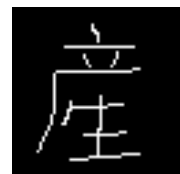
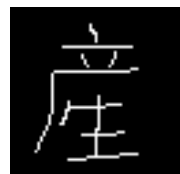
疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影領域制限)

投影領域 (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
最低投影回数									
最低投影回数の2倍									

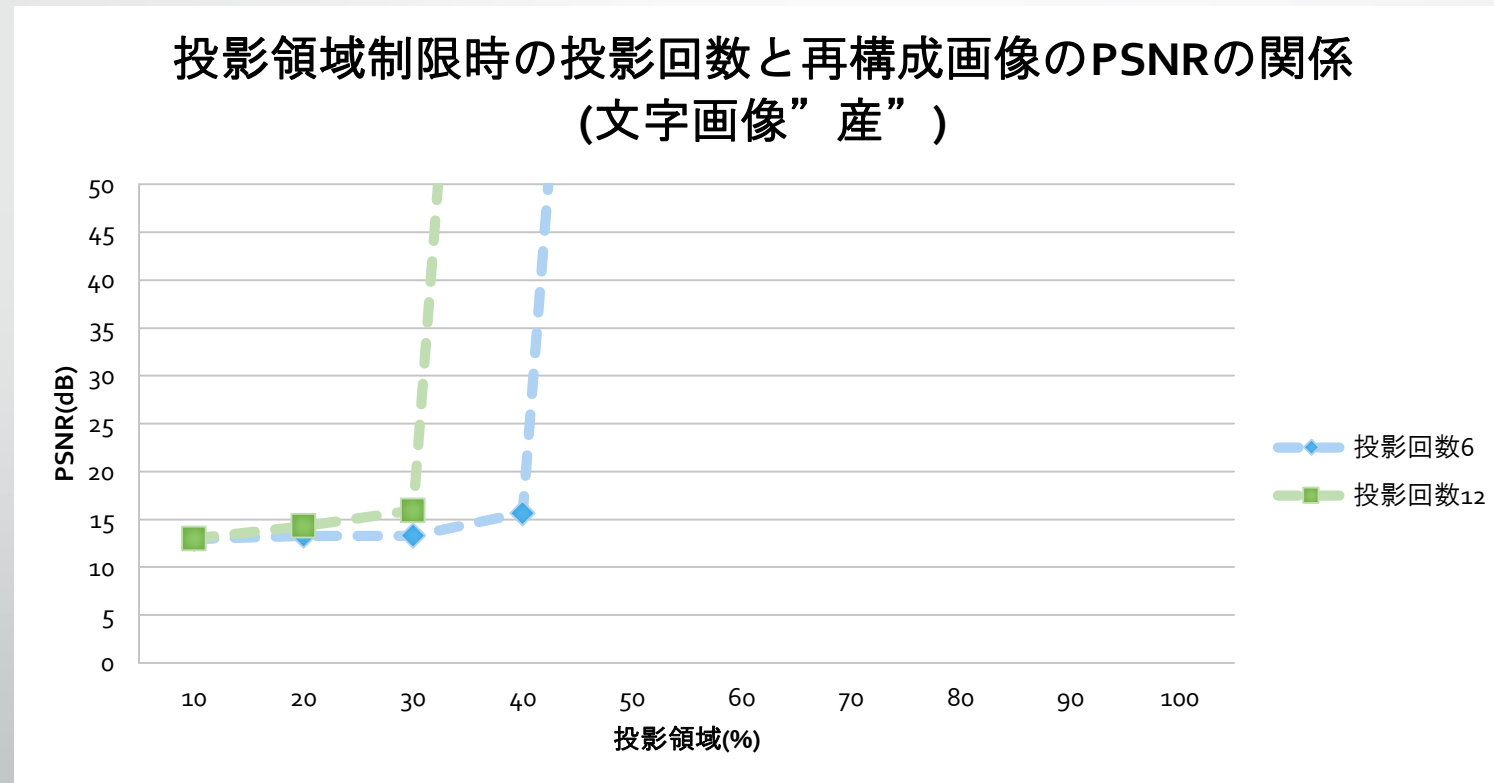
疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影領域制限)



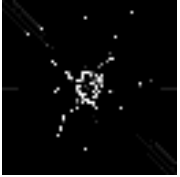









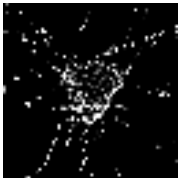







疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影領域制限)

投影領域 (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
最低投影回数									
最低投影回数の2倍									

疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影領域制限)

