「西から昇ったおひさま」が見たい!!

弘前大学教育学部附属中学校 3年 工藤 優耀

1. 研究の動機

「♪西から昇ったおひさまが 東へ沈む～」

これは誰もが一度は聞いたことがある曲、天才バカボンの主題歌である。僕は小学生の頃、「太陽が昇る方角はこの歌詞の逆」というふうに覚えていた。

しかし中学生になった今、西から昇る太陽を見ることも理論上可能なのではないか、という疑問を抱いた。そこで今回は、西から昇ったおひさまを見る方法について、調べてみることにした。

2. 研究の方法

(1) この研究をするにあたって、必要な予備知識を学ぶ。

(2) 理論上西から昇る太陽を見ることが可能であろう方法を考える。

(3) (2)で考えた方法について、条件や仮定を設定する。

(4) (1)～(3)をもとにして計算し、(2)で考えた方法が可能であるかを調べる。

(5) (4)で調べたことを一般化し、表やグラフにまとめる。

3. 研究結果

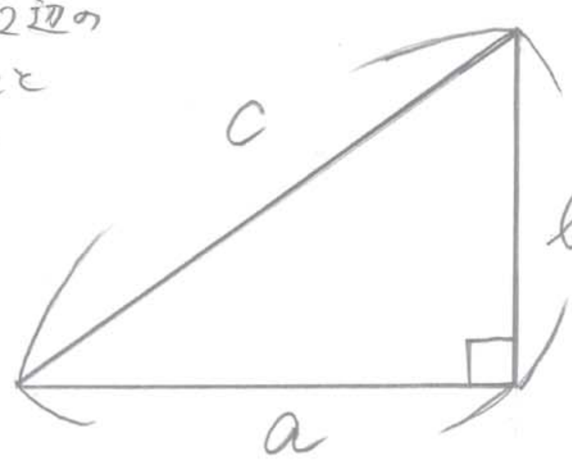
2で示した順序に基づいて考えていく。

(1) 予備知識

① 三平方の定理

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a, b、斜辺の長さを c とすると、次の関係が成り立つ。

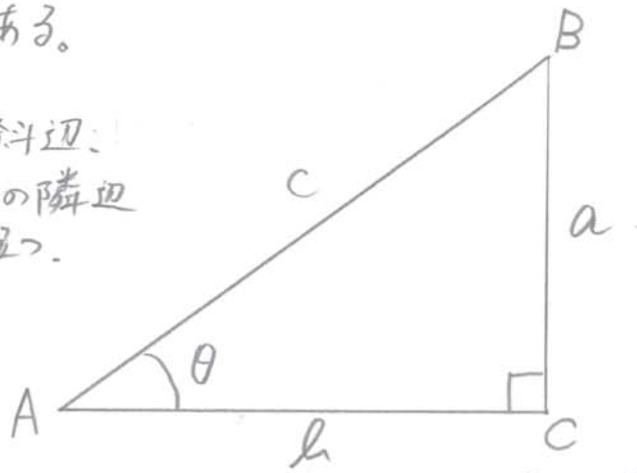
$$a^2 + b^2 = c^2$$



②三角比…直角三角形の鋭角の比の総称。三角比には、sin(サイン)・cos(コサイン)・tan(タンジェント)がある。

◦三角比の定義

∠Aをθとすると、辺ABを斜辺、BCを∠Aの対辺、ACを∠Aの隣辺という。また、次のことも成り立つ。



(a, b, cは、それぞれの辺の長さを表す)

$\sin\theta = \dfrac{対辺}{斜辺} = \dfrac{a}{c}$

$\cos\theta = \dfrac{隣辺}{斜辺} = \dfrac{b}{c}$

$\tan\theta = \dfrac{対辺}{隣辺} = \dfrac{a}{b}$

これらを変形すると

$a = c\sin\theta$

$b = c\cos\theta$

$c = \dfrac{a}{\sin\theta} = \dfrac{b}{\cos\theta}$

という式も成り立つ。

∠B=θとすると

$\sin\theta = \dfrac{対辺}{斜辺} = \dfrac{b}{c}$

$\cos\theta = \dfrac{隣辺}{斜辺} = \dfrac{a}{c}$

$\tan\theta = \dfrac{対辺}{隣辺} = \dfrac{b}{a}$

となる。

◦90°−θ, 180°−θの公式

[1] 90°−θの三角比 ($0° \leqq \theta \leqq 90°$)

