2010年11月18日

# アルキメデスの
# 失われた写本を読む

斎藤 憲 (大阪府立大学人間社会学部)

# アルキメデス(前287?–前212)



1 アルキメデスの生涯：活動と著作

2 2つの著作群：幾何学と機械学

(a) アルキメデスの幾何学

3 著作の成立時期と2つの疑問

4 C写本と『方法』の発見

(b)『方法』の数学的内容

5 C写本の消失，再登場

6 新たなアルキメデス像

# シュラクサイの歴史



- シュラクサイ：シチリア島東岸の都市
- ギリシャの植民市（前８世紀建国）
- カルタゴとの数世紀にわたる争い
- アテネの攻撃(ペロポネソス戦争：前415)
- プラトンと僭主ディオニュシオス(前367, 361)
- ヒエロン王のもとでの繁栄(アルキメデスの時代)

# シュラクサイとローマ



- 第１次ポエニ戦争(前264–前241)
  - 当初カルタゴと同盟を結ぶ
  - すぐにローマと和平
- 第２次ポエニ戦争(前218–前201)
  - ハンニバルのアルプス越えで有名
  - ヒエロンの死(216)後，ローマとの戦争
  - アルキメデスの活躍（投石機，クレーンなどを駆使）
  - シュラクサイ陥落，アルキメデスの死(212)

# 戦争でのアルキメデスの活躍



陸上と海上の両面で圧倒的な戦力を擁していたローマ軍は，シュラクサエからひとりの老人がいなくなってくれさえすれば，すぐにでもこの都市を攻略できるだろうと予想していたのだが，しかしアルキメデスというこの老人がいるかぎり，少なくとも彼が防御手段を講じられるような方法では，城壁に近づくことさえ怖くてできなかったのである．

ポリュビオス『歴史』8.7（ポリュビオス『歴史2』城江良和訳．京都大学学術出版会）

# アルキメデスの生涯



- 伝記的資料はきわめて乏しい．推定も含めて復元すると
- 父は天文学者
- 若い時アレクサンドリアに遊学
- 帰国して技術者としてヒエロン王に重用される
  – 巨大な船，クレーン，投石機などの製作
- 幾何学的著作を順次アレクサンドリアに送る
- シュラクサイ陥落時(前212)にローマ兵に殺される(75歳?)

# 技術者＋数学者

- アルキメデスの２つの活動
  - エンジニアとして造船・機械・武器製作

    多くの逸話を残す
  - 幾何学・機械学の著作執筆

    16世紀に復活した著作が大きな影響

機械学＝つり合いや物体の重心に関する理論的議論のこと．エンジニアとしての活動と関連するが，具体的な機械の製作について述べるものではない．

# アルキメデスの逸話



- ヘウレーカ（わかったぞ！）
  - 風呂から裸で飛び出す
- 私に立つところを与えよ
  - 地球を動かしてみせよう
- 私の円を乱すな
  - ローマ兵にこう言って殺害された？

# アルキメデス(前287?–前212)



1 アルキメデスの生涯：活動と著作

**2 2つの著作群：幾何学と機械学**

(a) アルキメデスの幾何学

3 著作の成立時期と2つの疑問

4 C写本と『方法』の発見

(b)『方法』の数学的内容

5 C写本の消失，再登場

6 新たなアルキメデス像

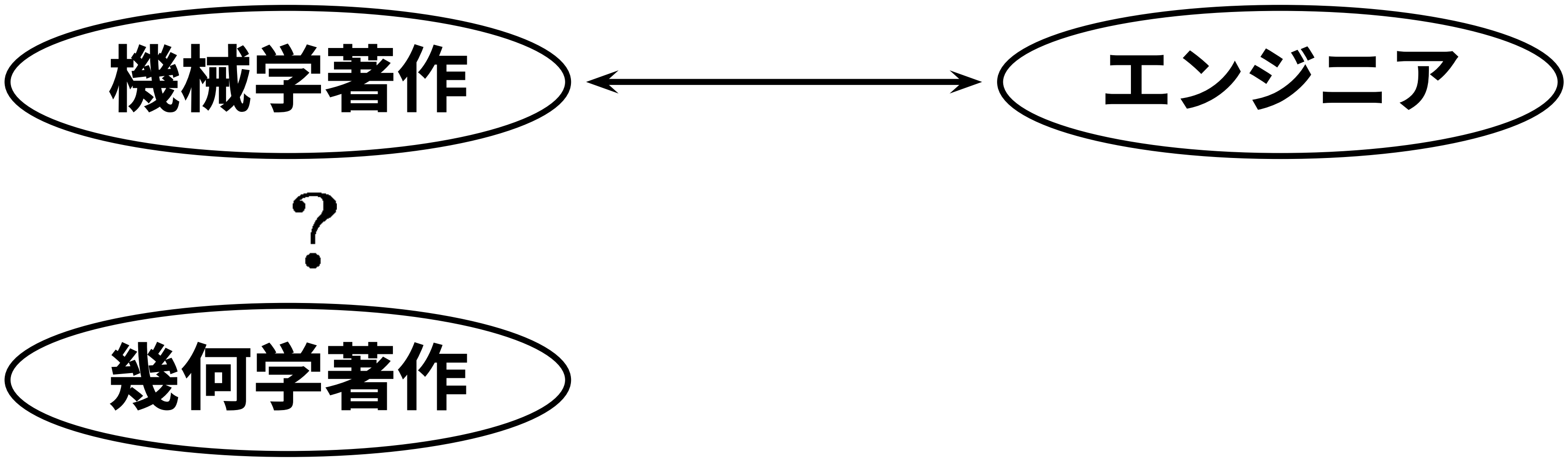
# 著作の分類



- 幾何学著作：主に求積（放物線，球など）
  - アレクサンドリアに送られる．執筆順確定
- 機械学著作：つり合い，重心
  - 序文なし．執筆時期は推定による
- 計算著作：再評価の動き
  - 円周率の近似値，準正多面体の数え上げ，答が20万桁になる方程式，『ストマキオン』（正方形を組み立てるパズル）

# 著作と技術の関係は？

- 機械学著作⇔技術者は納得できる．
- それでは幾何学著作の関係は？




- この謎を解くのがＣ写本の著作『方法』

# 幾何学的著作（執筆順）

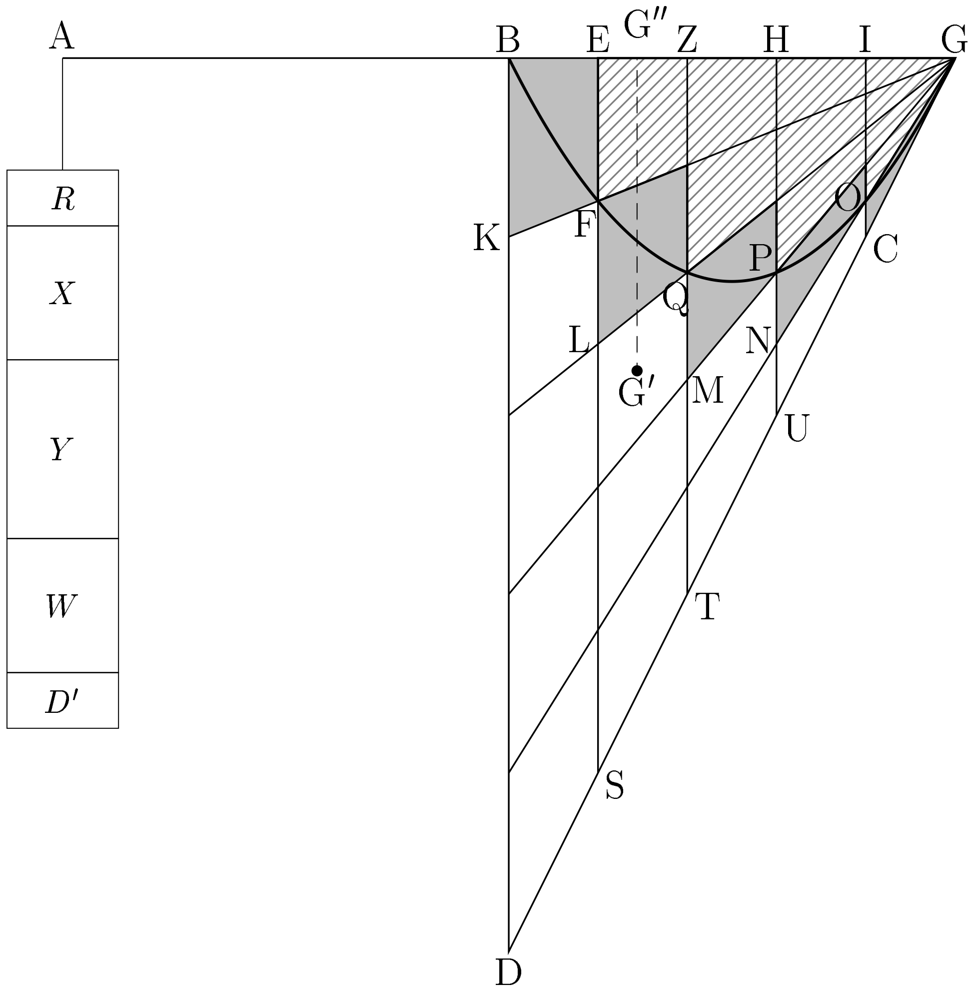


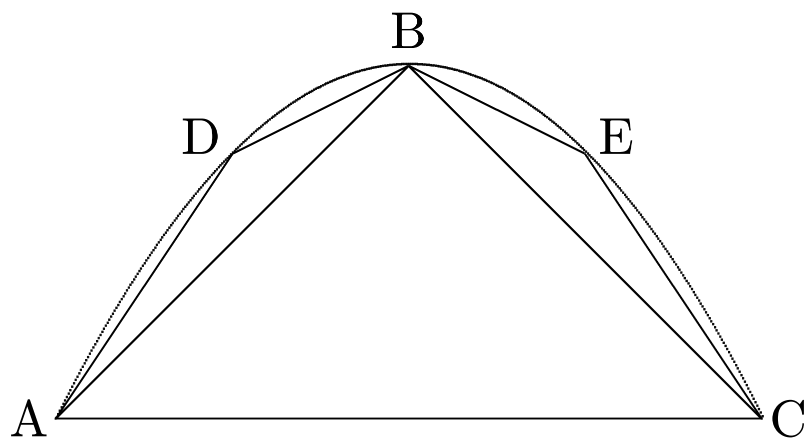
- QP 『放物線の求積』（コノンの死の直後）
- SC1 『球と円柱について』第１巻
- SC2 『球と円柱について』第２巻
- SL 『螺線について』（コノンの死後かなり後）
- CS 『円錐状体と球状体について』（執筆が遅れたことへの弁明）

