

連立一次方程式を解く際の手法として、代入法と消去法があった。代入法は素朴ながら計算効率が悪いので、多くの場合は消去法に頼ることになるのであるが、この代入法の究極の一般化である変数変換の方法が行列の積を考える上での重要な手がかりとなる、というよりも行列の積そのものを与えてくれる。たとえば、先の一次式系に

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 s + \alpha_2 t \\y &= \beta_1 s + \beta_2 t \\z &= \gamma_1 s + \gamma_2 t\end{aligned}$$

を代入すると  $s, t$  についての一次式系

$$\begin{aligned}(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)s + (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2)t \\(a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1)s + (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)t \\(a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1)s + (a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2)t\end{aligned}$$

を得るので、これから作られる行列を、代入する前の2つの行列の積と同等すると、

$$\begin{pmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

代入の入れ子については結合法則が成り立つので、こうして定めた積も結合法則をみたく。また分配法則もなりたつ。上の計算規則は一見複雑そうであるが、代入の基本形として、 $ax+by+cz$  に  $x = \alpha t, y = \beta t, z = \gamma t$  を代入した場合を書いてみると、 $(a\alpha + b\beta + c\gamma)t$  となるので、

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = (a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

のような計算の可能な組合せについてのくり返しになっている。ということで、最初の連立一次方程式にもどると、未知数を置く場所も定まり、次の表記にたどりつく。

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

何と Arthur Cayley のあみ出した行列代数を再発見してしまった。あとは、これを色々いじって遊ぶだけである。決して何の役に立つかを気にはいけない。遊ぶに足るものであるかどうかの問いかけだけは忘れずに。

## 2 直線と平面の幾何学

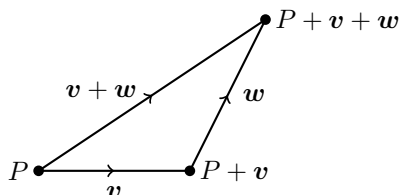
「ベクトルというのは、平行移動のことなんだ」— Hermann Weyl

高校では、有向線分の同値類として(幾何)ベクトルを学んだ。これはこれで良いのであるが、ベクトルを移動量と考えることでより多くのことが見えてくる。移動量としてのベクトルは特定の点と無関係に考えられるべきもので、例えば、一定の向きと速さで流れる風は、場所と独立したベクトルと見ることができる。ただし、始点  $P$  と終点  $Q$  の2点が指定されると、点  $P$  から点  $Q$  への移動量としてベクトル<sup>\*9</sup>(変位ベクトル、

<sup>\*9</sup> ベクトルであることを強調して、 $\vec{v}$  とか  $v$  のように書いたりするが、面倒なときは、普通の文字でベクトルを表すこともある。以下では、矢印と太文字の両方を特にこだわりなく使用する。

displacement vector という)  $v$  が決まる、という繋がりはもちろんある。これを  $v = \overrightarrow{PQ}$  のように書くことは周知のとおり。

逆に点  $P$  とベクトル  $v$  に対して、 $P$  をベクトル  $v$  に従って移動させて得られる点  $Q$  が定まる。これを  $Q = P + v$  のように書く。こちらは、なぜか高校では出てこないのであるが、便利な書き方で、ベクトルの和の平行四辺形則が、 $(P + v) + w = P + (v + w)$  という結合法則もどきに昇華する。そういう代数規則の辻褃が合うようになっているので、 $v = Q - P$  すなわち  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$  と書いても一向に差し支えない。



もっと大胆に、点の純一次式 (定数項のない一次式)  $t_1P_1 + \dots + t_nP_n$  ( $t_1, \dots, t_n$  は実数) なるものを考えることも可能で、 $t_1 + \dots + t_n = 1$  のときは点を\*<sup>10</sup>、 $t_1 + \dots + t_n = 0$  のときは幾何ベクトルを表すことがわかる。いずれにせよ、点の純一次式の計算は自由に行って良く、そのなかで、係数の和が 1 の塊は点とみなすことができ、係数の和が 0 の塊はベクトルと同定して良い、ということである。

世間でこのような計算が流行らない理由は、次のような疑問に魂を奪われると人間としての存在そのものが危うくなる、ということを恐れた為政者が巧妙に操作した結果なのかも知れない。