$\sin(90°-\theta) = \cos\theta$

$\cos(90°-\theta) = \sin\theta$

$\tan(90°-\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

例) $\sin 25° = \cos 65°$

$\cos 40° = \sin 50°$

$\tan 15° = \dfrac{1}{\tan 75°}$

[2] 180°−θの三角比 ($90° \leqq \theta \leqq 180°$)

$\sin(180°-\theta) = \sin\theta$

$\cos(180°-\theta) = -\cos\theta$

$\tan(180°-\theta) = -\tan\theta$

例) $\sin 125° = \sin 55°$

$\cos 145° = -\cos 35°$

$\tan 160° = -\tan 20°$

[1]と[2]を組み合わせると

$\sin 130° = \sin 50° = \cos 40°$

のように変化させることができる。

。三角比の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	なし

今回の研究では、この表の値を使って計算していく。

(2) 西から昇る太陽を見る方法

今回の研究では、日の入りで西に太陽が沈んだ後に、再び西の方角から太陽を見ることができれば西から昇る太陽を見ることができた、ということにする。

。どんな方法があるのか？

[1] 飛行機や旅客機に乗り、地球の自転と逆の方向に進んでいく。

⇒太陽は地球の自転によって東から西に動くように見える。つまり、自転と逆の方向に自転の速度よりも速い速度で進めば、一度沈んだ太陽を再び昇らせることができる。

[2] 太陽が沈んだ後に、エレベーターなどを使って高いところに行く。

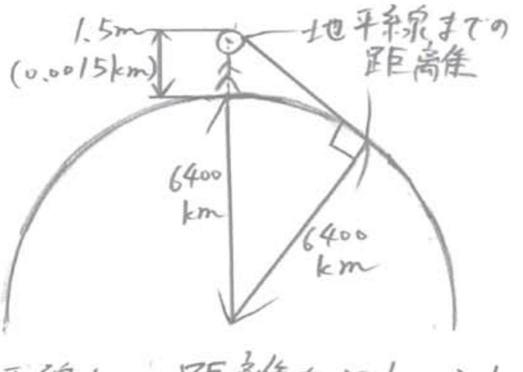
⇒これは水平線までの距離と関係している。観測者と水平線との距離は観測者が海面から高いところにいればいるほど、長くなる(図1)。これを使えば、一度沈んだ太陽を再び昇らせることができる。

[1]の方法だと、飛行機や旅客機には様々な種類があるため、それぞれスピードが異なり、実証するのが非常に難しい。そのため、今回の研究では[2]の方法について詳しく調べてみることにした。

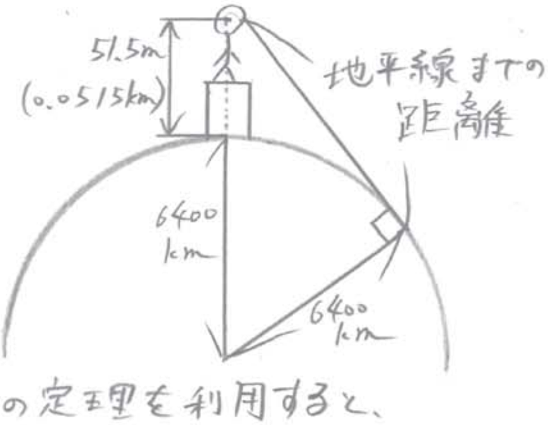
(図1)

