

【Ⅰ】 数列 $\{a_n\}$ は次を満たしている：

$$a_{n+1} = 2a_n + 3n + 4^n \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad a_1 = -6$$

このとき以下の空欄 ア ～ シ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。

問 1 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ で定義するとき、 b_{n+1} を b_n と n を用いて表すと

$$b_{n+1} = \text{ア} \cdot b_n + \text{イ} \cdot \text{ウ}^n + \text{エ}$$

である。

問 2 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_n + 3 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ で定義するとき、 c_{n+1} を c_n と n を用いて表すと

$$c_{n+1} = \text{オ} \cdot c_n + \text{カ} \cdot \text{キ}^n$$

である。

問 3 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表すと

$$a_n = \text{ク} \cdot \text{ケ}^{n-1} - \text{コ}^n - \text{サ} \cdot n - \text{シ}$$

である。

【解答】 問 1 $b_{n+1} = 2b_n + 3 \cdot 4^n + 3$ 問 2 $c_{n+1} = 2c_n + 3 \cdot 4^n$

問 3 $a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 2^n - 3n - 3$

【解説】

問 1

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3(n+1) + 4^{n+1} \quad \dots\dots ①$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3n + 4^n \quad \dots\dots ②$$

①②を辺々ひくことで

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 3 \cdot 4^n + 3$$

$$\therefore b_{n+1} = 2b_n + 3 \cdot 4^n + 3$$

問 2

$$c_{n+1} = b_{n+1} + 3$$

$$= 2b_n + 3 \cdot 4^n + 3 + 3$$

$$= 2(b_n + 3) + 3 \cdot 4^n$$

$$= 2c_n + 3 \cdot 4^n$$

$$\therefore c_{n+1} = 2c_n + 3 \cdot 4^n \quad \dots\dots ③$$

問 3

ここで、③の両辺を 2^{n+1} で割ることで

$$\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{c_n}{2^n} + 3 \cdot 2^{n-1}$$

よって、 $n \geq 2$ において

$$\frac{c_n}{2^n} = \frac{c_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$$

ここで、 $c_1 = b_1 + 3 = a_2 - a_1 + 3 = -5 - (-6) + 3 = 4$ であることから

$$\frac{c_n}{2^n} = 2 + 3 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

$$\therefore c_n = 3 \cdot 2^{2n-1} - 2^n \quad (\text{これは } n=1 \text{ でも成り立つ})$$

ここで、 $c_n = b_n + 3 \Leftrightarrow b_n = c_n - 3$ より

$$b_n = 3 \cdot 2^{2n-1} - 2^n - 3$$

$$= 6 \cdot 4^{n-1} - 2^n - 3$$

さらに、 $a_{n+1} - a_n = b_n$ であることから

$n \geq 2$ において、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= -6 + \sum_{k=1}^{n-1} (6 \cdot 4^{k-1} - 2^k - 3)$$

$$= -6 + 6 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} - 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - 3(n-1)$$

$$= 2 \cdot 4^{n-1} - 2^n - 3n - 3 \quad (\text{これは } n=1 \text{ でも成り立つ})$$

【Ⅱ】 以下の各問いに答えよ。

問 1 関数 $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数を考えることにより、不定積分 $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$ を求めよ。なお積分定数は省略してよい。

問 2 xy 平面上の双曲線 $x^2 - y^2 = -1 \quad (y > 0)$ と直線 $y = x$ および 2 直線 $x = 0$ 、 $x = t$ (ただし、 $t > 0$) で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ。

問 3 k を実数の定数とする。問 2 の $S(t)$ に対して $t(t > 0)$ の関数 $S(t) - k \log t$ が $t \rightarrow +\infty$ で収束するための、定数 k に対する必要十分条件を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

【解答】 問 1 $\frac{1}{2} \{x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})\}$ (積分定数省略)

$$\text{問 2} \quad S(t) = \frac{1}{2} \{t\sqrt{t^2 + 1} + \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) - t^2\}$$

$$\text{問 3} \quad k = \frac{1}{2} \quad \text{極限値} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log 2$$

【解説】

問 1 (以下、積分定数は省略して考えるものとする)

まず、 $\{\log(x + \sqrt{x^2 + 1})\}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ より

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \dots\dots ①$$

に注意する。

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} dx$$

とおく。部分積分により

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} dx = x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \left(\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \sqrt{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