問 2.1.  $t_1 + \dots + t_n$  が 0 でも 1 でもないときの  $t_1P_1 + \dots + t_nP_n$  は何を意味するか。

なお、点  $t_1P_1 + \dots + t_nP_n$  ( $t_1 + \dots + t_n = 1, t_j \geq 0$ ) を、 $P_1, \dots, P_n$  の凸結合 (convex combination) という。

問 2.2. 点の集合  $C$  が凸であるとは、 $P, Q \in C \implies tP + (1-t)Q \in C$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) となること。点  $P_1, \dots, P_n$  の凸結合全体は  $P_1, \dots, P_n$  を含む最小の凸集合である。 $n = 2, 3, 4$  の場合を順に調べてみよう。

さて、点の一つを選んでそれを基準点とみなすと、他の点とベクトルの間には一対一の対応がつくので、点をベクトルで表すことができる。ベクトルをこのように解釈したものが位置ベクトル (position vector) である。平面の場合は、移動の自由度は 2 つ、空間の場合は 3 つあり、2 次元あるいは 3 次元という言葉で区別される。そこで、空間の場合であれば、独立な 3 つの変位ベクトル  $i, j, k$  を指定しておくことにより、すべてのベクトルが  $v = xi + yj + zk$  の形に表わされる。いいかえると、空間ベクトルは、3 つの数の組  $(x, y, z)$  で指定することができる。これをベクトルの成分表示といい、個々の数はベクトルの成分 (component) と呼ばれる。

これを位置ベクトルに適用することで、空間の点が 3 つの数の組で指定されることになる。すなわち、基準点  $O$  と基準ベクトル  $i, j, k$  を指定することで、空間の点が 3 つの数の組と同定される。基準系を別のものに取り替えると、同じ点に別の 3 つぐみに対応する。このときの数の間の関係式は一次式で表わされ、座標変換 (coordinate transformation) と呼ばれる。以上が、座標幾何の仕組みと付随するベクトルの成分表示の関係である。簡単のために平面すなわち 2 次元の場合であれば、

$$i' = ai + bj, \quad j' = ci + dj, \quad O' - O = si + tj$$

\*<sup>10</sup> Möbius の重心座標と呼ばれるもので、幾何ベクトル一歩手前の 1827 年に発表されるも注目されず。

を

$$P - O = xi + yj, \quad P - O' = x'i' + y'j'$$

に代入して少し計算すると、

$$x = ax' + cy' + s, \quad y = bx' + dy' + t.$$

これが座標変換の関係式。とくに  $O' = O$  すなわち  $s = t = 0$  とすると、ベクトルの成分変換の関係式となる。こちらは純一次式であることに注意。

ここまでは、二点間の距離の情報は一切使っていない。現実の空間は距離が意味を持つようなものになっていて、これは別の言い方をすると、移動量の大きさ（長さ）という正の数  $|v|$  が決まるということ。これと2つのベクトルの成す角  $\theta$  を使って  $(v|w) = |v||w|\cos\theta$  とおけば、これがいわゆる内積<sup>\*11</sup> (inner product) の性質を満たすのであった（角を使わず、長さの情報だけから内積を得る方法については付録参照）。こういった内積の情報があれば、基準ベクトル  $i, j, k$  として、大きさが1で互いに直交するものを取ることは自然なことであるので、以下、そうしておく。ちなみに、大きさが1のベクトルを単位ベクトル (unit vector) と呼び習わしている。そうすることで、座標  $(x, y, z)$  は距離の情報もあわせ持つことになり、例えば2点  $(x, y, z), (x', y', z')$  の間の距離は、

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

によって計算される。これすなわち、デカルト座標 (Cartesian coordinates) である。これに呼応して、ベクトルの内積は、その成分表示  $v = (\alpha, \beta, \gamma), v' = (\alpha', \beta', \gamma')$  を使って、