地球の半径を6400kmとする。

(i) 観測者の目線が地上1.5mにあるときの地平線との距離



(ii) 観測者が地上50mの建物の上にいる目の高さが1.5m(つまり、目の高さは地上51.5mにある)にあるときの地平線との距離



地平線までの距離を x km とし、三平方の定理を利用すると、

(i) $x^2+6400^2=6400.0015^2$

$x^2=19.20000225$

$x=4.3817\cdots$

(ii) $x^2+6400^2=6400.0515^2$

$x^2=659.20265225$

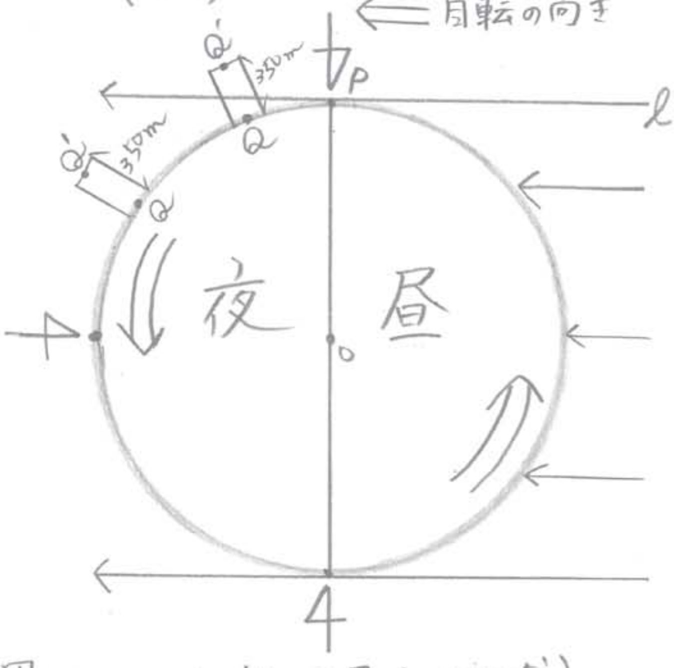
$x=25.6749\cdots$

(i)(ii)より、観測者が海面から高いところにいればいるほど、観測者と水平線との距離が長くなることが証明できた。

(3)条件や仮定を設定する
- 今回の研究で使用するエレベーターは、東京スカイツリーのエレベーターで、50秒で地上350mにある天望台まで移動することができる。
- 東京スカイツリーのある場所は、北緯36°東経140°とする。
- 地球を完全な球体として、半径を6400kmとする。
- 昼と夜の長さは同じとする。
- 日の入りは1日に1回太陽が西の地平線の下に沈んだ瞬間と定義させる。つまり図2でいうと、点Pを通った瞬間が日の入りとなる。
- 図2の太陽光は、地球の大気層に入るときに屈折せずに、直進するものとする。
- (2)でも述べたように、日の入りで日に太陽が沈んだ後に、再び西の方角から太陽を見ることができれば、西から昇る太陽を見ることができた、ということにする。

●計算について
- πは3.14として計算する。
- 三角比の表にない値は、電卓を使用して求める。

(図2)



(北極から見た地球)

(4)(1)~(3)をふまえて、実際に計算してみる。

まず、日の入りの後に再び太陽を見る方法について、図2を用いて具体的に説明しようと思う。

「日の入りの後」、つまり点Pで太陽が沈むのを見たあとにエレベーターに乗る。そして、点Q地点で地上350mの点Q'についたとしたとき、点Q'が北緯36°線上(=円Oの周上)の点Pを接点とする接線矢印lよりも上にある場合は、西から昇った太陽が見れたということになる。反対に、点Q'が矢印lよりも下にある場合は、西から昇った太陽を見ることができないということになる。

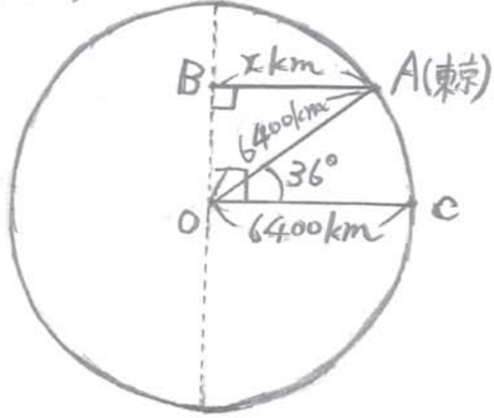
① 北緯36°線の長さを求める。

東京スカイツリーは北緯36°線上にあるので、その一周の長さを求めなければならない。

(図3)

図4は、図3の地球を半分に切ったときの断面図である。

(図4)



北緯36°線の円の半径を x km とする。
2つの直線の錯角が等しいので、AB // CO。
よって、$\angle BAO = \angle COA = 36°$

三角比の定義より

$$\frac{x}{6400} = \cos 36°$$
$$x = 6400\cos 36°$$
$$= 6400 \times 0.8090$$
$$= 5177.6$$
$$\fallingdotseq 5178$$

北緯36°線の円周の長さは、

$$2 \times 5178 \times \pi$$
$$= 2 \times 5178 \times 3.14$$
$$= 32517.84$$
$$\fallingdotseq 32518$$

ゆえに北緯36°線の円の半径は5178kmで、円周は32518kmである。

② 日の入りの瞬間にエレベーターに乗ると西から昇る太陽は見れるのか?