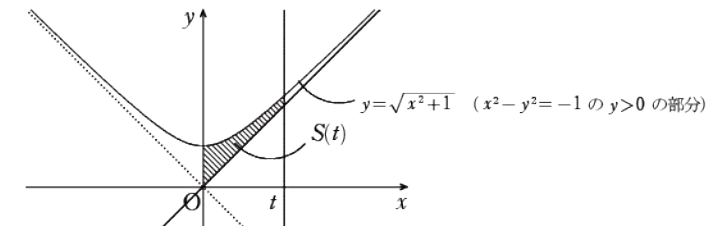
$$= x\sqrt{x^2 + 1} - I + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (\because ①)$$

$$\therefore 2I = x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} \{x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})\} \quad \dots\dots ②$$

問 2

図の斜線部分の面積が $S(t)$ だから



$$S(t) = \int_0^t (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx$$

である。

② (問 1 の結果) を用いて

$$S(t) = \left[\frac{1}{2} \{x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})\} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2} \{t\sqrt{t^2 + 1} + \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) - t^2\} \quad \dots\dots ③$$

問 3

③ (問 2 の結果) から

$$\begin{aligned} S(t) - k \log t &= \frac{1}{2} \{t\sqrt{t^2 + 1} + \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) - t^2\} - k \log t \\ &= \frac{1}{2} \{t\sqrt{t^2 + 1} + \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) - \log t^{2k}\} \\ &= \frac{1}{2} \{ (t\sqrt{t^2 + 1} - t^2) + \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) - \log t^{2k} \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (t\sqrt{t^2 + 1} - t^2) + \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{t^{2k}} \right) \right\} \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

$$A = t\sqrt{t^2 + 1} - t^2, \quad B = \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{t^{2k}} \quad \text{とおく。}$$

以下、 A, B に対して、 $t \rightarrow \infty$ のときを考える。

$$\begin{aligned} A &= t(\sqrt{t^2 + 1} - t) \\ &= t \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (t \rightarrow \infty) \quad \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

であり、次に B が収束するかどうかを調べると

$$B = \frac{1}{t^{2k-1}} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \right)$$

だから

$$k > \frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad B \rightarrow +0 \quad \text{より} \quad \log B \rightarrow -\infty$$

$$k < \frac{1}{2} \text{ のとき } B \rightarrow \infty \text{ より } \log B \rightarrow \infty$$

であり、ともに発散し、不適。つまり、 $k = \frac{1}{2}$ が必要である。

このとき $B \rightarrow 2$ から

$$\log B \rightarrow \log 2 \ (t \rightarrow \infty) \cdots \cdots \textcircled{6}$$

と分かる。以上から、 $S(t) - k \log t$ が $t \rightarrow \infty$ で収束するための必要十分条件は

$$k = \frac{1}{2}$$

実際このとき、④⑤⑥から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{S(t) - k \log t\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \log 2 \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log 2$$

【Ⅲ】 O を原点とする座標空間において1点 A(0, 0, 4)をとり、点 B(1, 1, 1)を中心とする半径1の球面を S とする。S 上の点 P を動かしたときに直線 AP と xy 平面との交点 Q が描く図形を D とする。

問1 D 上の点 Q の座標を (x, y, 0) とするとき、x, y の満たす不等式を求めよ。

問2 x, y, X, Y を実数、i を虚数単位とし、 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たすとする。複素数平面における点 $z = x + iy$ を、原点を中心として θ 回転した点が $Z = X + iY$ となったとき、x, y を X, Y, θ を用いてそれぞれ表せ。答えのみでよい。

問3 D を xy 平面上で原点を中心として θ 回転 (ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) して得られる図形を表す X, Y の不等式に XY の項が含まれないように、 θ の値を定め、D の面積を求めよ。

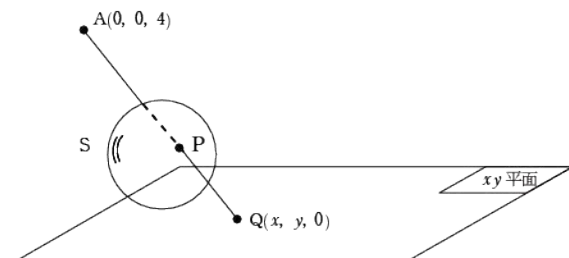
【解答】 問1 $9x^2 + 9y^2 - 2xy - 24x - 24y + 16 \leq 0$

