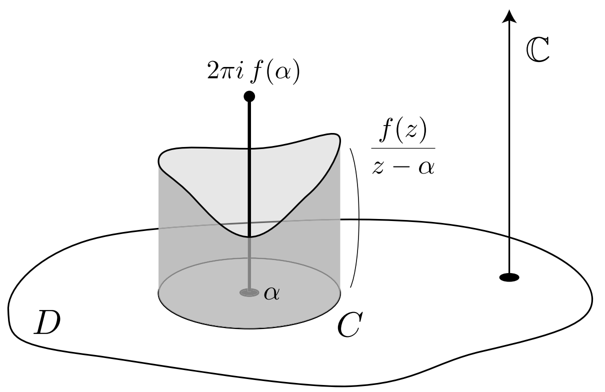
複素関数の基礎のキソ

（１３講＋補講２）



川平　友規

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻

Email: kawahiraAmath.titech.ac.jp (A=@)

平成 27 年 2 月 25 日

複素関数論を学ぶにあたって

自転車に乗っている人は多いと思います．みなさんは，自転車という道具の「しくみ」を理解していますか？それを自転車というものを知らない人に，説明できますか？

自転車の理解といった場合，いくつかのレベルがあるように思います．

1. しくみなどは考えたことはないが，とりあえず運転はできる．
2. 運転の仕方だけなら，人に教えることができる．
3. 部品（たとえばハンドル，ペダル，チェーン）の名称をまじえながら，自転車が走る「しくみ」を説明できる．
4. それぞれの部品の構造とその材料，加工方法を説明できる．
5. それぞれの部品に使われている材料の物理的・化学的特性について科学的説明ができる．

さて，これから学ぶ複素関数論を自転車（工）学にたとえると，われわれの目標は3から4のあたりに相当します．自転車の開発者であれば5のような知識も要求されるでしょうが，どちらかといえばユーザーサイドの専門家，頼れる街の自転車屋，といった感じでしょうか．

思えば自転車というものは，不思議な乗り物です．走行中の接地部分はふたつのタイヤのきわめて小さな部分だけで，うまくバランスを取りながら効率的に前に進むことができる．この「バランスを取る」という操作は一見難しそうなのですが，少し練習して慣れてしまうと，拍子抜けするほど簡単にできてしまう．そこでは，自転車の物理的特性と，人間の平均的な身体能力が，面白いほどに噛み合っているのでしょう．

複素関数論はしばしば,「数学のなかでも非常に美しい」と言われます.「美しい」というのは,「不思議とうまくいく」といった感覚的なもので，たとえばダイヤモンドの輝きのように，これといった実体に由来するものではありません．自転車という乗りものの不思議さをもって,「自転車は美しい」と主張する人がいたとしても，他の人が同意するかどうか．まあ，半々といったところでしょう．

一方で，わたしたちは複素関数論のあらゆる定理に，完全に論理的な（すなわち普遍的であり，客観的な）証明をつけることができます．それは自転車の専門家が，自

転車のしくみを５のレベルまで説明できることに似ている．それでも，ふたつの車輪だけで走る自転車はどこか不思議なものです．

複素関数の数学的な特性と人間の知的能力は，面白いほどに噛み合っているのです．それは理解するものではありませんが，きっと，誰にでも味わうことができるものなのではないかと思います．わたしたちが初めて補助輪なしで自転車に乗った，あのときの感覚のように．

謝辞

この講義ノートは次の方々のお力添えで改善されてきました（50 音順）:

石谷常彦氏　　加藤康一氏　　若狭尊裕氏

ご協力ありがとうございました．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体　(2) $\mathbb{R}$: 実数全体　(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体　(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体　(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ　(2) β: ベータ　(3) γ, Γ: ガンマ　(4) δ, Δ: デルタ　(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ　(7) η: エータ　(8) θ, Θ: シータ　(9) ι: イオタ　(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ　(12) μ: ミュー　(13) ν: ニュー　(14) ξ, Ξ: クシー　(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ　(17) ρ: ロー　(18) σ, Σ: シグマ　(19) τ: タウ　(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ　(22) χ: カイ　(23) ψ, Ψ: プサイ　(24) ω, Ω: オメガ

その他

(1) $x \in X$ と書いたら,「x は集合 X に属する」すなわち「x は X の元」という意味.

(2) 「…をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (\ x$ に関する条件$)\}$ の形で表す．たとえば「$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$」

(3) $X \subset Y$ と書いたら,「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味.

(4) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味．たとえば $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

(5) （文章 1）:$\Longleftrightarrow$ (文章 2) と書いたら,（文章 1）を（文章 2）と定義する，という意味．たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 :$\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

目 次

第1講　複素数と複素平面

1.1　未知の数 $i=\sqrt{-1}$

$\sqrt{2}$ の正当化． 方程式 $x^2=2$ の解は $\pm\sqrt{2}$ と表されるが，この $\sqrt{2}$ というのは,「2 乗したら 2 になる数」を表す単なる記号である．ある意味，この方程式はまだ解けていない.「2 乗したら 2 になる数」がどんな値なのかわからないし，そもそも存在すら，整数や有理数の世界から見れば未知なのである．[1] それでも，文字式の要領で

$$(1+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=3-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\underline{(\sqrt{2})^2}_{\text{これは 2 で置き換え}}=1+2\sqrt{2}$$

といった計算はできてしまう．このような計算も，$\sqrt{2}$ という数の存在自体も，有理数に無理数を加えた「実数」という数の体系を導入することで正当化できるのであった．[2]

$\sqrt{-1}$ は正当化できるか． 同様に，方程式 $x^2=-1$ の解（のひとつ）として，記号 $\sqrt{-1}$ を導入してみよう．すなわち，$\sqrt{-1}$ は「2 乗したら -1 になる数」であり，実数ではない．すると，文字式の要領で

$$(1+\sqrt{-1})(3-\sqrt{-1})=3-\sqrt{-1}+3\sqrt{-1}-\underline{(\sqrt{-1})^2}_{\text{これは}-1\text{ で置き換え}}=4+2\sqrt{-1}$$

といった計算ができる．この計算を正当化するには，何らかの形で数の体系を拡張しなくてはならない．

一旦，この未知なる数 $\sqrt{-1}$ が存在すると仮定して話を進めることにしよう．また慣例にしたがって，$\sqrt{-1}$ は文字 i （いわゆる虚数単位）で表すことにする．一般に a と b を実数とするとき，$a+bi$ の形の数（ i の文字式）を**複素数** (complex number) と

[1]かのピタゴラス（B.C. 582 – B.C. 496）は有理数以外の数の存在を否定していたとされる．

[2]裏を返すと，厳密な定義が与えられる以前 (19 世紀まで) の無理数とは「存在すると仮定すると万事説明がつくもの」であった．ある意味，物理学における「エーテル」，化学における「熱素」，果ては「幽霊」や「UFO」とかわらない．

よぶ．また，複素数全体の集合を記号 $\mathbb{C}$ で表す．すなわち，

$$\mathbb{C} \ := \ \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$b=0$ の場合，複素数 $a+0i$ は単に実数 a とみなされるから，集合 $\mathbb{C}$ は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を含む集合であろうと考えられる．

もうすこし，未知の集合 $\mathbb{C}$ の満たすべき性質を思い出しておこう．高校で学んだように，$\mathbb{C}$ の計算規則（四則）は次のように定義される：[3]

複素数の四則． $z=a+bi, w=c+di \in \mathbb{C}$ とするとき，

(C0) $a+bi=0 \ :\Longleftrightarrow \ a=b=0 \ (\Longleftrightarrow a^2+b^2=0)$

(C1) $z \pm w \ := \ (a \pm c)+(b \pm d)i$

(C2) $zw \ := \ (ac-bd)+(ad+bc)i$

(C3) $w \neq 0$ のとき，$\dfrac{z}{w} \ := \ \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$

注意． (C0) と (C1) より，$a+bi=c+di \iff (a-c)+(b-d)i=0 \iff a=c$ かつ $b=d$ を得る．すなわち，与えられた複素数 z にたいして，$z=a+bi$ という表現は一通りに定まる．これは，複素数の計算問題が与えられたとき，誰がどのような解き方をしても，$a+bi$ の形まで変形すれば必ず同じ答えになる，ということである．

1.2 複素数の「正当化」: 複素平面

さて，上の計算規則 (C0) – (C3) を満たすような，新たな数の体系を構成しなくてはならない．それにはいくつかの方法が知られているが，ここでは「これが複素数ですよ」と明示できるような，直感的でわかりやすい定義を採用しよう．

いわゆる xy 平面（2 次元ユークリッド空間）を $\mathbb{R}^2$ で表す．すなわち，

$$\mathbb{R}^2 \ := \ \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

これは集合 $\mathbb{C}$ の定義

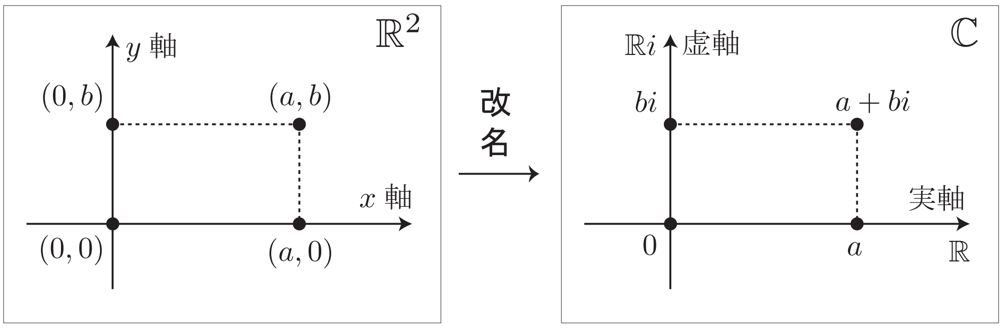
$$\mathbb{C} \ := \ \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

[3] (C0) に注意しつつ，あとは文字式のよう計算すればよい．

とよく似ているではないか．いや,「同じ」と考えてしまおう：

> ベクトル (a,b) を改名し，**複素数** $a+bi$ とよぶ.
> また，xy 平面 $\mathbb{R}^2$ を改名し，**複素平面** $\mathbb{C}$ とよぶ.

芸能人が本名と芸名を持っているように,「ベクトル (a,b) 」は別名（芸名）「複素数 $a+bi$ 」を持つ，と考えるのがミソである．この時点で，複素数とは何か？存在するのか？という疑問は解消されている．ただの 2 次元ベクトルなのである.「未知の数」 $i = 0 + 1 \cdot i \in \mathbb{C}$ もベクトル $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ の別名だということになり，その存在が正当化される.



この観点から複素数の四則 (C0)–(C3) を 2 次元ベクトルのことばに言い換えるてみよう．たとえば (C0) と (C1) は，次のようなベクトルの性質を言い換えただけである：

(C0)' $(a,b) = \vec{0} \Longleftrightarrow a = b = 0$

(C1)' $(a,b) \pm (c,d) \ = \ (a \pm c, b \pm d)$

一方，(C2) と (C3) はふつうのベクトルにはない演算となる.（わざわざ別名を作るぐらいだから，何か違うことをやってもらわないと芸がないではないか.）(C2) はベクトル同士に，内積でも外積でもない「新しい積」

(C2)' $(a,b) \cdot (c,d) \ := \ (ac - bd, ad + bc)$

を導入した，と解釈できる．[4] 実際，この積の定義に従えば

$$i^2 \overset{\text{別名}}{\longmapsto} (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \overset{\text{別名}}{\longmapsto} -1$$

[4] (C2)' は「ベクトルを定数倍する演算」の拡張になっている．実際，$b = 0$ とすれば，ベクトルの実数倍 $(a,0) \cdot (c,d) \ := \ (ac, ad)$ を得る.

となり，i の満たすべき性質が実現されている．(C3) についても同様で，ベクトルに「商」を定義したと解釈できる．

以上で，計算規則 (C0)–(C3) をもつ数の集合 $\mathbb{C}$ の存在が正当化できた．

複素数・複素平面のパーツ名称． もうすこし改名作業を続けておこう．xy 平面の各パーツは次のように改名される（上の図も参照）：[5]

$$\begin{aligned}
xy\ \text{平面}\ \mathbb{R}^2 &\overset{\text{改名}}{\longmapsto} \textbf{複素平面}\ \mathbb{C}\\
\text{ベクトル}\ (a,b) &\overset{\text{改名}}{\longmapsto} \text{複素数}\ a+bi\\
\text{ベクトル}\ (a,0) &\overset{\text{改名}}{\longmapsto} \text{実数}\ a\in\mathbb{R}\\
\text{ベクトル}\ (0,b) &\overset{\text{改名}}{\longmapsto} \textbf{純虚数}\ bi\in\mathbb{R}i\\
\text{原点}\ (0,0) &\overset{\text{改名}}{\longmapsto} \text{ゼロ}\ 0\in\mathbb{C}\ \ (\text{「原点」})\\
x\ \text{軸} &\overset{\text{改名}}{\longmapsto} \textbf{実軸}\ (=\text{数直線}\ \mathbb{R}\ )\\
y\ \text{軸} &\overset{\text{改名}}{\longmapsto} \textbf{虚軸}\ (=\mathbb{R}i)
\end{aligned}$$

実部，虚部，共役複素数． 複素数 $z=a+bi$ にたいし，実数 a を z の**実部** (real part) 実数 b を z の**虚部** (imaginary part) とよび，

$$a=\operatorname{Re} z,\quad b=\operatorname{Im} z$$

と表す.（ベクトルでいえば，x 成分と y 成分にあたる.）[6] また，$z=a+bi$ にたいし，複素数 $a-bi$ を z の**共役複素数** (complex conjugate of z) とよび，$\overline{z}$ で表す．以下の公式は簡単にわかるので，練習問題としよう（(5) と (6) については下の図も参考にせよ）：

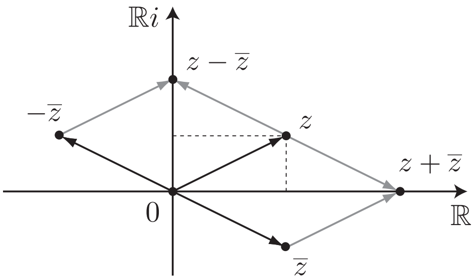
公式 1-1. $z=a+bi, w$ を複素数とするとき，以下が成り立つ：

(1) $\overline{(\overline{z})}=z$ (2) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ (3) $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$ (4) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

(5) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ (6) $\operatorname{Im} z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ (7) $z\overline{z}=a^2+b^2\ \ (\geq 0)$

[5]英語：複素平面は complex plane，純虚数は pure imaginary number，実軸・虚軸はそれぞれ real axis, imaginary axis.

[6]$\operatorname{Im} z=b\in\mathbb{R}$ である．$\operatorname{Im} z=bi\in\mathbb{C}$ ではない．

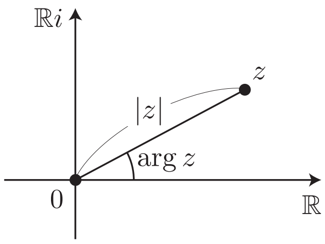


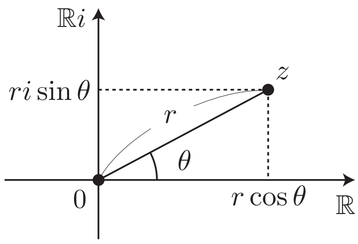
絶対値と偏角. さて複素数 $z = a + bi$ と 0 の複素平面上での距離（すなわち xy 平面上の距離）を z の**絶対値** (absolute value) もしくは**長さ** (modulus) とよび，$|z|$ で表す．公式 1-1 より，

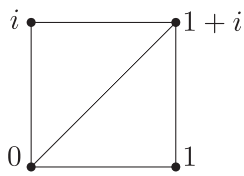
$$|z| \;=\; \sqrt{a^2 + b^2} \;=\; \sqrt{z\overline{z}}.$$

また，$z \neq 0$ と 0 を結ぶ線分と実軸の正の方向のなす角を z の**偏角** (argument) とよび，ちょっと仰々しいが $\arg z$ と表す．[7][8] 偏角は普通ラジアン (radian) で測る．たとえば右下のような図を描けば，次のことがわかる：

$$|i| = 1, \quad \arg i = \pi/2, \quad |1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \pi/4.$$







極表示. 複素数 $z = a + bi \neq 0$ において，$r = |z| > 0$，$\arg z = \theta$ とすれば，$a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$ が成り立つ．複素数 z を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表したものを，z の**極形式** (polar form) もしくは**極表示** (polar representation) とよぶ．[9] たとえば

$$1 = \cos 0 + i\sin 0 \qquad\qquad i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi \qquad\qquad -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \qquad\qquad -\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$$

[7] $\arg 0$ は考えない．

[8] 偏角は必要に応じて 2π の整数倍を加減する．たとえば，$\arg i = \pi/2$ とするのが普通だが，$\arg i = 5\pi/2$ や $\arg i = -3\pi/2$ も認める．もちろん $0 \leq \arg z < 2\pi$ となるように値を固定することもできるが，そのような自由度を残しておくほうがあとで都合がよいのである．

[9] $r = 1$ のときは単に $z = \cos\theta + i\sin\theta$ と書いたり，$z = e^{i\theta}$ とも表す．$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ というのはいわゆる「オイラーの公式」だが，詳しくはあとで正当化する．

といった具合である.（図示して確認せよ.）あとで見るように，この極表示はものすごく便利である.

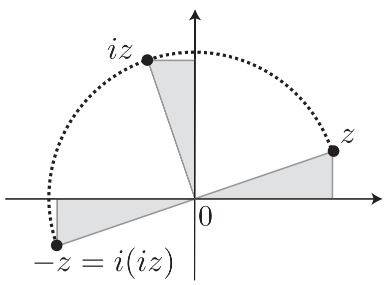
1.3 和・積の幾何学的意味

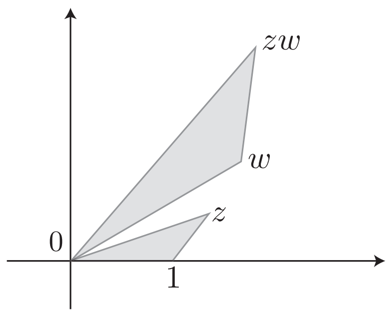
さて $\mathbb{C}$ における四則を平面上に図示してみよう．和と差は本質的にベクトルのそれであるから，平行四辺形の頂点として作図できる.