- コノン：前246年には存命（アルキメデス41歳？）
- 幾何学的著作はすべてコノンの没後に発表

# 『放物線の求積』(QP)

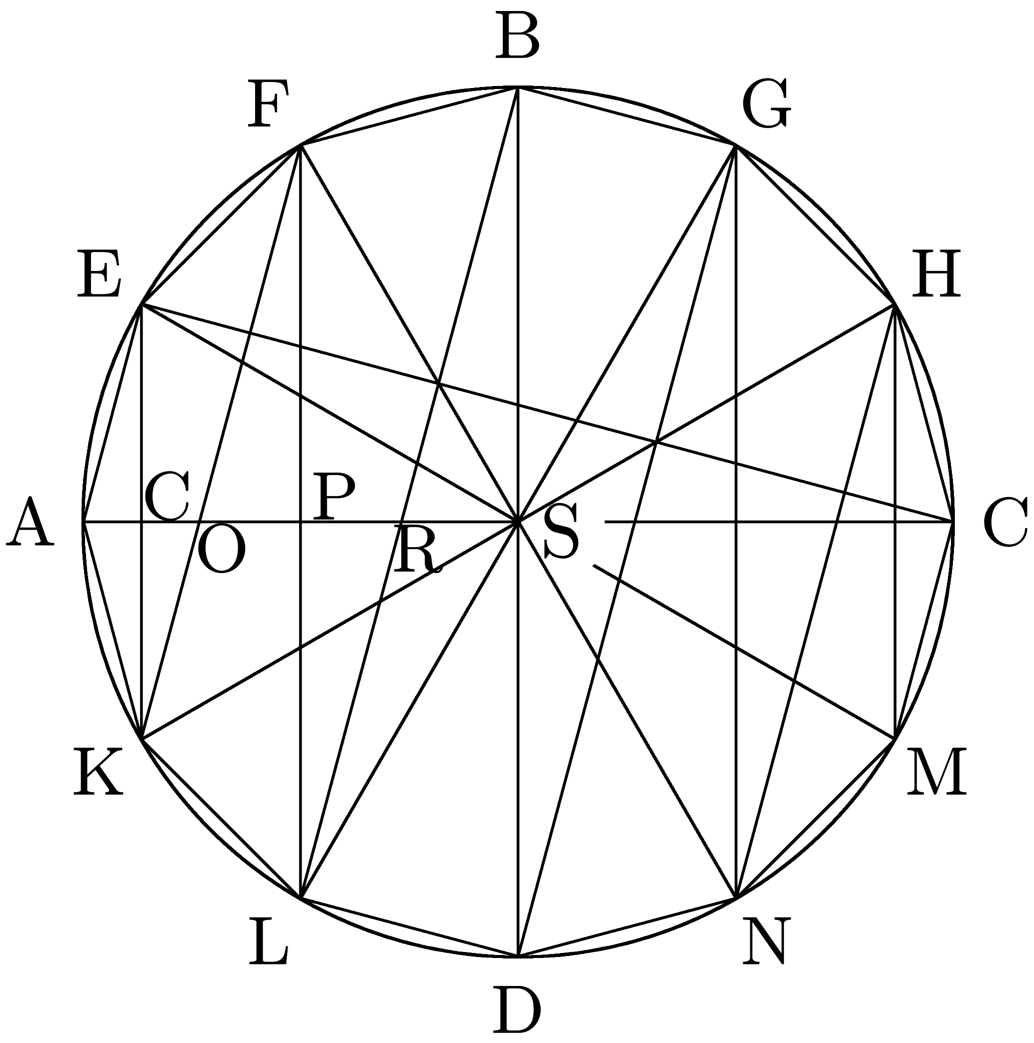


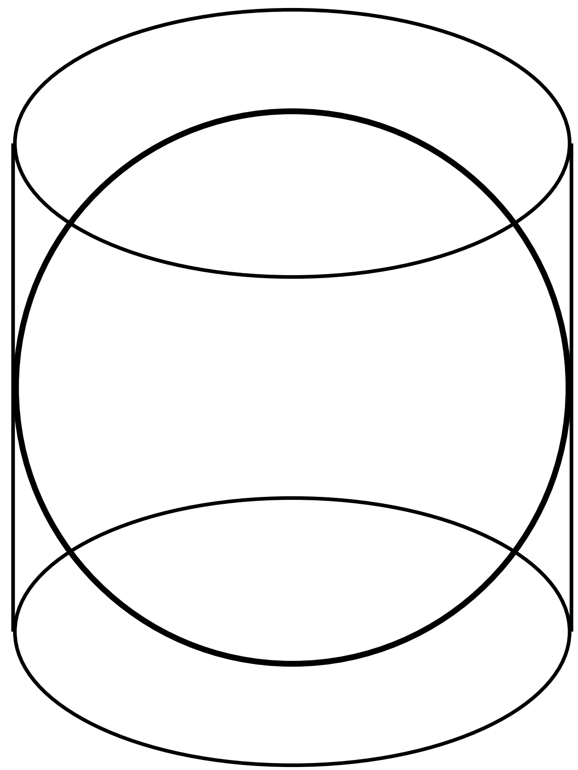


# 『球と円柱について』(SC)



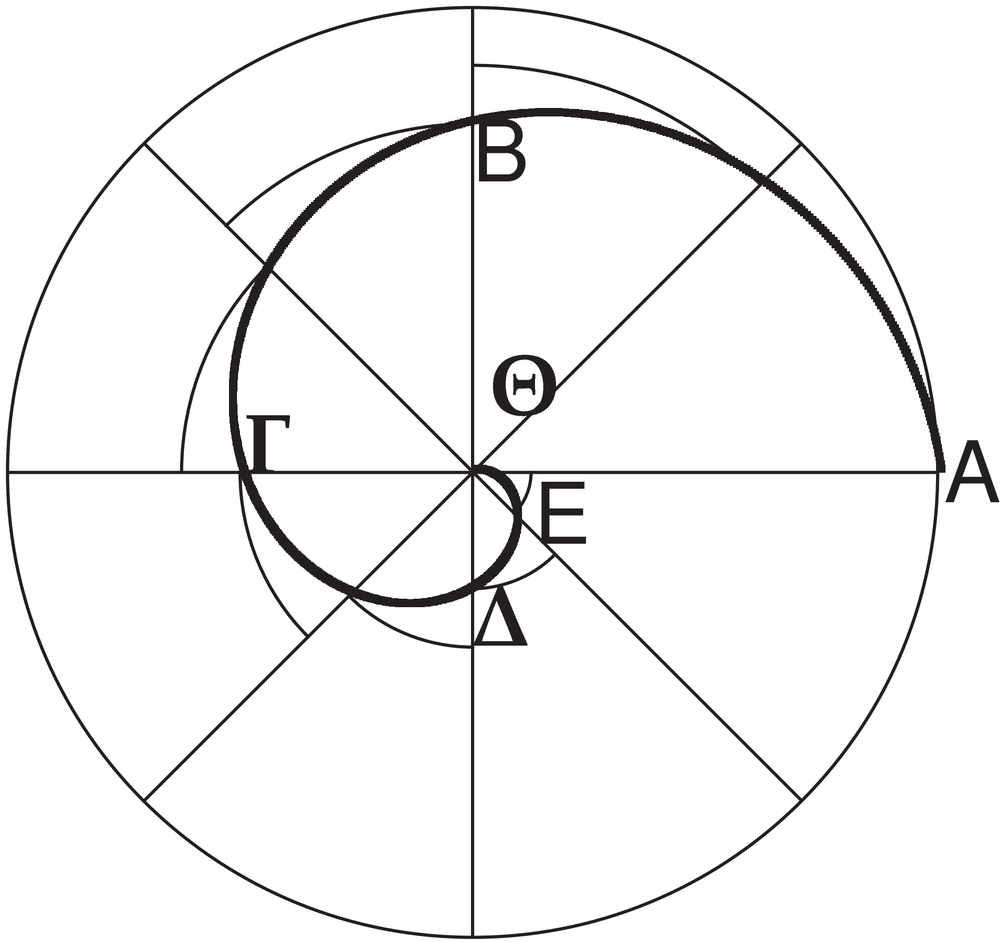


外接円柱は
球の一倍半

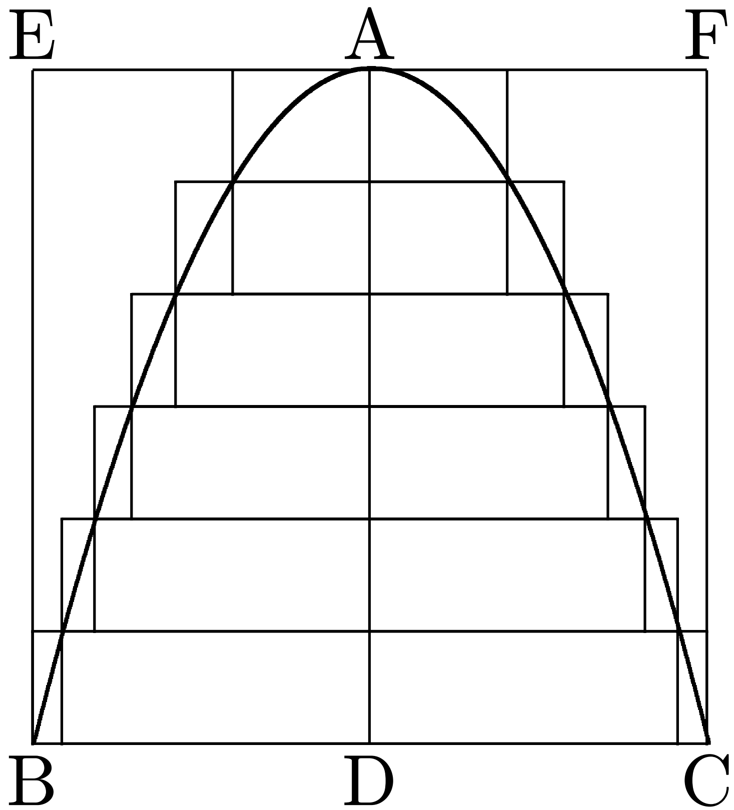
# 『螺線について』(SL)





# 『円錐状体と球状体について』(CS)






$C_1$

$C_2 = 2C_1$

$C_3 = 3C_1$

$C_4 = 4C_1$

$C_5 = 5C_1$

$C_6 = 6C_1$

**回転放物体の場合**

**他に回転楕円体，回転双曲体**

# 機械学的著作

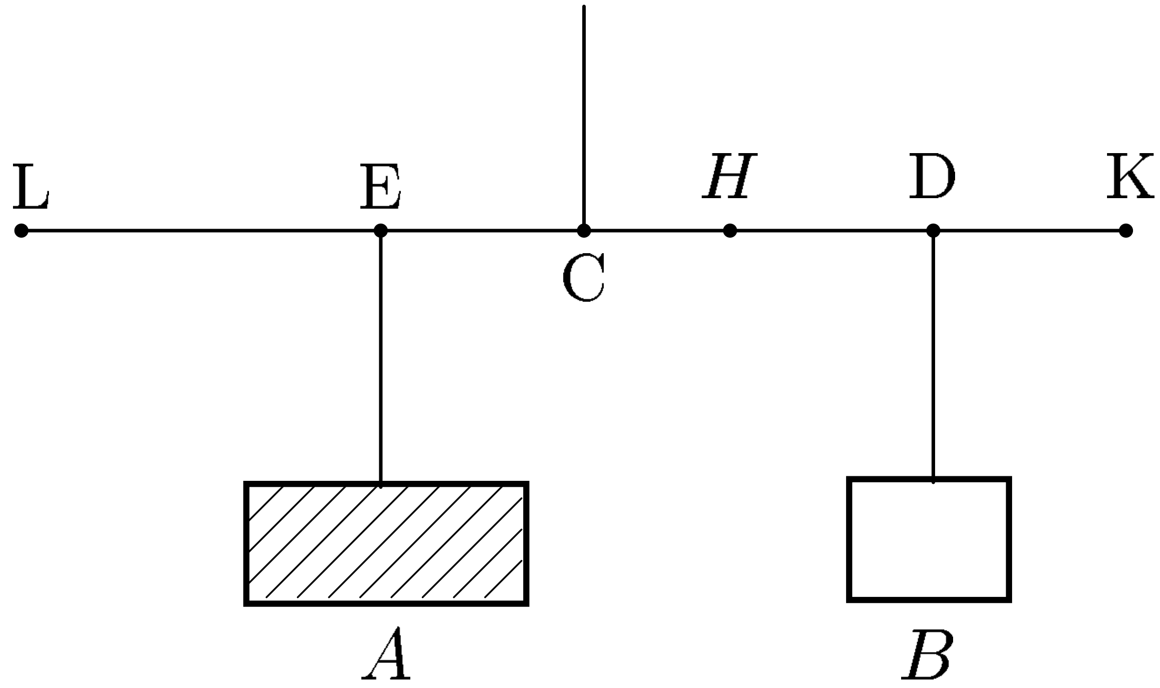
(幾何学著作：QP⇒SC1⇒SC2⇒SL⇒CS)

- PE 『平面のつり合いについて』（全２巻） QPの頃？
- FB 『浮体について』（全２巻） CSの頃？
- 『(立体の）つり合いについて』（？） 上の２つの著作の間（？）現存せず
- 『方法』晩年の著作：C写本でのみ伝わる．1906年まで知られず