(図5)

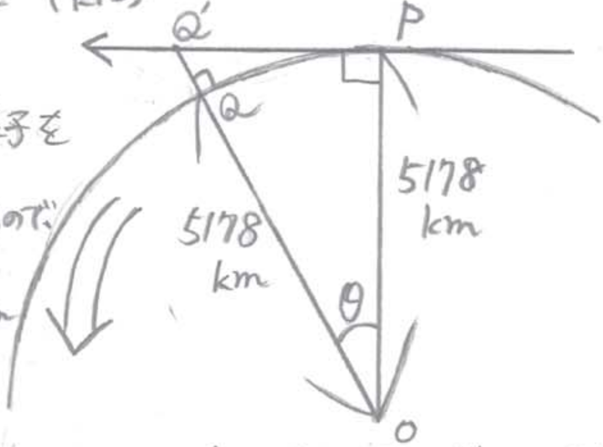


図5は、北極から北緯36°線を見た様子を簡略化して表したものである。
日の入りの瞬間にエレベーターに乗り始めるので、
日の入りから50秒後には点Q'にいる(仮定)。
(4)①より、円Oは1日(=86400秒)で32518kmの距離を自転しているので、1秒だと、

$$\frac{32518}{86400} \fallingdotseq 0.376 (km/s)$$

となり、0.376km進んでいることになる。(北極から北緯36°線を見た様子の一部)
つまり、50秒だと、$0.376 \times 50 = 18.8$km進んでいることになる。
よって弧PQ=18.8km…[1]となる。弧の長さは円の中心角の大きさに比例するので、

角$\theta = \frac{18.8}{32518} \times 360° \fallingdotseq 0.21°$ となる。

これを利用すると、$PQ' = 5178\tan 0.21° \fallingdotseq 19$km…[2]と求められる。
[1]、[2]と、図5内の数値から、線分QQ'を求める。

$$QQ' = \sqrt{19^2 + 5178^2} - 5178 \fallingdotseq 0.035km = 35m$$

したがって、日の入りから50秒後の地点では、地上35mより高いところにいれば、西の方角にある太陽を見ることができる。
スカイツリーのエレベーターは日の入りから50秒後に地上350mまで上昇するので、一度西に沈んだ太陽でも再び西から昇る太陽を見ることができる。

③ 日の入りから何秒後までならスカイツリーの展望台で西の太陽を見ていることができるのだろうか？

(図6)

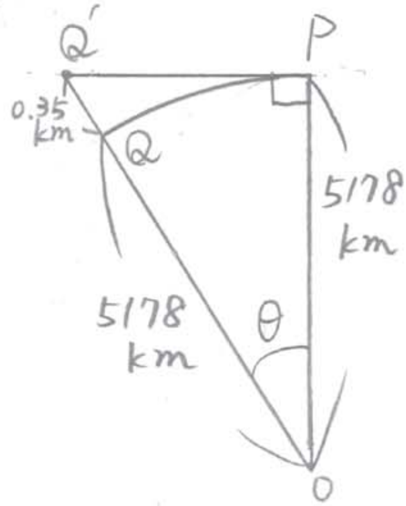


図6は、図5の一部を切り取り、簡略化したものである。
6ページの②の証明や図5，6から分かるように、△OPQ'が常に直角三角形になるとき、θの値が大きいほど（日の入りからの時間が経つほど）、線分QQ'の距離が長くなる。この線分QQ'の距離が350mのとき、スカイツリーの展望台で西の太陽を見ることができる限界である。
⇒ QQ'=0.35km のとき、日の入りから何秒かを求めればよい。

OQ'=5178.35km なので、三平方の定理より

$$Q'P=\sqrt{5178.35^2-5178^2}\fallingdotseq 60.2$$

また、三角比の定義より

$$\tan\theta=\frac{60.2}{5178}\fallingdotseq 0.01163$$

これに最も近いθの値は、

$\tan 0.66 \fallingdotseq 0.01152$　　$\tan 0.67 \fallingdotseq 0.01170$

よって $\theta=0.67$

中心角の大きさは日の入りからの時間に比例するので、

$$\frac{0.67}{360}\times 86400=160.8$$

したがって日の入りから160.8秒後までならスカイツリーの展望台で西の太陽を見ていることができる。
言い換えると…天望台につくまでに50秒かかるので、日の入りから110.8秒後までにエレベーターに乗り始めれば、西から昇る太陽を見ることができる。