積の作図が一番面白い．試みに，$z = a + bi$ にたいして，$iz = i(a + bi) = -b + ai$ を図示してみよう．ちょうど，原点中心の $\pi/2$ 回転になっていることがわかる．同様に $i(iz) = -z = -a - bi$ を作図すると，さらに $\pi/2$ 回転する（下図の左側）．すなわち

> 複素数に i を掛けると $\mathbb{C}$ 内で $\pi/2$ 回転，$-1 = i^2$ を掛けると $\mathbb{C}$ 内で π 回転.

というのは面白い．これはベクトルにはない不思議である.





この性質を一般化してみよう．回転というキーワードに着目して，複素数 z と w をそれぞれ次のように極表示する：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad w = r'(\cos\theta' + i\sin\theta').$$

これらの積は (C2) と三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned}
zw &= rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\
&= rr'\{(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\} \\
&= rr'\{\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\}
\end{aligned}$$

を得る．試しに $w = i$ とすれば，$r' = 1, \theta' = \pi/2$ より $iz = r\{\cos(\theta + \pi/2) + i\sin(\theta + \pi/2)\}$ となり,「i 倍は $\pi/2$ 回転」という性質を完璧に記述している．すばらしい．一般に，複素数倍の幾何学的意味は

> 複素数に $w=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ を掛けると絶対値が r' 倍され，原点を中心に θ' 回転

となる．上の図（右側）をぢっと眺めてみよう．$0,1,z$ を頂点とする三角形は w 倍されることで，全体的に $|w|$ 倍に拡大，$\arg w$ ラジアン回転され，$0,w,zw$ を頂点とする相似な三角形に移るのである．

また，上の計算は次のように公式としてまとめることができる：

> **公式 1-2.** 複素数 $z,w\neq 0$ にたいし，次が成り立つ：
>
> $$(1)\quad |zw| \;=\; |z|\,|w| \quad \text{かつ} \quad \arg zw \;=\; \arg z+\arg w$$
>
> $$(2)\quad \left|\frac{z}{w}\right| \;=\; \frac{|z|}{|w|} \quad \text{かつ} \quad \arg\frac{z}{w} \;=\; \arg z-\arg w$$

(1) を標語的にいうと,「積の絶対値は絶対値の積」,「積の偏角は偏角の和」．この性質は，べき乗の計算でもっとも威力を発揮する．

第2講　オイラーの等式と指数関数

2.1　前回のポイントと補足

積の法則.　前回は複素数の定義をイチから述べたが，四則計算自体は高校でもある程度学んでいたことだと思う．したがって，前回の唯一にして最大のポイントは，

> **積の法則.** 極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ w = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ をもつ複素数にたいし，
> $$zw = rr'\{\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\}.$$

という部分であろう．たとえば $z = w$ とすると，複素数の 2 乗が

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

と表されることがわかる．すなわち絶対値は 2 乗，偏角は 2 倍である．より一般に，数学的帰納法を用いれば次の公式が証明される（発展問題 1-1）：

> **公式 1-3 (ド・モアヴルの公式).** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，任意の整数 m にたいし $z^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$ が成り立つ．

応用例.　$A = (1+\sqrt{3}\,i)^{10}$ を計算してみよう．[1] 極形式で $1+\sqrt{3}\,i$ を表すと $2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$ となるから，ド・モアヴルの公式より

$$A = 2^{10}(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}) = 1024(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -512 - 512\sqrt{3}i.$$

2.2　オイラーの等式

微分積分で学んだマクローリン展開によれば，任意の実数 x にたいし

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

[1] まじめに計算すると悲劇である．くれぐれも二項定理などをもちいてはならない．

が成り立つのであった．これは「右辺の $\cdots$ の部分で足し上げる項数を増やしていくと，その値が左辺の値に収束する」という意味である．[2] ここで発想を柔軟にして，x に純虚数 $i\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を代入してみると，

$$e^{i\theta} = 1+(\theta i)+\frac{(\theta i)^2}{2!}+\frac{(\theta i)^3}{3!}i+\frac{(\theta i)^4}{4!}+\cdots = \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)$$

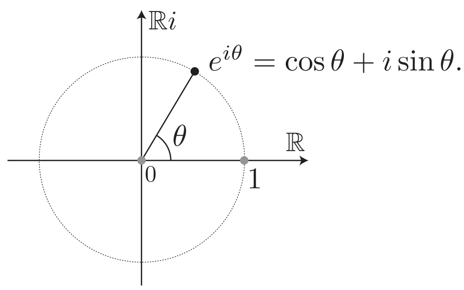
となる．同じく実数について成り立つマクローリン展開

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \qquad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

より，次の等式を得る：

オイラーの等式：θ を実数とするとき，$e^{i\theta} \;=\; \cos\theta + i\sin\theta.$

どこかミステリアスな等式だが，現段階ではこの左辺の表す「e の複素数乗」がまだ明解に定義されていないことに注意しよう．すなわち，「$e^{i\theta}$ が存在するとすれば，単位円上で偏角 θ の複素数となる」ことを暗示しているだけである．



2.3 指数関数の定義

オイラーの等式からの暗示（啓示？）を活かして，「複素数の指数関数」を次のように定義する：

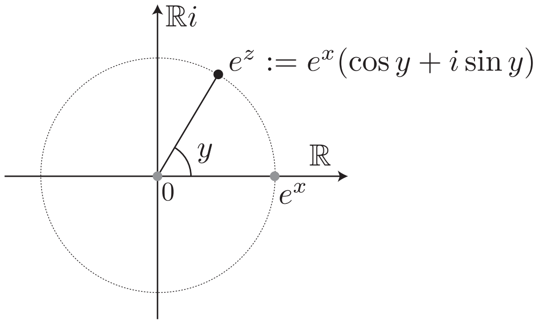
定義（指数関数）：複素数 $z = x + yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$ にたいし，

$$e^z \;:=\; e^x(\cos y + i\sin y)$$

を対応させる関数を z の**指数関数** (exponential function) とよぶ．e^z は $\exp z$ とも表す．

[2]「関数の等式」として頭に入っている人が多いだろうが，実際の意味は $e^{99} = 1+\frac{99}{1!}+\frac{99^2}{2!}+\frac{99^3}{3!}+\cdots$ といった具体的な数値に関する等式である．

すなわち，指数関数 e^z は絶対値 $e^x > 0$ ，偏角 y の複素数である．



注意． $e^x > 0$ より，指数関数 e^z は決して **0** にならない．

注意． ここで定義したのはあくまで「指数関数 e^z」という関数であって，「e の複素数 z 乗」ではない．後者はまたあとで定義する．

例． $z = 0 = 0 + 0i$ のとき，$e^0 := e^0(\cos 0 + i \sin 0) = 1.$

例． $z = \pi i = 0 + \pi i$ のとき，$e^{\pi i} := e^0(\cos \pi + i \sin \pi) = -1.$ これはよく「e, π, i の関係式」とみなされるが，現時点ではただの定義．

例． $z = 3 + \dfrac{\pi}{4} i$ のとき，$e^{3+\pi i/4} := e^3\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}\right) = e^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

2.4 極形式

指数関数を用いると，$|z| = r > 0, \arg z = \theta$ を満たす複素数 z にたいし，

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \iff z = re^{i\theta}$$

が成り立つ．この $z = re^{i\theta}$ も，複素数 z の**極形式**もしくは**極表示**とよぶ．最初は不可解な感じがするが，慣れてしまうとこちらのほうが書く量も少なくて断然よい．

例． $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} e^{\pi i/4}.$

例． $-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i}.$

2.5 指数関数の性質

指数関数のもっとも重要な性質が，次にあげる「指数法則」と「周期性」である：

定理 2-1(指数法則と周期性). すべての複素数 z, w にたいし，次が成り立つ：

(1) $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$　　(2) $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$　　(3) $e^{z+2\pi i} = e^z$

証明（定理 2-1）. (1) $z = x + yi, w = x' + y'i$ とおくと，$z + w = (x + x') + i(y + y')$ より，$e^{z+w} := e^{x+x'}\{\cos(y + y') + i \sin(y + y')\}$. 一方，加法定理を用いると

$$e^z \cdot e^w = e^x(\cos y + i \sin y) \cdot e^{x'}(\cos y' + i \sin y') = e^{x+x'}\{\cos(y + y') + i \sin(y + y')\}.$$

(2) (1) より $e^z = e^{(z-w)+w} = e^{z-w} \cdot e^w$. よって $e^z/e^w = e^{z-w}$.

(3) $e^{2\pi i} := \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ であるから，(1) より $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$. ■

注意. (1) と (2) は複素数の指数関数が実数の指数関数と同じ指数法則を持つことを示す．これらは期待通りの性質だが，(3) のほうはやや意外な性質かもしれない．(3) より

$$\cdots = e^{z-4\pi i} = e^{z-2\pi i} = e^z = e^{z+2\pi i} = e^{z+4\pi i} = \cdots$$

が成り立つ．**指数関数は周期 $2\pi i$ の周期関数**なのである．とくに $z = 0$ の場合，

すべての整数 m にたいし，$1 = e^0 = e^{2\pi m i}$ が成り立つ．

この事実はこのあとも頻繁に用いる重要事項である．

2.6 指数法則の応用

応用１（べき乗と逆数）. 定理 2-1 の (1) を用いると，$(e^z)^n = e^z \cdots e^z = e^{z+\cdots+z} = e^{nz}$ がわかる．また，$e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$ より，$e^{-z} = 1/e^z = (e^z)^{-1}$. すなわち e^z の逆数は e^{-z} なのである．したがって，一般に次が成り立つ：

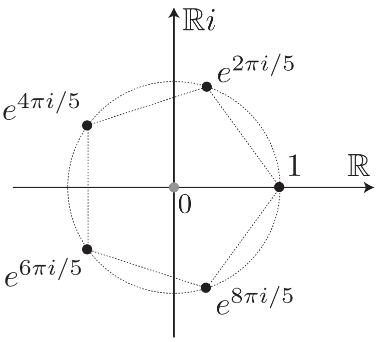
公式 2-2（指数関数の整数乗）: 任意の整数 $m \in \mathbb{Z}$ にたいし，$(e^z)^m = e^{mz}$.

応用２（ド・モアヴル再訪）. $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ を整数 m 乗すると，上の公式より

$$z^m = (re^{i\theta})^m = r^m e^{im\theta} = r^m(\cos m\theta + i \sin m\theta). \quad \text{（ド・モアヴルの公式）}$$

応用３（1 の N 乗根）. 自然数 N にたいし，方程式 $z^N = 1$ の解を **1 の N 乗根**とよぶ．[3] ド・モアヴルの公式を応用して，1 の 5 乗根を求めてみよう．

[3]任意の複素数 w にたいし，方程式 $z^N = w$ の解を w の N 乗根とよぶ．



まず極形式を用いて，方程式 $z^5 = 1$ の解 $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおく．ド・モアヴルの公式より $(1 =)\ z^5 = r^5 e^{5\theta i}$ が成り立つから，絶対値を比較して $r^5 = 1$．いま $r > 0$ なので，$r = 1$．よって $1 = e^{5\theta i}$．一方，$1 = e^{2m\pi i}$ $(m \in \mathbb{Z})$ であるから，(←ここに指数関数の周期性が効いている) $5\theta = 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$. $0 \leq \theta < 2\pi$ という条件から，$\theta = \frac{2m\pi}{5}$ $(m = 0, 1, 2, 3, 4)$ をえる．よって求める 1 の 5 乗根は $1 = e^0, e^{2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{6\pi i/5}, e^{8\pi i/5}$ の 5 個．これらはすべて単位円上にあり，正 5 角形の頂点をなしている．

同様に計算すれば，一般に次が成り立つことがわかる：

定理 2-3（1 の N 乗根）． $N \in \mathbb{N}$ とするとき，方程式 $z^N = 1$ の解は

$$z = \exp\left(\frac{2m\pi i}{N}\right) \qquad (m = 0, 1, \ldots, N-1)$$

の N 個であり，これは 1 を頂点にもち単位円に内接する正 N 角形の頂点である．

第3講　指数・対数関数と複素べき

3.1　前回のポイント

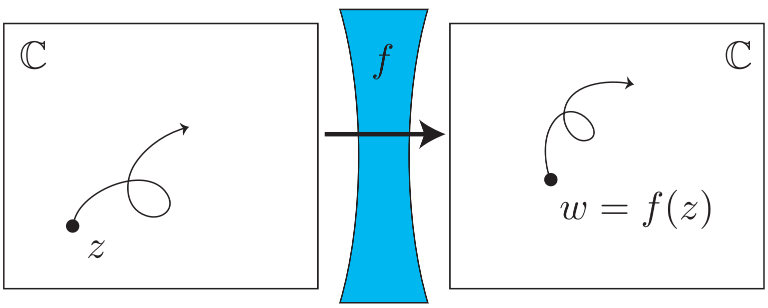
指数関数の定義と性質.

- 定義：複素数 $z = x + yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$ にたいし，$e^z \ := \ e^x(\cos y + i \sin y)$.
  すなわち絶対値は $e^x > 0$，偏角は y.
- 指数法則：すべての複素数 z, w にたいし，$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$
- 周期性：すべての複素数 z, w にたいし，$e^{z+2\pi i} = e^z$.

3.2　指数関数の像

指数関数を $w = f(z) = e^z$ とおき，関数 f を視覚的に理解する方法を考えよう．そもそも複素数の関数（複素関数）はグラフが描けないので（2×2 =4 次元必要），ちょっとした工夫が必要となる．

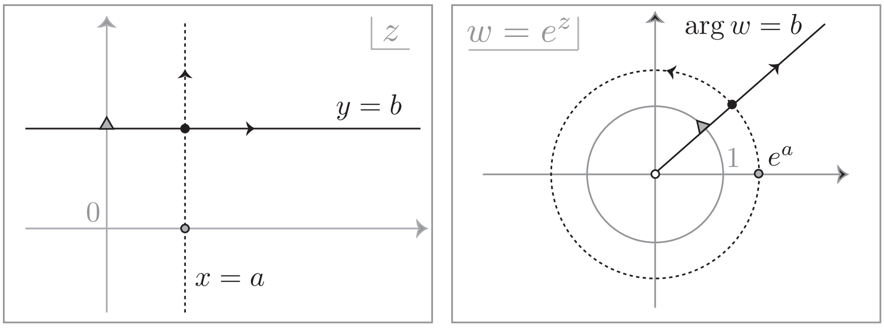
関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は z-平面の一点から w-平面の一点への対応を与えるから，これをスクリーンからスクリーンへの投影のように考えるとよい．関数 f とはその間にあるレンズであり,「ゆがみ」や「ずれ」を発生させる装置である．



変数 z が左のスクリーンで動き回るとき，右のスクリーンで対応する w がどのように動くのかがわかれば，とりあえず関数の「作用」は理解できたことになるだろう．

指数関数による像. とりあえず基本的な場合として z が z-平面を垂直または水平に移動する場合を考えよう.

以下, $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とする.



タテ方向の動き. $x = a$ を固定して $z = a + yi$ $(y \in \mathbb{R})$ を考えると, $w = e^z = e^a(\cos y + i \sin y)$ となる. この場合, 絶対値が $e^a > 0$ で固定され, 偏角 y が自由に変化するから,

z がタテ線 $x = a$ 上を上に移動	$\Longleftrightarrow$	w は原点中心半径 e^a の円上を左まわり.

とくに, z が上に 2π 進む ($2\pi i$ 進む) と w は円上を一周する (周期性). また, a の大小が円の大小を決定する.

ヨコ方向の動き. $y = b$ を固定して $z = x + bi$ $(x \in \mathbb{R})$ を考えると, $w = e^z = e^x(\cos b + i \sin b)$ となる. この場合, 偏角が b で固定され, 絶対値 e^x が正の実数の範囲で自由に変化するから,

z がヨコ線 $y = b$ 上を右に移動	$\Longleftrightarrow$	w は原点から伸びる半直線上を原点から遠ざかる方向に移動

とくに, b の大小が半直線の向きを決定する.

3.3 対数関数

正の数 a にたいし, 方程式 $e^x = a$ の実数解を $\log a$ と表し, これを a の対数とよんだ. 同じことを複素数で考えよう.