# 『平面のつり合いについて』



- てこの原理，平行四辺形・三角形などの重心の位置

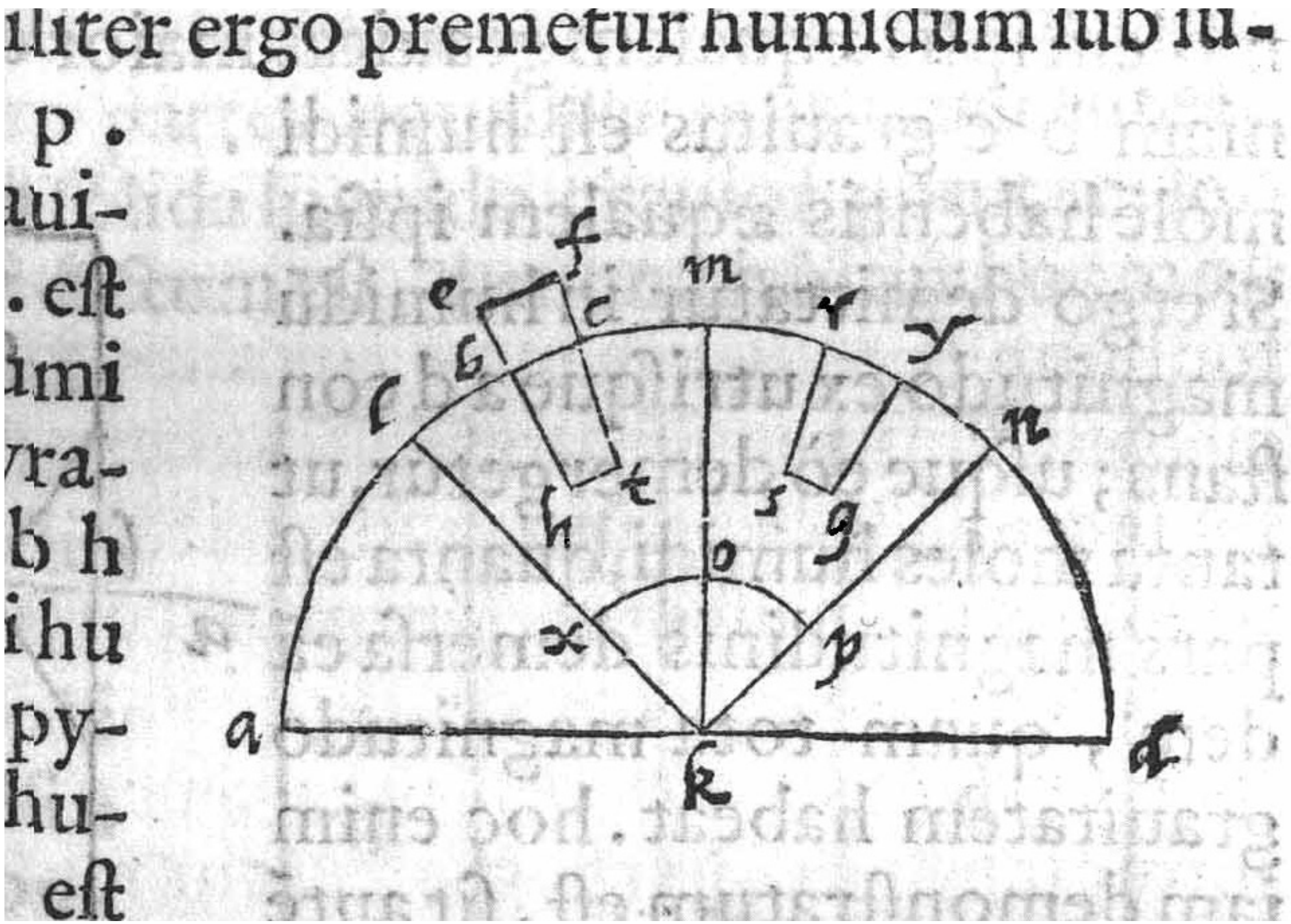



$$A : B = \mathrm{DC} : \mathrm{CE}$$

# 『浮体について』(1)



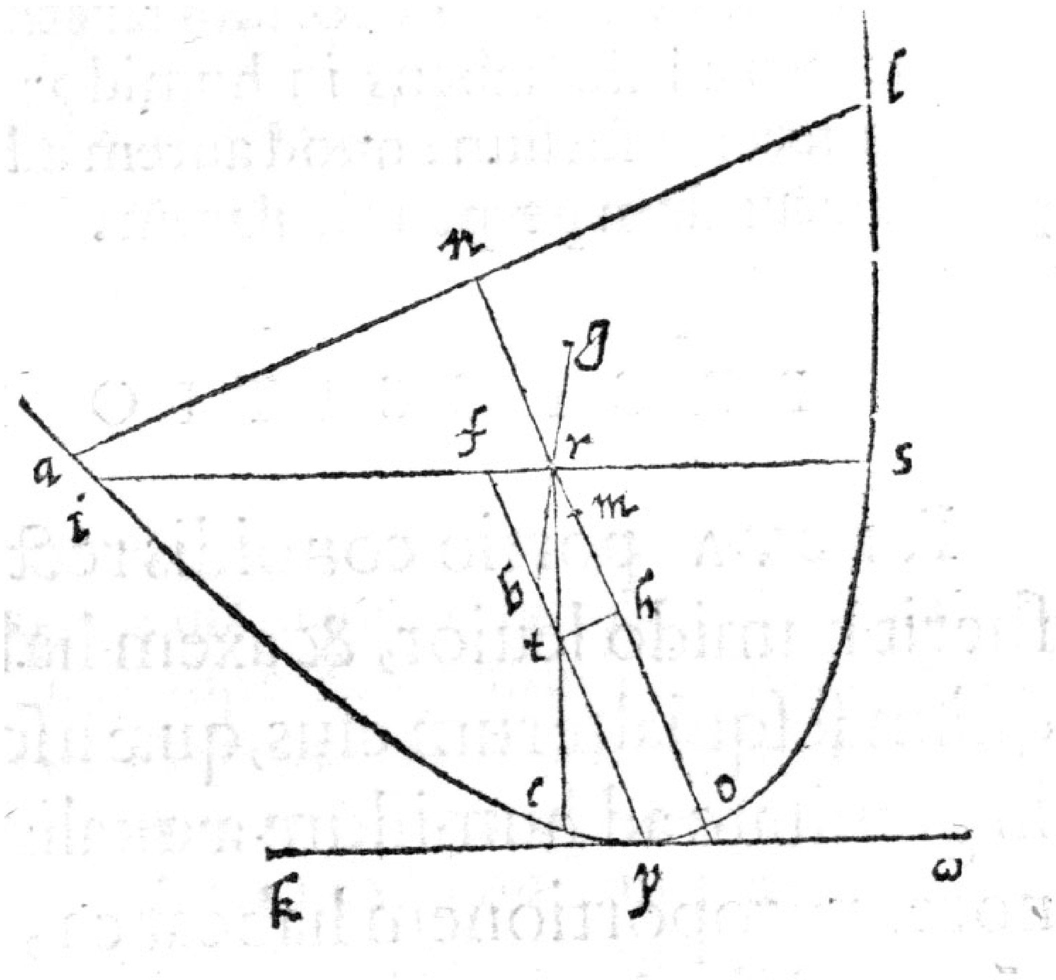
- 浮力の原理




左の物体$efht$の重さ = 右の$rsgy$の部分の水の重さ

# 『浮体について』(2)

- 斜めに浮かんだ物体のつり合い




水中に斜めに浮かぶ回転放物体．$is$ は水面．$b$ は水中部分の重心．この場合は真っ直ぐに戻る

# アルキメデス(前287?–前212)



1 アルキメデスの生涯：活動と著作

2 2つの著作群：幾何学と機械学

(a) アルキメデスの幾何学

3 著作の成立時期と2つの疑問

4 C写本と『方法』の発見

(b)『方法』の数学的内容

5 C写本の消失，再登場

6 新たなアルキメデス像

# アルキメデスの幾何学



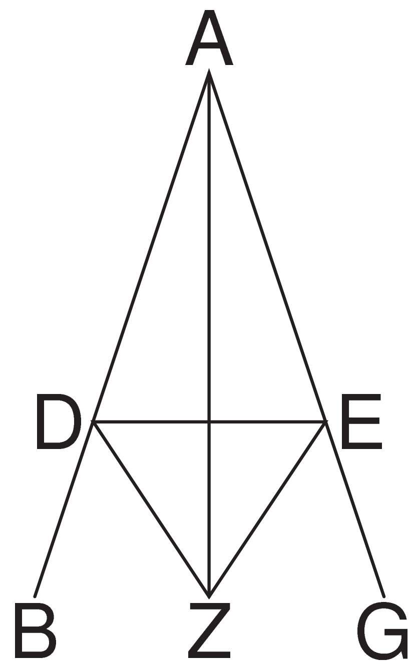
- ギリシャの論証数学の伝統
- 前５世紀半ばに成立（ピュタゴラスとは無関係）
- エウクレイデス（ユークリッド）『原論』(前３世紀初)
  - 現在学校で習う初等幾何の源流

# ギリシャの論証数学のスタイル



## 例：『原論』第１巻命題９（角の２等分)

1. 与えられた角を角BAGとする．
2. AB上にDをとり，ADに等しいAEが取り去られるとせよ（命題3)．
3. DE上に正三角形DEZが作図されたとせよ（命題1)．
4. AZが結ばれたとせよ．
5. 私は言う，角BAGはAZによって2等分されている．

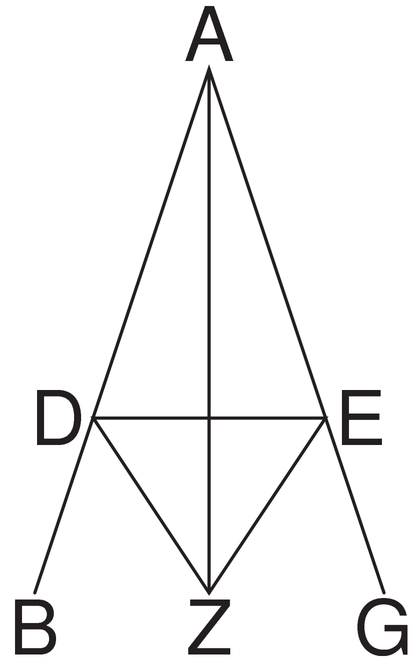


# ギリシャの論証数学のスタイル（続き）



（命題後半：証明）

1. なぜなら，ADはAEに等しく, また AZは共通.
2. そこで2直線DA, AZは2直線EA, AZに等しい.
3. そして底辺DZは底辺EZに等しい.
4. ゆえに角DAZは角EAZに等しい（命題8）.
5. ゆえに角BAGは直線AZによって2等分されている.



# ２つのギリシャ幾何学



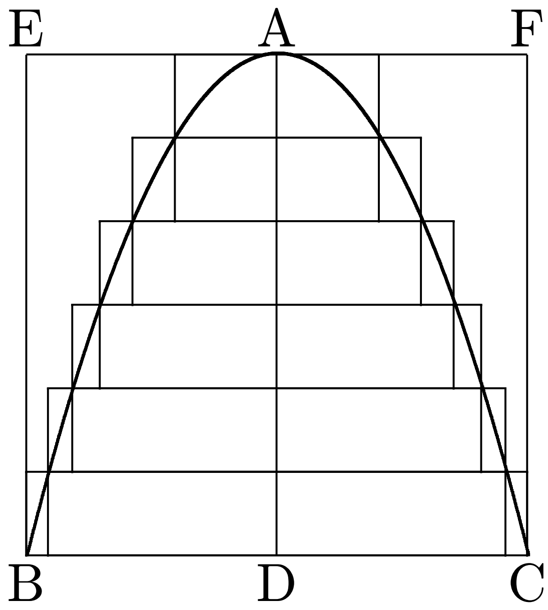
- 計量の幾何学（面積・体積決定）
  - アルキメデスにより発展：近代の微積分学へ
- 位置の幾何学（軌跡問題・作図問題解法）
  - アポロニオスにより発展：近代の解析幾何学へ

- ２つの幾何学＋アラビアの代数学＝＞17世紀の近代数学
  - 証明から計算へ転換

# アルキメデスの求積法（証明）



- ２重帰謬法（取り尽くし法）
- BACは回転放物体（回転軸はAD）
- 回転軸ADを等分して薄い円柱($C_1$ 〜 $C_6$)から成る立体を内接・外接
- 放物線の性質により $C_1$ 〜 $C_6$ は等差列をなす．




$C_1$

$C_2 = 2C_1$

$C_3 = 3C_1$

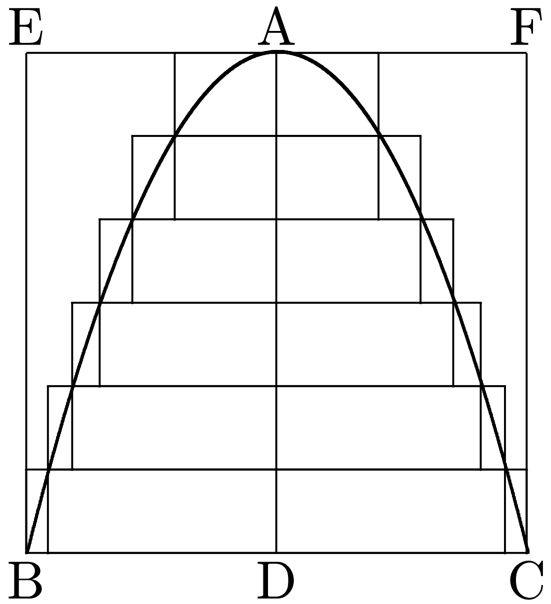
$C_4 = 4C_1$

$C_5 = 5C_1$

$C_6 = 6C_1$

# アルキメデスの求積法（証明）

- 回転放物体の求積 (2)
- 内接立体は
  $C_1 + \cdots + C_5$
  $= (1 + 2 + 3 + 4 + 5)C_1$
- 外接立体は
  $C_1 + \cdots + C_6$
  $= (1+2+3+4+5+6)C_1$
- 外側の円柱は $6 \times C_6 =$
  $(6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6)C_1$




$C_1$
$C_2 = 2C_1$
$C_3 = 3C_1$
$C_4 = 4C_1$
$C_5 = 5C_1$
$C_6 = 6C_1$

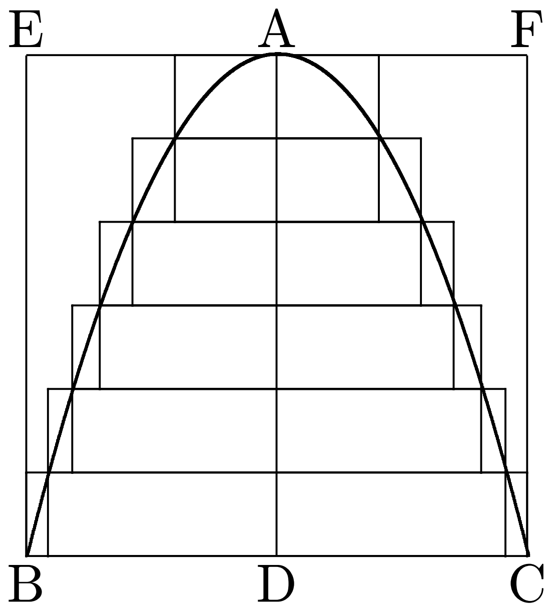
# アルキメデスの求積法（証明）


- **回転放物体の求積(3)**

**等差列の和の考察から**

$$\frac{1+2+3+4+5}{6+6+6+6+6+6} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1+2+3+4+5+6}{6+6+6+6+6+6}$$




$C_1$

$C_2 = 2C_1$

$C_3 = 3C_1$

$C_4 = 4C_1$

$C_5 = 5C_1$

$C_6 = 6C_1$

**すなわち一般に**

**内接立体 $<$ $\frac{1}{2}$円柱 $<$ 外接立体**

# アルキメデスの求積法（証明）



- 回転放物体の求積(4)

もし $\frac{1}{2}$(円柱) < (回転放物体) ならば

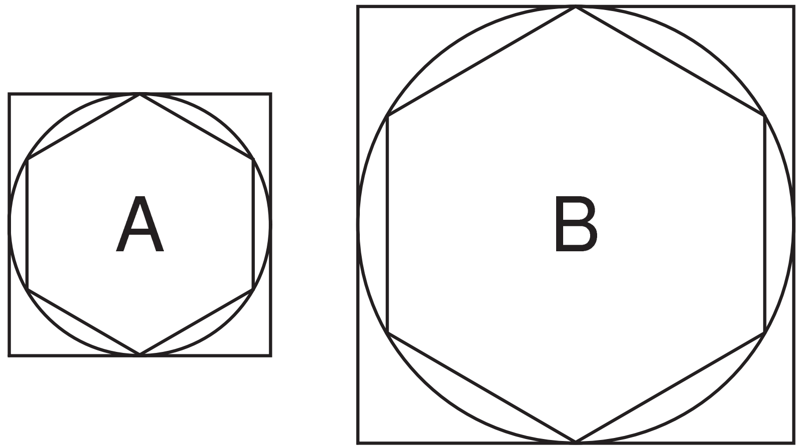
$$\frac{1}{2}(\text{円柱}) < \text{内接立体} < \text{回転放物体}$$

となる内接立体が作図できる．これは矛盾．

同様に (回転放物体) < $\frac{1}{2}$(円柱) としても矛盾が証明できる．

# ２重帰謬法の起源とアルキメデスの革新

- エウドクソス(前390頃-337頃)
  – ２重帰謬法による面積・体積決定の議論




円A:円B=正A:正B

- アルキメデスの革新
  – 数列の和との組み合わせ

# アルキメデスの困難



- 数式や変数による表現がない．
- 回転放物体は内接・外接立体が等差列の和で比較的容易
- 回転楕円体・回転双曲体では$an \pm bn^2$の扱いが困難をきわめる．

例：次の関係をアルキメデスは使っているが

$$2(a+2a+\cdots+(n-1)a) < n^2 a < 2(a+2a+\cdots+na)$$

# 等差列の和に関する
# アルキメデスの言明

もし任意個の量があり，互いを等しいだけ超過し，その超過が最小の量に等しく，また別の，それらと個数において等しく，大きさにおいて各々が最大の量に等しい量があるならば，各々が最大の量に等しい量すべては，まず等しいだけ超過する量全体の２倍より小さく，また，最大の量を除いた残りの２倍より大きい．このことの証明は明白である．(CS 序文)

# アルキメデス(前287?–前212)



1 アルキメデスの生涯：活動と著作

2 2つの著作群：幾何学と機械学

(a) アルキメデスの幾何学

**3 著作の成立時期と2つの疑問**

4 C写本と『方法』の発見

(b)『方法』の数学的内容

5 C写本の消失，再登場

6 新たなアルキメデス像

# 幾何学的著作の成立年代とコノン



QP⇒SC1⇒SC2⇒SL⇒CS

- ４つ目のＳＬ序文には「コノンに送った定理」が列挙されていて，最後のＣＳの一部までを含む．
- アルキメデスの幾何学著作のかなりの部分は「コノンに送った定理の証明」
- 若き日にコノンと議論した研究計画をコノンの死後一人で実現

# 幾何学的著作をめぐる２つの疑問



1. 機械学的著作との関係はあるのか？
2. 結果をどう発見したのか
   - アルキメデスの証明法では，証明すべきを先に知る必要がある（計算で答えが出るのではない）
   - 実際，結果の大半はコノンの生前に知られていた（らしい）
   - 一体どうやって？

- 実は機械学的方法で結果を先に得ていた

# アルキメデス(前287?–前212)



1 アルキメデスの生涯：活動と著作

2 2つの著作群：幾何学と機械学

(a) アルキメデスの幾何学

3 著作の成立時期と2つの疑問

**4 C写本と『方法』の発見**

(b)『方法』の数学的内容

5 C写本の消失，再登場

6 新たなアルキメデス像

# アルキメデスの著作の写本

- 現存著作はすべて10世紀前後の3つの写本(A, B, C)に由来
- A, B 写本は中世に西欧に伝来．
- A 写本：16世紀半ば以降行方不明．15—16世紀に作られた写しが多数現存
- B 写本：1311年を最後に行方不明．13世紀のラテン語訳が現存

# アルキメデスの著作の写本



- 1544 著作集（＋ラテン語訳）出版
- 1558, 1565 コンマンディーノによる一部著作の翻訳＋注釈出版
- 微積分学の成立に至る近代数学に大きな影響

- C 写本は1906 年まで知られない

# C写本の発見



- ギリシャ正教の祈祷書の羊皮紙写本．長らく中東の砂漠の中の修道院にあった
- 祈祷書の文字の下に数学文書があることが気づかれる(19世紀半ば)
- 1906年にデンマークの古典学者Heibergが調査し，アルキメデスの写本であることが確定．

- 未知の著作『方法』を含むことがわかる（時間が足りず写真撮影）．

# 発見法を記した著作『方法』

- アレクサンドリアのエラトステネス宛ての序文
- 定理の発見法（仮想天秤の使用）を解説
- アルキメデスの幾何学と機械学をつなぐミッシングリンク
- 明らかになったアルキメデスの幾何学的著作の成立過程

仮想天秤（機械学）で発見
＝＞後から証明（幾何学）

# J. L. Heiberg (1854–1928)



- デンマークの古典文献学者
- 博士論文で「アルキメデス研究」
- 主要なギリシャ数学文献の校訂版を出版
  - アルキメデス(1880–81)
  - エウクレイデス『原論』(1883–1888)
  - アポロニオス『円錐曲線論』(1891–1893)
  - プトレマイオス『アルマゲスト』(1898–1903)
- 近年までギリシャ数学研究=Heiberg校訂版の研究

# 著作『方法』の発見



NEW YORK, TUESDAY, JULY 16, 1907.—FOURTEEN PAGES

## BIG LITERARY FIND IN CONSTANTINOPLE

### Savant Discovers Books by Archimedes, Copied About 900 A. D.

### IT OPENS A BIG FIELD

### Whether the Turks Destroyed the Libraries When They Took the City Always a Disputed Question.

COPENHAGEN, July 15—Y. L. Heiberg, Professor of Philology in the University of Copenhagen, made a most interesting discovery in the Convent of the Holy Grave at Constantinople a few weeks ago.