問2 $x = X \cos \theta + Y \sin \theta, y = -X \sin \theta + Y \cos \theta$

問3 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 面積 $\sqrt{5}\pi$

【解説】

問1



点 P は直線 AQ 上にあることから、実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{AQ} = (0, 0, 4) + t(x, y, -4) \\ &= (tx, ty, 4 - 4t) \end{aligned}$$

と書ける。さらに、点 P は球面 S : $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ 上にあることから

$$(tx-1)^2 + (ty-1)^2 + (3-4t)^2 = 1$$

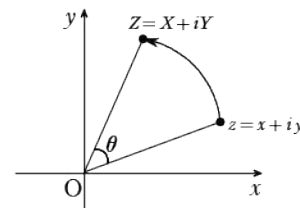
$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 16)t^2 - 2(x + y + 12)t + 10 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

をみたす実数 t が存在する。①を t の二次方程式と見て、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (x + y + 12)^2 - 10(x^2 + y^2 + 16) \geq 0$$

$$\therefore 9x^2 + 9y^2 - 2xy - 24x - 24y + 16 \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

問2



z は Z を原点のまわりに $-\theta$ 回転して得られるので

$$\begin{aligned} x + iy &= (X + iY)(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = (X + iY)(\cos \theta + i\sin \theta) \\ &= (X \cos \theta + Y \sin \theta) + i(-X \sin \theta + Y \cos \theta) \end{aligned}$$

よって、実部と虚部を比較することで

$$x = X \cos \theta + Y \sin \theta, y = -X \sin \theta + Y \cos \theta \cdots \cdots \textcircled{3}$$

問3

不等式②で表される領域の左辺の式は、x と y を入れ替えても変わらないので、領域 D は $y = x$ に関して対称な2次曲線であることがわかる。

よって、領域 D (不等式②) を原点のまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転すれば、XY の項がない不等式が得られる。

$$\textcircled{3} \text{ に } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ を代入すると } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$$

これを不等式②に代入して

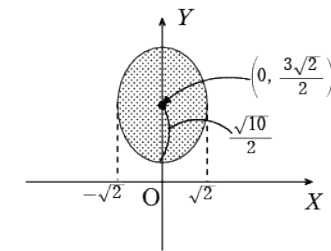
$$\begin{aligned} 9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 + 9\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) \\ - 24\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) - 24\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) + 16 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{9}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + \frac{9}{2}(X^2 - 2XY + Y^2) - 2\left(\frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}X^2\right) - 24\sqrt{2}Y + 16 \leq 0$$

$$\therefore 10X^2 + 8Y^2 - 24\sqrt{2}Y + 16 \leq 0$$

$$\therefore \frac{X^2}{2} + \frac{\left(Y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{5}{2}} \leq 1$$

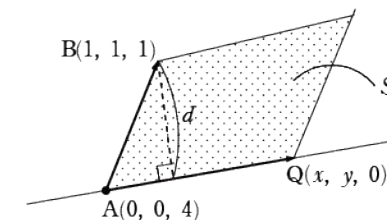
これより、この不等式で表される領域を XY 平面に描くと、次のようになる。



つまり、長半径 $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 、短半径 $\sqrt{2}$ の楕円の内部および外周なので、

$$\text{求める面積は } \pi \times \sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{2} = \sqrt{5}\pi$$

【問1の別解】



図の平行四辺形の面積 S に注目する。S をベクトルを用いて表せば

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{AQ}|^2 |\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AB})^2} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

一方で、点 B と直線 AQ の距離を d とすれば $S = |\overrightarrow{AQ}| \cdot d \cdots \cdots \textcircled{5}$

④⑤より

$$\sqrt{|\overrightarrow{AQ}|^2 |\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AB})^2} = |\overrightarrow{AQ}| \cdot d \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

これを⑥に代入して、

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + 16) \cdot (1^2 + 1^2 + (-3)^2) - (x + y + 12)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 16} \cdot d$$

$$\therefore \sqrt{11(x^2 + y^2 + 16) - (x + y + 12)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 16} \cdot d$$

$$\therefore d = \sqrt{\frac{11(x^2 + y^2 + 16) - (x + y + 12)^2}{x^2 + y^2 + 16}}$$