> **定義（複素数の対数）．** 複素数 $\alpha \neq 0$ にたいし，方程式 $e^z = \alpha$ の解を α の**対数** (logarithm) とよび， $\log\alpha$ で表す．

例． $\log(-1)$ を求めてみよう．すなわち，方程式 $e^z = -1$ を解けばよい．指数関数の周期性に注意すると

$$\text{左辺} = -1 = e^{\pi i} = e^{\pi i + 2m\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

であるから，右辺 e^z と比較して $z = (2m+1)\pi i \;\; (m \in \mathbb{Z})$. したがって

$$\log(-1) = (2m+1)\pi i \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

一般に，複素数の対数は**無限個の複素数になってしまう！**これは指数関数の周期性に起因する．

例． 次に $\log(1+i)$ を求めてみる．方程式 $e^z = 1+i$ の複素数解を求めると，

$$e^z = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{\pi i/4} = e^{\log\sqrt{2}} \cdot e^{\pi i/4 + 2m\pi i} = e^{\log\sqrt{2} + (\pi/4 + 2m\pi)i} \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

であるから，$z = (\log 2)/2 + (\pi/4 + 2m\pi)i \; (m \in \mathbb{Z})$. すなわち，

$$\log(1+i) = \frac{\log 2}{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right)i \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

ややこしい例． $\alpha = 1$ のとき，方程式 $e^z = 1 = e^{2m\pi i}$ $(m \in \mathbb{Z})$ を解いて，$z = 2m\pi i$ $(m \in \mathbb{Z})$. すなわち $\log 1 = 2m\pi i$ $(m \in \mathbb{Z})$. 複素数の対数 $\log 1$ と実数の対数 $\log 1 = 0$ は記号の上では区別されないが，普通は文脈でどちらかを判断する．

これらの例からわかるように，一般に複素数の対数には $2\pi i$ の整数倍を足す自由度がある．したがって複素数の対数は，虚軸に平行な直線上に等間隔 $2\pi i$ で整然と並んでいるのである．[1]

一般化しておこう：

[1] 記号 $\log\alpha$ は，方程式 $e^z = \alpha$ の解の，無限個あるうちのひとつを漠然と表す記号だといえる．高校数学でも，「方程式 $x^3 = 1$ の 1 でない解のひとつを ω とする」といった表現を見かけるが，この ω の使い方に似ている．

複素対数の公式． $z = re^{i\theta} \neq 0\ (r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき，$r = e^{\log r}$ より

$$\begin{aligned}\log z &= \log r + (\theta + 2m\pi)i \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= \log|z| + (\arg z)i\end{aligned}$$

ただし，右辺の log は実数の対数であり，$\arg z$ は $+2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ 分の自由度を許す．

対数関数． 0 でない複素数 z にたいし，$\log z$ （無限個の複素数）を対応付けるものを**対数関数** (logarithmic function) とよぶ．これは厳密な意味で「関数」ではない．「A さん」という人にたいし，「A さんの友達」という不特定多数の人物を対応させるようなものである．[2]

主値．「一番の友達」を誰かひとりピックアップする，という場合もあるだろう．複素平面上で $\log z$ はタテ線の上に $2\pi i$ 間隔で並んでいるが，その中から $0 \leq \mathrm{Im}\,(\log z) < 2\pi$ を満たすものはひとつだけなので，これを $\log z$ の**主値** (principal value) とよび，$\mathrm{Log}\,z$ とあらわす．[3] このとき，関数 $z \mapsto \mathrm{Log}\,z$ は普通の関数である．たとえば，

$$\mathrm{Log}\,(-1) = \pi i, \qquad \mathrm{Log}\,(1+i) = \frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \qquad \mathrm{Log}\,1 = 0.$$

3.3.1 複素数の複素数乗（複素べき）

複素数べき（冪）． 複素数 $z \neq 0$ と 複素数 α にたいし，「z の α 乗」(z to the power of α) を

$$z^{\alpha} \ := \ e^{\alpha \log z}$$

と定義する．ただし，$\log z$ は複素数の対数であり，取りうるすべての値を考える．結果として z^{α} も一般には無限個もしくは有限個の複素数となる．

[2] ひとつの数にひとつの数を対応付けるのが普通の関数であるが，ひとつの数に複数の数を一斉に対応づける関数を一般に**多価関数** (multivalued function) とよぶ．対数関数は多価関数の典型的な例である．また，反義語として，普通の関数は一価関数 (single-valued function) とよばれる．

[3] 主値は $-\pi \leq \mathrm{Im}\,(\mathrm{Log}\,z) < \pi$ の範囲で取る，という流儀もある．プログラミングの世界ではそのように設定することが多い．このとき，$\mathrm{Log}\,z$ は考えうる $\log z$ の値の中でもっとも原点に近い．

例 1(無限個). $(-1)^i$ を計算してみよう．定義より

$$
\begin{aligned}
(-1)^i &:= e^{i\log(-1)} = e^{i(2m+1)\pi i} \quad (m\in\mathbb{Z}) \\
&= e^{-(2m+1)\pi} \quad (m\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

これは $\ldots, e^{-3\pi}, e^{-\pi}, e^{\pi}, e^{3\pi}, e^{5\pi}, \ldots$ で得られる**無限個の正の実数.**

例 2(ひとつだけ). $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 2i$ と計算されるが，これは普通の「自然数乗」である．いま定義した「複素数乗」の意味では，

$$
\begin{aligned}
(1+i)^2 &:= e^{2\log(1+i)} = e^{2\cdot\left\{\frac{\log 2}{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2m\pi\right)i\right\}} \quad (m\in\mathbb{Z}) \\
&= e^{\log 2+\left(\frac{\pi}{2}+4m\pi\right)i} \quad (m\in\mathbb{Z}) \\
&= e^{\log 2}\cdot e^{\pi i/2} = 2\cdot i = (1+i)(1+i).
\end{aligned}
$$

一般に，**複素数の整数乗の値はひとつに定まり，普通の意味での整数乗と一致する.**

例 3(有限個). 「実数乗」の意味だと $1^{1/3} = \sqrt[3]{1} = 1$ だが,「複素数乗」だと次のようになる：

$$
\begin{aligned}
\text{複素べき：}\quad 1^{1/3} &= e^{(1/3)\cdot\log 1} \quad (\log 1\ \text{は複素対数}) \\
&= e^{(1/3)\cdot 2m\pi i} = e^{2m\pi i/3} \quad (m\in\mathbb{Z}) \\
&= 1,\ e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3} \quad :1\ \text{の}\ 3\ \text{乗根}
\end{aligned}
$$

一般に，$z\neq 0$ **の複素べき** $z^{1/N}$ $(N\in\mathbb{N})$ **は** z **の** N **乗根すべてを与える.**

注意. 「$e = 2.71828\ldots$ の z 乗（複素べき）」と「指数関数 e^z」は別物である．とくに断らない限り，普通は後者の意味.

注意. 一般には $(e^z)^w = e^{zw}$ は成り立たない．ふつう，左辺 $(e^z)^w$ は指数関数 e^z の複素数 w 乗，右辺 e^{zw} は指数関数の zw での値と解釈するからである．たとえば $z=\pi i,\ w=i$ とすると，左辺 $=(e^{\pi i})^i = (-1)^i$ は無限個の値をもつが，右辺は $e^{\pi i\cdot i} = e^{-\pi}$ となりひとつの値.

第 4 講　三角関数・関数の連続性

4.1　三角関数

三角関数． $\theta \in \mathbb{R}$ のとき，指数関数の定義より $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ （オイラーの等式）が成立するのであった．この式の θ に $-\theta$ を代入すると，$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ となる．これらふたつの式の和と差を考えることで，次の「公式」を得る：

$$\cos\theta \;=\; \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta \;=\; \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

実数 θ の部分を複素数 z に変えることで，複素数の三角関数を次のように定義する：

> **定義（三角関数）** 複素数 $z \in \mathbb{C}$ にたいし，
>
> $$\cos z \;:=\; \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z \;:=\; \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
>
> で定義される関数を**三角関数** (trigonometric function) とよぶ．

例．

$$\cos i \;=\; \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} + e\right), \qquad \sin i \;=\; \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} \;=\; \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e} + e\right)i.$$

$\sin i \notin \mathbb{R}$ からわかるように，複素の三角関数は一般に実数とはかぎらない．また，$\cos i > e/2 > 1$ であるから，実数の三角関数のように $|\cos z| \le 1,\ |\sin z| \le 1$ は成り立たない．（一般に，有界ですらない．→発展問題）

> **公式 4-0.**　すべての $z,\ w \in \mathbb{C}$ にたいし，次がなりたつ：
>
> (1) **周期性：** $\cos z = \cos(z + 2\pi), \quad \sin z = \sin(z + 2\pi)$
>
> (2) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

(3) **加法定理**：
$$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$$
$$\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$$

証明は練習問題としよう（問題 4-2）.

三角関数のゼロ点. 方程式 $x^3 - 1 = 0$ は実数解だと $x = 1$ のみだが，方程式を複素数にまで広げると $x = 1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ の三つの解をえる．一般に考える数の世界を広げると方程式の解は増えてしまうのだが，三角関数の場合はどうだろうか？

方程式 $\sin z = 0$ を解いてみよう．定義式より $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff (e^{iz})^2 = 1 \iff e^{2iz} = 1 = e^{2m\pi i}$ $(m \in \mathbb{Z})$．よって $2iz = 2m\pi i \iff z = m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ を得る．これは方程式を実変数で考えた場合の解と変わらない！$\cos z$ についても同様である（→練習問題 4-4）.

4.2 関数の極限

今後「複素関数の微分」を考えるための準備として，複素関数においても実関数と同様に「関数の極限」を定義しておく.

定義（極限）. $z \in \mathbb{C}$ を変数，$\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ を定数とする.

(a) 変数 z が (z とαの距離) $= |z - \alpha| \to 0$ をみたしながら変化するとき，$z \to \alpha$ と表す.

(b) 「$z \to \alpha$ ならば $f(z) \to \beta$ 」が成り立つとき，

$$f(z) \to \beta \quad (z \to \alpha) \qquad \text{もしくは} \qquad \lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta$$

と表し，β を $f(z)$ の $z \to \alpha$ における**極限** (limit) とよぶ.

(a) の $|z - \alpha| \to 0$ は実数の意味なので，既知の概念であることに注意しよう．次の命題は,「$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ の別名である」という観点から上の極限を見直したものである：

命題 4-1. $z = x + yi,\ \alpha = a + bi$ $(x, y, a, b \in \mathbb{R})$ であるとき,

$$z \to \alpha \quad \iff \quad x \to a \quad \text{かつ} \quad y \to b.$$

このような複素と実（$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$）の言い換えは，複素関数論の内部原理を説明する際に必要となる．これから複素関数の微積分を学ぶが，実部と虚部にわけることで必ず実関数の微積分に帰着できる！ということを肝に銘じておこう．

証明（命題 4-1）． 証明には，次の**三角不等式** (triangle inequality) を用いる（図 4.1 参照）：

> **三角不等式．** 任意の複素数 z, w にたいし，次が成り立つ：
>
> $$|z|-|w| \ \le\ |z+w| \ \le\ |z|+|w|.$$

証明は練習問題（問題 4-1）としよう．

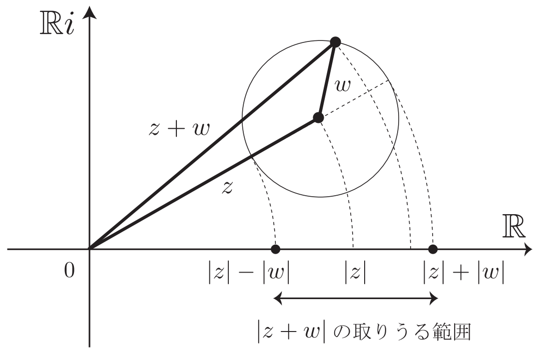


図 4.1: 三角不等式の幾何学的解釈．

さて $|z-\alpha| = \sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2} \ge \sqrt{|x-a|^2} = |x-a|$ より，$z \to \alpha \implies x \to a$．同様にして $z \to \alpha \implies y \to b$．つぎに三角不等式より，$|z-\alpha| = |(x-a)+i(y-b)| \le |x-a|+|y-b|$. が成り立つ．よって $x \to a$ かつ $y \to b$ のとき，$z \to \alpha$. ■

たとえば次の公式も，命題 4-1 を用いて実部と虚部にわけることで証明される：

> **公式 4-2.** $\displaystyle\lim_{z\to\alpha} f(z) = A,\ \lim_{z\to\alpha} g(z) = B$ であるとき，次が成り立つ：
>
> (1) $\displaystyle\lim_{z\to\alpha}\{f(z)+g(z)\} = A+B$　　(2) $\displaystyle\lim_{z\to\alpha} f(z)\,g(z) = A\,B$
>
> (3) $B \ne 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$

4.3 関数の連続性

定義（連続性，連続関数）

- 関数 $w=f(z)$ が $z=\alpha$ で**連続** (continuous) であるとは $z\to\alpha$ のとき $f(z)\to f(\alpha)$, すなわち $\lim_{z\to\alpha} f(z)=f(\alpha)$ が成り立つことをいう．
- 複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 D にたいし，関数 f が D の任意の点で連続であるとき，「f は D 上で連続である」という．
- 関数 $f(z)$ が定義できるすべての $z=\alpha$ で連続であるとき，f は**連続関数** (continuous function) とよぶ．

連続関数の例（2 乗）． $f(z)=z^2$ とし，$\alpha\in\mathbb{C}$ を定数とする．$z\to\alpha$ のとき，

$$f(z)-f(\alpha)=z^2-\alpha^2=(z+\alpha)(z-\alpha)\xrightarrow{(\text{公式 }4\text{–}2)}2\alpha\cdot 0=0$$

が成り立つから，$z=\alpha$ で連続．α は任意であるから，$f(z)=z^2$ は $\mathbb{C}$ 上で連続な関数である．

連続関数の例（指数関数）． $\exp(z)=e^z$ を考えよう．$\alpha\in\mathbb{C}$ を定数とする．$\Delta z:=z-\alpha$, $\Delta z=:\Delta x+i\Delta y$ $(\Delta x,\Delta y\in\mathbb{R})$ とおくと

$$e^z-e^\alpha=e^\alpha(e^{z-\alpha}-1)=e^\alpha(e^{\Delta z}-1)=e^\alpha\cdot\left\{e^{\Delta x}(\cos\Delta y+i\sin\Delta y)-1\right\}$$

が成り立つ．よって $z\to\alpha$ のとき，$\Delta z\to 0 \iff \Delta x,\Delta y\to 0$ （命題 4-1）より，

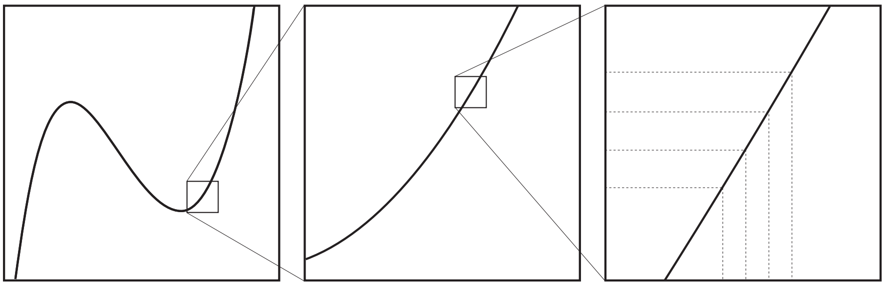
$$e^z-e^\alpha\xrightarrow{(\text{公式 }4\text{–}2)}e^\alpha\cdot\left\{e^0(\cos 0+i\sin 0)-1\right\}=0$$

よって指数関数は $z=\alpha$ で連続.（ここで実の指数関数・三角関数の連続性は用いた．基本的に実の微積分の結果は使って OK.）定数 α は任意であるから，指数関数 $\exp(z)=e^z$ は $\mathbb{C}$ 上で連続な関数である．

注． 連続関数の和差積商，合成，逆関数は（定義可能な範囲で）やはり連続関数である．

第5講　複素関数の微分

微分とは？ 実関数における「微分」の役割は，関数のグラフを接線（1 次関数）で近似することで各点における関数の局所的な変化を表現するものであった．



複素関数の場合も同様である．関数がある点をある点に写す，その局所的な作用を 1 次関数（比例関数）で近似することが「微分」の役割だといえる．

ひとつ具体例をみてみよう．

例． 関数 $w = f(z) = z^2$ を考える．このとき，f は $z = i$ を $w = -1$ に写す．$z = i$ 周辺の点が f によってどのように $w = -1$ の周辺に写されるのかを「顕微鏡」で観察してみよう．

まず i から z への「差分」を $\Delta z := z - i$，まず $f(i)$ から $f(z)$ への「増分」を $\Delta w := f(z) - f(i)$ で定義する．すなおに計算すると，

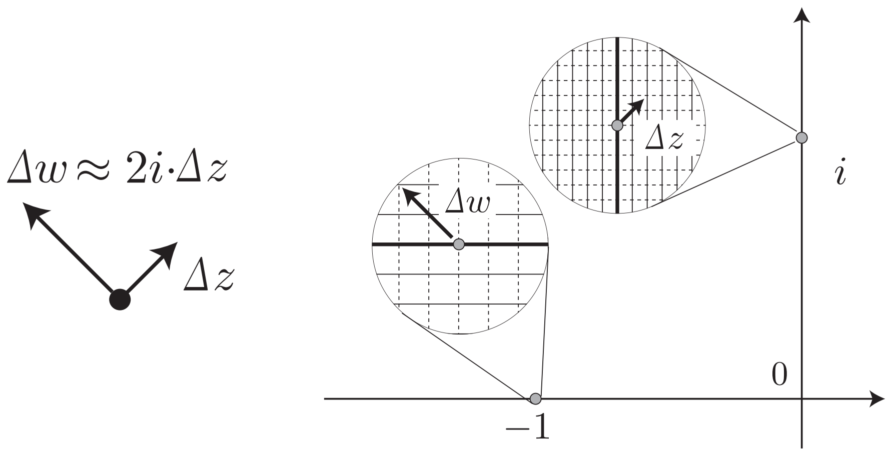
$$\Delta w \;=\; f(z) - f(i) \;=\; (i + \Delta z)^2 - (-1) \;=\; 2i\Delta z + \Delta z^2$$

$\Delta z \approx 0$ （十分 0 に近い）とき，相対的に Δz^2 の項は無視できるので，

$$\Delta w \;\approx\; 2i\,\Delta z$$

を得る．いま $2i = 2e^{\pi i/2}$ であるから,「Δw は（ほぼ） Δz の長さを 2 倍し，90 度回転させたもの」だと結論される．[1]

[1]（ほぼ）の部分は Δz^2 分の誤差を意味している．顕微鏡の倍率を上げれば，すなわち Δz をもっと小さくすれば，この部分は相対的に小さくなって，人間の目では感知できないほどになるであろう．



微分の定義.　大雑把に言って，関数 $w = f(z)$ が $z = \alpha$ で微分可能であるとは，$\Delta z = z - \alpha$，$\Delta w = f(z) - f(\alpha)$ とおくとき，

$$\Delta w \ \approx \ A\,\Delta z$$

がすべての $\Delta z \approx 0$ で成り立つような（Δz に依存しない）定数 A が存在することを言う.