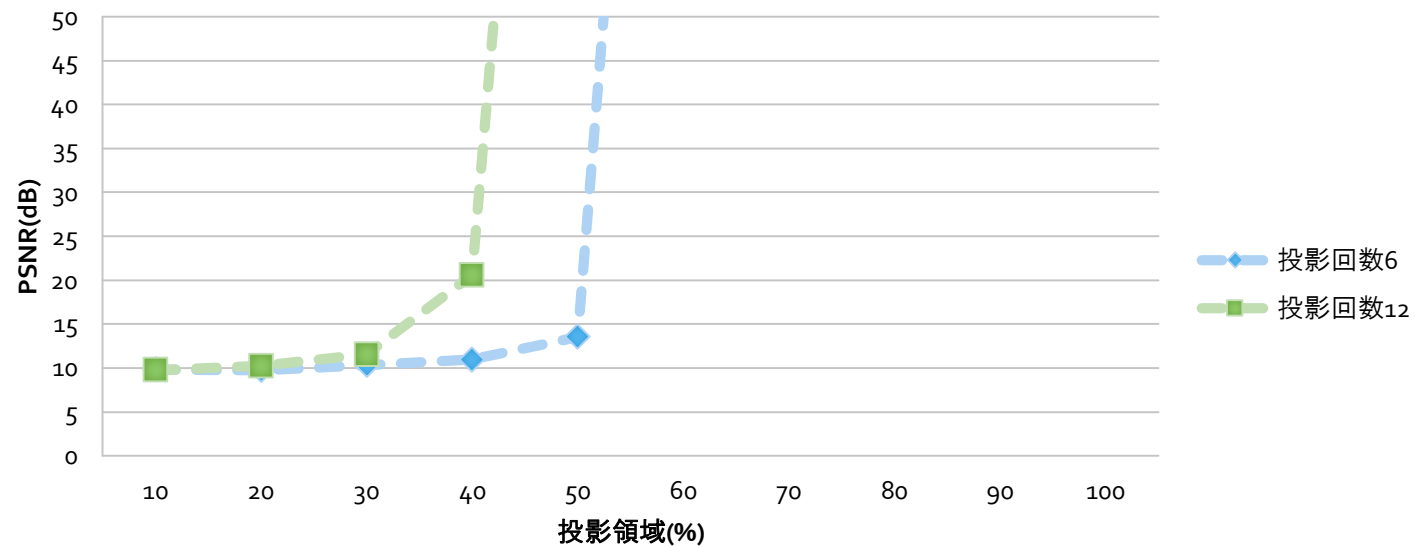


疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影領域制限)

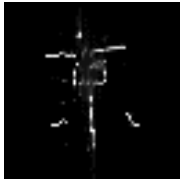




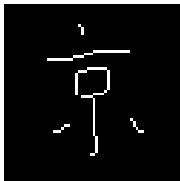
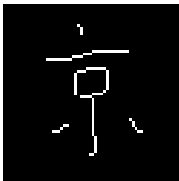




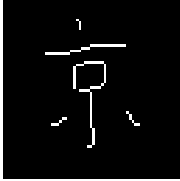
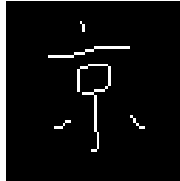
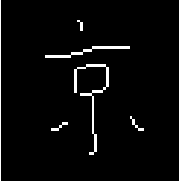
投影領域 (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
最低投影回数									
最低投影回数の2倍									

疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影領域制限)

