導関数の連続性について

平成 20 年 12 月 12 日

1　はじめに

連続微分可能関数とたんなる微分可能関数の違いは、導関数が連続かそうと限らないかである。しかし、少し考えると、この差は単に連続不連続の差よりも小さいのではないかと思われる。

理由の１：微分可能関数の導関数は、中間値の定理をみたす（高木貞治『解析概論』にも書いてある）。つまり、任意の不連続関数が導関数になれるわけではない。

理由の２：微分可能関数の導関数は、連続関数の極限として書ける。こういうものを、ベールの１階級関数という。たとえば、$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して $h_n(x) := n(f(x+1/n)-f(x))$ とおくと $f' = \lim_{n\to\infty} h_n$ である。ベールの１階級関数は稠密な部分集合で連続であることがわかっている（『岩波数学辞典』に書いてある）。また、その連続点は非可算個あることもわかる。

理由の３：教科書にしばしば現れる、微分可能だが連続微分可能でない関数の例は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ x^2\sin(1/x) & (x\neq 0) \end{cases}$$

で定義される $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ である。このとき、f' が連続でないのは $x=0$ のただ一点においてのみである。もしかすると連続微分可能でなくても、導関数の不連続点はすごく少ないのでは。

このようなわけで、微分可能関数の導関数がどれくらい連続に近いのかを考えてみたい。このメモでは次のふたつを書き留める。これらは、普通の微積分学の範疇を超えているので、教科書類で見つけるのは難しいと思う。ひとつめ、微分可能関数の導関数のグラフは連結である。連続であることと、関数のグラフが弧状連結であることが同値であることを考えると、この事実は、導関数は連続にかなり近いと言っているように思える。しかし、ふたつめとして、ほとんどいたるところ不連続な導関数を持つ関数を構成できる。

2　グラフの連結性

次の命題を証明しよう。

命題１　I は $\mathbb{R}$ 内の区間とする。関数 $f: I \to \mathbb{R}$ について、中間値の定理が成り立つとする。このとき、グラフ $G = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ は連結であるか、あるいは次の性質をみたす孤立点を持たない空でない閉集合 $K \subset I$ が存在する：グラフの閉包 $\bar{G}$ は $K \times \mathbb{R}$ において内点をもつ。

また、このような K が存在するとき、 制限 $f|_K : K \to \mathbb{R}$ はすべての $x \in K$ において不連続であることもわかる。

ただし、$f : I \to \mathbb{R}$ について中間値の定理が成り立つとは、I 内の任意の 2 点 a, b と $z \in J(f(a), f(b))$ なる z に対し、$f(c) = z$ なる $c \in J(a, b)$ が存在すること。ここで、$J(a, b)$ は a, b を両端とする開区間を表わす。

命題１の証明　f が中間値の定理をみたし G は連結でないとする。G は共通部分を持たない開かつ閉な空でない部分集合 A, B の直和である。それぞれの第一成分への射影を $A_1, B_1 \subset I$ で表す。A_1, B_1 は共通部分を持たない。$K = \bar{A}_1 - \mathrm{int}A_1 = \bar{B}_1 - \mathrm{int}B_1$ とおく。ただし、ここで int は I の部分集合としての内部を表す。K は空でない閉集合である。

K が孤立点を持たないことを示す。$x \in K$ とする。$x \in A_1$ としよう。A は開なので $(x, f(x))$ を中心とする半径 d の開球 $U_d \subset \mathbb{R}^2$ があって $U_d \cap G \subset A$ である。また $x \in \bar{B}_1$ ゆえ、x に収束する B_1 内の点列が存在する。$b \in B_1, |x - b| < d$ であれば、x, b に中間値の定理を適用し、$(a, f(a)) \in U_d$ となる $a \in J(x, b)$ の存在が言え、$a \in A_1$ である。したがって、x に片側から収束する B_1 内の列 $b_1, b_2, \ldots$ と、$a_k \in A_1 \cap J(b_k, b_{k+1})$ なる列 $a_1, a_2, \ldots$ がある。b_k と a_k の間には、下で言うように、必ず K の点が存在するので、x は K の孤立点ではない。

単に b_k と a_k の間に K の点があるだけでなく、$K \cap A_1$ の点と $K \cap B_1$ の点の両方があることを示す。$b_k < a_k$ としよう。$c = \sup\{b : [b_k, b] \subset B_1\}$ とおく。$c \in K$ である。もし $c \in A_1$ なら上で述べたように c に収束する A_1 の点列 $a'_1, a'_2, \ldots$ が b の左側にとれるので矛盾。よって $c \in K \cap B_1$ である。同様に、$\inf\{a : [a, a_k] \subset A_1\} \in K \cap A_1$ である。このことより、制限 $f|_K$ は x において不連続であるとわかる。