厳密な定義は次のようになる：

> **定義（微分可能性）.** 関数 $w = f(z)$ が $z = \alpha$ で**微分可能** (differentiable)
> $:\Longleftrightarrow$　ある定数 $A \in \mathbb{C}$ が存在して，
>
> $$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \ = \ A$$
>
> この定数 A を f の α における**微分係数** (differential coefficient) とよび，$A = f'(\alpha)$ と表す.

微分係数を定める極限の式から，$z \approx \alpha$ のとき

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \ \approx \ A \iff \frac{\Delta w}{\Delta z} \ \approx \ A \iff \Delta w \ \approx \ A\,\Delta z$$

を得る．とくに $A = re^{i\theta} \neq 0$ のとき，

> f は $z = \alpha$ のまわりの点を（ほぼ）$r = |A|$ 倍拡大・$\theta = \arg A$ 回転させながら $f(\alpha)$ のまわりに写す.

例． 上の計算例より，$f(z)=z^2$ は $z=i$ で微分可能であり，$f'(i)=2i$ となるはずである．より一般に，次のことを示そう：

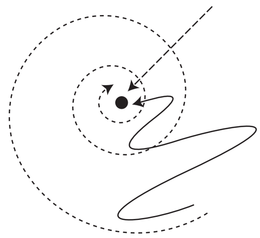
> 2 次関数 $f(z)=z^2$ はすべての $\alpha\in\mathbb{C}$ において微分可能であり，$f'(\alpha)=2\alpha$.

証明． $f(z)=z^2$ とし，複素数 α を固定する．このとき

$$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \;=\; \frac{z^2-\alpha^2}{z-\alpha} \;=\; z+\alpha \;\to\; 2\alpha \;\;(z\to\alpha)$$

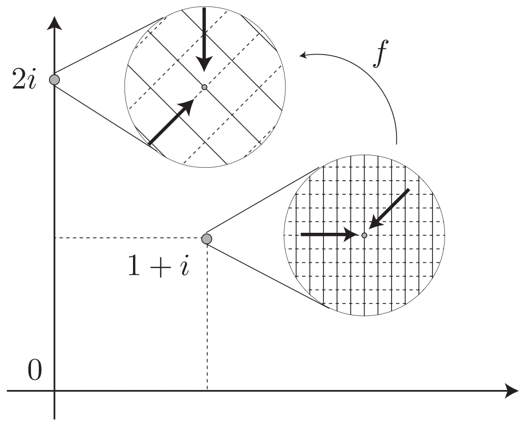
であるから，$z=\alpha$ で f は微分可能，微分係数 $f'(\alpha)$ の値は 2α である．いま $\alpha\in\mathbb{C}$ は任意であるから，すべての複素数で f は微分可能である． ■

注意． ここで「$z\to\alpha$」というのは，単に「$|z-\alpha|\to 0$」を意味する．ただし，その近づき方はまったく自由である．まっすぐでも，回転しながらでも，ジグザグしながらでもよい．とにかく「考えうるあらゆる近づき方」を考慮しなければならない．



別の具体例． $f(z)=z^2$, $\alpha=1+i$ としてみよう．$f(\alpha)=2i$, $f'(\alpha)=2(1+i)=2\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ であるから，f は $1+i$ から $2i$ へ，周囲をほぼ「$2\sqrt{2}$ 倍拡大と $\pi/4$ 回転」させながら写す（右図）．

このことから，z の $\alpha=1+i$ への近づき方を $f'(\alpha)=2\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ 倍したものが，ほぼ $f(z)$ の $f(\alpha)$ への近づき方になることもわかる．（あとの $g(z)=\overline{z}$ と比較せよ．）



注意：微分可能性と連続性． 関数 $w=f(z)$ が $z=\alpha$ で微分可能であれば，その点で連続である．（微分可能性の定義にはその点での連続性について一切仮定されていないので，このような主張は無意味ではない．）実際，$z\to\alpha$ のとき $\dfrac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\to A$ であるから，z が α に十分近いとき，

$$\left|\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}-A\right|\le 1$$

が成立している．両辺に $|z-\alpha|$ をかけたあと，三角不等式より，$|f(z)-f(\alpha)|\le(|A|+1)|z-\alpha|$．この式から $z=\alpha$ での連続性はすぐにわかるだろう．

5.1 正則関数

微分可能性にもう少し条件を加えた「正則性」という条件を導入する．多項式，三角関数，指数関数など,「ふつうの関数」はすべてこの「正則性」をもっている．複素関数論とは，正則関数論のことなのである．

定義（導関数，正則関数）複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 D （普通は開集合）にたいし，

- 関数 $w = f(z)$ が D **上で微分可能**
  $:\Longleftrightarrow$ すべての $\alpha \in D$ において f は微分可能.
- D 上で微分可能な関数 $w = f(z)$ にたいし，点 $z \in D$ に微分係数 $f'(z)$ を対応させる関数を f の**導関数** (derivative) とよぶ.
- 関数 $w = f(z)$ が D 上で**正則** (holomorphic) $:\Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ が } D \text{ 上で微分可能かつ} \\ \text{導関数 } f' \text{ が } D \text{ 上で連続} \end{cases}$

正則な関数の例１． $f(z) = z^2$ は $\mathbb{C}$ 上で微分可能であり，導関数は $f'(z) = 2z$．これは連続なので，f は $\mathbb{C}$ 上で正則.

正則な関数の例２． より一般に多項式，指数関数 e^z，三角関数 $\sin z$，$\cos z$ は $\mathbb{C}$ 上で正則.（次回確認する.）有理関数（多項式の商）も定義可能な範囲で正則.

正則な関数の例３． さらに一般に，正則関数の和差積商，合成，逆関数も定義可能な範囲で正則.

5.2 微分可能で「ない」例.

次回以降は,「複素関数論」というよりも「正則関数論」を展開する．例 2 で述べたように，実の初等関数はすべて正則関数の実数への制限であり，それゆえに実積分への応用が可能なのである.

一方で，微分可能な関数（とくに正則関数）の特殊性を理解するには,「微分可能でない例」も少なからず知っておくべきだろう．ここでは，次を証明する：

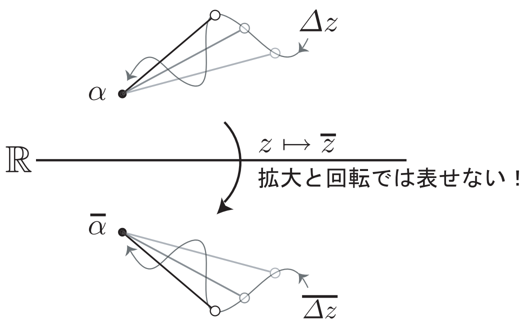
> 複素共役を与える関数 $g(z) = \overline{z}$ は，すべての $\alpha \in \mathbb{C}$ で微分可能でない.

証明. $\alpha \in \mathbb{C}$ を任意に固定する．$\Delta z = z - \alpha = re^{i\theta}$ とすると，

$$\frac{g(z) - g(\alpha)}{z - \alpha} \;=\; \frac{\overline{z} - \overline{\alpha}}{z - \alpha} \;=\; \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} \;=\; e^{-2\theta i}.$$

ここで $z \to \alpha$ すなわち $\Delta z = re^{i\theta} \to 0$ としても，偏角 θ に応じて上の値はふらふらと変化してしまう．たとえば $\theta = 0$ で固定したときと，$\theta = \pi/2$ で固定したときでは値の行き先が変わってしまう．$z \to \alpha$ の近づき方によらず定数に収束しないということは，微分可能ではないということである． ■

そもそも，複素共役は実軸に関して鏡像を取ることに対応するのであった．$z = \alpha$ から偏角 θ の方向に変化すれば，g による像は偏角 $-\theta$ の方向に変化する．その方向を補正するには，-2θ 回転必要だが，この回転量が変化の方向 θ に依存しているのがいけない．微分可能性は「周囲をほぼ一定量拡大・回転する」ことを要求するからである．



第6講　コーシー・リーマンの方程式

6.1　前回の復習

- 関数 $w=f(z)$ が $z=\alpha$ で**微分可能**　$:\Longleftrightarrow\ \exists A\in\mathbb{C},\ \lim_{z\to\alpha}\dfrac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}=A$
- この A を**微分係数**とよび，$A=f'(\alpha)$ と表す．また関数 $z\mapsto f'(z)$ を f の**導関数**とよぶ．
- 関数 $w=f(z)$ が $D\subset\mathbb{C}$ で**正則**

  $:\Longleftrightarrow$　すべての $z=\alpha\in D$ において，$\begin{cases} f \text{ が微分可能；かつ} \\ \text{導関数 } f' \text{ が連続} \end{cases}$

6.2　導関数の公式

公式 6-1. 関数 $f(z),g(z)$ が微分可能であるとき，次が（左辺の関数が定義できる範囲で）成り立つ：

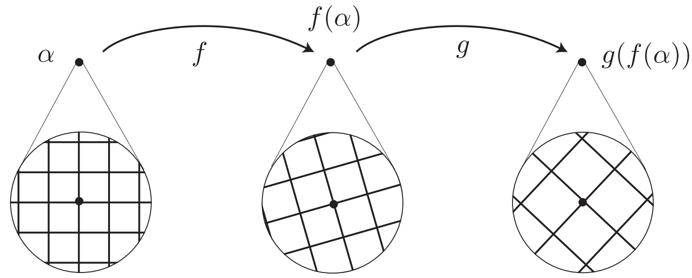
(DF1) $\{f(z)+g(z)\}'=f'(z)+g'(z)$.

(DF2) $\{f(z)g(z)\}'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

(DF3) $g(z)\neq 0$ であれば $\left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\}'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2}$.

(DF4) $\{g(f(z))\}'\ =\ g'(f(z))\cdot f'(z)$.

証明は実関数の場合と全く同様であるが，(DF4) について少し解説しておこう，微分係数は，関数の局所的な拡大・回転量を表すのであった．すなわち上の公式は $\alpha \overset{f}{\longmapsto} f(\alpha) \overset{g}{\longmapsto} g(f(\alpha))$ という変化において，f によって局所的にほぼ $f'(\alpha)$ 倍され，そのあと g によって局所的にほぼ $g'(f(\alpha))$ 倍されるという事実を式で表現したものになっている．



6.3　2次元写像としての複素関数

複素数を定義する際，$z = x + yi \in \mathbb{C}$ は実2次元ベクトル $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の別名だとした．このとき，複素関数 $f : z \mapsto w = u + vi$ $(u, v \in \mathbb{R})$ はベクトル間の写像

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

の別名だと言える．関数 f と写像 F は，互いに表現（名前）は違っているが，平面の点を平面に写す，その実体は同じなのである．いくつか具体例を見てみよう：

例1（2乗関数）． $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $w = f(z) = z^2$ で定義する．このとき $f(x + yi) = (x^2 - y^2) + 2xyi$ であるから，複素関数 f は

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

であたえられる写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の別名である．

例2（指数関数）． $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $w = f(z) = e^z$ で定義する．このとき $f(x + yi) = e^x(\cos y + i \sin y)$ であるから，複素関数 f は

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$$

であたえられる写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の別名である．

例３（「ストレッチ」写像）． $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $w = g(z) = z + 2\bar{z}$ で定義する．このとき $f(x + yi) = (x + yi) + 2(x - yi) = 3x - yi$ であるから，複素関数 f は

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ -y \end{pmatrix}$$

であたえられる写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の別名である．

以上を踏まえて，次のような問題を考える：

> **問題：** 与えられた $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ がある正則関数 f の別名となっているための必要十分条件は何か ??

6.4　復習（2 次元写像の偏微分・ヤコビ行列）

上の問題に解答を与える前に，実 2 変数関数の微積分で学習した言葉を復習しておこう．

（ア）C^1 級関数． 関数 $u = u(x, y)$ が C^1 **級関数** (C^1-function) であるとは，定義域上で偏導関数 $(x, y) \mapsto u_x(x, y),\ u_y(x, y)$ が存在し，しかも連続であることをいう．

（イ）全微分． 関数 $u = u(x, y)$ は C^1 級であるとする．いま u の定義域から $(x, y) = (a, b)$ をとって固定し，

$$\Delta x \ := \ x - a, \quad \Delta y \ := \ y - b, \quad \Delta u \ := \ u(x, y) - u(a, b)$$

とおく．このとき，$\Delta x,\ \Delta y \approx 0$ （小さな実数）にたいし

$$\Delta u \ \approx \ P\,\Delta x + Q\,\Delta y$$

が成り立つ．ただし， $P = u_x(a, b)$，$Q = u_y(a, b)$ は実数の定数である．[1]

[1] これは「関数 $u = u(x, y)$ が C^1 級関数であれば，定義域上の任意の点で全微分可能」という性質を書き換えただけである．この式はテイラー展開の 1 次部分

$$u(x, y) \ = \ u(a, b) + u_x(a, b)\,(x - a) + u_y(a, b)\,(y - a) + \cdots$$

の書き換えでもある．すなわち，接平面の方程式である．

正確には，

$$\begin{cases} \Delta u \;=\; P\,\Delta x + Q\,\Delta y + R(\Delta x, \Delta y); \\ \text{ただし，}(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \text{ のとき} \dfrac{R(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \;\to\; 0 \end{cases}$$

と書くべきであるが，誤差項 $R(\Delta x, \Delta y)$ の部分を無視して（誤魔化して）書いたのが上のニョロニョロ（ $\approx$ ）の式である．

（ウ）ヤコビ行列． さて写像 $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ が与えられていて，関数 $u = u(x,y),\ v = v(u,v)$ がそれぞれ C^1 級であるとする．F の定義域から (a,b) を取って固定すると，上と同様の議論により

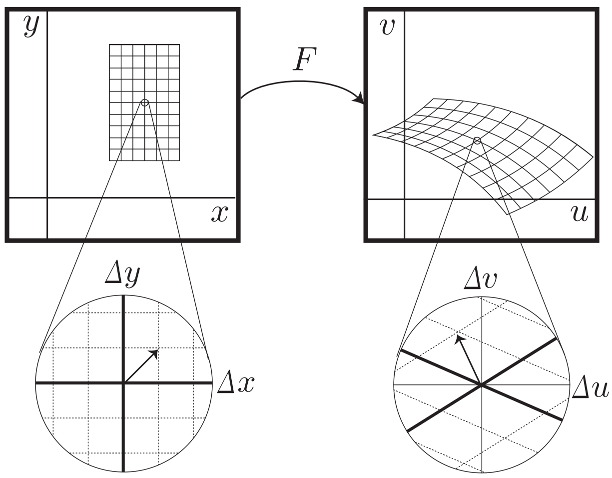
$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1\,\Delta x + Q_1\,\Delta y + R_1(\Delta x, \Delta y) \\ P_2\,\Delta x + Q_2\,\Delta y + R_2(\Delta x, \Delta y) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} R_1(\Delta x, \Delta y) \\ R_2(\Delta x, \Delta y) \end{pmatrix}}_{\text{誤差ベクトル}}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \approx \underline{\underline{\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}} \qquad (*)$$

が成立する．ただし

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix}$$

はいわゆる**ヤコビ行列** (Jacobian matrix) であり，$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ のとき $\dfrac{R_k(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0$ が成立する（$k = 1, 2$）．



近似式 $(*)$ は次のように解釈できる：「写像 $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ が点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を $F(a,b)$ に写す際，その局所的な作用を顕微鏡で観察すると，あたかも行列 $\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix}$ をかける線形写像のように見える（右図）．」

以上で準備終了．

6.5 問題の答え

いま，$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ がある正則関数 f の別名であったとしよう．このとき，f の局所的な作用は「ほぼ拡大・回転」になっているはずである．すなわち，上のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad : r \text{ 倍に拡大・}\theta\text{回転}$$

の形をしていなければならない．すなわち，

$$\begin{pmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \leftarrow \begin{pmatrix} \square & -\blacksquare \\ \blacksquare & \square \end{pmatrix} \text{の形}$$

が成り立つ．これより

$$\begin{cases} u_x = v_y & (= r\cos\theta) \\ v_x = -u_y & (= r\sin\theta) \end{cases}$$

が成り立つ．このとき $\alpha := a + bi$ での f の微分係数は r 倍拡大，θ 回転を表すから

$$f'(\alpha) = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = u_x + iv_x$$

を満たすはずである．とくに u, v は C^1 級であったから，導関数 $f'(x+yi)$ は $z = x+yi$ の関数として連続である．

以上の考察をもとに，次の定理を得る：

定理 6-2（コーシー・リーマンの方程式）． $D \subset \mathbb{C}$ とする．複素関数 $w = f(z)$ が $f(x+yi) = u + vi$ $(x,y,u,v \in \mathbb{R})$ と表されるとき，次は同値：

(a) f は D 上で正則．

(b) u, v は D 上で C^1 級かつ方程式 (CR) $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$ を満たす．

さらにこのとき，$f'(z) = u_x + iv_x$ が成り立つ．

方程式 (CR) を**コーシー・リーマンの方程式**（Cauchy-Riemann equation) とよぶ．

証明はあとまわしにして，具体例と応用例を見ておこう．

6.6 具体例

正則な例１（2 乗関数）． $w = f(z) = z^2$ はすでに $\mathbb{C}$ 上で正則な関数であることを示した（前回のプリント）．この関数は $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ の別名である．ヤコビ行列を計算すると，$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ であり，明らかに $u,\ v$ は C^1 級，かつコーシー・リーマンの方程式 (CR) を満たす．また，導関数も $f'(z) = 2z = 2x + 2yi = u_x + iv_x$ を満たす．

正則な例２（指数関数）． 次のことを示そう：「**指数関数** $w = f(z) = e^z$ **は** $\mathbb{C}$ **上で正則な関数であり，**$f'(z) = e^z$」．実際，この関数は $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$ の別名である．ヤコビ行列を計算すると，$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ となり，$u,\ v$ は C^1 級，かつコーシー・リーマンの方程式 (CR) を満たす．x, y は任意であるから，定理 6-2 より f は $\mathbb{C}$ 上正則といえる．導関数は $f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

このことから，次の公式を得る：

> **公式 6-3.** 指数・三角関数は複素平面上で正則であり，
> $$(e^z)' = e^z \qquad (\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z$$

三角関数は指数関数を用いて $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ などと書き表されるので，正則．導関数は合成関数の公式より得られる．

正則でない例１（「ストレッチ」写像）． $w = g(z) = z + 2\overline{z}$ の別名は $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である．ヤコビ行列を計算すると，$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり，$u,\ v$ は C^1 級だがコーシー・リーマンの方程式 (CR) を満たさない．よって定理 6-2 より f は $\mathbb{C}$ 上正則ではない．

この例の場合，g は実軸方向に 3 倍，虚軸方向に -1 倍であるから，平面は全体的に横にストレッチされる．したがって，局所的に「拡大・回転」とはなりえないのである．

正則でない例 2（2 乗っぽい関数）． 2 次元写像 が $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ で与えられているとしよう．これはある正則写像の別名になりうるだろうか？見た目 $f(z) = z^2$ の別名によく似ているが，正則関数ですらない．

実際，ヤコビ行列を計算すると，$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ であり，u, v は C^1 級だがコーシー・リーマンの方程式 (CR) を満たさない．よって定理 6-2 より f は $\mathbb{C}$ 上正則ではない．

講義ではパソコンでデモンストレーションする予定だが，この写像と $f(z) = z^2$ の写像としての実態は面白いほどに異なっている.「正則」という条件が，意外とデリケートな条件であることを示す好例である．

6.7　定理 6-2 の証明.