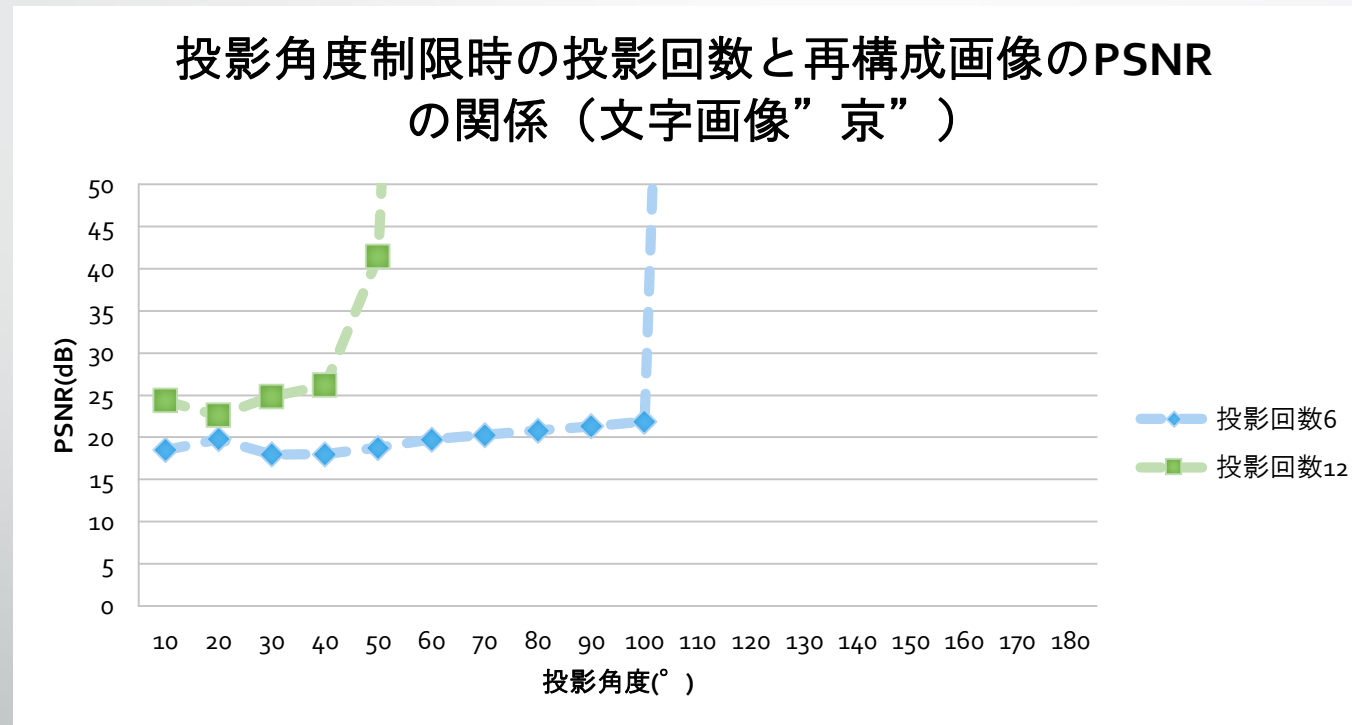
投影領域制限時の投影回数と再構成画像のPSNRの関係(文字画像”京産大”)



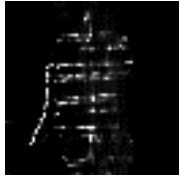



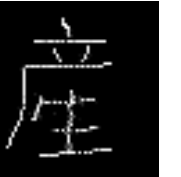

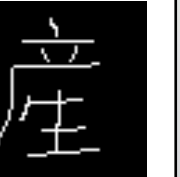



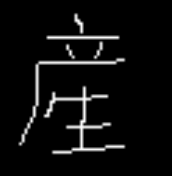
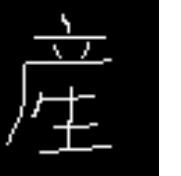
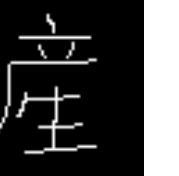
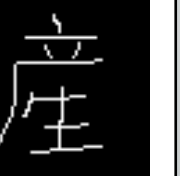
疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影角度制限)

投影角度 ($^{\circ}$)	10	30	60	90	120	150	180
最低投影 回数							
最低投影 回数の2 倍							

疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影角度制限)