上の $x \in K$ に対して定めた d は、$d \leq \liminf_{k\to\infty} |f(x) - f(b_k)|$ をみたすので、中間値の定理より任意の $\epsilon > 0$ について $f([x - \epsilon, x + \epsilon])$ は $[f(x) - d, f(x)]$ か $[f(x), f(x) + d]$ のどちらかを包含する。$n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ に対して $C_{n,k} = [k/n, (k + 1)/n]$ とおく。$X_{n,k}$ を、任意の $\epsilon > 0$ に対して $f([x - \epsilon, x + \epsilon]) \supset C_{n,k}$ なる $x \in K$ 全体の集合とする。$K = \bigcup_{n,k} X_{n,k}$ なので、ベールのカテゴリー定理より、$\overline{X_{n,k}}$ が K 内で内点を持つような n, k が存在する。したがって、ある区間 $H \subset I$ があって、任意の $x \in H \cap K, y \in$

$C_{n,k}, \epsilon > 0$ に対して $x' \in I$ が存在して $|x - x'| < \epsilon, f(x') = y$ である。ゆえに $(H \cap K) \times C_{n,k} \subset \bar{G}$ である。（命題１の証明終）

注

- 関数 f が中間値の定理をみたさなければグラフは連結でない。証明は簡単なので省略する。
- 中間値の定理をみたすが、グラフが連結でないような関数は、たとえば次のように構成できる。$\mathbb{R} = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}} X_a$ のように、実数全体を共通部分をもたない稠密な部分集合にわける。このとき、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を、$x \in X_a$ のとき $f(x) = a$ と定めれば中間値の定理をみたす。さて、$a \in X_a$ となる a があったら、X_a から a を除き、かわりに X_{a-1} に a を入れるという操作を行っても各集合は稠密で $\mathbb{R} = \sqcup_{a \in \mathbb{R}} X_a$ であることに変わりない。このとき、任意の $a \in \mathbb{R}$ について $a \notin X_a$ なのでグラフは連結でない。

  もとの $\mathbb{R} = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}} X_a$ の構成は次のようにすればよい。$\mathbb{R}$ を 同値関係 $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ で類別すると連続濃度の同値類にわかれる。これらを適当にラベリングすればよい。

系　区間 I で定義された関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が、中間値の定理が成り立ち、連続関数の極限として表わされれば、そのグラフは連結である。特に、区間 I で微分可能な関数の導関数のグラフは連結である。

これは、命題１および、次のベールの定理の帰結である。

定理１ $f : I \to \mathbb{R}$ が連続関数の極限であることと、任意の閉集合 $K \subset I$ について点 $x \in K$ が存在し制限 $f|_K$ が x において連続であることは同値である。

注　ベールのカテゴリー定理は、使うことも多いのでいろいろな教科書に書いてある。しかし定理１のほうは、あまり最近の本には載っていないようだ。図書館で探してみると、辻正次や近藤基吉の実函数論の教科書にあるのが見つかる。

3　ほとんどいたるところ不連続な導関数

微分可能関数で、導関数がほとんどいたるところ不連続になるようなものを構成する。

$k = 1, 2, \ldots$ に対し微分可能な関数 $h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次を満たすものとする。

- $x \leq 0$ または $1 \leq x$ のとき $h_k(x) = 0$

- $\lim_{k\to\infty}\sup_{x>0}|h_k(x)|/|x|=0, \lim_{k\to\infty}\sup_{x<1}|h_k(x)|/|1-x|=0$
- h_k は $0<x<1$ では連続微分可能
- $G(0,h'_k)=G(1,h'_k)=C$

ただし、C は正の定数であり、関数 f と実数 x に対し、

$$G(x,f):=\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{y_1,y_2\in[x-\epsilon,x+\epsilon]}|f(y_1)-f(y_2)|$$

と定める。$G(x,f+g)\le G(x,f)+G(x,g)$ が成り立つことを注意しておく。たとえば

$$h_k(x):=\begin{cases} k^{-1}p(x)^{k+1}\sin\dfrac{1}{p(x)^k} & 0<x<1 \\ 0 & x\le 0, 1\le x\end{cases}$$

とすると導関数は

$$h'_k(x)=\begin{cases} (1-2x)\left(\dfrac{k+1}{k}p(x)^k\sin\dfrac{1}{p(x)^k}-\cos\dfrac{1}{p(x)^k}\right) & 0<x<1 \\ 0 & x\le 0, 1\le x\end{cases}$$

となり、$C=2$ で条件を満たす。ただし $p(x):=x(1-x)$ である。

区間 $I=[a,b]$ に対し、関数 $h_{k,I}:I\to\mathbb{R}$ を

$$h_{k,I}(x):=(b-a)\cdot h_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

とする。

$\mathcal{I}=\{I_1,I_2,\dots\}$ を $[0,1]$ に含まれる閉区間の列で、$i\ne j$ のとき $I_i\cap I_j=\emptyset$ で、$X:=\bigcup_{i=1}^\infty I_i$ は $[0,1]$ で稠密なものとする。関数 $f_{\mathcal{I}}:[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$f_{\mathcal{I}}(x):=\begin{cases} h_{k,I_k}(x) & x\in I_k \\ 0 & x\notin X\end{cases}$$