While studying old manuscripts in the convent he discovered a number of palimpsests which, in addition to prayers and psalms of the twelfth century, included works by Archimedes.

The Archimedes manuscript was a copy made about the year 900 by a monk and later conveyed to Constantinople.

The Turkish authorities did not permit Prof. Heiberg to remove the manuscript. He was permitted, however, to make a copy of it, and this will shortly be published.

The fact that Prof. Heiberg copied the Archimedes manuscript apparently indicates that it consisted, entirely or in part, of works by Archimedes that have hitherto been lost, for he would hardly have taken the trouble to transcribe the books on plane geometry, solid geometry, arithmetic, and mechanics which have come down to us from among the writings by the great Greek. Perhaps, even, the manuscript found at Constantinople may contain the work , on notation which Archimedes is supposed to have written and which, when it was lost, meant the loss to the world of the system he invented.

But whether this is so or not, the discovery is of extraordinary interest as showing that ancient manuscripts do exist in Constantinople that the old legend, "Where the Turk's foot is planted grass never grows again" does not apply to all the libraries that were in the city when Mohammed II. took it in 1453. It may even be that careful search would result in the discovery of the lost books of Livy and Cicero and many other treasures of antiquity that vanished between the close of the classical age and the Renaissance. Perhaps, indeed, the book the loss of which was the greatest literary loss the world ever suffered, the Poems of Sappho, will be at last recovered and one of the chief objects of the proposed excavation of Herculaneum will be attained in another way.

For it has always been a disputed question whether the Turks destroyed or preserved the libraries they found in Constantinople. It is known that the Turk was always reluctant to destroy writing, lest perchance it should contain the name of God, but a good many scholars have been of the opinion that this scruple did not weigh with Mohammed and his followers when they entered the great city and started to make a bonfire of the treasures of antiquity that were contained in it.

Some years ago J. C. Robinson obtained permission to enter the Sultan's library of manuscripts, and saw 3,000 of them ranged in leather cases upon the wall. He came to the conclusion that Western scholars had examined them long before and that there was nothing of value in them. As a matter of fact, there is no record of any such examination.

Meredith Townsend, in "Asia and Europe," made an appeal for the examination of this librarv. He said: "The Sultan's library should be searched through as the first condition of the next loan made to Turkey—if there ever is another—and permission demanded to hunt for that older and more valuable store of manuscripts believed or known to be stored in the crypt of St. Sophia. * * * That is the last place left where we shall be likely to make a great literary find, and it should be searched before the great day when the destiny of the Ottomans is completed, and Constantinople once more sinks down, a mass of blood-stained ruins, fired by its possesors before they commence their final retreat to the desert from which, in the mysterious providence of God, they were suffered to emerge, in order to destroy the eastern half of the civilized world. The only other chance is in the Shereefal Palace, at Morocco, and it is uncertain if a library exists there."

Mr. Townsend might have referred to the further chance, a slight one, it is true, but still a chance, that the Chinese Empire may contain some of the lost treasures of the past. But the Danish savant's discovery in Constantinople indicates that that city is by far the best hunting ground for the modern Humanists, if any still exist.

- 写本はパリンプセスト（再利用された羊皮紙）
- アルキメデスの著作の上に祈祷書が上書きされていた

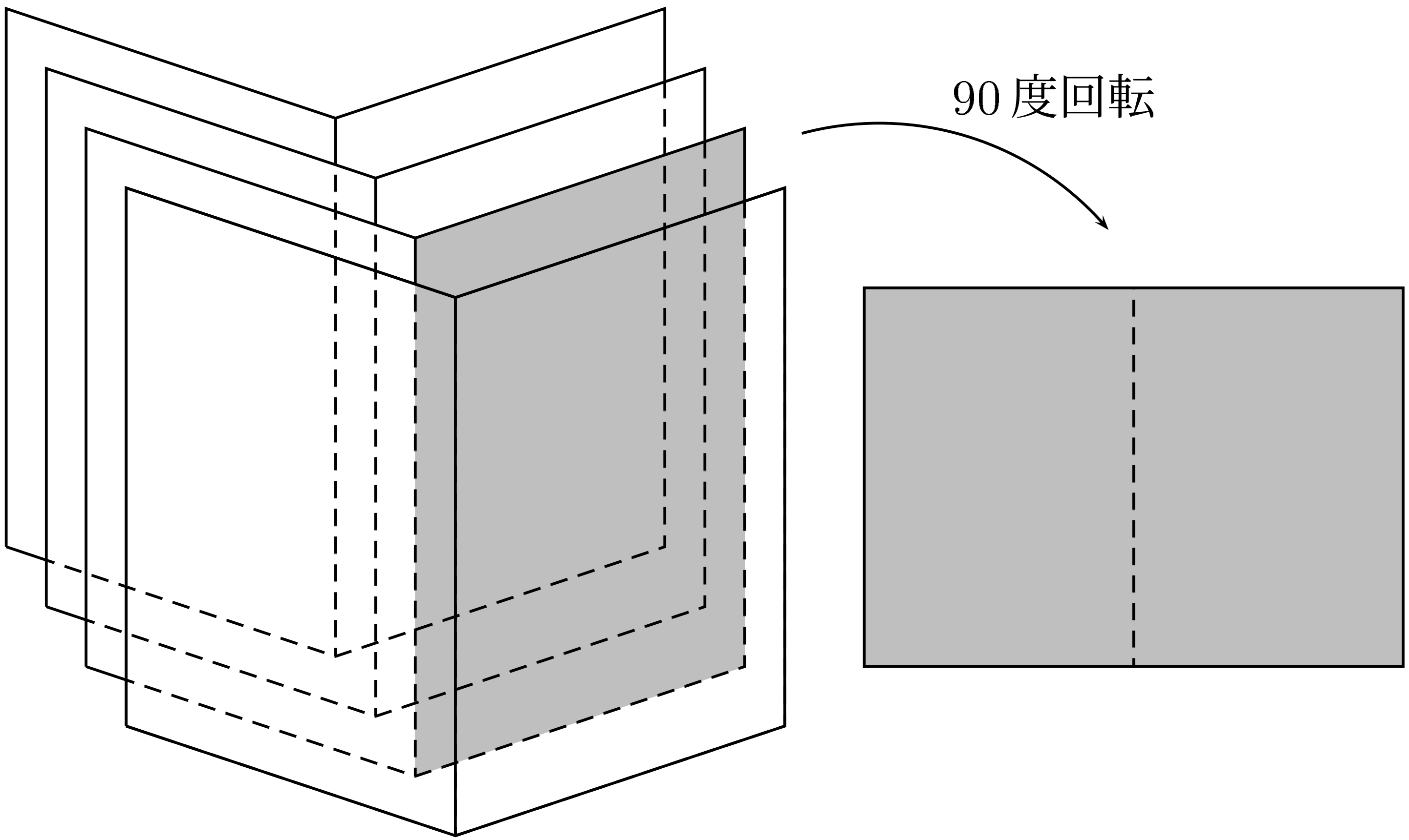
# パリンプセストとは(1)

- 羊皮紙は高価なので使わなくなった写本を再利用する
- 表面をこすって文字を消して新たに文字を書く．
- もとの本の全部のページがあるとは限らない．
- 完全な解読・復元作業は困難であることが多い．
- 複数の本が再利用されて一冊の中に入っていることもある．

# パリンプセストとは(2)



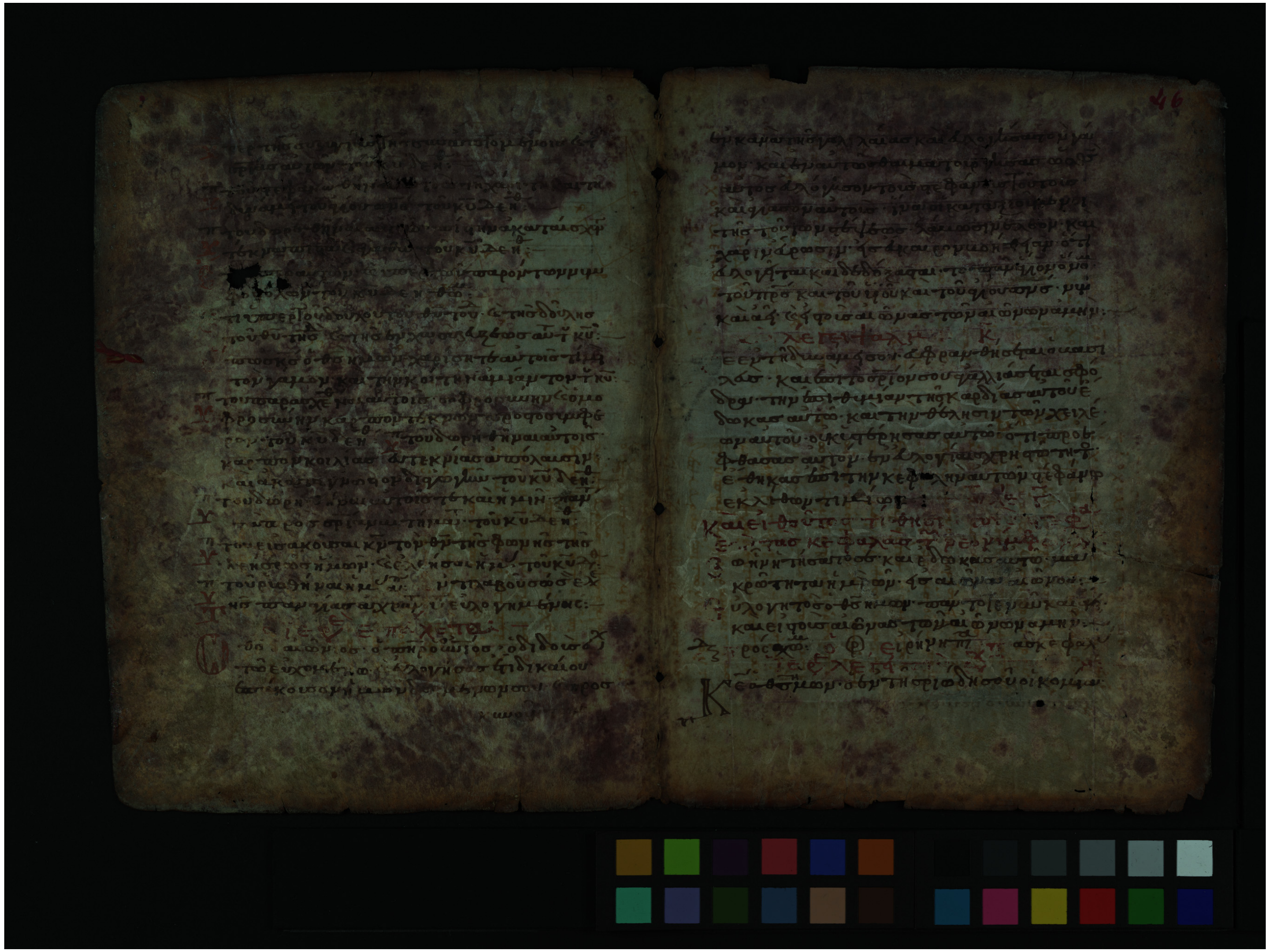
## 作業のイメージ



# パリンプセストとは(3)



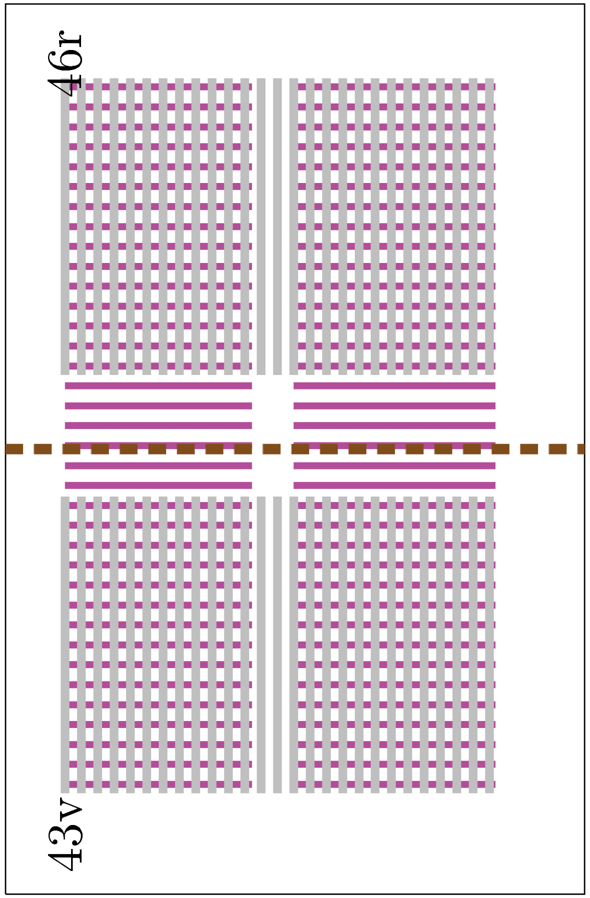
## アルキメデスＣ写本の一部：『方法』の冒頭を含む

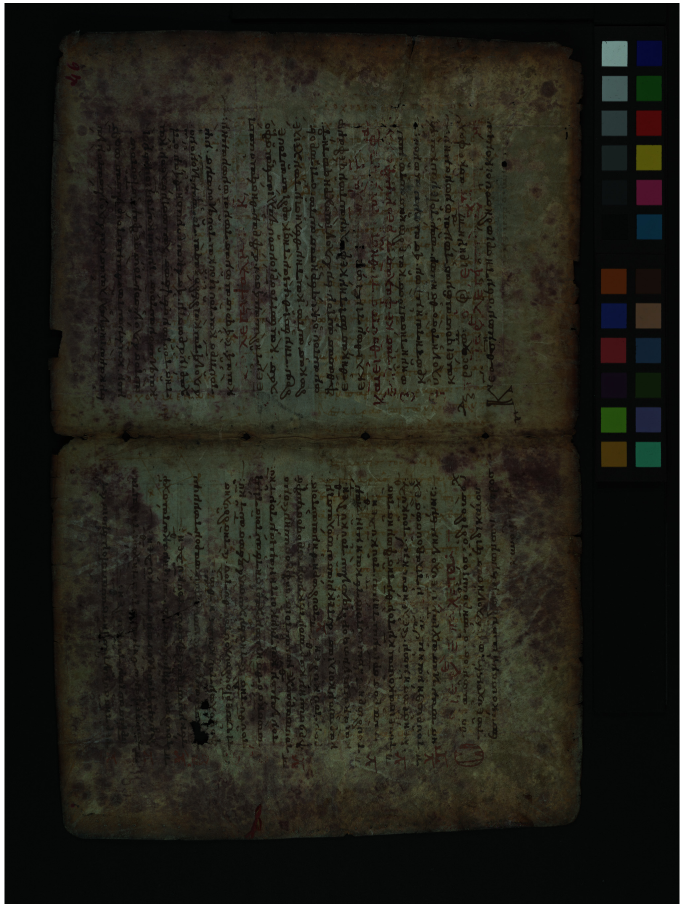


Copyright: The owner of the Archimedes Palimpsest

# パリンプセストとは(4)





アルキメデスのテキストが読める向きに置き直したもの

Copyright: The owner of the Archimedes Palimpsest

# Heibergによる『方法』の解読



- およそ8割を解読・出版 (1913)
- 序文と15個の命題（1–11, 12–15)
- 著作の末尾は散佚

- エラトステネス宛ての序文
  - 2つの新しい立体（爪形，交差円柱）の体積の証明を送る（命題12以降）
  - この機会に，求積の結果を先に得るための，ある「やり方」を説明する（命題1–11）
- 発見法を記したギリシャでは例外的な著作