とわかる。

点 Q が存在する範囲は、点 P が S 上に存在する。つまり、

「点 B と直線 AQ の距離 d が 1 以下」

であればよいから、

$$d \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{11(x^2 + y^2 + 16) - (x + y + 12)^2}{x^2 + y^2 + 16}} \leq 1$$

$$\therefore \frac{11(x^2+y^2+16)-(x+y+12)^2}{x^2+y^2+16} \leq 1$$

これを整理して、

$$9x^2+9y^2-2xy-24x-24y+16 \leq 0$$

[IV] n を1以上の整数とし、 p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．白球 n ，黒球 n 個，合計 $2n$ 個の球が入った袋から球を無作為に取り出す試行を考える．ただし，取り出した球は袋にもどさない．さらに，袋の中の白球は1秒経過するごとに確率 p で黒球に変化し，袋の中の黒球と袋から取り出した球は色が変化しないものとする．また，1以上の整数 N に対し，以下の問題文中で「 N 秒後に袋から球を取り出す」とは，袋に $2n$ 個の球を入れてから N 秒後に起こり得る袋の中の球の色の変化が完了した直後に球を取り出すことを意味する．このとき，以下の各問いに答えよ．

問1 1秒後，2秒後に袋から球を1個ずつ取り出したとき，取り出した2個の球がどちらも白球である確率を求めよ．

問2 1秒後，2秒後，…， n 秒後に袋から球を1個ずつ取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて白球である確率を $P(n)$ とする．一方，別の試行として，色の変化が起こらないものとして， $2n$ 個の球が入った袋から n 個の球を取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて白球である確率を $Q(n)$ とする．このとき，以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right)$$

問3 n 秒後に袋から n 個の球を取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて黒球である確率を $R(n)$ とする．このとき，以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-R(n)}{n(1-p)^n}$$

ただし，必要ならば $0 < a < 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

$$\text{【解答】 問1 } \frac{n-1}{2(2n-1)}(1-p)^3 \quad \text{問2 } \frac{1}{2} \log(1-p) \quad \text{問3 } \frac{1}{2}$$

【解説】

問1 1秒後に取り出された白球と，2秒後に取り出された白球の選び方は ${}_n\text{P}_2$ 通り．

それぞれの白球が1秒後，または2秒後に白球のままである確率は， $1-p$ ， $(1-p)^2$ である．したがって，

$$\frac{{}_nP_2 \cdot (1-p) \cdot (1-p)^2}{{}_n\text{P}_2} = \frac{n-1}{2(2n-1)}(1-p)^3$$

問2 条件を満たすとき， n 個の白球は取り出されるまで，どれも黒球に変化しない．したがって，

$$P(n) = Q(n) \cdot (1-p)^1 \cdot (1-p)^2 \cdot (1-p)^3 \cdots (1-p)^n$$

$$\log \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = 1 \cdot \log(1-p) + 2 \cdot \log(1-p) + 3 \cdot \log(1-p) + \cdots + n \cdot \log(1-p)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) \cdot \log(1-p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = \frac{1}{2} \log(1-p)$$

問3 元が白球だった球が n 秒後に白球である確率は $(1-p)^n$ であるから，この白球が n 秒後に黒球になる確率は $1-(1-p)^n$ である．

したがって， n 秒後に取り出される黒球のうち，元は白球だった球が k 個，最初から黒

球だった球が $n-k$ 個取り出される場合を考えると，その確率は

$$\frac{{}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k}}{{}_n\text{C}_n} \cdot \{1-(1-p)^n\}^k$$

ここで， $1-p=a$ ($0 < a < 1$) とおく． $k=0, 1, 2, \dots, n$ の場合があるので，

$$\begin{aligned} R(n) &= \sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k}}{{}_n\text{C}_n} (1-a^n)^k \\ &= \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k} (1-a^n)^k \end{aligned}$$

ここで， $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$ の両辺を展開し， x^n の係数を比較すると，

$$\sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot x^k \cdot {}_nC_{n-k} \cdot x^{n-k} = {}_n\text{C}_n \cdot x^n$$

から， $\sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k} = {}_n\text{C}_n$ である．また， ${}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k} = ({}_nC_k)^2$ であるから，

$$\begin{aligned} 1-R(n) &= \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \left[{}_n\text{C}_n - \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \{1-{}_nC_1 \cdot a^n + {}_nC_2 \cdot a^{2n} - \cdots + {}_nC_k (-a)^{nk}\} \right] \\ &= \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \{ {}_nC_1 \cdot a^n - {}_nC_2 \cdot a^{2n} + {}_nC_3 \cdot a^{3n} - \cdots - {}_nC_k \cdot (-a)^{nk} \} \\ &= \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \cdot {}_nC_1 \cdot a^n - \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \cdot \sum_{i=2}^k \{ {}_nC_i (-a)^{in} \} \quad \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