(5) 日の入りからの時間と西の太陽を見るのに必要な地上からの高さ（図6でいう線分QQ'の距離）にはどのような関係があるのか？
日の入りからの時間をs秒とすると、s秒後の中心角θは、

$$\theta=\frac{s}{86400}\times 360^\circ=\frac{s}{240}^\circ$$

これより、$PQ'=5178\tan\frac{s}{240}^\circ$

これらを用いると、QQ'を求める式は

$$QQ'=\sqrt{\left(5178\tan\frac{s}{240}^\circ\right)^2+5178^2}-5178$$

となる。
ただしこれは、中心角が $0^\circ\leqq\theta<90^\circ$ のときしか使えないので、sの値の範囲は、$0\leqq s<21600$ となる。

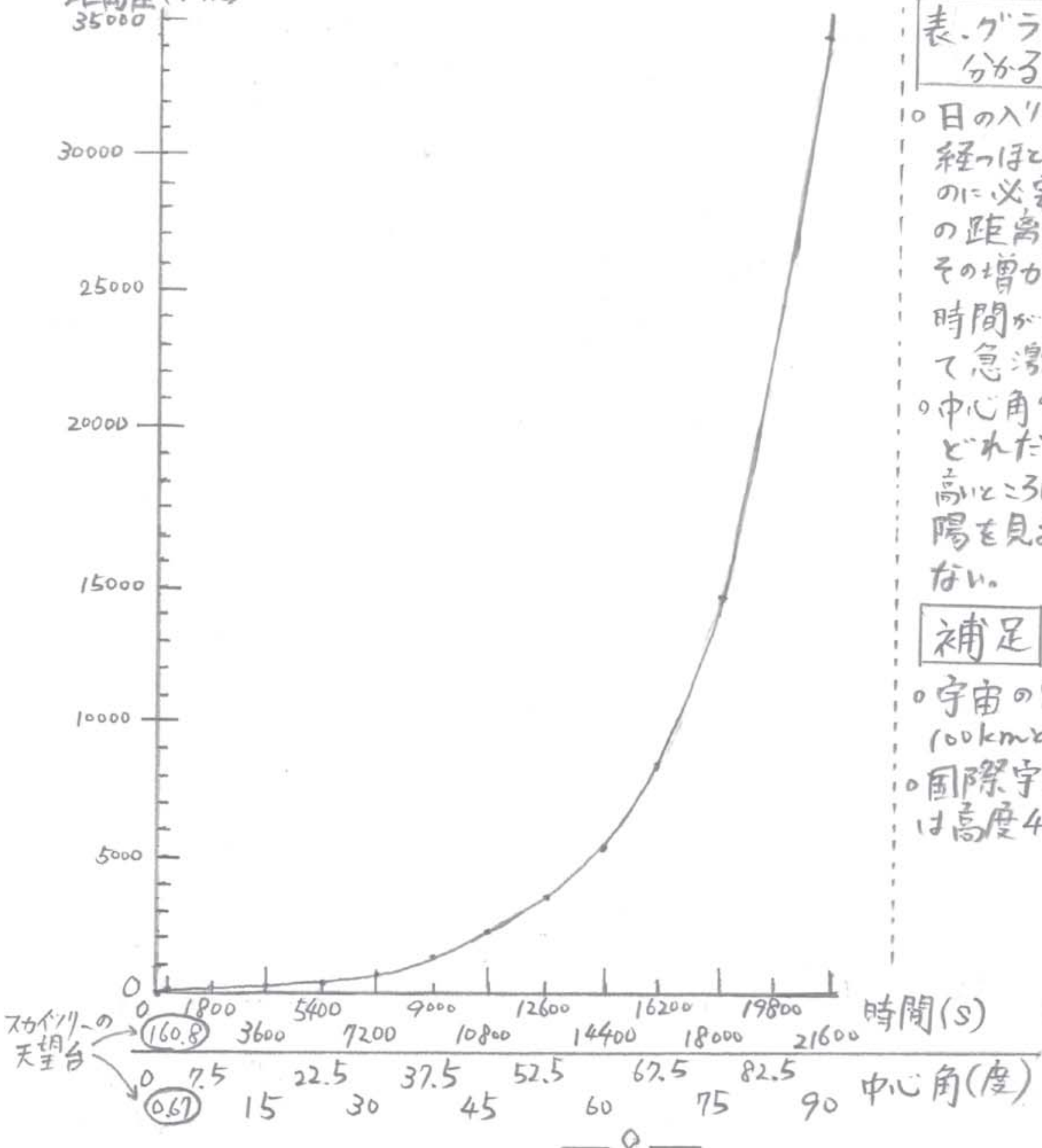
前ページの線分QQ'を求める式を使うと、日の入りからの時間と西の太陽を見るのに必要な地上からの高さの表・グラフは次のようになる。