# 『方法』の命題(1)



- 命題1–11: 既知の図形の求積・重心の発見法

| | 求積 | 重心 |
|---|---|---|
| 放物線(QP) | 1 | – |
| 球(SC) | 2 | – |
| 回転楕円体(CS) | 3 | – |
| 回転放物体(CS) | 4 | 5 |
| 球（回転楕円体）の切片(SC, CS) | 6, 7(8) | 9(10) |
| 回転双曲体(CS) | (11) | (11) |

cf. (QP)⇒(SC)⇒(SL)⇒(CS) に沿った順番

# 『方法』の命題(2)



- 命題12以降：新しい立体の体積の証明.
  - 命題12–15：爪形の体積(発見法と証明の途中まで)
  - 序文で予告された交差円柱に関する命題（があったはずの羊皮紙）は現存しない

# アルキメデス(前287?–前212)



1 アルキメデスの生涯：活動と著作

2 2つの著作群：幾何学と機械学

(a) アルキメデスの幾何学

3 著作の成立時期と2つの疑問

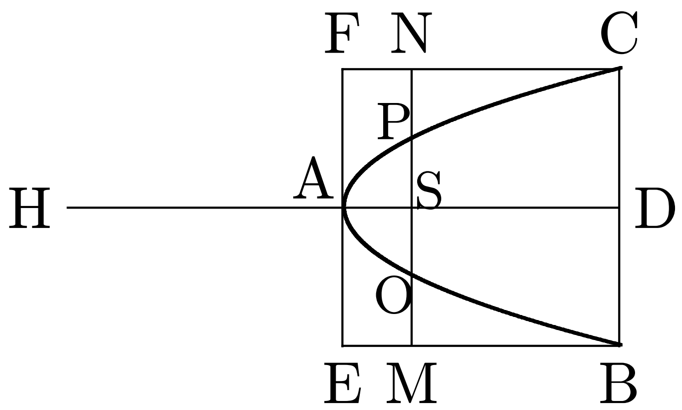
4 C写本と『方法』の発見

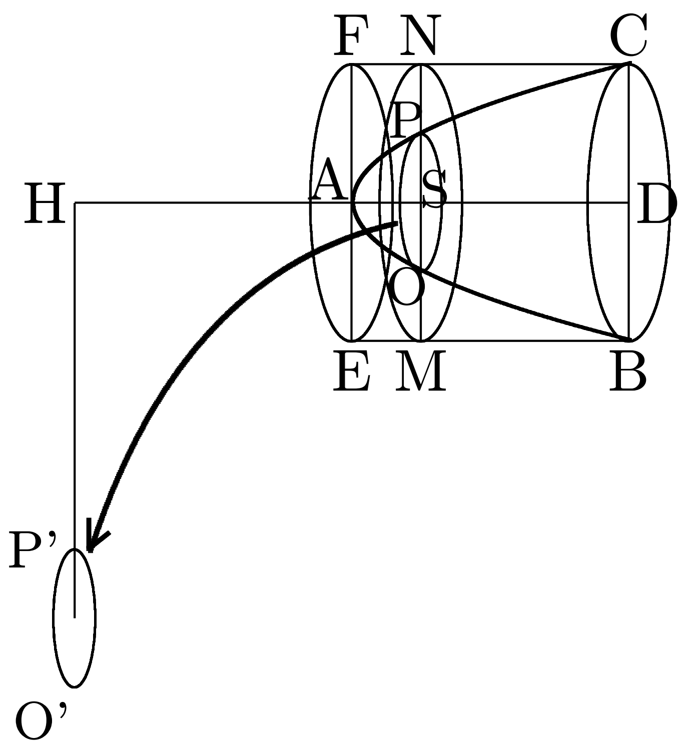
**(b)『方法』の数学的内容**

5 C写本の消失，再登場

6 新たなアルキメデス像

# 『方法』の技法(1)：仮想天秤




命題４（回転放物体の体積）

# 『方法』の技法(1)：仮想天秤

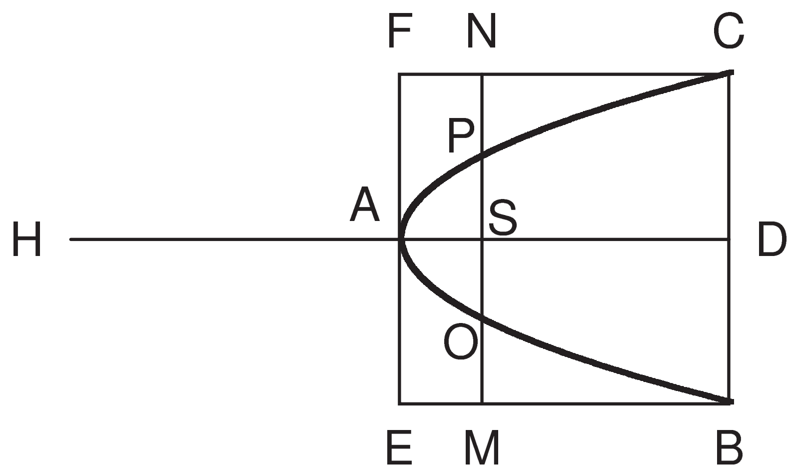


切り口の円POはAからの距離ASに比例，すなわち

円BC : 円PO = DA : AS

ここでBC=MN，またDA=AHとなるように軸DAを延長．

円MN : 円PO = AH : AS

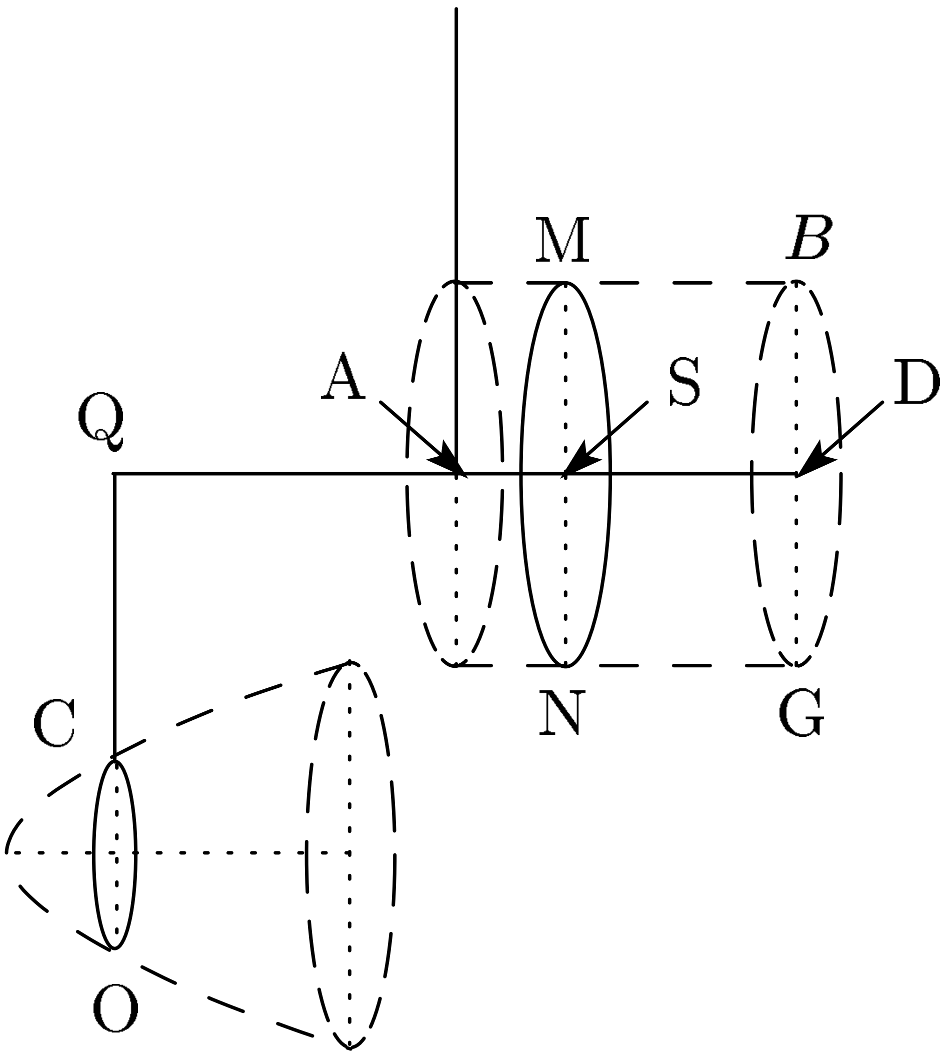



円POを点Hに移すと，もとの円MNと支点Aでつり合う

(重さと支点からの距離が反比例するとつり合うので)