また， ${}_nC_k \cdot k = {}_{n-1}\text{C}_{k-1}$ であるから，

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \cdot {}_nC_1 &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot {}_nC_k \cdot k = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot n \cdot {}_{n-1}\text{C}_{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot {}_{n-1}\text{C}_{k-1} \end{aligned}$$

と変形でき，さらに， $(1+x)^n(1+x)^{n-1} = (1+x)^{2n-1}$ の両辺を展開し， x^n の係数を比較すると，

$$\sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot x^k \cdot {}_{n-1}\text{C}_{n-k} \cdot x^{n-k} = {}_{2n-1}\text{C}_n \cdot x^k$$

から， $\sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot {}_{n-1}\text{C}_{n-k} = {}_{2n-1}\text{C}_n \iff \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot {}_{n-1}\text{C}_{k-1} = {}_{2n-1}\text{C}_n$ である．

また， $2n \cdot {}_{2n-1}\text{C}_n = {}_n\text{C}_n \cdot n \iff {}_{2n-1}\text{C}_n = {}_n\text{C}_n \cdot \frac{n}{2n}$ であるから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \cdot {}_nC_1 \cdot a^n &= \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \cdot n \cdot {}_{2n-1}\text{C}_n \cdot a^n \\ &= \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \cdot n \cdot {}_n\text{C}_n \cdot \frac{n}{2n} \cdot a^n \\ &= \frac{n \cdot a^n}{2} \quad \cdots \cdots \text{②} \end{aligned}$$

したがって，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot a^n} \cdot \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \cdot {}_nC_1 \cdot a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \text{③}$$

また， i を2以上の整数として，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \cdot a^n} \cdot \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \cdot {}_nC_i (a^n)^i \\ = \frac{1}{n \cdot a^n} \cdot \frac{1}{{}_n\text{C}_n} \sum_{k=0}^n ({}_nC_k)^2 \cdot {}_nC_1 \cdot a^n \cdot \frac{{}_k\text{C}_i}{k} (a^n)^{i-1} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_k C_i}{k} (a^n)^{i-1} \quad (\because \textcircled{2})$$

ここで、 $0 < \frac{{}_k C_i}{k} < \frac{k^i}{k} = k^{i-1} \leq n^{i-1}$ であるから、

$$0 < \frac{1}{n \cdot a^n} \cdot \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n ({}_n C_k)^2 \cdot {}_k C_i (a^n)^i < \frac{1}{2} \cdot (na^n)^{i-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ であるから、はさみうちの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot a^n} \sum_{k=0}^n ({}_n C_k)^2 \cdot {}_k C_i (a^n)^i = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

①, ③, ④ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - R(n)}{n(1-p)^n} = \frac{1}{2}$$

【講評】

[I][II][III]はいずれも日本医科大学を受験するクラスになると典型的で経験がある問題ばかり。YMSのテキストにほぼ同じ設定の問題がある。ここを最少失点で切り抜きたい。

[IV]は読み取りが非常に難しい問題であるが、読み取れば(1)(2)は取れるだろうか。(3)は時間内に解くには厳しすぎる内容だった。

前期の合格者の層は、昨年度までと比較して、レベルが上がっている印象を受ける。後期の倍率も考えると、75%をきっちり取りたい問題である。他の科目次第では60%程度までは許容か。

二次で勝つならYMSの 二次試験対策



3/9(土)
17:00 ~ 19:15 頃
日医
(後期)

対策
内容

二次試験の要点解説

個人面接対策

小論文対策

集団討論対策

二次の
ポイント

集団討論は、前期よりも30分長い60分間で行われ、小論文は映像を見た後に執筆する形式をとっています。後期では前期よりも人物評価に重きを置く評価がされます。YMSでは個人面接・集団討論・小論文までトータルな指導を行い、勝ち抜くコツを伝授します。

【申込方法】・一次試験合格者が対象です。

・受付開始は各大学ともに一次の結果発表以降となります。

・お電話(03-3370-0410)でご予約下さい。

新年度本科生 募集中「認定合格」「特待生制度」もあります。詳しくは入学説明会へ!

YMS

〒151-0053 東京都渋谷区代々木 1-37-14
<https://yms.ne.jp/>

TEL

03-3370-0410