〈表〉

時間(s)	中心角(度)	高さ(km)	時間(s)	中心角(度)	高さ(km)
0	0	0	10800	45	2144.80
160.8	0.67	0.35	12600	52.5	3327.80
1800	7.5	44.68	14400	60	5178
3600	15	182.66	16200	67.5	8352.77
5400	22.5	426.63	18000	75	14828.26
7200	30	801.04	19800	82.5	34492.20
9000	37.5	1348.73	21600	90	なし

(高さは小数第三位を四捨五入)

〈グラフ〉



表・グラフから分かること

- 日の入りからの時間が経つほど、太陽を見るのに必要な地上からの距離は長くなる。その増加の割合は、時間が経つにつれて急激になる。
- 中心角90°のときはどれだけ地上から高いところにいても、太陽を見ることはできない。

補足

- 宇宙の定義は高度100kmとされている。
- 国際宇宙ステーションは高度400kmにある。

4.考察

3の研究結果から、北緯36°線上にあるスカイツリーを使えば、西から昇る太陽を見られることがわかった。また、北緯36線上での日の入りからの時間と、太陽を見るのに必要な高さを求める式$\sqrt{(5178\tan\frac{s}{240}^\circ)^2+5178^2}-5178$(ただし、$0\leqq s<21600$のときに限る)も分かった。

しかし、これは北緯36°上でしか求めることができない。そこで研究結果を応用して、緯度が何度のときでも日の入りからの時間と太陽を見るのに必要な高さを求める公式を考えてみることにした。

まず、$\sqrt{(5178\tan\frac{s}{240}^\circ)^2+5178^2}-5178$をもとにして考えてみる。
5178というのは、北緯36°線の円の半径である。6ページの図4も参考にすると、緯度a°線の円の半径を求める式は$6400\cos a°$となる。
また、$\frac{s}{240}^\circ$というのは日の入りからs秒後の図6における角Bの大きさである。これは$\frac{s}{86400}\times360°$で求められる。86400は1日の秒数で、360°は角度を求めるためにかけているので、これは緯度a°がどんなときでも変わらない。

よって、緯度a°線上で日の入りからs秒後に西の太陽を見るのに必要な地上からの高さを求める公式は、次のようになる。

$0\leqq s<21600$のとき、 $高さ(km)=\sqrt{(6400\cos a°\times\tan\frac{s}{240}^\circ)^2+(6400\cos a°)^2}-6400\cos a°$

〈今回の研究で分かったこと(まとめ)〉

- 日の入りから110.8秒後までに東京スカイツリーのエレベーターに乗り始めれば、一度沈んだ太陽でも再び西の方から昇る太陽を見ることができる。
- 日の入りから時間が経つにつれて、西の太陽を見るのに必要な地上からの高さは高くなる。
- 緯度a°線上で日の入りからs秒後に西の太陽を見るのに必要な地上からの高さを求める公式
  $0\leqq s<21600$のとき、
  $高さ(km)=\sqrt{(6400\cos a°\times\tan\frac{s}{240}^\circ)^2+(6400\cos a°)^2}-6400\cos a°$

5. 感想と今後の課題

今回の研究を通して、日常生活で見つけた疑問を数学を駆使して解決する楽しさや面白さを新たに発見することができたので、自分にとって大きな成長になったと思う。「数学は世界共通語」とも言われているように、数学を使えば、身近などんなことでも解決できるような気がしてきた。

今後の課題として、まずは今回計算したことが本当に実現可能なのか、ということを検証してみたい。そうすることで自分の研究結果と検証結果を比較することができ、さらに次の疑問が生まれてどんどん今回の研究を発展させていくことができると思ったからだ。

これから高校、大学と進学するにつれてこのようなレポートを書く機会がどんどん増えてくると思うが、このレポートから学んだことを生かせるように日々の学習に取り組んでいきたいと思う。

6. その他・参考文献(HP)

- https://www.jal.co.jp/entertainment/cockpit/captain07.html (2018/8/13)
- http://www.toshiba-elevator.co.jp/elv/technology/skytree/ (2018/8/13)
- https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A5%E6%B2%A1 (2018/8/13)