# 『方法』の技法(1)：仮想天秤

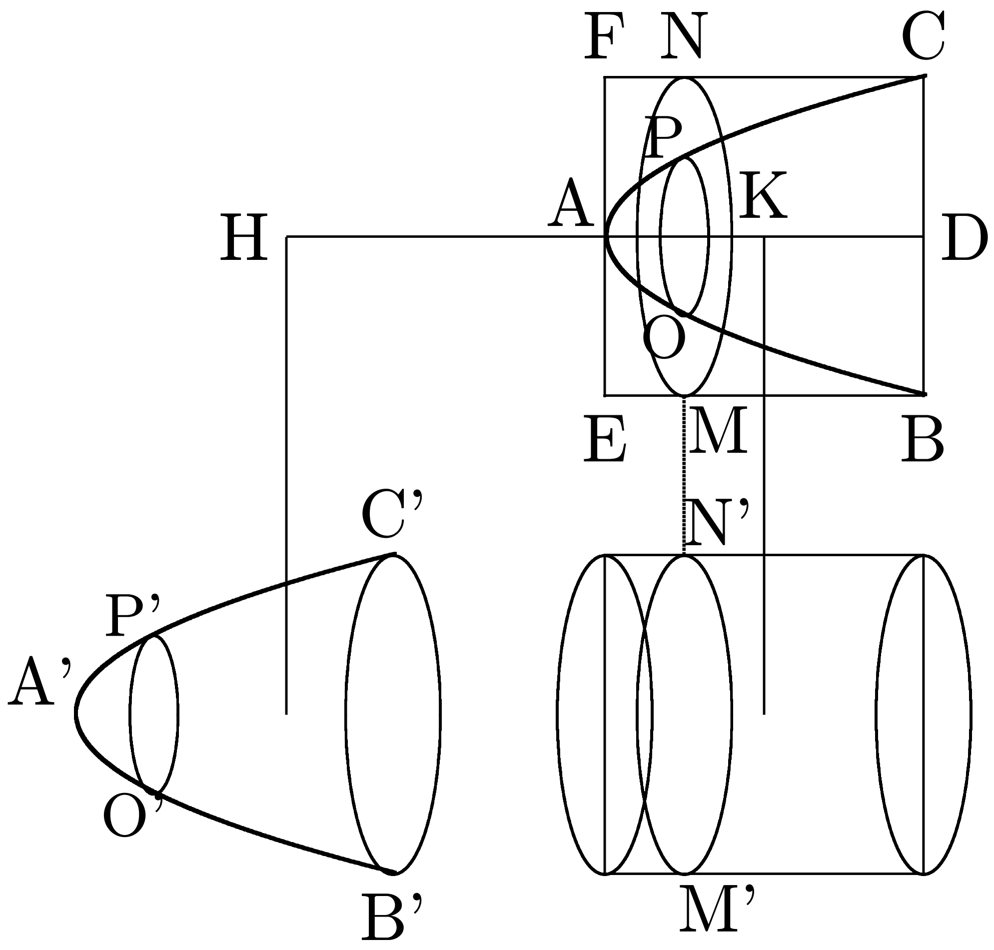





- 点Hに移した円POと，もとの場所の円MNが，支点Aに関してつりあう
- このつり合いをすべての切り口の円に対して考える

# 『方法』の技法(1)：仮想天秤

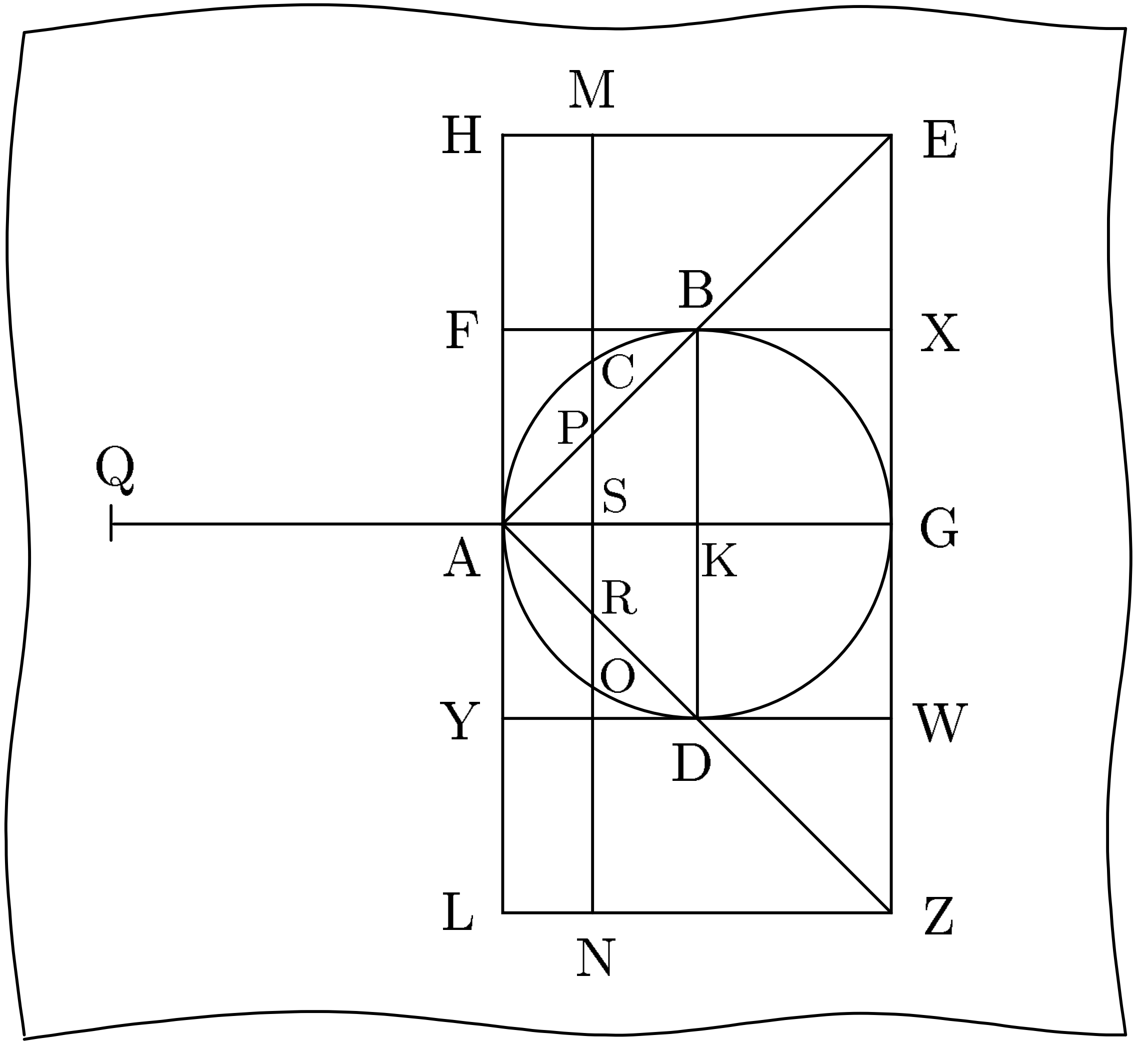





「円柱と回転放物体の切片が満たされる」と，円柱と回転放物体がつり合う．

この図では立体を下につり下げて描いている

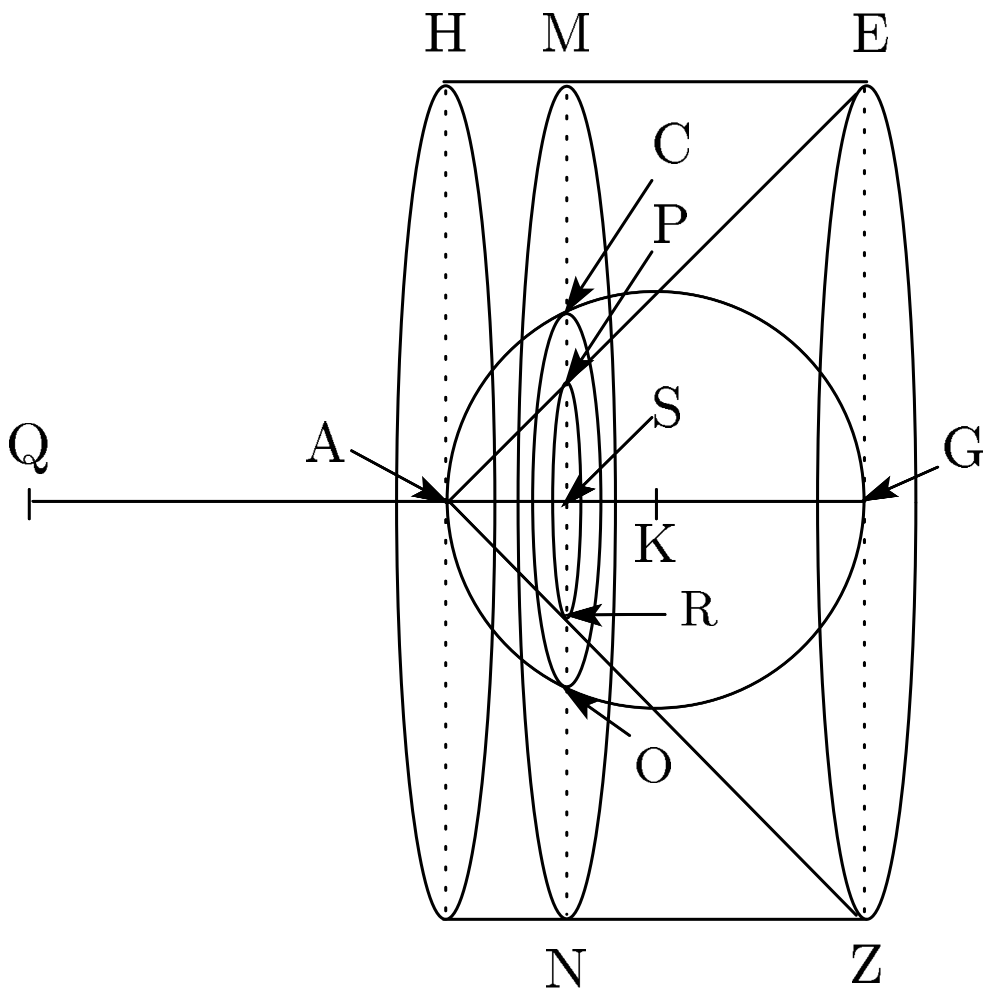
# 『方法』の技法(2)：仮想天秤の応用




- 球の体積：球の切り口の円COは端点Aからの距離ASに比例しない．
- 円錐AEZを付け加える．

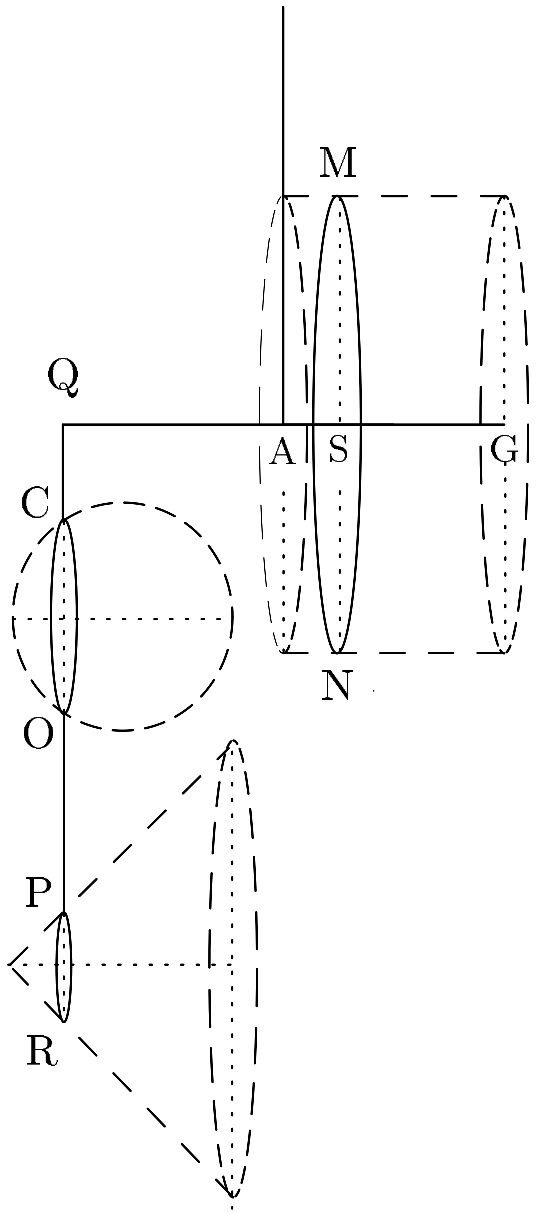
「球の切り口CO＋円錐の切り口PR」を考える

# 『方法』の技法(2)：仮想天秤の応用



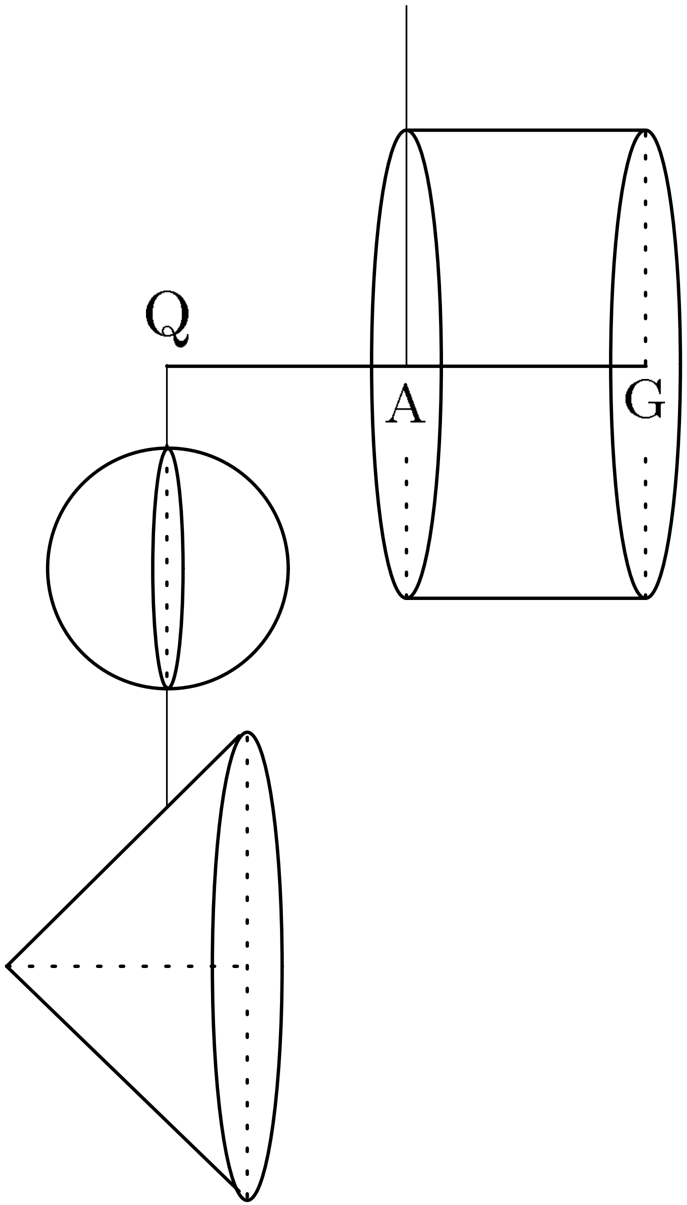

円MN ：円CO+円PR
= GA:AS

# 『方法』の技法(2)：仮想天秤の応用




- 左に「球の切り口CO＋円錐の切り口PR」
- 右に円柱の切り口MN
- これらが支点Aに関してつり合う

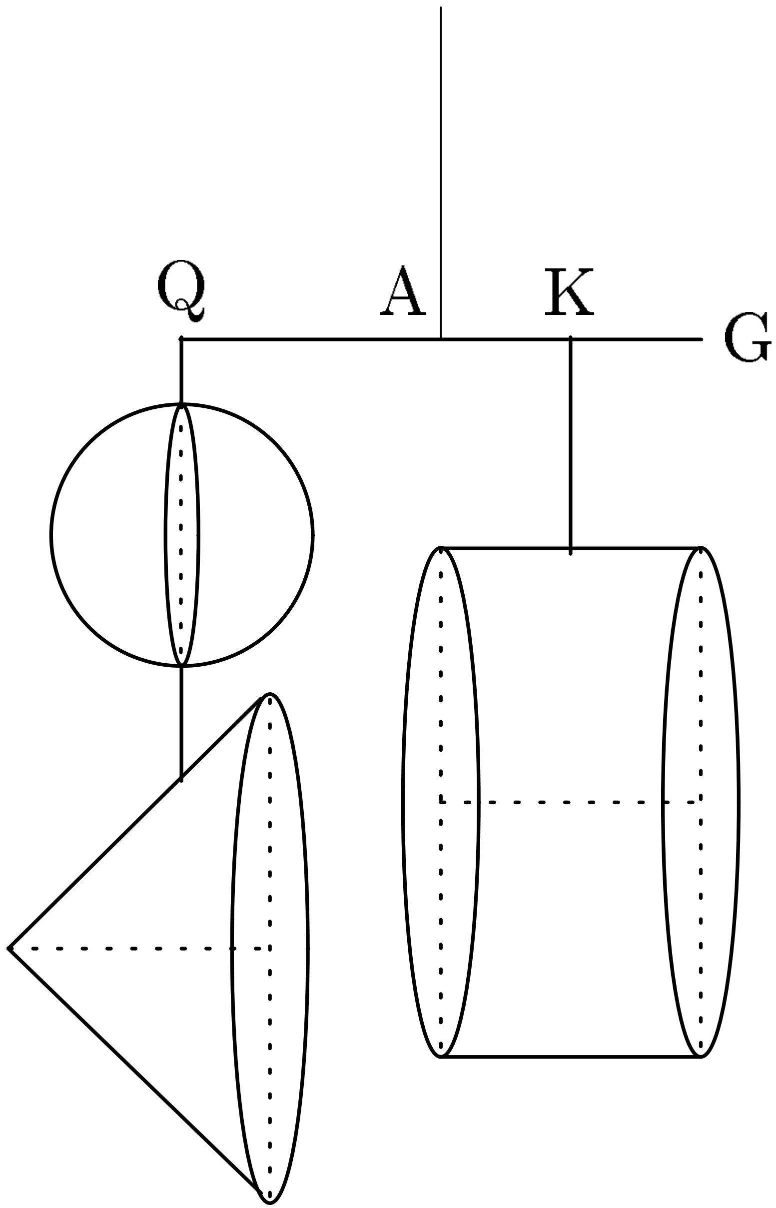
# 『方法』の技法(2)：仮想天秤の応用




- すべての切り口のつり合いを考えると「円錐＋球」が「円柱」とつり合う

# 『方法』の技法(2)：仮想天秤の応用






- 円柱の重心を考えると
  円柱 ＝ 2 × (円錐＋球)

# アルキメデス(前287?–前212)



1 アルキメデスの生涯：活動と著作

2 2つの著作群：幾何学と機械学

(a) アルキメデスの幾何学

3 著作の成立時期と2つの疑問

4 C写本と『方法』の発見

(b)『方法』の数学的内容

5 C写本の消失，再登場

6 新たなアルキメデス像

# Ｃ写本の消失と再登場

- 第一次大戦後の混乱でＣ写本は行方不明に
- 1971年：Ｃ写本の一葉だけが見つかる
  - ケンブリッジ大学で
  - 19世紀半ばに研究者が切り取ったもの
- Ｃ写本はパリ在住の個人が所有
- 1998年にニューヨークでオークションに登場
- 200万ドル（約2億円）で落札
  - 落札者はIT長者の匿名の個人（匿名）

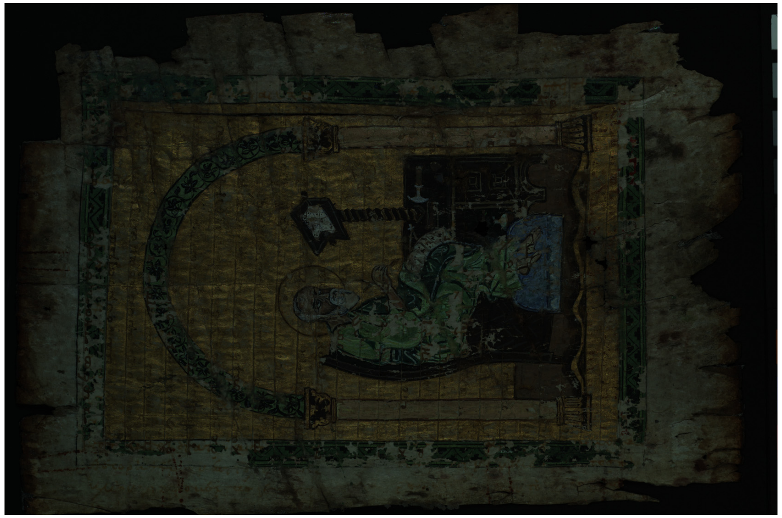
# C写本の再登場と近年の研究(1)