とおくと、微分可能であることを示そう。$I_k=[c_k,d_k]$ と表わすことにする。$x\in \mathrm{int}I_k$ であれば $f'_{\mathcal{I}}(x)$ があるのは明らかである。$x\notin\mathrm{int}X$ とする。このとき $f_{\mathcal{I}}(x)=0$ である。x の右にある y をとり、$y\in\mathrm{int}I_k$ であれば $|f_{\mathcal{I}}(x)-f_{\mathcal{I}}(y)|=(d_k-c_k)h_k\left(\frac{y-c_k}{d_k-c_k}\right)\le(d_k-c_k)h_k\left(\frac{y-c_k}{d_k-c_k}\right)|x-y|/|y-c_k|$ である。y が x の左にあるときも同様の事が成り立ち、 $y\notin X$ であれば $|f_{\mathcal{I}}(x)-f_{\mathcal{I}}(y)|=0$ である。y が x に近づくとき、$y\in\mathrm{int}I_k$ なる k は $k\to\infty$ なので $\lim_{y\to x}\frac{|f_{\mathcal{I}}(x)-f_{\mathcal{I}}(y)|}{|x-y|}=0$ となる。

導関数 $f'_{\mathcal{I}}$ は $[0,1]-\mathrm{int}X$ で不連続である。実際、$x\in[0,1]-\mathrm{int}X$ のとき、$G(x,f'_{\mathcal{I}})=C$ である。

閉区間の列の列 $\mathcal{I}(1)=\{I_1^1,I_2^1,\dots\},\mathcal{I}(2)=\{I_1^2,I_2^2,\dots\},\mathcal{I}(3),\dots$ を次を満たすようにとる。$i\ne j$ に対し $I_i^l\cap I_j^l=\emptyset$、$X^l:=\bigcup_{i=1}^\infty I_i^l$ は $[0,1]$ で稠密、

$l \geq 2$ のとき $I_i^l \subset X^{l-1}$、そして X^l のルベーグ測度は $l \to \infty$ で 0 に収束。このとき、$f := \sum_{l=1}^{\infty} 3^{-l} f_{\mathcal{I}(l)}$ は微分可能で、導関数はルベーグ測度 0 の集合を除きいたるところ不連続である。

まず、f が微分可能なことは、$\sum_{l=1}^{\infty} 3^{-l} f'_{\mathcal{I}(l)}$ が一様収束することからすぐにわかる。次に、$f' = \sum_{l=1}^{\infty} 3^{-l} f'_{\mathcal{I}(l)}$ が $S := [0,1] - \bigcap_{l=1}^{\infty} X^l$ の各点で不連続であることを示す。$x \in S$ とすると、ある l_0 があって $x \in X^{l_0-1}$ であり $l \geq l_0$ なら $x \notin X^l$ である。したがって、$G(x,f) \geq G(x, \sum_{l=1}^{l_0} 3^{-l} f_{\mathcal{I}(l)}) - G(x, \sum_{l=l_0+1}^{\infty} 3^{-l} f_{\mathcal{I}(l)}) \geq C(3^{-l_0} - \sum_{l=l_0+1}^{\infty} 3^{-l}) = C3^{-l_0}/2$ となり、x において不連続。

歴史的注意　このような話は、古くから調べられていることのはずである。それらしき文献 [1] [2] を探してあたってみると、次のことがわかった。

連続でない関数で、中間値の定理をみたす例は、1875 年ダルブーによって最初に与えられた。これにより、中間値の定理をみたす関数をダルブー関数ということもある。

任意の全疎な閉集合 K に対し、導関数の不連続点集合が K と一致するような関数の構成が 1881 年ボルテラにより与えられている。導関数の連続点集合になりうるのは、稠密な G_δ 集合であることもわかっている。

ベールの 1 階級函数について、中間値の定理が成り立つこととグラフが連結であることが同値であることは、1922 年クラトフスキーとシェルピンスキーによって示された。

参考文献

[1] Andrew M. Bruckner. *Differentiation of real functions.* Lecture Notes in Mathematics 659. Springer-Verlag, 1978.

[2] Richard G. Gibson and Tomasz Natkaniec. Darboux like functions. *Real Analysis Exchange*, Vol. 22, pp. 492–533, 1996/7.

[3] 近藤基吉. 実函数論演習 (復刊). 近代数学講座（演習編）2. 朝倉書店, 2007.

[4] 高木貞治. 解析概論. 岩波書店, 改訂第 3 版, 1983.

[5] 辻正次. 実函数論. 槇書店, 1962.

[6] 日本数学会（編）. 岩波数学辞典. 岩波書店, 第 4 版, 2007.