$$(v|v') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

と表わされることになる。

歴史的には、ベクトルの概念よりも座標の概念がはるかに古いのであるが、それは、素朴なものほど認識に時間がかかる、ということの意味するのであろう。

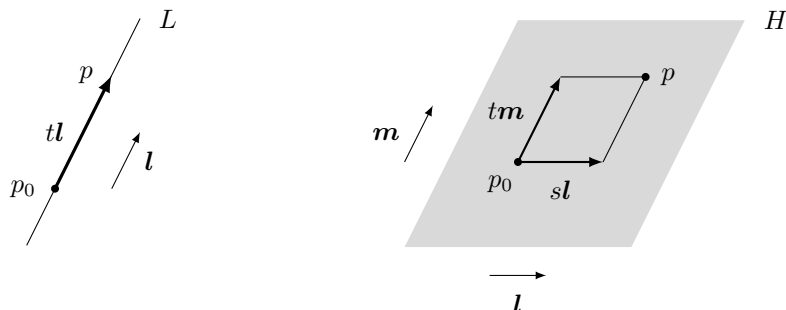
さて、ユークリッド幾何が成り立つ場所としての空間を数学的に記述する一つの方法は、デカルト座標を使用するものである。ただし、幾何学的諸性質が座標系のとり方に依らないことを確かめる必要が生じる。すなわち、座標変換で不変な性質であることが要求される。これは、ある意味現実の観測手段と幾何学的実体を結びつける堅実な方法で、広く物理学等で採用される立場である。一方で、座標系のとり方は人為的なもので本質ではない、という見方に立てば、座標に依存しない記述というものもあってしかるべきである。その一つが Hermann Weyl によるユークリッド空間の作り方<sup>\*12</sup>で、移動ベクトル全体  $V$  を代数的構造を有するものとしてまず定式化し、さらに内積の情報を付与したもの（内積空間とよばれる）を用意しておく。その上で、ユークリッド空間 (Euclidean space) とは、内積空間のベクトルが平行移動を引き起こすような点の集まりであるとすると、というものである。この Weyl 方式のユークリッド空間において、基準点と基準ベクトルを指定すれば、先に見たように、デカルト座標が出現するという仕組みになっている。

ユークリッド空間における幾何学の重要な構成要素として、点の他に直線と平面がある。これらを、ベクトル的方法で記述してみよう。以下、ユークリッド空間の点はアルファベット小文字で表すことにする。直線  $L$  に対して、 $L$  を  $L$  に移すベクトル全体  $\Delta L$  を考えると、 $\Delta L = \{p - q; p, q \in L\}$  であり、これはまた  $\mathbb{R}l = \{sl; s \in \mathbb{R}\}$  の形である。そして、 $L$  の点  $p_0$  を一つ用意すれば、 $L$  の他の点  $p$  は、 $p = p_0 + tl$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) と表わされる。逆に、点  $p_0$  とベクトル  $l \neq 0$  に対して、このような点全体が一つの直線を表す。直線が、実

<sup>\*11</sup> 内積を表す記号としては、 $v \cdot w$  のほかに、このような括弧記号もよく使われる、

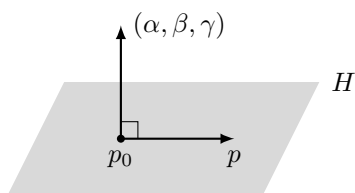
<sup>\*12</sup> Raum, Zeit, Materie, Springer, 1923.

数をパラメータとする一次式の形で表わされることになる。これを直線のパラメータ表示 (the parametric form of a line) と呼ぶ。



次に、平面  $H$  を考えよう。同じく、 $H$  を  $H$  に移すベクトル全体を  $\Delta H = \{p - q; p, q \in H\}$  で表せば、 $\Delta H$  は 2 次元的な集まりになっていて、2 つの独立なベクトル  $l, m$  を使って、 $\Delta H = \mathbb{R}l + \mathbb{R}m$  のように<sup>\*13</sup>表わされる。したがって、 $H$  内の点  $p_0$  を一つ用意すれば、 $H$  の一般的な点は  $p = p_0 + sl + tm$  のように 2 つの実数  $s, t$  を用いて表示される。これを平面のパラメータ表示 (the parametric form of a plane) という。