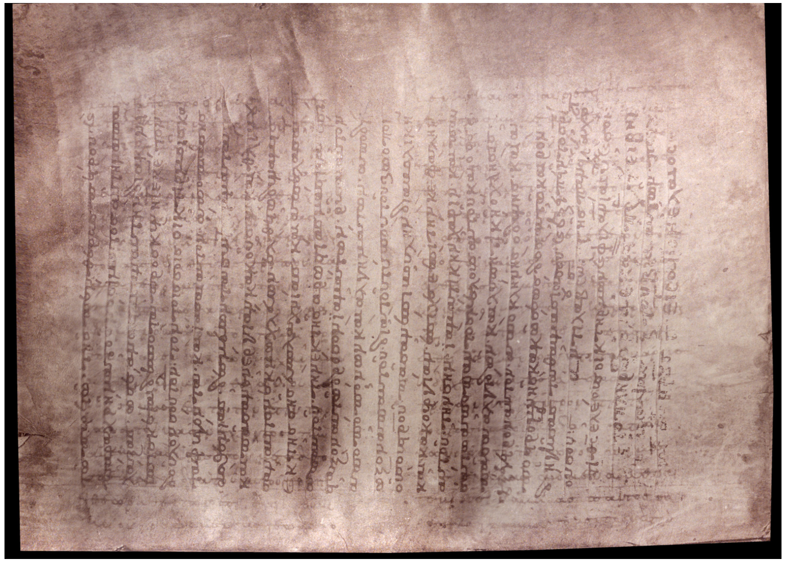


- 落札者は写本をボルティモアのウォルターズ美術館に寄託
- 不適切な保存のためか，写本の状態は最悪
- 20世紀初めにHeibergが読んだときとは比較にならないほど劣化
- 脱落したページ
- 偽造された中世のイラスト

# 偽造イラストが描かれたページ

（右側はHeibergが撮影した写真）





Copyright:
The owner of the Archimedes Palimpsest

# C 写本の再登場と近年の研究(2)



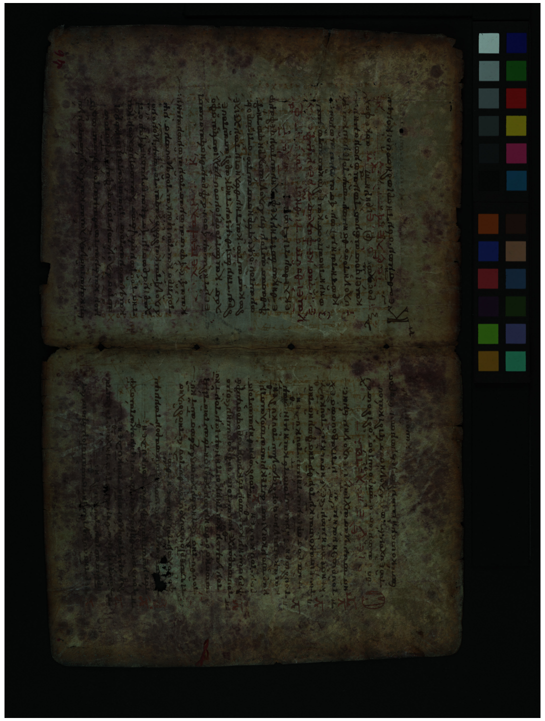
- 全体を読むために製本を外して羊皮紙を１枚ずつ分離
- 2001 年初めまでは紫外線ランプで直接読んでいた
- 現在はコンピュータで合成した疑似色 (pseudocolor) ファイルを利用

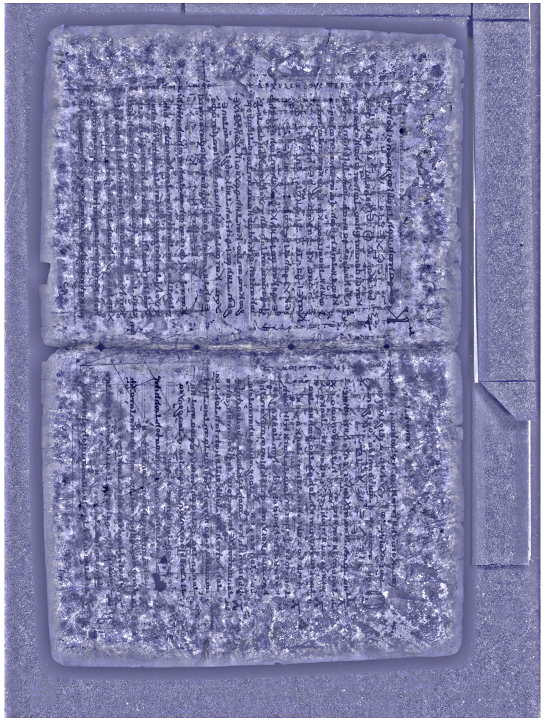
# 疑似色(pseudocolor)ファイル

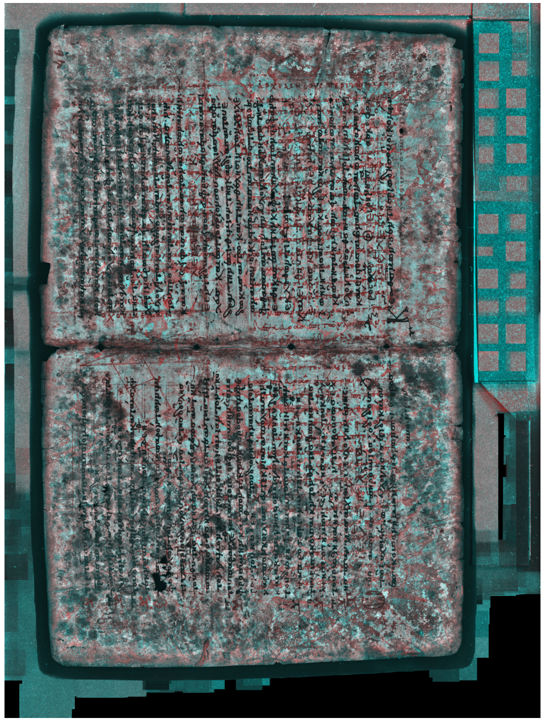


- アルキメデス写本：インクが鉄を含む
  - 通常光写真では明るい（薄い）．紫外線写真では暗い．
- 祈祷書の文字
  - 通常光でも紫外線写真でも暗い（インクが濃い）
- 通常光写真の赤＋紫外線写真の緑・青を合成
- アルキメデス写本の文字が赤く浮かび上がる．

# 通常光・紫外線・疑似色写真







左の段は『浮体について』の末尾（図版あり）
右の段が『方法』の冒頭

Copyright: The owner of the Archimedes Palimpsest

# 新たな調査の成果



- Heibergが読めなかったテクストの一部を解読
  - パリンプセストの年代確定(1229)
  - 『ストマキオン』の新たな解釈
  - 無限個の切り口の「個数が等しい」（命題14）

# 成果(1)：パリンプセストの年代と作成者確定

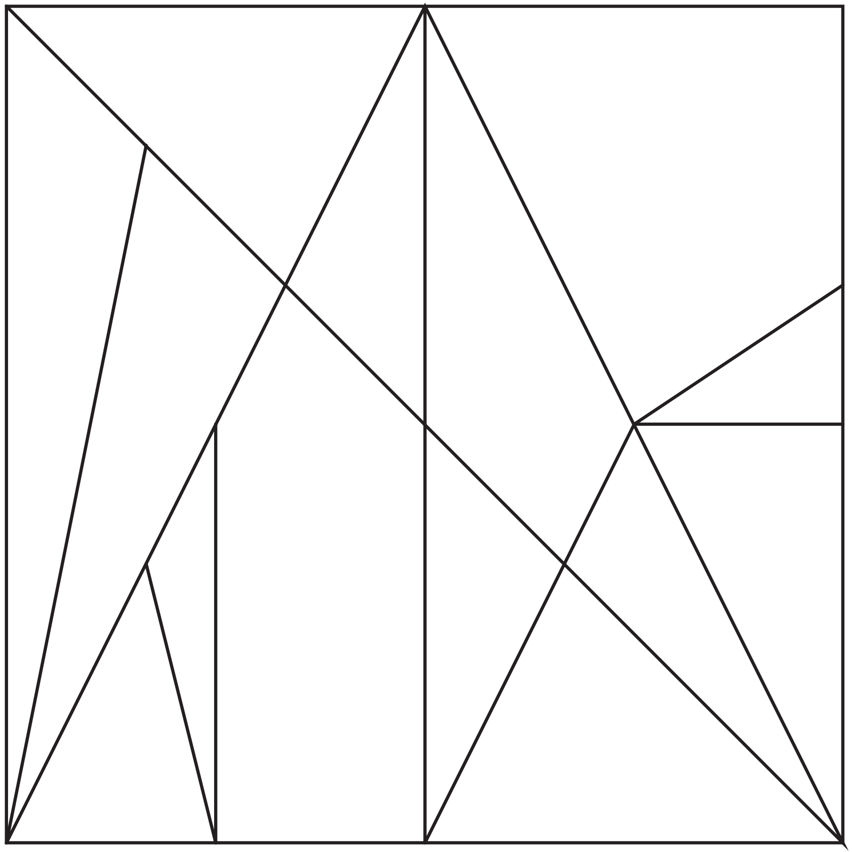
- Ｘ線の利用（蛍光Ｘ線画像）
- インクに含まれる鉄原子を検出
- これによって，状態の悪いページ，偽造した絵で覆われたページが読める
- ヨアンネス・ミロナスが1229年4月14日（復活祭の前日）に仕事を終える

# 成果(2)：著作『ストマキオン』



- 19世紀末にアラビア語断片ではじめて知られた著作
- 序論と冒頭の命題2個のみ残存
- パリンプセスト内の断片はそれより短い
- 決まった形のピースを組み合わせるパズル
- 数学的意義は長らく不明

# 成果(2)：著作『ストマキオン』



資料によれば「ストマキオン」とは象牙の板のパズルを組み合わせて，種々の形（象や豚や鵞鳥や剣闘士）を作る遊び

アラビア語写本の図

# 成果(2)：著作『ストマキオン』



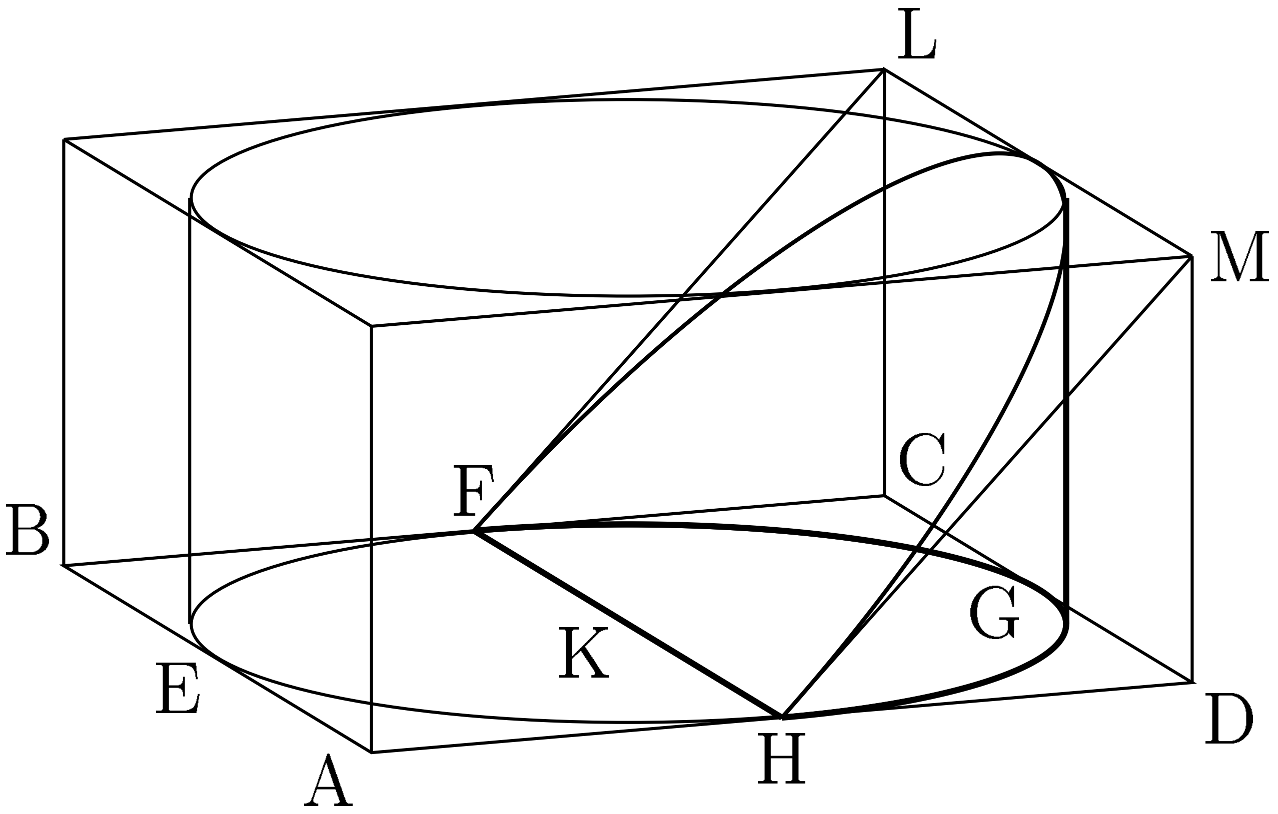
- この序論で「個数」（多）という単語が解読される
- この語を含む文の意味を「多様な図形」でなく「多数の図形」とする解釈
- パズルのピースを並べ替えて正方形を作る可能性の数？
- 実際に検討してみると17152通りある
- （ただしこの解釈には異論もある）

# 成果(3)：個数が等しい

- 命題14（爪形の求積）の未解読部分の解読（約20行）
  - 無限個の切り口をまとめて比較する議論．
  - 『方法』の他の箇所では「切り口によって立体が満たされる」という表現
  - ここでは切り口が「個数が等しい」（正確には「多において等しい」）と述べられる
- ギリシャには他に例のない「実無限」の使用