(a) $\Longrightarrow$ (b) の証明． $f : D \to \mathbb{C}$ は正則とし，$\alpha = a + bi \in D$ を固定する．また，

$$\varDelta z = \varDelta x + i\varDelta y = z - \alpha, \quad \varDelta w = \varDelta u + i\varDelta v = f(z) - f(\alpha), \quad f'(\alpha) = P + iQ$$

とおく.（もちろん $\varDelta x, \varDelta y, \varDelta u, \varDelta v, P, Q \in \mathbb{R}$.）微分可能性より，$\dfrac{\varDelta w}{\varDelta z} \to f'(\alpha)$ $(\varDelta z \to 0)$ であるが，これは

$$\gamma(\varDelta z) := \varDelta w - f'(\alpha)\,\varDelta z = (f(z) - f(\alpha)) - f'(\alpha)(z - \alpha)$$

とおいたとき，

$$\varDelta w \;=\; f'(\alpha)\varDelta z + \gamma(\varDelta z), \qquad \left|\frac{\gamma(\varDelta z)}{\varDelta z}\right| \to 0 \quad (\varDelta z \to 0)$$

が成り立つことを意味する．

左の式を実部と虚部に分けて「別名で」表現すると，

$$\begin{aligned}
\varDelta u + i\varDelta v &= \underline{\underline{(P + iQ)(\varDelta x + i\varDelta y)}} + \gamma(\varDelta x + i\varDelta y) \\
\Longleftrightarrow \quad \varDelta u + i\varDelta v &= \underline{\underline{(P\varDelta x - Q\varDelta y) + i(Q\varDelta x + P\varDelta y)}} + \gamma(\varDelta x + i\varDelta y) \\
\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \varDelta u \\ \varDelta v \end{pmatrix} &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varDelta x \\ \varDelta y \end{pmatrix}}} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\gamma(\varDelta x + i\varDelta y) \\ \operatorname{Im}\gamma(\varDelta x + i\varDelta y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このとき，$u(x,y)$, $v(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で偏微分可能であることを確認しよう．たとえば

$$\frac{u(a + \varDelta x, b) - u(a,b)}{\varDelta x} \to P \quad (\varDelta x \to 0)$$

を示す．$\Delta u = P\Delta x - Q\Delta y + \mathrm{Re}\,\gamma(\Delta x + i\Delta y)$ より，$\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ として

$$\frac{u(a+\Delta x, b) - u(a,b)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = P + \underbrace{\frac{\mathrm{Re}\,\gamma(\Delta x + i\cdot 0)}{\Delta x + i \cdot 0}}_{\text{誤差部分}}$$

ここで $\Delta z = \Delta x + i \cdot 0 \to 0$ と考えれば，（誤差部分）$= \left|\frac{\mathrm{Re}\,\gamma(\Delta z)}{\Delta z}\right| \le \left|\frac{\gamma(\Delta z)}{\Delta z}\right| \to 0$. したがって $u_x(a,b) = P$ を得る．同様に他の偏微分も計算できて，コーシー・リーマンの方程式 (CR) を満たすことがわかる．加えて，$f'(\alpha) = P + iQ = u_x + iv_x$ も確認できる．また，正則性の定義より導関数 $a + bi \mapsto f'(a+bi) = P + Qi$ は a, b に関して連続に変化するから，u, v は C^1 級である．以上で (b) が成り立つことが証明された．

(b) $\Longrightarrow$ (a) の証明． ほとんど，上の議論を逆にたどるだけである：(b) より，

$$\begin{aligned} P &:= u_x(a,b) = v_y(a,b) \\ Q &:= v_x(a,b) = -u_y(a,b) \end{aligned}$$

とおくことができる．u, v は C^1 級なので，

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}} + \begin{pmatrix} R_1(\Delta x, \Delta y) \\ R_2(\Delta x, \Delta y) \end{pmatrix}$$

と表される．この式を複素数で表現すると（2 重下線部には上と同様の計算を適用して），

$$\begin{aligned} \Delta u + i\Delta v &= \underline{\underline{(P+Qi)(\Delta x + i\Delta y)}} + \{R_1(\Delta x, \Delta y) + iR_2(\Delta x, \Delta y)\} \\ \Longleftrightarrow \quad \Delta w &= (P+Qi)\Delta z + \gamma(\Delta z). \end{aligned}$$

ただし $\gamma(\Delta z) = \gamma(\Delta x + i\Delta y) := R_1(\Delta x, \Delta y) + iR_2(\Delta x, \Delta y)$ と置いた．$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ のとき，すなわち $\Delta z \to 0$ のとき，

$$\frac{|\gamma(\Delta z)|}{|\Delta z|} = \frac{|R_1(\Delta x, \Delta y) + iR_2(\Delta x, \Delta y)|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \le \frac{|R_1(x,y)| + |R_2(x,y)|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0.$$

より，f は $z = \alpha$ で微分可能．このとき $f'(\alpha) = P + Qi = u_x(a,b) + v_x(a,b)i$ が成り立つが，u, v が C^1 級であることから，$\alpha = a + bi$ に関して連続．とくに α は任意なので，f は D 上正則となる． ■

第7講　コーシー・リーマンの応用・複素線積分（その１）

7.1　前回の復習

定理 6-2（再：コーシー・リーマンの方程式）．$D \subset \mathbb{C}$ とする．複素関数 $w = f(z)$ が $f(x+yi) = u + vi$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$ と表されるとき，次は同値：

(a) f は D 上で正則.

(b) u, v は D 上で C^1 級かつ方程式 (CR) $\begin{cases} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{cases}$ を満たす.

さらにこのとき，$f'(z) = u_x + iv_x$ が成り立つ.

方程式 (CR) をコーシー・リーマンの方程式（Cauchy-Riemann equation) とよぶ.

7.2　コーシー・リーマンの応用

上の定理の応用として，次の三つの例題を解いてみよう.（以下 $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ とする.）

問題（ア）． $f(x+yi) = u+vi$ が正則関数であり，かつ実部 $u = u(x, y)$ が $u = y^3 - 3x^2y$ をみたすとき，$v = v(x, y)$ を定めよ．

問題（イ）． $f(x+yi) = u+vi$ が正則関数であり，かつ実部 $u = u(x, y)$ が定数関数であるとき，f 自身も定数関数であることを示せ.

問題（ウ）． 関数 $f(x+yi) = u+vi$ が $u = u(x, y) = x^2 + y^2$ を満たすとき，f は正則関数ではないことを示せ.

解答（ア）． (CR) より $u_x = -6xy = v_y \quad \cdots(1)$ かつ $u_y = 3y^2 - 3x^2 = -v_x \quad \cdots(2)$ が成り立つ．(1) 式において v を y で積分すれば，$v = -3xy^2 + g(x)$ の形だとわかる．

ただし，$g(x)$ は x だけの関数である．この式を x で偏微分すると $v_x = -3y^2 + \frac{d}{dx}g(x)$ となるから，(2) 式と比較して $\frac{d}{dx}g(x) = 3x^2$ を得る．よって $g(x) = x^3 + C$ （C は実数の定数）．したがって求める v は $\underline{v = -3xy^2 + x^3 + C \ (C \in \mathbb{R}) \text{ の形}}$ であることが必要．

念のために十分性も確認しておこう．逆に v が上の形のとき，u, v は C^1 関数であり，(CR) も満たす．よって f は正則である． ■

注意． 実は $f(z) = i(z^3 + C)$ $(C \in \mathbb{R})$ である．

解答（イ）のスケッチ． u が定数であることから，(CR) より $u_x = 0 = v_y$ かつ $u_y = 0 = -v_x$．よって（ア）と同様の議論により，$v = C$ $(C \in \mathbb{R})$ の形でなくてはならない．すなわち，$f = u + vi$ 自体が定数関数となる． ■

解答（ウ）のスケッチ． 背理法を用いる：f が正則だと仮定すると，(CR) より $u_x = 2x = v_y \quad \cdots (1)$ かつ $u_y = 2y = -v_x \quad \cdots (2)$ でなくてはならない.（ア）と同様の議論を用いると，(1) 式より $v = 2xy + g(x)$ の形でなくてはならないが，このとき $v_x = 2y$ となり (2) に矛盾する． ■

問題（ア）と（イ）から,「正則関数の虚部は実部に強く依存している」ということがわかる．ちなみに $f(z)$ の代わりに $if(z)$ を考えると実部と虚部の役割は入れ替わってしまうから，一般に

> 正則関数の実部と虚部は互いに強く制限しあっている！

という事実が浮かび上がってくる．さらに（ウ）から，

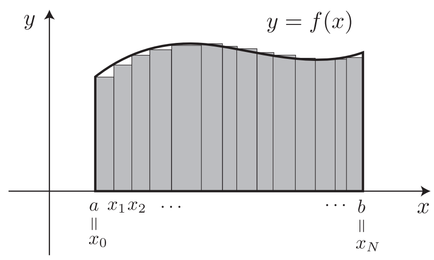
> 正則関数の実部と虚部となりうる関数は限られている！

ということも示唆される．じつは，正則関数の実部と虚部のペアは「互いに共役な調和関数」とよばれる特殊な関数たちであることが知られているのだが，この講義ではこれ以上の深入りは避けよう．

7.3 複素線積分

積分とは何だったか. これから複素関数の積分を考えたいのだが，その前に実関数の普通の積分（いわゆる「リーマン積分」）が何だったかを思い出しておこう.

$y=f(x)$ を区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする．このとき，積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とは「$y=f(x)$ と $y=0$ で囲まれる部分の（符号つき）面積」であって，それを「短冊」で近似した面積和の，短冊を細くしていった極限値であった（右図）.

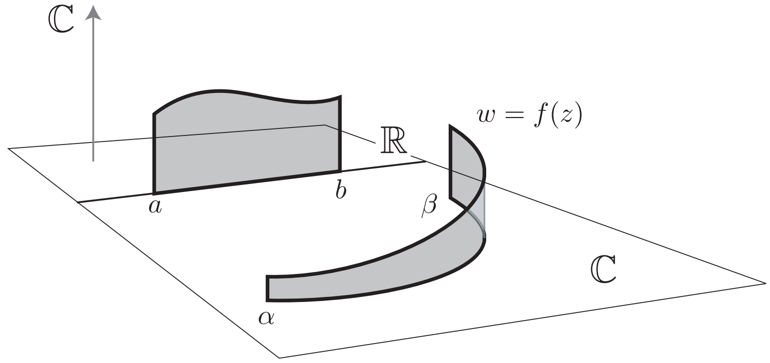


もうすこし具体的にいうと，区間 $[a,b]$ に分割点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ をとるとき，有限和

$$\sum_{k=0}^{N} f(x_k)(x_{k+1}-x_k)$$

は短冊の面積の総和であり，積分の近似値を与える．さらに $N\to\infty$ として $|x_{k+1}-x_k|$ の最大値を 0 に近づけると，それが積分値に収束するのであった.

以下では，同じことを複素数で考える．ただし，実数から複素数に世界が広がった分，積分の「経路」にもかなり自由度が生じる．たとえば，実数 a から b へ進む経路は実軸上に制限されない．より一般に，複素数 α から β を結ぶあらゆる曲線に沿って積分を考えることになる．下の図は，その「気分」を表現したものである.



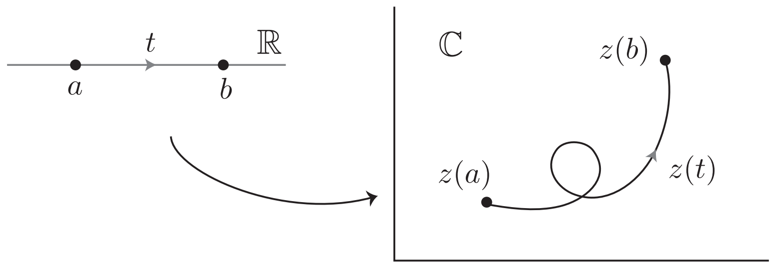
7.4 用語の定義

（ア）． 複素平面上の集合 C が**曲線** (curve) であるとは，ある適当な連続関数 $x = x(t),\ y = y(t) \in \mathbb{R}$ によって

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [a,b]\}$$

と表されることを言う．とくに断らないかぎり，C には t の増加方向にあわせた**向き** (orientation) をあわせて考えることにする．また，$z(a)$ を C の**始点** (initial point)，$z(b)$ を**終点** (terminal point) とよぶ．

曲線は，時刻 a に始点を出発し，時刻 b に終点に到着する鉄道路線のようなものだと考えればよい．



（イ）． $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ の別名であったから，$z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$ はベクトル $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ の別名である．関数 $x,\ y$ がともに t について C^1 関数であるとき，**速度ベクトル**

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

を考えることができる．これがゼロベクトルにならないとき，C は**滑らかな曲線**とよばれる．

以下，曲線 C といえば「滑らかな曲線」であると仮定しよう．すなわち，鉄道路線 C は始点から終点まで停車することなく進むものとする．

（ウ）． 曲線 $C: \ z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t \in [a,b])$ の**分割** (partition) とは，$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$ となる「時刻」 $\{t_k\}_{k=0}^N$ を選んで得られる C 上の「分割点」の集合 $\{z(t_k)\}_{k=0}^N$ のことをいう．

曲線 C は特急列車であり，途中の駅をすべて通過する．それぞれの駅 $z_k := z(t_k)$ の通過時刻が t_k だというわけ．

7.5 複素線積分

$D \subset \mathbb{C}$ とし，$f : D \to \mathbb{C}$ を連続な関数とする．D 内に曲線 C とその分割 $\Delta := \{z_k = z(t_k)\}_{k=0}^{N}$ が与えられているとしよう．

このとき，関数 f の分割 Δ に関する**リーマン和** (Riemann sum) $\Sigma(f, \Delta)$ を

$$\Sigma(f, \Delta) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

によって定義する．ただし，ζ_k は各 k にたいし $t_{k-1} \leq s_k \leq t_k$ となる s_k を自由に選び，$\zeta_k := z(s_k)$ として定まる C 上の点とする．これは駅と駅の間に，任意の通過点を「代表点」として選ぶことに対応している．また，積 $f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$ は実積分における「短冊の面積」に対応する．いわば「仮想短冊の面積」である．

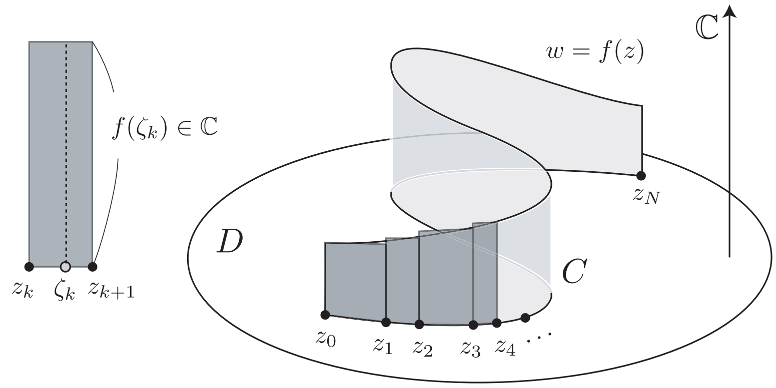


図 7.1: 「仮想短冊」と複素積分のリーマン和による近似（のイメージ）

いま，ある複素数 I が存在して，

> 分割幅の最大値 $\max_{0 \leq k \leq N-1} |z_{k+1} - z_k|$ さえ十分に小さければ,「代表点」$\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N\}$ の取り方によらず $|I - \Sigma(f, \Delta)|$ はいくらでも 0 に近い値となる

とき，この複素数 I を

$$\int_C f(z)\, dz$$

と表し，**関数 f の曲線 C に沿った（線）積分**という．これは実関数の積分の自然な拡張になっている．実際，C が $z(t) = t$ $(t \in [a, b])$ と表され $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ であれば，

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; \int_a^b f(t)\, dt \;\in\; \mathbb{R}$$

である．[1]

次回はこの積分値の具体的な計算方法について考えていこう．

[1]それでもピンとこない人は，微積分の教科書を開いて，実関数の積分の定義と比較してみるとよい．

第8講　コーシーの積分定理

8.1　複素線積分の具体的な計算

前回，複素関数の線積分を「『仮想短冊』の面積和の極限」と定義したが，これでは積分の値を計算できる気がしない．この点を解消するためには，複素線積分を計算可能な積分に置き換える必要がある．

具体的な計算公式 8-1. $D \subset \mathbb{C}$ とし，$f : D \to \mathbb{C}$ を連続関数とする．このとき，滑らかな曲線 $C : z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$ に沿った複素線積分は