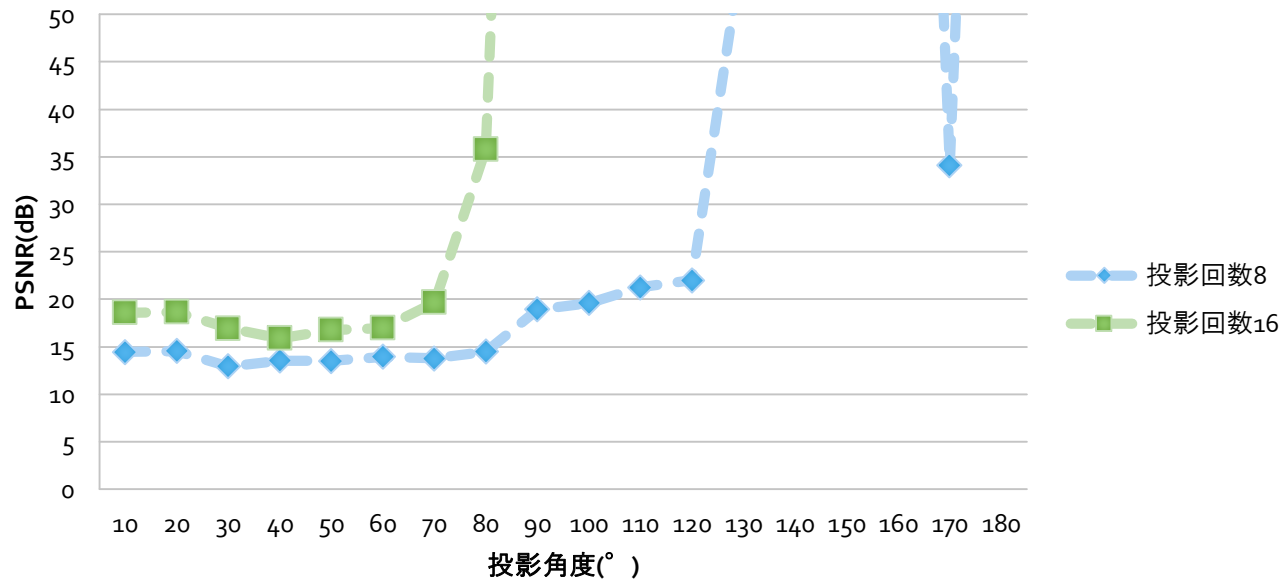


疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影角度制限)















投影角度 ($^{\circ}$)	10	30	60	90	120	150	180
最低投影 回数							
最低投影 回数の2 倍							

疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影角度制限)

投影角度制限時の投影回数と再構成画像のPSNR
の関係 (文字画像”産”)

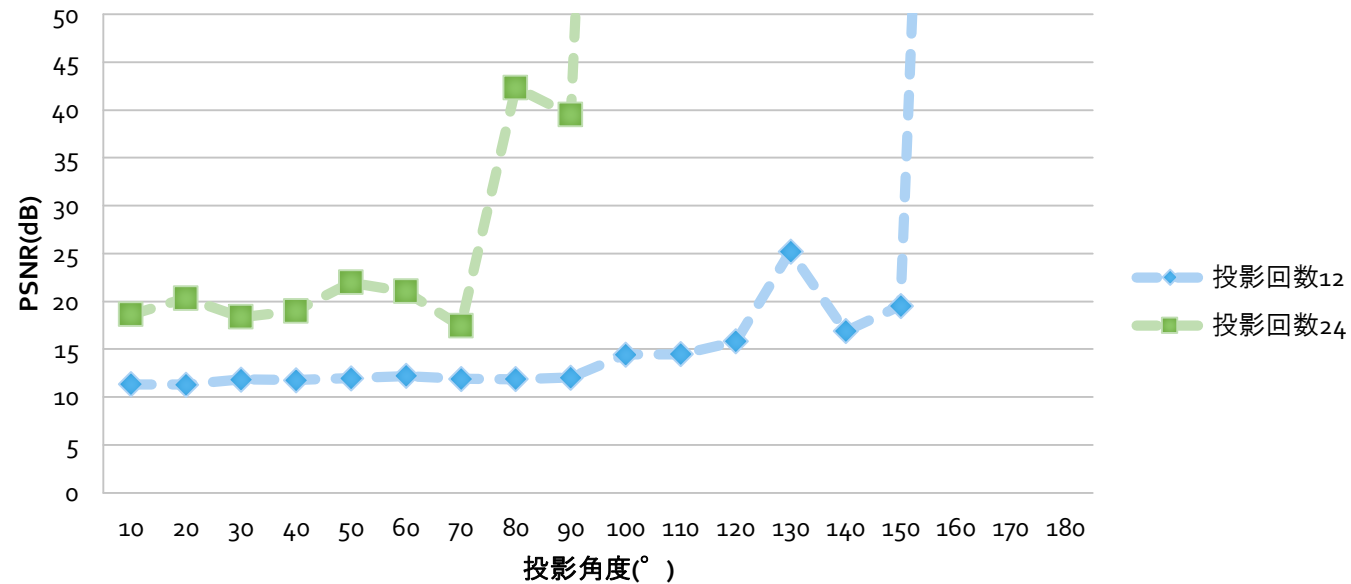


疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影角度制限)

投影角度 ($^{\circ}$)	10	30	60	90	120	150	180
最低投影 回数							
最低投影 回数の2 倍							

疎な性質を持つ画像に対するCT画像再構成 (投影角度制限)

投影角度制限時の投影回数と再構成画像のPSNRの
関係 (文字画像”京産大”)



ノイズを考慮した再構成

- 圧縮センシングの問題

$$\mathbf{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- 投影データにノイズが含まれる場合, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は近似的に成立
→ 投影データの誤差として ε まで許容する

$$\mathbf{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{l_2} \leq \varepsilon$$