# 成果(3)：個数が等しい





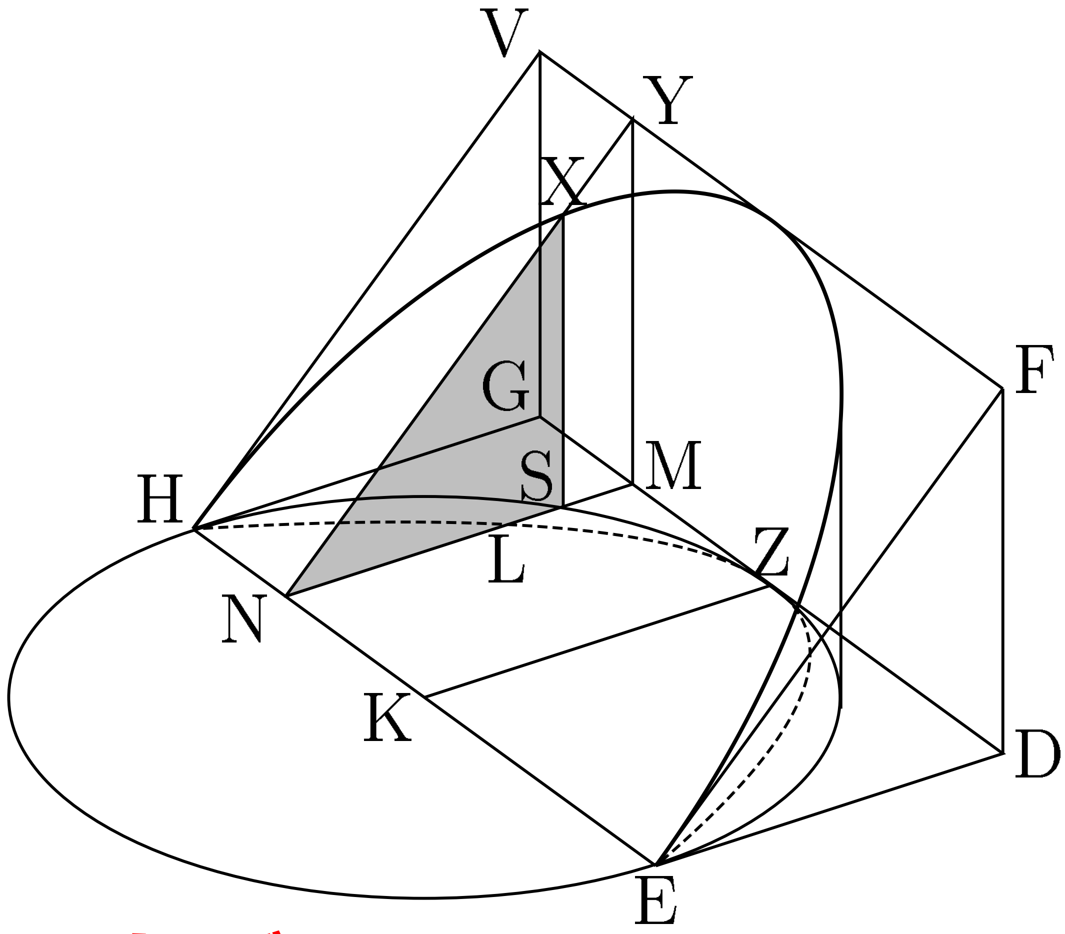

**アルキメデスの「円柱の切片」（爪形）**

**円柱を，底面の直径FHを含む平面で斜めに切ったもの**

**命題12+13では仮想天秤で体積決定（複雑）**

# 成果(3)：個数が等しい

命題14での扱い
HLZはZを頂点とする放物線




△NMY：△NSX
＝ MN：NL

すべての切り口を合わせれば

三角柱：爪形 ＝ 長方形HD：放物線の切片 ＝ 3：2

# 成果(3)：個数が等しい

- すべての切り口を合わせればとは書いていない．
- これにあたる議論が約20行．そこに「個数が等しい」という表現．
- 個数が有限個の場合の定理をそのまま無限個の切り口に適用している
- 結果は正しいが，厳密性には欠ける
- アルキメデスの「健全なにぶさ」（佐藤徹氏の表現）

# アルキメデス(前287?–前212)



1 アルキメデスの生涯：活動と著作

2 2つの著作群：幾何学と機械学

(a) アルキメデスの幾何学

3 著作の成立時期と2つの疑問

4 C写本と『方法』の発見

(b)『方法』の数学的内容

5 C写本の消失，再登場

## 6 アルキメデス像の見直し

# アルキメデスと近代数学(1)

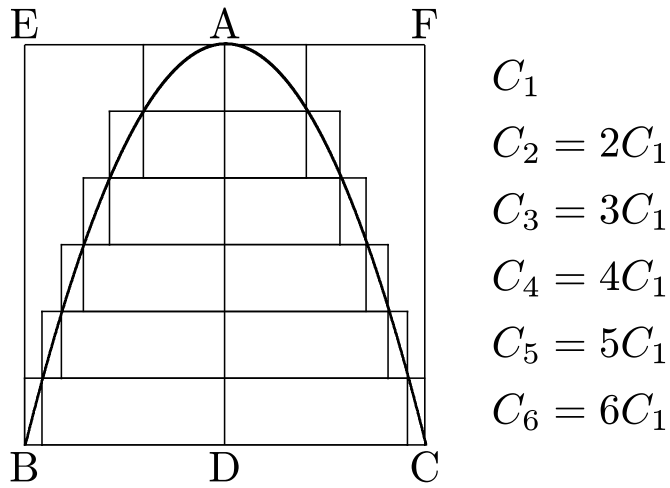


## アルキメデスはどこまで近代数学（とくに積分法）に近づいていたか

- 近代数学に近いという意見
  - 『方法』での無限個の切り口の扱いは積分法に相当するという従来からの解釈
  - （無限個の）「個数が等しい」という表現

# アルキメデスと近代数学(2)

- 内接立体と外接立体の和を求める回転放物体の求積(CS)
- 同じ図は回転楕円体，回転双曲体にも使われる
- 立体によって和の公式が違うだけ



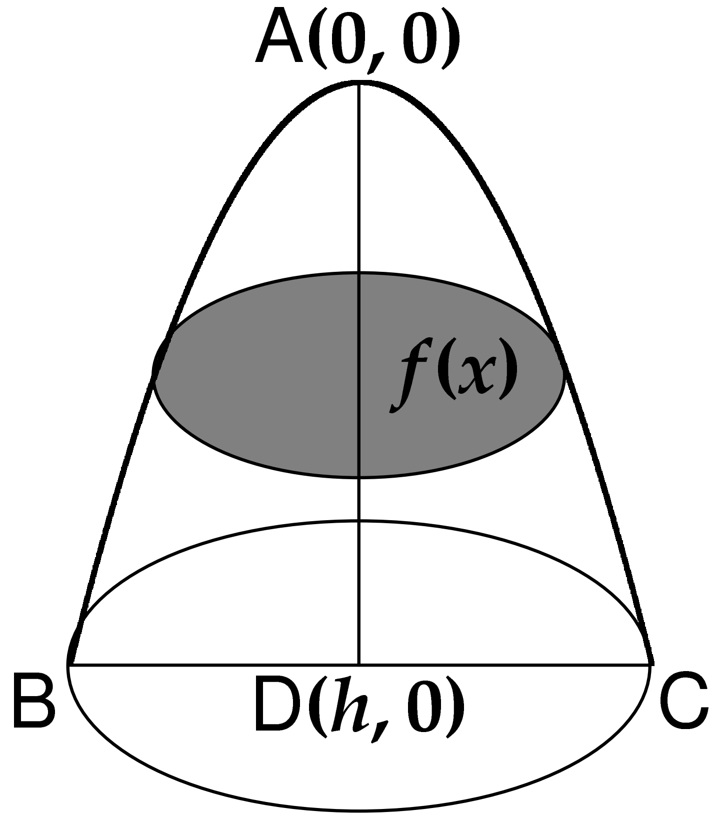
# アルキメデスと近代数学(3)



- 積分法による体積計算

$$\int_0^h f(x)dx$$

- 決まった式に切り口の面積 $f(x)$ を代入して計算する

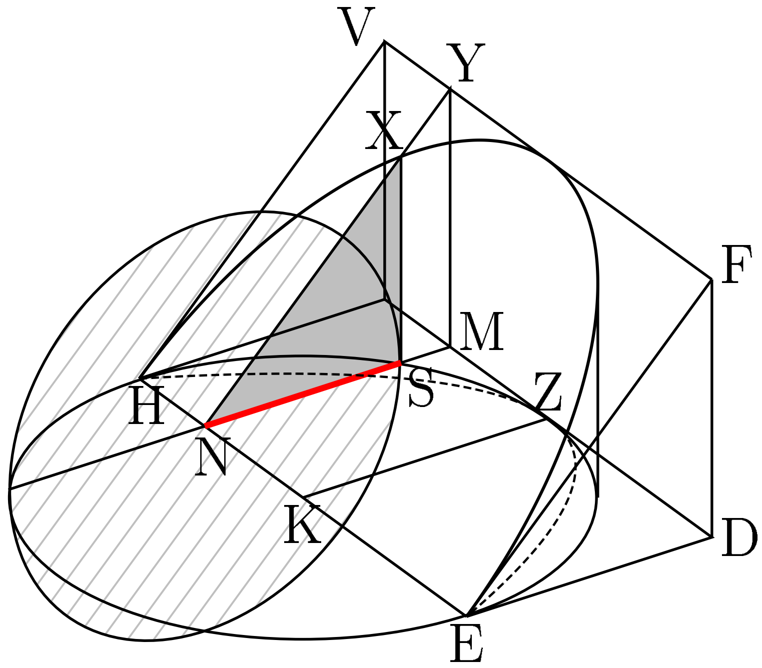



- 立体の切り口の面積だけが体積に影響する（全体の形，切り口の形は関係ない）
- アルキメデスの求積法も同じに見える．しかし

# 共通の求積法が可能な立体(1)

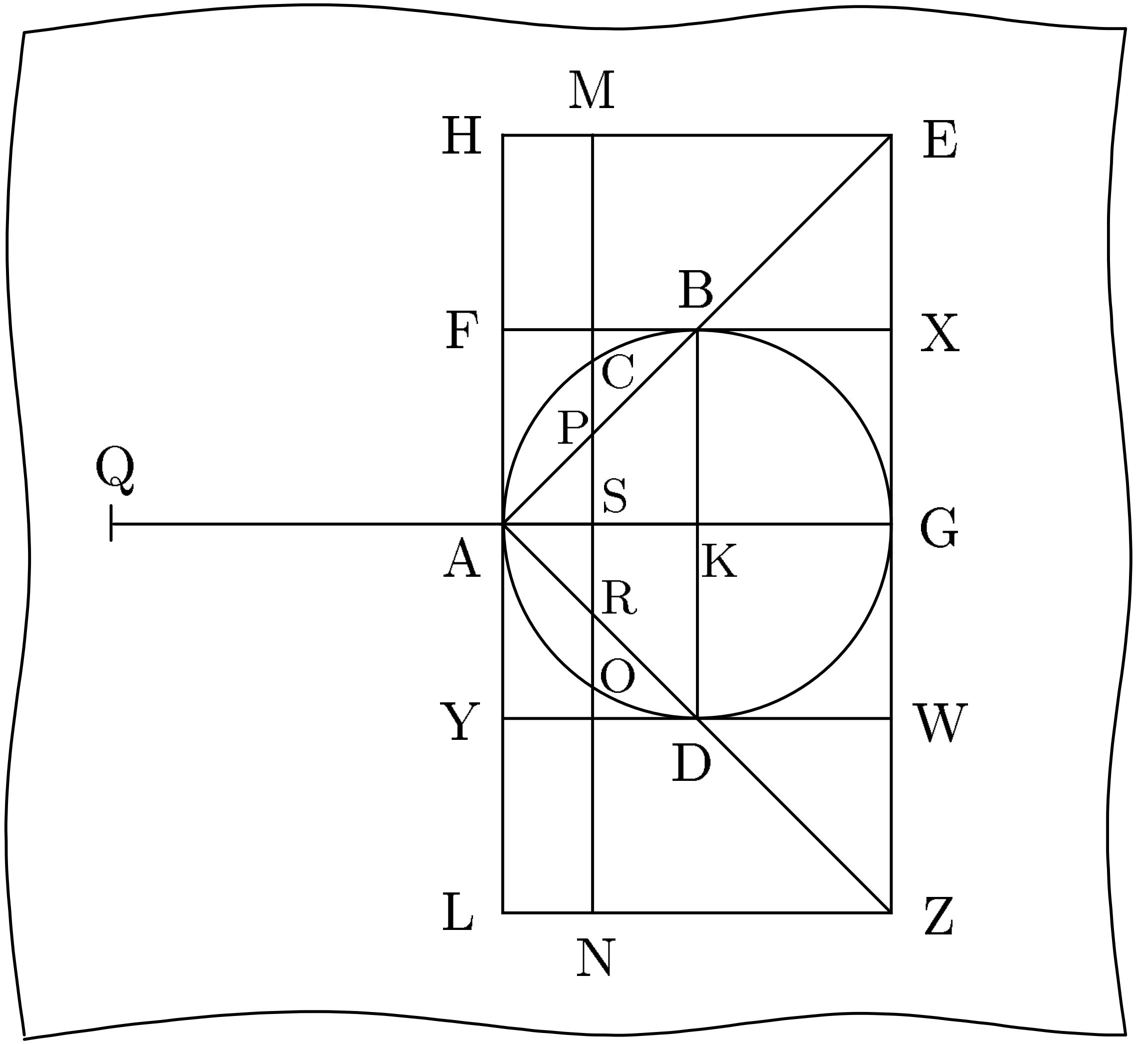


- 爪形と球の切り口の面積
- $\dfrac{1}{2}$NS$^2$ (爪形), $\pi$NS$^2$ (球)
- NK=$x$ とすると NS=$r^2 - x^2$, 両方ともNSの平方に比例する
- 体積は同じ計算になる




$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - x^2)dx, \quad \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx$$

# 共通の求積法が可能な立体(2)




- 命題2（球の体積）の図
- 円CO，円PRの代わりに
- CS，PSを一辺とする直角三角形を考えれば爪形の求積ができる

# 共通の求積法が可能な立体(3)



- しかし，アルキメデスは球（命題2），爪形（命題12–15）にまったく違う方法を用いている．
- さらに，序文で予告した交差円柱（これも球と同じ方法で求積可能）は，直接求積せず，８個の爪形に分割して考察したと思われる．（失われたページ数の見積もりによる）
- 立体の体積は切り口の面積だけで決定されるという認識が明確でない．

# まとめ：古代と近代の距離



- 現代から見れば明らかな「量的関係の類似」に気づかない
- アルキメデスにとって求積法は図形ごとに個別に探求するもの
- 切り口だけ考えればよいという明確な認識はない
- 近代数学との違いは数式の有無だけでなく，基本的な発想にある
- アルキメデスと近代の距離は意外に遠い

# 参考文献・資料


- 林栄治，斎藤憲『天秤の魔術師アルキメデスの数学』共立出版, 2009 (3300円＋税).
- リヴィエル・ネッツ，ウィリアム・ノエル著, 吉田晋治監訳『解読！アルキメデス写本』光文社, 2008 (2100円＋税).
- 斎藤憲「計算好きだったアルキメデス」『科学』2007年4月号, 412–418.
- 斎藤憲『よみがえる天才アルキメデス』岩波書店, 2006（岩波科学ライブラリー 117）(1200円＋税).
- 佐藤徹『アルキメデス方法』東海大学出版会, 1990.
- 伊東俊太郎編，佐藤徹訳『アルキメデス』科学の名著第I期第9巻．朝日出版社, 1981.
- http://www.archimedespalimpsest.org