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

で与えられる．ただし，$z'(t) = \dfrac{d}{dt}z(t)$ とする．

念のため，$z'(t) = \dfrac{dz}{dt}(t)$ についてもう少し解説しておこう．この量は C 上の点 $z(t)$ における時間パラメーター t に関する速度であり，$\dfrac{dz}{dt}(t) := \displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$ によって定義される．また，実部と虚部にわけて $\dfrac{dz}{dt}(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) + i\dfrac{dy}{dt}(t)$ のように書けば，原理的には実関数の知識のみで計算できる量である．

上の公式は実部と虚部にわけて，xy 平面上の線積分に帰着させることで容易に正当化できる．じつは，上の公式を「左辺を右辺で定義する」と解釈して，複素線積分の定義に代えることもできる．最終的に得られる値は同じになるからである．

簡単な具体例を計算してみよう．

具体例その１． 関数を $f(z) = z^2$ とし，曲線 $C : z = z(t) = t + ti$ $(0 \leq t \leq 1)$ に沿った複素線積分を計算してみよう．$z'(t) = 1 + i$ より，

$$\int_C z^2\,dz \;=\; \int_0^1 (t+ti)^2 \cdot (1+i)\,dt \;=\; (1+i)^3 \int_0^1 t^2\,dt \;=\; \frac{(1+i)^3}{3}.$$

ここで，この値は $\frac{z(1)^3}{3} - \frac{z(0)^3}{3}$ と一致することに注意しておこう．これにはちゃんと意味がある．

具体例その２． 複素数 α を中心とする半径 $r > 0$ の円を

$$C(\alpha, r) \ := \ \left\{ z(t) = \alpha + re^{it} \mid 0 \le t \le 2\pi \right\}$$

によって定める．向きは反時計回り（左回り，t の増加方向）である．次の公式はきわめて重要なので，計算方法も含めて完全にマスターすること：

> **基本公式 8-2.** $m \in \mathbb{Z}$, $C = C(\alpha, r)$ とするとき，<u>$r > 0$ の値によらず</u>次が成り立つ：
>
> $$\int_C (z-\alpha)^m \, dz \ = \ \begin{cases} 0 & (m \neq -1) \\ 2\pi i & (m = -1) \end{cases}$$

基本公式 8-2 の証明. $z(t) = \alpha + re^{it}$ より $z'(t) = ire^{it}$. よって

$$\begin{aligned} \int_C (z-\alpha)^m \, dz \ &= \ \int_0^{2\pi} (re^{it})^m \cdot (ire^{it}) \, dt \ = \ ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} \, dt \\ &= \ \begin{cases} ir^{m+1} \left[\dfrac{1}{(m+1)i} e^{i(m+1)t} \right]_0^{2\pi} & = 0 \quad (m \neq -1) \\ i \displaystyle\int_0^{2\pi} 1 \cdot dt & = 2\pi i \quad (m = -1). \end{cases} \end{aligned}$$

■

上の計算では，複素数の指数関数についてちょっと大胆な計算をしている：

(i) $z(t) = \alpha + re^{it} \implies z'(t) = ire^{it}$.

(ii) $m + 1 = p \neq 0$ のとき $\displaystyle\int_a^b e^{ipt} \, dt = \left[\frac{1}{ip} e^{ipt} \right]_a^b = \frac{1}{ip} \Big(e^{ipb} - e^{ipa} \Big)$.

複素数でもこんな計算をしていいのか，ちょっと不安になるぐらいが正常な感覚ではなかろうか．これらは実部と虚部に分けて書くことで正当化できる．たとえば (i) は，$z(t) = (\alpha + r\cos t) + ir\sin t$ より，$z'(t) = -r\sin t + ir\cos t = ir(\cos t + i\sin t) = ire^{it}$. (ii) についても，素直に実部と虚部に分けることで

$$\int_a^b e^{ipt} \, dt = \int_a^b (\cos pt + i \sin pt) \, dt = \left[\frac{1}{p} (\sin pt - i\cos pt) \right]_a^b = \left[\frac{1}{ip} e^{ipt} \right]_a^b.$$

■

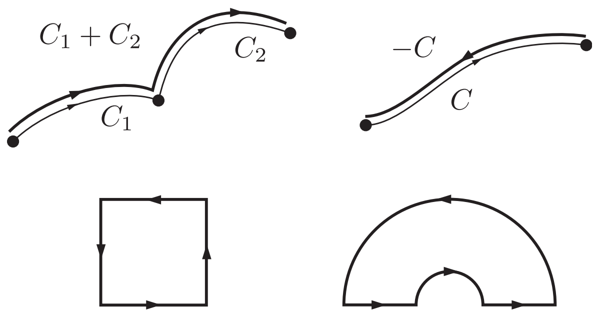
8.2 その他の計算公式

計算に必要となる複素積分の基本性質をまとめておこう．その前に，曲線について次の記号を導入する：

- C_1, C_2 を滑らかな曲線とするとき，C_1 にそって進んだあとさらに C_2 にそって進む経路を記号 $C_1 + C_2$ で表す．鉄道で言えば「乗り継ぎ」である．[1]

- 曲線 C が**区分的に滑らか** (piecewise smooth) であるとは，C が有限個の滑らかな曲線 $C_1,\ C_2, \ldots,\ C_N$ を順につなぎ合わせたものになっているときをいう．このとき，$C = C_1 + \cdots + C_N$ と表す.

- 区分的に滑らかな曲線 C にたいし，これを逆方向へ進む曲線を $-C$ と表す．鉄道で言えば，上り線にたいする下り線である.



以下，曲線といえば区分的に滑らかな曲線を意味することにする.

> **複素積分の性質 8-3.** $f,\ g$ が曲線 C 上で連続な複素関数であるとき，次が成り立つ：
>
> (1) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ にたいし，$\displaystyle\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz \;=\; \alpha \int_C f(z)\, dz + \beta \int_C g(z)\, dz.$
>
> (2) $C = C_1 + C_2$ のとき $\displaystyle\int_C f(z)\, dz \;=\; \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz.$
>
> (3) $\displaystyle\int_C f(z)\, dz \;=\; -\int_{-C} f(z)\, dz.$
>
> (4) $\ell(C)$ を C の長さ，C 上で $|f(z)| \le M$ のとき，$\displaystyle\left|\int_C f(z)\, dz\right| \;\le\; M\,\ell(C).$

[1] ふつうは C_1 の終点が C_2 の始点と一致している場合を考える．一致しない場合もある.

証明のスケッチ． (1) から (3) は積分の定義よりほとんど明らか．(4) の証明：C の任意の分割 $\Delta = \{z_k\}$ とその中間の点 $\{\zeta_k\}$ にたいし，そのリーマン和の絶対値について

$$|\Sigma(f,\Delta)| = \left|\sum_k f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})\right| \ \le\ \sum_k |f(\zeta_k)||z_k - z_{k-1}| \ \le\ M\sum_k |z_k - z_{k-1}| \ \le\ M\ell(C)$$

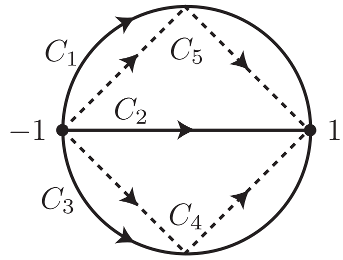
が成り立つ．（ここで，最初の不等号では三角不等式を用いた．また右端の不等号は，分割で C を折れ線近似したその長さと C の長さを比較したもの．）上の評価式はすべての分割について成立するので，$\delta(\Delta) \to 0$ とした極限をとって (4) を得る． ■

8.2.1 コーシーの積分定理

積分の経路と積分値：z^m vs. $\overline{z}^m$． 複素線積分の値は，当然ながら経路に依存する．たとえば $z = -1$ から $z = 1$ に進む曲線 C_i をいくつか考えて，積分 $\int_C z^m\,dz$ と $\int_C \overline{z}^m\,dz$ が曲線にどのように依存するか計算してみよう．話を簡単にするために，m は負でない整数とする．（発展問題 8-1 はまさにこの計算である．）

たとえば曲線として，次の 5 つを選んでみる：

$$\begin{aligned}
C_1 &: z = z(t) = e^{(\pi - t)i} && (t \in [0,\pi])\\
C_2 &: z = z(t) = t && (t \in [-1,1])\\
C_3 &: z = z(t) = e^{ti} && (t \in [-\pi,0])\\
C_4 &: z = z(t) = t + (|t|-1)i && (t \in [-1,1])\\
C_5 &: z = z(t) = t + (1-|t|)i && (t \in [-1,1])
\end{aligned}$$



ただし曲線の向きは t の増加方向に対応させる．また便宜的に

$$\int_{C_k} := \int_{C_k} z^m\,dz, \qquad \int_{C_k}' := \int_{C_k} \overline{z}^m\,dz \qquad (k = 1,2,3,4,5)$$

と表すことにしよう．

まずは z^m について，これらの積分値をがんばって計算してみよう．すると，次のように一致してしまう！

$$\int_{C_1} = \int_{C_2} = \int_{C_3} = \int_{C_4} = \int_{C_5} = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数}) \end{cases}.$$

個々の積分は「仮想短冊」の和の極限であったから，これらの積分が一致する根拠は（少なくとも積分の定義の中には）見当たらない．[2]

しかし，この結果と「複素積分の性質 8-3 (1)」から，任意の多項式 $P(z) = a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0$ について $\displaystyle\int_{C_1} P(z)\,dz = \int_{C_2} P(z)\,dz = \cdots = \int_{C_5} P(z)\,dz$ が成立してしまうのだから，状況はもっと複雑である．高次の多項式をもちいれば，関数の挙動（「仮想短冊」の形）はいくらでも変化させることができるからである．

一方 $g(z) = \overline{z}^m$ の場合を計算すると，$\displaystyle\int_{C_1}' = \int_{C_3}'$ は成り立つものの，$\displaystyle\int_{C_2}, \int_{C_4}, \int_{C_5}$ はそれぞれ異なる値をもつ．したがって，上のような関数の一致はどんな関数でも成り立つ，という現象ではなさそうだ．

これを説明するのが，複素関数論のクライマックスとも言える，次の定理である：

コーシーの積分定理 (Cauchy's Integral Theorem): D を $\mathbb{C}$ 内の <u>単連結領域</u> とし，C を D 内の <u>単純閉曲線</u> とする．このとき，関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が正則であれば，

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 0.$$

用語の定義． 先走って定理を述べてしまったので，下線部の用語を定義しておこう．

- 曲線 C が**閉曲線** (closed curve) であるとは，始点と終点が一致することをいう．すなわち C : $z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ と表されるとき，$z(a) = z(b)$ が成り立つことをいう．

- さらに C が自己交差しない閉曲線であるとき，**単純閉曲線** (simple closed curve, 略して s.c.c.) とよばれる．すなわち C : $z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ と表されるとき，$a < t_1 < t_2 < b \implies z(t_1) \neq z(t_2)$ が成り立つことをいう．

- $\mathbb{C}$ 内の部分集合 D が**領域** (domain) であるとは，「ひとつながり」の開集合であることをいう．すなわち，D 内の任意の 2 点が D 内を通る折れ線で結べるような開集合であることを言う．

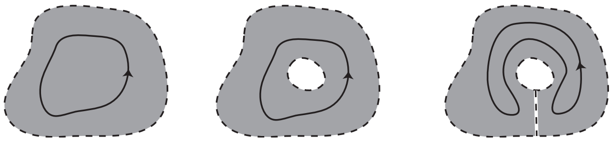
- $\mathbb{C}$ 上に単純閉曲線 C が与えられたとき，$\mathbb{C} - C$ はふたつの領域からなる（「Jordan の曲線定理」[3]）．そのうち有界なほうを C の**内部** (interior) とよび，有界でない

[2] ちなみに $\int_{C_3+(-C_1)} = \int_{C(0,1)} = 0$ より，$\int_{C_3} = -\int_{-C_1} = \int_{C_1}$ となる．

[3] これは自明（あたりまえ）ではなく，ちゃんと証明がつけれられている．ちなみにドーナツの表面 T の場合，うまく単純閉曲線 C をとると $T - C$ がふたつに分割されないようにできる．

ほうを C の**外部** (exterior) とよぶ.

- いま，領域 $D \subset \mathbb{C}$ が**単連結** (simply connected) であるとは，D 内の任意の単純閉曲線 C について，その内部が D に含まれることをいう．ようするに，D に穴があいてないことをいう.



左は文句なしに単連結，中央は単連結でない，しかし右のように切り込み（スリット）をいれたものは単連結.

コーシーの積分定理の応用例. 多項式 $P(z)$ を任意にとれば，これは $D = \mathbb{C}$（明らかに単連結）において正則な関数である．先ほどの曲線 C_1 と C_2 にたいし $C = C_2 + (-C_1)$ とすれば，これは $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線である．コーシーの積分定理より，

$$\int_{C_2+(-C_1)} = \int_C = 0 \iff \int_{C_2} = -\int_{-C_1} = \int_{C_1}$$

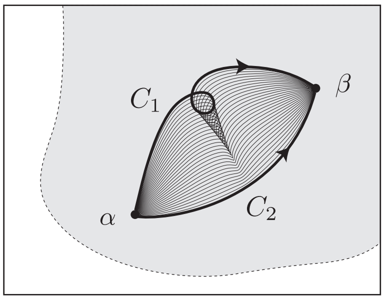
となり，先ほどの不思議な一致現象が説明される．この結果を一般化したものが，次の定理である：

> **定理 8-4 (積分路の変形)**：D を $\mathbb{C}$ 内の <u>単連結領域</u> とし，関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は正則とする．このとき，任意の $\alpha, \beta \in D$ および任意の α から β への曲線 $C_1,\ C_2 \subset D$ にたいし，
>
> $$\int_{C_1} f(z)\,dz \ = \ \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

これは『<u>単連結領域</u> 上の正則関数の線積分は端点だけで値が決定される』，もしくは『端点さえ固定していれば積分路は自由に変形してよい』，という強烈な結果である．[4] ここで <u>単連結領域</u> と下線を引いて強調しているのは，この性質がコーシーの定理にとって本質的だからである．この点については次回くわしく見ていこう.

定理 8-4 の証明（スケッチ）. C_i を交差点（自己交差する点も含む）で分割すれば，結局は $C_1 + (-C_2)$ が単連結領域を囲む場合に帰着される．このとき，積分定理 A より $\displaystyle\int_{C_1+(-C_2)} = 0 \iff \int_{C_1} = -\int_{-C_2} = \int_{C_2}$. ■

[4] 変形というのは，連続的に変形させることを意味する．ちなみに，この系における C_1 たちは自己交差してもよい.



D の中にあれば，積分路を C_1 から C_2 へ図のように連続的に変化させても積分の値は変わらない．むしろ，このような連続的な変形が存在することが証明の鍵になる．

第9講　積分定理の応用

9.1　前回の復習

基本公式 1． $m \in \mathbb{Z}, C = C(\alpha, r)$ とするとき，$\underline{r > 0 \text{ の値によらず}}$ 次が成り立つ：

$$\int_C (z-\alpha)^m\,dz \;=\; \begin{cases} 0 & (m \neq -1) \\ 2\pi i & (m = -1) \end{cases}$$

コーシーの積分定理 (Cauchy's Integral Theorem): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし，C を D 内の 単純閉曲線 とする．このとき，関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が 正則 であれば，

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 0.$$

注意． D が 単連結領域 であるという仮定は絶対に必要．たとえば，単連結でない領域 $D = \{1 < |z| < 3\}$ において正則な関数 $f(z) = 1/z$ を考えよう．このとき，単純閉曲線 $C = C(0,2)$ にたいし上の基本公式 1 を用いれば，$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$ となる．

系（積分路の変形）：D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし，関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は 正則 とする．このとき，任意の $\alpha, \beta \in D$ および任意の α から β への曲線 $C_1,\ C_2 \subset D$ にたいし，

$$\int_{C_1} f(z)\,dz \;=\; \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

補足（補講 1 も参照せよ）． 系（積分路の変形）の仮定のもと，$\alpha \in D$ を固定し $z \in D$ を変数とするとき，α から z へいたる D 内の任意の曲線 C_z を選ぶことで，関数

$$F(z) \;:=\; \int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta$$

が定まる．この積分値は C_z に依存せずに端点だけで決定されるので，そのような場合に限り，$F(z) = \displaystyle\int_\alpha^z f(\zeta)\,d\zeta$ のように書くことも許される．また，$F(z)$ は $F(\alpha) = 0$ かつ $F'(z) = f(z)$ をみたす D 上の正則関数であることも証明できる．

一般に，関数 $f(z)$ にたいし，$G'(z) = f(z)$ をみたす関数 G を f の**原始関数** (primitive function) とよぶ．上の $F(z)$ を用いれば，原始関数は常に $G(z) = F(z) + (\text{定数})$ の形であることがわかる．とくに

$$\int_{\alpha}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \;=\; F(z) - F(\alpha) \;=\; G(z) - G(\alpha)$$

が成り立つから，積分の計算にも応用できる．たとえば z^2 は（単連結である）複素平面上で正則かつ $z^3/3$ を原始関数にもつから，C を 0 から $1+i$ へいたる任意の曲線（好きなだけ回り道してよい）とするとき，

$$\int_C z^2\,dz \;=\; \int_0^{1+i} z^2\,dz \;=\; \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+i} \;=\; \frac{(1+i)^3}{3}$$

といった計算が成立する．あくまで 単連結領域上の正則関数 に限って，の話だが．

9.2 基本公式 2 と積分計算への応用

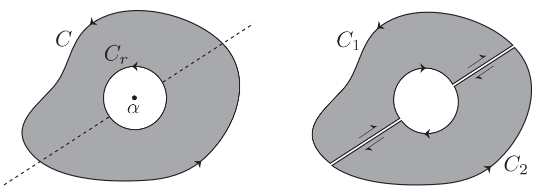
基本公式 2 任意の単純閉曲線 C にたいし，次が成り立つ：

$$\int_C \frac{1}{z-\alpha}\,dz \;=\; \begin{cases} 2\pi i & （\alpha \text{が} C \text{の内部にあるとき}） \\ 0 & （\alpha \text{が} C \text{の外部にあるとき}） \end{cases}$$

