

§2.3 高次の導関数

n 次導関数

関数 $y = f(x)$ は開区間 I 上で定義されているとする。

(1) $f(x)$ が I 上で **2 回微分可能** であるとは、 $f(x)$ が I 上微分可能かつ導関数 $f'(x)$ が I 上微分可能である時を言う。このとき $(f'(x))'$ を $f(x)$ の **2 次 (2 階) の導関数** といい、 $f''(x)$ または $f^{(2)}(x)$ と書く。

(2) $n \geq 3$ を整数とする。 $f(x)$ が I 上で **n 回微分可能**^{注 1} であるとは、 $f(x)$ が I 上 $n-1$ 回微分可能かつ $(n-1)$ 次の導関数 $f^{(n-1)}(x)$ が I 上微分可能である時を言う。このとき $(f^{(n-1)}(x))'$ を $f^{(n)}(x)$ と書き、 $f(x)$ の **n 次 (n 階) の導関数** と呼ぶ。

補足: 導関数の記号 $f^{(n)}(x)$ は $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$ と書く。また $f^{(0)}(x) = f(x)$ と定める。

例 1': $f(x) = x^m$ (m は自然数) ならば $f^{(n)}(x) = \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$ ($k \leq m$), $f^{(n)}(x) = 0$ ($k > m$)。

例 2: $(\sin x)^{(m)} = \sin(x + \frac{\pi m}{2})$, $(\cos x)^{(m)} = \cos(x + \frac{\pi m}{2})$ 。

例 3: $(a^x)^{(m)} = (\log a)^m a^x$ ($a > 1$)。特に $(e^x)^{(m)} = e^x$ 。

C^n -級関数

(1) n を自然数 ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 $f(x)$ が I 上 **n 回連続微分可能** (または **C^n -級関数**) であるとは、 $f(x)$ が I 上 n 回微分可能かつ n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が I 上連続である時を言う。

(2) $f(x)$ が I 上 **C^0 -級関数** であるとは単に、 $f(x)$ が I 上連続である時を言う。

(3) $f(x)$ が I 上 **C^∞ -級関数** であるとは $f(x)$ が何回でも微分可能である時を言う。すなわち、
「 $f(x)$ が C^∞ -級関数。」 $\Leftrightarrow$ 「任意の自然数 n について $f(x)$ は C^n -級関数。」

補足: 定理 2.1.1 より、 $f(x)$ が I 上 n 回微分可能ならば、 $f(x)$ は I 上 C^{n-1} -級関数。

例 5: 定数関数、多項式関数、 $\sin x, \cos x, e^x, a^x$ ($a > 0$) は $(-\infty, \infty)$ 上 C^∞ -級関数。

例 6': $f(x) = x^m |x|$ ($m > 0$ は整数) は C^m -級関数だが、 m 次導関数 $f^{(m)}(x) = m! |x|$ が $x = 0$ で微分可能ではないので C^{m+1} -級関数ではない。

例: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$ で定めると、 $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ 上微分可能だが、導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではないので、 $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ 上の C^1 -級関数ではない。

♣ C^n, C^∞ -級関数の集合を表す記号: n は 0 以上の整数または ∞ とする。区間 I を定義域とする I 上で C^n -級関数 $f(x)$ を元とする集合を $C^n(I)$ と書く。すなわち

$$C^n(I) = \{f(x) \mid f(x) \text{ の定義域} = I \text{ かつ } f(x) \text{ は } I \text{ 上 } C^n\text{-級}\}.$$
^{注 2}

凸性・変曲点

関数 $f(x)$ が開区間 I 上で微分可能であるとする。このとき曲線 $C: y = f(x)$ の $x = a$ における接線 ℓ は $\ell: y = g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ で与えられていた。

♣ **上に凸・下に凸:** 関数 $f(x)$ が $x = a$ で **下に凸** (または **上に凸**) であるとは、 a を含む開区間 J が存在して $J \subset I$ かつ $f(x) - g(x) \geq 0$ (または $f(x) - g(x) \leq 0$) が任意の J の元 x について成立し等号成立条件が $x = a$ に限る時を言う。

^{注 1} 高次の微分可能性・導関数は帰納的に定義される。

^{注 2} 教科書と少し異なる書き方なので注意してほしい。教科書の定義によると、 $C^n(I)$ の元 $f(x)$ について条件「 $f(x)$ の定義域 $= I$ 」を仮定していない。しかし異なる定義域をもつものを一緒に混ぜると不都合が生じる。流儀にもよるが関数 $f(x)$ の定義域を変えた関数はもとの関数と同じと見なさない場合がある。例えば $(-\infty, \infty)$ を定義域とする関数 $\sin x$ と $[0, 2\pi]$ を定義域とする関数 $\sin x$ は $[0, 2\pi]$ 上で同じ値をとるが、別の関数とみなす。ところで関数の定義域を制限する便利な記号がある。例えば実数全体で定義された関数 $f(x)$ の定義域を $[a, b]$ 上に制限するときは $f|_{[a, b]}(x)$ と書く。