直線と平面のベクトル表示がわかったので、デカルト座標を用いた表示について調べよう。こちらは、まず平面の方から考える。デカルト座標では、点  $p$  は実数の組  $(x, y, z)$  で表わされるのであった。そこで、この 3 つの座標の間にどのような関係式が成り立つとき平面を表すか考えてみる。そのために、 $\Delta H$  と直交するベクトル  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を用意し、 $p_0$  の座標を  $(x_0, y_0, z_0)$  とすれば、 $(p - p_0) \perp (\alpha, \beta, \gamma)$  が求める条件となる。すなわち、 $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$  である。これを平面の方程式 (the equation of a plane) とよぶ。逆に、一次方程式  $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$  をみたす点全体というのは、その一つの解を  $(x_0, y_0, z_0)$  とするとき、 $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$  の形に書き直せるので、点  $(x_0, y_0, z_0)$  を通り、ベクトル  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を法線ベクトル<sup>\*14</sup>とする平面を表す。まとめると、デカルト座標系において、平面は一次方程式で表わされる。



次に直線を考えよう。この場合は、 $\Delta L = \mathbb{R}l$  に垂直なベクトルとして、独立なものを 2 つ  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha', \beta', \gamma')$  とることができるので、 $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in L$  を一つ用意しておけば、 $L$  の一般の点  $p(x, y, z)$  は、2 つの一次方程式

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0, \quad \alpha'(x - x_0) + \beta'(y - y_0) + \gamma'(z - z_0) = 0$$

を同時に満たすことになる。逆に、連立一次方程式

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'$$

<sup>\*13</sup> ベクトル  $l, m$  の純一次式  $sl + tm$  全体 ( $s, t$  は実数) をこのような記号で表す。

<sup>\*14</sup> normal vector の訳であることから、法ベクトルと呼ぶ人もいる。normal の語源をたどれば直角定規に行き着くので良いとして、「法」の字には直角ないし垂直の意味はない。おそらく、normal に含まれる基準・標準の意味に引きづられて、法の字をあてたものであろうが、有理数と同類の誤訳か。数学用語としては垂直ベクトルでよかったような。

の解は、平行でない2つの平面の共通部分として、直線を表す。

例 2.1. パラメータ表示から方程式へ、方程式からパラメータ表示へ。

- (i) パラメータ表示  $L : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 2, 1)$ ,  $H : (x, y, z) = (1, 1, -1) + s(-1, 1, 1) + t(1, -1, 1)$  から方程式を導く。
- (ii) 方程式  $L : x + 2y + 3z = -1, -x + y = 1$ ,  $H : \sqrt{2}x - y + 2z = 3$  からパラメータ表示を導く。

問 2.3. 問題を自由に設定して稽古せよ。答えは他所にはない、自らの中にこそ見出すべきもの。

平面  $H$  と空間内の点  $q$  が与えられると、二点間の距離  $|p - q|$  を最小にする点  $p \in H$  がちょうど一つ存在する。いわゆる垂線の足 (foot of perpendicular) とよばれるものである。直感的には明らかな事実であるが、これを Weyl 方式で「証明」してみよう。そのために、 $\Delta H = \mathbb{R}l + \mathbb{R}m$  で、 $l, m$  を互いに直交する単位ベクトルとし、さらに  $\Delta H$  に直交する単位ベクトル  $n$  を用意する。その上で、

$$q - p_0 = ul + vm + wn, \quad p - p_0 = sl + tm$$

とする。ここで、 $s, t$  は  $H$  上の点  $p$  を表示するためのパラメータである。このとき、

$$|q - p|^2 = |(u - s)l + (v - t)m + wn|^2 = (s - u)^2 + (t - v)^2 + w^2$$

であるから、これが最小になるのは  $(s, t) = (u, v)$  の場合で、そのときの点  $p$  は条件  $(p - q) \perp \Delta H$  で特徴づけられる。また、その最小値は  $|p - q| = |w|$  となる。一方、点  $q$  のデカルト座標を  $(a, b, c)$ ,  $H$  の方程式を  $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$  とすると、ベクトル  $q - p_0$  の成分表示が  $(a - x_0, b - y_0, c - z_0)$  となるので、 $n = (\alpha, \beta, \gamma) / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$  と取れる (「 $(\alpha, \beta, \gamma)$  は  $H$  の法線ベクトル」を思い出せ) ことに注意して、

$$w = (n|q - p_0) = \frac{\alpha(a - x_0) + \beta(b - y_0) + \gamma(c - z_0)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

と計算すれば、点  $q(a, b, c)$  と平面  $H : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$  上の点の距離の最小値 (点と平面の間の距離) が、

$$\frac{|\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

のように表わされることもわかる。

問 2.4. (#) 点  $q(1, 1, 0)$  との距離が最小となる直線  $L : x + 2y + 3z = -1, -x + y = 1$  上の点を求めよ。