ちなみに α が C 上にあるときは，積分自体が定義できない．

基本公式 2 の証明． α が C の外部にあるときは，C の内部を少しだけ膨らませることで，C をふくむ単連結領域 D を見つけることができる．よってコーシーの積分定理より，$\displaystyle\int_C = 0.$

次に α が C の内部にあるときを考える．十分小さな $r > 0$ を固定すると，$C_r := C(\alpha, r)$ は C の内部にあるとしてよい．このとき，基本公式 1 より，$\displaystyle\int_{C_r} \frac{1}{z-\alpha}\,dz = 2\pi i.$

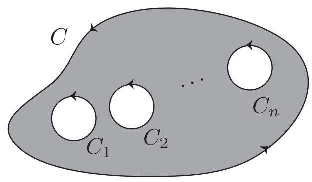


いま，図のように C の内部を分割して，単純閉曲線 C_1 と C_2 を考えよう．α はこれら C_1, C_2 の外部にあるから，上と同様の議論により $\displaystyle\int_{C_1} = \int_{C_2} = 0$. また切り込みをいれた部分の積分は相殺されるから，

$$0 \;=\; \int_{C_1} + \int_{C_2} \;=\; \int_C + \int_{-C_r} \;\Longleftrightarrow\; \int_C \;=\; \int_{C_r} \;=\; 2\pi i.$$

■

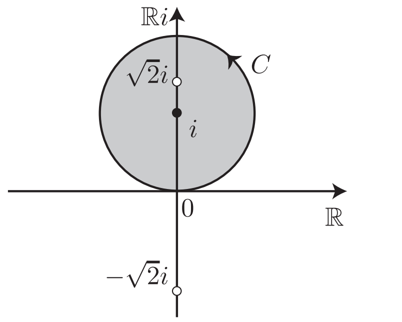
注意． 一般に単純閉曲線 C と $C_1, \ldots C_n$ が右図のように与えられているとき，影のついた部分で正則な関数の積分は



$$\int_C = \int_{C_1} + \cdots + \int_{C_n}$$

をみたす．証明は単純で，上の応用例のように全体を一刀両断する切り込みを入れればよい．

基本公式 2 の応用． $C = C(i, 1)$ （左回り）とするとき，



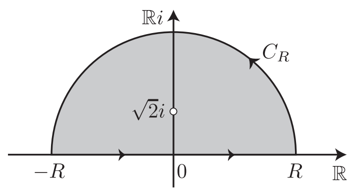
$$\int_C \frac{1}{z^2+2}\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が成り立つことを示そう．被積分関数を $\dfrac{1}{z^2+2}$ $= \dfrac{1}{2\sqrt{2}i}\left(\dfrac{1}{z-\sqrt{2}i} - \dfrac{1}{z+\sqrt{2}i}\right)$ のように変形すれば，

$$\int_C \frac{1}{z^2+2}\,dz = \frac{1}{2\sqrt{2}i}\left(\int_C \frac{1}{z-\sqrt{2}i}\,dz - \int_C \frac{1}{z+\sqrt{2}i}\,dz\right).$$

$\sqrt{2}i$ は C の内部，$-\sqrt{2}i$ は C の外部にあるので，基本公式 2 より求める積分は $\dfrac{1}{2\sqrt{2}i}(2\pi i - 0) =$ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

発展：「基本公式 2 の応用」のさらなる応用． 実 1 変数の広義積分に応用して，



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が成り立つことを示そう．[a]

[a] この積分自体は $x = \sqrt{2}\tan\theta$ と置くことで簡単に求めることができる．

$R > \sqrt{2}$ とし $I_R = \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+2}\,dx$ とおく．さらに，$C_R := \left\{Re^{it} \mid t \in [0, \pi]\right\}$ （半円）とおく．このとき，上と同様の議論によって

$$\int_{C_R} \frac{1}{z^2+2}\,dz + I_R = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ．いま $R > \sqrt{2}$ より，$z \in C_R$ のとき

$$\left|\frac{1}{z^2+2}\right| \leq \frac{1}{|z|^2-2} = \frac{1}{R^2-2} > 0$$

であるから，[1] 前回のプリント・複素積分の性質 (4) より，

$$\left|\int_{C_R} \frac{1}{z^2+2}\,dz\right| \leq \frac{1}{R^2-2}\cdot \ell(C_R) = \frac{\pi R}{R^2-2} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

が成り立つ．したがって $I_R \to \pi/\sqrt{2}$.

[1] 一般に $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ にたいし三角不等式 $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ が成り立つのであった．この場合 $\alpha = z^2$, $\beta = 2$ として適用．

9.3 コーシーの積分定理の証明.

$\mathbb{R}^2$ 上の線積分については既知として話を進める．あとに続く「平面ベクトル解析に関する補遺」も参照のこと．証明は3ステップ（ア〜ウ）に分かれる：

（ア） $\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}^2$ へ．

> **命題1．** 曲線 C 上で定義された連続関数 $f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)i$ にたいし，次が成り立つ：
> $$\int_C f(z)\,dz \;=\; \Bigl(\int_C u\,dx - v\,dy\Bigr) + i\Bigl(\int_C v\,dx + u\,dy\Bigr).$$

括弧内の積分はそれぞれ実の線積分である．

証明． 曲線 C の分割 $\Delta = \{z_k\}$ にたいし，リーマン和 $\sum_k f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ を考える．ただし，ζ_k は C 上で z_{k-1} と z_k の間にある点である．いま $f(\zeta_k) = u_k + v_k i$ および $z_k = x_k + y_k i$ のように実部と虚部に分けると，

$$\sum_k f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \;=\; \sum_k (u_k + v_k i)\{(x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})\}$$

が成立する．さらに $\mathit{\Delta} x_k = x_k - x_{k-1}$, $\mathit{\Delta} y_k = y_k - y_{k-1}$ とおくと，この式は

$$\sum_k (u_k \mathit{\Delta} x_k - v_k \mathit{\Delta} y_k) + i\sum_k (v_k \mathit{\Delta} x_k + u_k \mathit{\Delta} y_k)$$

となる．ここで $\max|\mathit{\Delta} z_k| \to 0$ となるよう分割 Δ を変化させると，$\max\{|\mathit{\Delta} x_k|, |\mathit{\Delta} y_k|\} \to 0$ であるから，線積分の定義より

$$\sum_k (u_k \mathit{\Delta} x_k - v_k \mathit{\Delta} y_k) \;\to\; \int_C u\,dx - v\,dy$$

が成り立つ．虚部についても同様に線積分に収束し，命題の等式を得る． ■

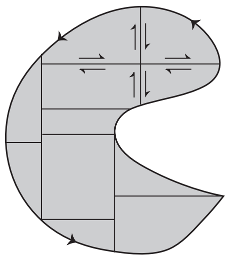
注意． 変数変換の公式 $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$ も，線積分の変数変換公式 $\displaystyle\int_C u(x,y)\,dx = \int_a^b u(x(t), y(t))\cdot x'(t)\,dt$ などを用いて正当化される．

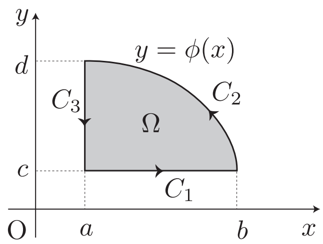
（イ） グリーンの定理.

> **グリーンの定理** (Green's Theorem) C を R^2 内の単純閉曲線とし，その内部を Ω と表す．関数 $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ が $C \cup \Omega$ を含む開集合上で C^1 級であるとき，次が成り立つ：
> $$\int_C P\,dx + Q\,dy \;=\; \iint_\Omega (-P_y + Q_x)\,dx\,dy$$

この定理もコーシーの定理と同様の不思議に満ちている．左辺は線積分は曲線上だけを歩いて計算できる積分値である．それが右辺の，定義上は曲線の内部の領域をくまなく測量しなければ得られないはずの面積分の値と一致してしまうのである．

証明． 必要ならタテ・ヨコの線分で分割して，図の右側のような領域（$C = C_1 + C_2 + C_3$）について定理を証明すればよい．なぜなら，分割線上の積分は相殺されるし，領域を分割したら面積分も分割されるからである．





図のような領域は縦線集合であり横線集合でもあるから，積分の計算と相性がよい．いま，C_2 のグラフは $y = \phi(x)$ と表されるとしよう．このとき，たとえば $P(x,y)$ の場合，

$$
\begin{aligned}
\int_C P\,dx &= \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx \\
&= \int_a^b P(x,c)\,dx + \int_b^a P(x,\phi(x))\,dx + \int_a^a P(a,y)\,dx \\
&= -\int_a^b \underline{\{P(x,\phi(x)) - P(x,c)\}}\,dx + 0 \\
&= -\int_a^b \underline{\left\{\int_c^{\phi(x)} P_y(x,y)\,dy\right\}}\,dx \\
&= -\iint_\Omega P_y\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

となる．下線部では x を固定して，いわゆる微積分の基本定理を用いた．同様の計算で

$$\int_C Q\,dy = \iint_\Omega Q_x\,dx\,dy$$

も得るから，グリーンの定理が成り立つ． ■

（ウ） $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{C}$ へ：積分定理の証明． いま単連結領域 D 上で正則な関数 f を $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ と実部・虚部に分ける．このとき u, v は D 上 C^1 関数かつコーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$ をみたす．

とくに C^1 性より，グリーンの定理が適用できる．C を D 内の任意の単純閉曲線とし Ω を C の内部とするとき，グリーンの定理に $(P,Q) = (u,-v)$ もしくは (v,u) と代入して

$$
\begin{aligned}
\int_C u\,dx - v\,dy &= \iint_\Omega (-u_y - v_x)\,dx\,dy \\
\int_C v\,dx + u\,dy &= \iint_\Omega (-v_y + u_x)\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

を得る．またコーシー・リーマンの方程式より，右辺の積分値はともに 0 となることがわかる．したがって命題 1 より，複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ は 0 ． ■

第10講　コーシーの積分公式とその応用

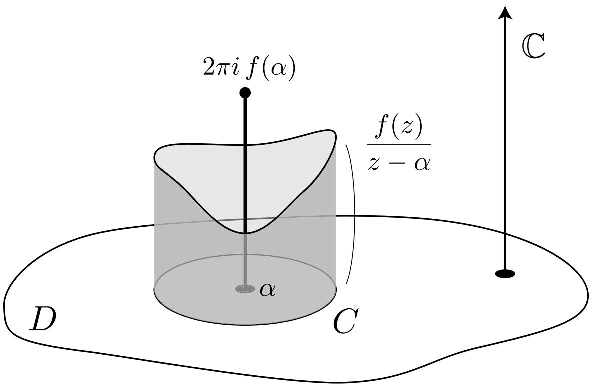
10.1　積分「公式」

コーシーの積分定理と同じ仮定のもと，つぎがなりたつ：

コーシーの積分公式 (Cauchy's Integral Formula): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし，C を D 内の 単純閉曲線 とする．関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が 正則 であれば，任意の $\alpha \in$ (C の内部) にたいし，

$$f(\alpha) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$$

C はいわば α を囲む閉曲線である．その上をぐるっと回って $f(z)/(z-\alpha)$ を積分すると $2\pi i f(\alpha)$ の値が得られる．したがって,「α を触らずに」$f(\alpha)$ の値が計算できてしまうのである．帽子から鳩が飛び出すような，不思議な「公式」である．[1]



証明． コーシーの積分定理より（もしくは基本公式 2 を証明したときと同じアイディアで），α の近くの十分小さな半径 $r > 0$ をもつ円 $C = C(\alpha, r)$ について証明すれば十分．このとき，基本公式 1 より

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz \ = \ \int_C \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz + \int_C \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz \ = \ 2\pi i f(\alpha) + \underline{\int_C \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz}.$$

[1] 積分「定理」と積分「公式」を混同しないように．

よって下線部が 0 となることを示せば十分である．$M(r) = \max_{z \in C} |f(z) - f(\alpha)|$ とおくと，f の連続性（正則なら連続）より $r \to 0$ のとき $M(r) \to 0$ となる．いま $z \in C$ のとき，$|z - \alpha| = r$ より，$\left|\dfrac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}\right| \le \dfrac{M(r)}{r}$ であるから，複素積分の性質 8-3(4) より

$$\underline{\int_C \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}\, dz} \;\le\; \frac{M(r)}{r} \cdot \ell(C) \;=\; 2\pi M(r) \to 0 \ (r \to 0)$$

半径 r は任意に小さく出来るので，下線の積分自体が 0 でなくてはならない． ■

積分計算への応用． $C = C(0, 2)$ として，次の積分値を求めてみよう．

(1) $I = \displaystyle\int_C \frac{z^2}{z - i}\, dz$ (2) $I' = \displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2 - 4z + 3}\, dz$

まず (1)：$D = \mathbb{C}$，$f(z) = z^2$, $\alpha = i$ としてコーシーの積分公式を適用する．実際，D は単連結領域であり f は D 上正則．$i \in$ (C の内部) であるから，

$$f(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2}{z - i}\, dz \iff I = 2\pi i f(i) = -2\pi i.$$

(2)：被積分関数 は $\dfrac{e^z}{(z-1)(z-3)}$ と変形できる．$z = 1$ と 3 で分母が 0 となってしまうが，C の内部にあるのは 1 だけである．そこで，$f(z) = \dfrac{e^z}{z - 3}$, $\alpha = 1$ としてコーシーの積分公式を適用する．D としては原点中心半径 2.5 の円板をとろう．これは C ふくむ単連結領域であり，その上で f は 正則．よって

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{(z-1)(z-3)}\, dz \iff I' = 2\pi i f(1) = 2\pi i \frac{e^1}{1 - 3} = -\pi e i.$$

10.2 微分可能性

コーシーの積分公式は，次のように拡張できる：

> **定理 10-1（微分可能性）**コーシーの積分公式と同じ仮定のもと，
>
> - f は D 上で何回でも微分可能であり，
> - 任意の $\alpha \in$ (C の内部) にたいし，
>
> $$f^{(n)}(\alpha) \;=\; \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}}\, dz.$$

微分の値が積分で計算できてしまうのだから，これも「鳩が出る」たぐいの定理である．

一般に正則関数とその定義域内の点 α があたえられたとき，その点を含む十分ちいさな円板 D をとれば定理 10-1 の仮定を満たすようにできる．したがって，

系 10-2（微分可能性） 正則関数は何回でも微分可能．

定理 10-1 の証明（スケッチ）． $n=0$ のときは積分公式そのものである．ここでは $n=1$ のときを証明しよう．$n \geq 2$ の場合は数学的帰納法を用いて，以下と同様の計算をすれば証明できる．$\Delta z \approx 0$ とするとき，$n=0$ での結果（積分公式そのもの）を用いて

$$\begin{aligned}\frac{f(\alpha+\Delta z)-f(\alpha)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C \frac{f(z)}{z-(\alpha+\Delta z)}\,dz-\int_C\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz\right\}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-\alpha-\Delta z)(z-\alpha)}\,dz\end{aligned}$$

よって $\Delta z \to 0$ とすれば $(*)$，$f'(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz.$ ■

注． $(*)$ において，積分内で極限を取る部分については正当化が必要である．ここでは，次の事実を用いている：「一般に，閉曲線 C 上で関数列 $g_n(z)$ $(n\in\mathbb{N})$ が $g(z)$ に一様収束しているとき，$\displaystyle\int_C g_n(z)\,dz \to \int_C g(z)\,dz$ が成り立つ．」

ただし「関数列 $g_n(z)$ が $g(z)$ に一様収束する」とは，$\displaystyle\max_{z\in C}|g_n(z)-g(z)| \to 0 \quad (n\to\infty)$ がなりたつときをいう．上の議論では，この条件が満たされているのである．

積分計算への応用（その２）． 再び $C=C(0,2)$ として，次の積分値を求めてみよう．

$$I=\int_C \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz$$

まず (1)：$D=\mathbb{C}$，$f(z)=e^z$, $\alpha=1$, $n=1$ として定理 10-1 を適用する．$1\in$ (C の内部) であるから，

$$f'(1)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz \iff I=2\pi i f'(1)=2\pi i e.$$

10.3 リュービルの定理と代数学の基本定理

数ある積分公式の応用のなかでも，つぎのふたつは目玉といってもよいだろう．

リュービルの定理（Liouville's Theorem）複素平面全体で正則かつ有界な関数は，定数関数に限る．

代数学の基本定理（The Fundamental Theorem in Algebra）複素係数の方程式 $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0, n \geq 1)$ は，複素数解をもつ．

リュービルの定理[2]は,「$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則，かつある M が存在して $|f(z)| \leq M$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ であれば，f は定数」だといっている．したがって，

指数関数 e^z，三角関数 $\sin z$，$\cos z$ は $\mathbb{C}$ 上正則だが，有界ではない

実三角関数が $|\sin x| \leq 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ という性質をもつこととは対照的である．

一方「代数学の基本定理」はガウスが最初に証明したとされる．この定理から，ある複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \;=\; a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$

が成り立つ．この事実も，同様の因数分解が実数では成り立たない（たとえば，$x^2+1=0$ ）こととは対照的である．

リュービルの定理の証明．「$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則，かつある M が存在して $|f(z)| \leq M$ $(\forall z \in \mathbb{C})$」と仮定しよう．任意に $\alpha \in \mathbb{C}$ を固定し，$C = C(\alpha, r)$ $(r > 0)$ とすると，定理 10-1 より

$$|f'(\alpha)| \;=\; \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz\right| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot\ell(C) \;=\; \frac{M}{r}.$$

このとき，M は一定だが $r > 0$ は任意に大きくとれるので，$f'(\alpha) = 0$ でなくてはならない．α も任意なので，f は定数． ■

代数学の基本定理の証明． 方程式の左辺を $f(z)$ とおく．いま $f(z) \neq 0$ がすべての $z \in \mathbb{C}$ で成り立つと仮定して矛盾を導こう．この仮定のもと，$g(z) := \dfrac{1}{f(z)}$ は $\mathbb{C}$ 上正則かつ定数関数ではないことに注意しておこう．