関数 $f(x)$ が I で下に凸 (I で上に凸) であるとは、任意の I の元 a について $f(x)$ が $x = a$ で下に凸 (上に凸) であるときをいう。^{注3}

♣ **変曲点**: $x = a$ が $f(x)$ の変曲点であるとは、 $f(x) - g(x)$ の符号が $x = a$ の前後で入れ替わる時を言う。^{注4}

例 7: 曲線 $y = x^2$ は $(-\infty, \infty)$ で下に凸。また $x = a$ における接線は $y = 2a(x - a) + a^2$ 。

例: 曲線 $y = x^3 - 3x$ は $x = 0$ の前後で y'' の符号が入れ替わるので $x = 0$ で変曲点を持つ。

定理 2.3.1: 2 次導関数 $f''(x)$ が $x = a$ で連続とする。

(1) $f''(a) > 0$ (または < 0) ならば $f(x)$ は $x = a$ で下に凸 (上に凸)

(2) $f''(a) = 0$ かつ $f''(x)$ の符号が $x = a$ の前後で入れ替わる時 $x = a$ は $f(x)$ の変曲点。

例 8: $y = x^3$ は $x > 0$ で下に凸、 $x = 0$ で変曲点、 $x < 0$ で上に凸。

定理 2.3.2 (一変数関数の臨界点での極値判定法): 2 次導関数 $f''(x)$ が $x = a$ で連続とする。 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ (< 0) ならば $f(x)$ は $x = a$ で極小値 (極大値) を持つ。^{注5}

例: $f(x) = x^3 - 3x$ とおくと、 $f'(1) = 0, f''(1) > 0$ より $f(x)$ は $x = 1$ で極小値 -2 を持つ。また $f'(-1) = 0, f''(-1) < 0$ より $f(x)$ は $x = -1$ で極大値 2 を持つ。

ニュートン法

定理 2.3.3: 関数 $f(x)$ は开区間 I 上 2 回微分可能かつ $[a, b] \subset I$ とする。次の条件:

(i) $f(a) < 0, f(b) > 0$ (ii) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ ($a \leq x \leq b$)

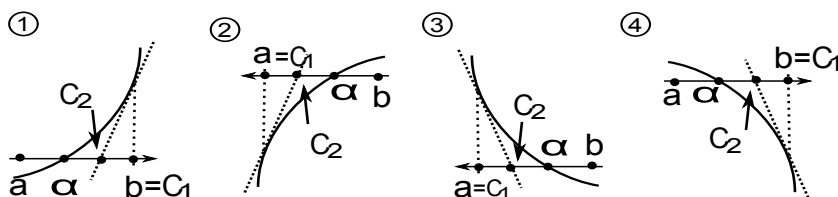
を満たす時、以下の (1), (2) が成立する。

(1) $f(x) = 0$ は $[a, b]$ でただ一つの解 α をもつ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ を初項 $c_1 = b$ 、漸化式 $c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$ で定めると c_n は α に収束する。

補足: 条件 (i), (ii) について 4 組の $(f(a), f(b), f'(x), f''(x))$ の符号パターン① $(-, +, +, +)$, ② $(-, +, +, -)$, ③ $(+, -, -, +)$, ④ $(+, -, -, -)$ の場合について定理 2.3.3 の結論がそれぞれ成り立つ。ただし①, ④のとき初項は $c_1 = b$, ②, ③のとき初項は $c_1 = a$ とする。

例題 2.3.1: $y = x^2 - 3$, $a = 1, b = 2$ とすると、 $f(1) = -2, f(2) = 1, f'(x) = 2x > 0, f''(x) = 2 > 0$ ($1 \leq x \leq 2$) が成立する。定理 2.3.3 (パターン①) から初項 $c_1 = 2$, 漸化式 $c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$ で定義される数列 $\{c_n\}$ が $\alpha = \sqrt{3}$ に収束する。



関数の積の高次微分法

定理 2.3.4 (ライプニッツの公式): 関数 $f(x), g(x)$ は开区間 I 上 n 回微分可能とする。このとき関数の積 $f(x)g(x)$ も I 上 n 回微分可能でかつ $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$ 。

例: $(f(x)g(x))^{(2)} = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} f^{(2-k)}(x)g^{(k)}(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$ 。

^{注3} 関数の微分可能性を仮定せずに、次のように関数の凸性を定義することができる。「連続関数 $f(x)$ が区間 I 上で下に凸であるとは、 $a < b < c$ を満たす I の任意の元 a, b, c について $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ を満たすときを言う。」

^{注4} このとき a の近くで、 $f(x) - g(x) = 0$ が成立するのは $x = a$ のみである。

^{注5} この判定法は多変数関数の極値判定 (教科書 p96 参照) に拡張される。