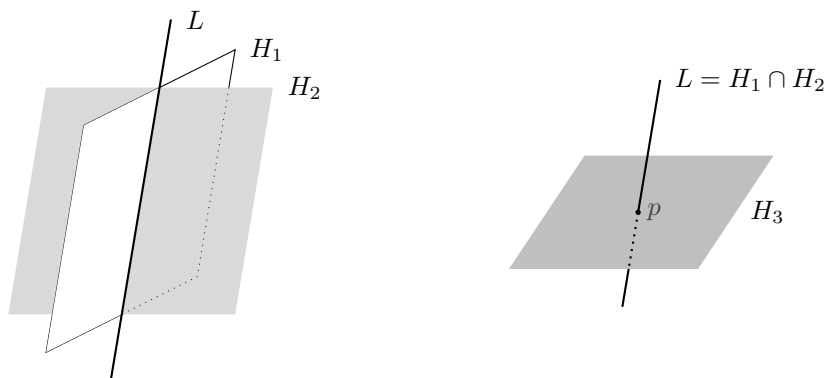
連立一次方程式の幾何学的意味

座標平面において、直線が一次方程式  $ax + by = s$  の形で表されることは周知のとおり。その見方に立てば、連立一次方程式

$$ax + by = s, \quad cx + dy = t$$

を解くということは、2つの直線  $ax + by = s$  と  $cx + dy = t$  の交点の座標を求めることに他ならない。この交点があるかないか、あれば一つかどうかは、直線の位置関係で次のように決まる。2直線が平行でない場合： $ad \neq bc$  のとき、交点はちょうどひとつだけ存在する。2直線が平行である場合： $ad = bc$  のとき、交点はないので、連立一次方程式は解をもたない。ただし、例外があって、2直線が一致する場合、すなわち  $(a, b, s)$  と  $(c, d, t)$  が比例するときは、解は無数に存在する。

以上の幾何学的解釈を座標空間にまで広げてみよう。最初に、2平面  $\alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j z = \delta_j$  ( $j = 1, 2$ ) の位置関係を調べる。平行でない場合、すなわち  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  と  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  が比例しないときは、平面の共通部分として、空間内の直線  $L$  が得られるので、解は直線の点に相当するだけ沢山 (不定) 存在する。平行であるときは共通部分がないので、この段階で連立方程式は解がないとわかる。



次に互いに異なる3平面の位置関係について。3つの法線ベクトル  $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) が独立な方向を表している場合：3平面の交点が一点  $p$  に定まるので、連立一次方程式はちょうど一つの解をもつことがわかる。それ以外の位置関係は、2平面が平行で残りの平面が平行にならない場合。3平面が平行である場合。この2つは、ともに連立一次方程式に解がない。

最後に3平面がひとつの直線を共有する場合：これは、連立一次方程式の解が沢山ある場合 (解不定) である。

この解のあるなしと、3つの法線ベクトルの広がり方が1次元的、2次元的、3次元的のいずれであるかを組み合わせることで、すべての場合を判別することができる。

問 2.5. (#) ひとつの直線を共有する3平面を表す連立一次方程式を具体的に一つ作れ。

以上、三元連立一次方程式の解の存在の様子が幾何学的に解釈できることを見てきた。一方、連立一次方程式自体は未知数がいくつあっても考えることができ、その解の様子を代数の技で調べてみると、3次元ユークリッド幾何の直感が、実に、高次元の場合にまで広く有効であるという事実に行き当たる。これが、いわゆる線型代数 (行列代数) の肝でもあり、視覚的直感は、そのための確かな手がかりをもたらしてくれる。

### 3 行列とその計算

添え字 (index) に数を結びつけた一種の配列<sup>\*15</sup>(array) について考えよう。以下では具体的に、 $\{1, 2, \dots, n\}$  を添え字集合に取るが、実はなんでもよい。自然数である必要もない。

さて、数の2次元的配列<sup>\*16</sup>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

<sup>\*15</sup> 形式的には有限集合上の関数に他ならない。

<sup>\*16</sup> このように配列そのものを一つの文字で表すことが、些細なことのように見えて行列の数学を展開する上で極めて重要である。