まず，$z \neq 0$ のとき等式

$$|f(z)| \;=\; |z|^n \left|a_n + \underline{\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}}\right|$$

[2]「リウヴィル」のほうが若干オリジナルの発音に近いが，日本では「リュービル」と発音するのが慣例だと思う．

を考える．下線部を $A(z)$ とおくと，$|z| \geq r > 0$ のとき

$$|A(z)| \leq \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{r} + \cdots + \frac{|a_0|}{r^n}$$

がなりたつ．右辺は r を大きくすることでいくらでも小さくなるから，$|A(z)| \leq |a_n|/2$ を満たす r をみつけることができる．したがって $|z| \geq r$ のとき

$$|f(z)| \;\geq\; |z|^n(|a_n| - \frac{|a_n|}{2}) \;\geq\; \frac{r^n|a_n|}{2} \iff |g(z)| \;\leq\; \frac{2}{r^n|a_n|} =: M.$$

一方，閉円板 $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ は有界閉集合であるから，$|g(z)|$ は E 上で最大値 M' をもつ．以上から $|g(z)| \leq \max\{M, M'\}$ が $\mathbb{C}$ 上なりたつが，これはリュービルの定理に矛盾する．

■

10.4 最大値の原理

最後の応用は，正則関数の著しい性質のひとつである,「最大値の原理」もしくは「最大絶対値の原理」である：

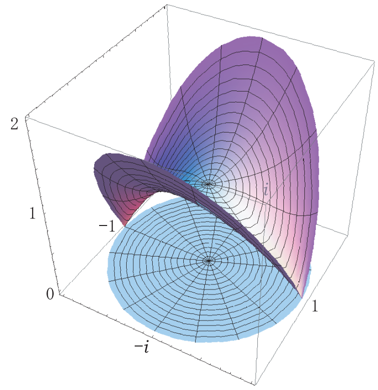
> **最大値の原理** (Maximum Modulus Principle)．領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ について，その絶対値 $|f(z)|$ が D の内部で真の最大値を取ることはない．すなわち，次が成り立つような $\alpha \in D$ は存在しない：
>
> $$(*) \qquad \forall z \in D - \{\alpha\}, \quad |f(z)| < |f(\alpha)|.$$

ひとつ例をみてみよう．単位円を C，その内部を D とおき，閉単位円板 $\overline{D} = C \cup D = \{|z| \leq 1\}$ 上で関数 $f(z) = z^2 - 1$ を考えてみよう．このとき $|f(z)| \leq |z^2| + 1 \leq 2$ が成り立つが，等号成立は $z = \pm i \in C$ のときに限ることもわかる（右下図は $|f(z)|$ のグラフ.）．すなわち，最大絶対値は境界の単位円 C 上でのみ実現され，$|f(z)|$ は D では最大値をもつことができない．[3] [4] [5]

[3] 一方，$\overline{D} \cap \mathbb{R} = [-1, 1]$ に制限して $f(x) = x^2 - 1$ を考えてみると，$x = 0$ で $|f(x)|$ は最大値 1 をとる．1 次元では，考えている区間の中央で最大値を取ることができるのである．

[4] この講義では触れることができないが，最大値の原理には「シュワルツの補題」とよばれる強力な応用が知られている．この「シュワルツの補題」なしに，現代的な複素関数論や複素力学系理論を語ることはできない．

[5] この最大値の原理はやや弱いバージョンであり，一般にはより強く「$|f(z)|$ が D 内で（普通のいみでの）最大値をとれば，定数関数」という形で述べられる．証明もすこし手を加えなければならない．



証明（最大値の原理）． $f(z)$ は定数関数でなく，$(*)$ をみたすような $\alpha \in D$ が存在したと仮定しよう．このとき，十分に小さな $r > 0$ をとれば，$C = C(\alpha, r)$ は D の内部に含まれるとしてよい．$z \in C$ では $\left|\dfrac{f(z)}{z-\alpha}\right| < \dfrac{|f(\alpha)|}{r}$ であるから，積分公式より

$$|f(\alpha)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz\right| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{|f(\alpha)|}{r}\cdot\ell(C) = |f(\alpha)|$$

となり，矛盾する． ■

第11講　べき級数展開

今回のテーマは「べき級数」です．これまでの「複素関数の微分積分」という観点からはいったん離れるように見えますが，じつは複素関数論を実積分の計算に応用するまでの，重要な通り道となっています．

11.1　数列と級数の収束

数列の収束． 複素数列の収束を定義する.「実数列が 0 に収束すること」の定義は知っているので，これを応用しよう：

> **定義（複素数列の収束）．** ある数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が複素数 α **に収束する** (converges to α) とは，$|z_n - \alpha| \to 0\ (n \to \infty)$ であることをいい，$z_n \to \alpha\ \ (n \to \infty)$ と表す．また，α を数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限** (limit) とよぶ.

級数の収束． つぎに級数を定義する．これは実数の級数と同様である：

> **定義（級数とその収束・発散）．** 数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ にたいし，$S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$ で定まる数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \text{もしくは} \quad \sum_{n\geq 0} z_n \quad \text{もしくは} \quad z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$
>
> と表し，これを数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ の定める**級数** (series) とよぶ．極限が存在するとき，級数 $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ は**収束する**といい，存在しないとき**発散する** (diverge) という.

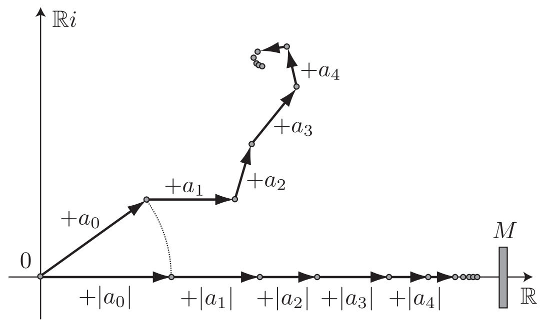
絶対収束． 級数が収束する十分条件として最も使えるのが，絶対収束性を用いる方法である：

定義（絶対収束）． 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が**絶対収束** (absolute convergence) するとは，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ が収束することをいう．

注． 数列 $\{|z_0| + \cdots + |z_n|\}_{n\geq 0}$ は単調増加列であるから，絶対収束性はこの数列の有界性と同値である．

定理 11-1. 絶対収束する級数は収束する．

注． 数列 $\{|z_0| + \cdots + |z_n|\}_{n\geq 0}$ は「折れ線のトータルの長さ」を表す．したがって，これが有限であれば，もとの折れ線も発散のしようがない．定理の証明には,「コーシー列」という概念を用いる．難しいものではないが，時間の都合で割愛する．



例． $z_n = (i/2)^n$ とすると，$|z_0| + |z_1| + |z_2| + \cdots = 1 + 1/2 + 1/2^2 + \cdots = 2$ より級数 $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ は絶対収束．よって収束（折れ線で表現してみよ）．

より一般に,（絶対収束性を用いなくても）次が成り立つ[1]：

補題 11-2. $|\beta| < 1$ をみたす複素数について，

$$\frac{1}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots$$

すなわち，右辺の級数は収束し，その値は右辺と一致する．

11.2 テイラー展開

[1]当たり前のことだが，$|\beta| > 1$ についてこの補題を適用してはならない．たとえば $\beta = 2$ のとき，

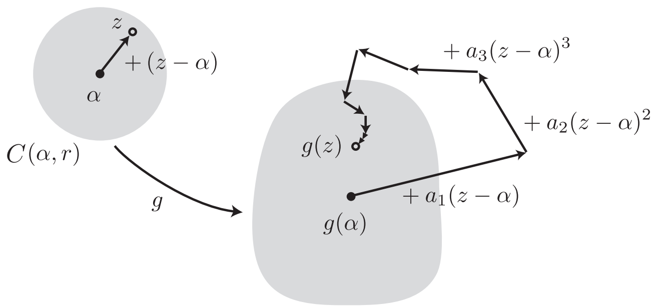
$$-1 = \frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots$$

というのはナンセンスである．

> **定理 11-3（テイラー展開）．** $D \subset \mathbb{C}$ は単連結領域，$f : D \to \mathbb{C}$ は正則関数とする．さらに $\alpha \in D$ と $R > 0$ が $C = C(\alpha, R) \subset D$ を満たす．
> $\Longrightarrow$ 任意の $z \in (C$ の内部$)$ にたいして，次の等式が成り立つ：
> $$f(z) \;=\; f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots$$
> すなわち右辺の級数は収束し，左辺に一致．

この式を $f(z)$ の α における**テイラー展開** (Taylor expansion about α) とよぶ．

注． 一般に，$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ の形で与えられる関数を**べき級数**もしくは**整級数**とよぶ．[2]



正則関数のテイラー展開は，**テイラー級数（展開）**ともよばれる．

証明のスケッチ． $z_0 \in (C$ の内部$)$ を任意にとる．いま $z \in C$ と仮定すると，$\left|\dfrac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right| < 1$ が成立する．したがって補題 11-2 より，

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{f(z)}{(z-\alpha)-(z_0-\alpha)} = \frac{f(z)}{z-\alpha} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z_0-\alpha}{z-\alpha}} = \frac{f(z)}{z-\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n .$$

よって積分公式より，

$$\begin{aligned} f(z_0) \;&=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}(z_0-\alpha)^n\right\} dz \\ &=^{*} \; \sum_{n=0}^{\infty}(z_0-\alpha)^n \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz\right) \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z_0-\alpha)^n . \end{aligned}$$

---

[2]「べき」は漢字で「冪」と書く．省略して「巾」のように書いていた時代もあったような…

ただし，星つきの $=^*$ の部分は「項別積分の正当化」が必要である．[3] ■

例（マクローリン展開）． たとえば微分係数を計算することにより，任意の $z \in \mathbb{C}$ にたいし

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

が成り立つ．すなわち右辺の級数は収束し，左辺に一致する．実際，$\alpha = 0$ とし，$|z| < R$ となる R にたいし $C = C(0, R)$ 上で 11-3 を適用すればよい．

例（オイラーの公式再訪）． 等式 $e^z = 1 + z + z^2/2! + \cdots$ の右辺が必ず収束することから,「指数関数を右辺の級数で定義する」こともできる．この定義によれば $z = i\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を代入したオイラーの公式 $e^{i\theta} = \sum (i\theta)^n/n! = \cos\theta + i\sin\theta$ は「定義から導かれた等式」となる．われわれはこれまで，この式を $e^{i\theta}$ の定義としてきたのであった．

例． $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(z-2)^n$ を示そう．

これは $e^z = e^2 \cdot e^{z-2} = e^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n!}$ よりすぐにわかる．

注意 1（テイラー展開の一意性）． 正則関数 $f(z)$ にたいし，A さんがテイラー展開 11-3 を用いて $f(z) = \sum a_n (z-\alpha)^n$ と展開した．一方 B さんはまったく別の方法で $f(z) = \sum b_n (z-\alpha)^n$ と計算した．このとき，すべての n で $a_n = b_n$ が成り立つ．すなわち，テイラー展開は計算方法には依存しない．もっとも簡単な方法を選べばいいのである．

例題． $f(z) = \dfrac{1}{z-2i}$ を次の点を中心に展開せよ．

(1) $z = 0$ (2) $z = i$

答． まず (1)．補題 11-2 を適用するために，次のように変形する：

$$f(z) \;=\; \frac{1}{-2i} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z}{2i}}.$$

[3] 連続関数列 $\{g_n\}$ による無限級数 $\sum g_n(z)$ は，一様収束していれば項別積分可能である．すなわち $\displaystyle\int \sum g_n(z)\,dz = \sum \int g_n(z)\,dz$ と積分と無限和の順序を交換してもよい．詳しくは補講を参照.

よって $\left|\dfrac{z}{2i}\right| < 1$ のとき，すなわち $|z| < 2$ のとき，

$$f(z) \;=\; \frac{1}{-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}\,z^n \quad (\text{ただし } |z| < 2)$$

つぎに (2)．基本的なアイディアは (1) と同じである．まず次のように変形する：

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-i)-i} \;=\; \frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-i}{i}}.$$

よって $\left|\dfrac{z-i}{i}\right| < 1$ のとき，すなわち $|z-i| < 1$ のとき，

$$f(z) \;=\; \frac{1}{-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i^{n+1}}\,(z-i)^n \quad (\text{ただし } |z-i| < 1)$$

注意２（収束半径）． 級数 $\sum a_n(z-\alpha)^n$ の**収束半径** (radius of convergence) とは，級数が $|z-\alpha| < R$ のとき収束し，かつ，$|z-\alpha| > R$ のとき発散するような R をいう．上の例題の場合，(1) での収束半径は 2，(2) の収束半径は 1 である．

11.3 テイラー展開の拡張

テイラー展開を用いると，

$$\frac{e^z}{z^2} \;=\; \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots \qquad e^{1/z} \;=\; 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots$$

といった級数も考えたくなる．しかし，これらの式の左辺は $z=0$ で定義できないし，右辺も明らかに $z \to 0$ のとき発散してしまう．そこで，発散しそうな場所（この場合 $z=0$）のまわりをくりぬいた円環領域での収束を考えることにする．

定理 11-4（ローラン展開）． $\alpha \in \mathbb{C}$ とし，円環領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-\alpha| < R_2\}$ 上で関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は正則であるとする．また，$n \in \mathbb{Z}$ および $C = C(\alpha, R)$, $(R_1 < R < R_2)$ にたいし

$$a_n \;:=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$$

と定める．

$\Longrightarrow$ 任意の $z \in D$ にたいして，次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots \end{aligned}$$

この式を $f(z)$ の α における**ローラン展開** (Laurent expansion about α) とよぶ．負の無限にも伸びる級数は，$\displaystyle\sum_{n=\infty}^{\infty} = \sum_{n<0} + \sum_{n\geq 0}$ のようにふたつの級数の和と解釈すれば問題ない．これらの級数がそれぞれ収束し，その和が左辺に一致するのである．

第12講　留数定理

すでにコーシーの積分公式を用いることでさまざまな積分が計算できるようになっているわけですが，これらの結果はさらに洗練された形で「留数定理」としてまとめられます．

12.1　ローラン展開（前回からのつづき）

定理 12-1（ローラン展開）． $\alpha \in \mathbb{C}$ とし，円環領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-\alpha| < R_2\}$ 上で関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は正則であるとする．また，$n \in \mathbb{Z}$ および $C = C(\alpha, R)$, $(R_1 < R < R_2)$ にたいし

$$a_n \;:=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$$

と定める．このとき，任意の $z \in D$ にたいして，次の等式が成り立つ：

$$f(z) \;=\; \underline{\underline{\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{a_{-1}}{z-\alpha}}} + \underline{a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots}.$$

すなわち，右辺の 2 重下線部と下線部の級数はそれぞれ収束し，その和は左辺に一致する．この式を $f(z)$ の α における**ローラン展開** (Laurent expansion about α) とよぶ．

また，f が穴あき円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-\alpha| < R_2\}$ で正則であり，さらにある自然数 k と $a_{-k} \neq 0$ が存在して

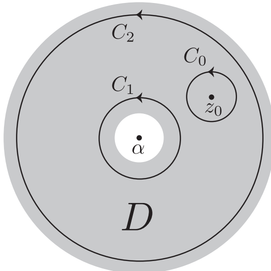
$$f(z) \;=\; \frac{a_{-k}}{(z-\alpha)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

とローラン展開できるとき，「f は $z = \alpha$ において k **位の極** (pole of order k) を持つ」という．[1]

[1]ローラン展開において $a_{-k} \neq 0$ を満たす自然数 k が無限に存在するとき，α は極とはよばれず，**真性特異点** (essential singularity) とよばれる．一般には極と真性特異点を合わせて**特異点** (singularity) とよばれるが，このノートでは真性特異点をあまり扱わないので，極という言葉で代用したいとおもう．

注意 1（ローラン展開の一意性）． テイラー展開と同様に，ローラン展開の係数 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ も計算方法によらず一意的に定まる．

定理 12-1 の証明． $z_0 \in D$ を固定する．また十分小さな $\epsilon > 0$ をとることで，$C_0 = C(z_0, \epsilon)$ は D の内部にあるとしてよい．さらに r_1，$r_2 > 0$ を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ となるように選んで，右の図のように $C_0, C_1 = C(\alpha, r_1), C_2 = C(\alpha, r_2)$ が互いに交わらないようにできる．このときコーシーの積分定理より，



$$\int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \ = \ \int_{C_2} - \int_{C_1}$$

が成り立つ（基本公式 2 の証明参照）．積分公式より $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_0}$ であるから，次をまず証明しよう：

- 2 重下線部：$-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1} = \sum_{m\geq 1} a_{-m}(z_0 - \alpha)^{-m}$，ただし $a_{-m} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-m+1}}dz$
- 下線部：$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_2} = \sum_{n\geq 0} a_n(z_0 - \alpha)^n$，ただし $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$

2 重下線部を示そう．$z \in C_1$ のとき $|z - \alpha| < |z_0 - \alpha|$ であるからテイラー展開のときの式変形を参考にすると，

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z_0 - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-\alpha}{z_0 - \alpha}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z_0 - \alpha}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-\alpha}{z_0-\alpha}\right)^n dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-n}} \cdot \frac{1}{(z_0-\alpha)^{n+1}}\right)dz$$

（ここで項別積分が可能であることを正当化すれば $\int\sum = \sum\int$ と交換ができて）

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq 0}\left(\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-n}}\,dz\right)\cdot\frac{1}{(z_0-\alpha)^{n+1}} = \sum_{n+1=m\geq 1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-m+1}}\,dz\right)\cdot(z_0-\alpha)^{-m}.$$

ここで右辺の積分路 C_1 は，積分定理より C に変えてもよい．よって 2 重下線部が得られた．

下線部の計算はテイラー展開と同様なので省略する．■

具体例 1． 関数 $\dfrac{e^z}{z^2}$ は $D = \{0 < |z| < \infty\}$ で正則であるから，ローラン展開ができる．係数の一意性より，次のように計算してよい：

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}\cdots\right) = \underline{\underline{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}} + \underline{\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots}$$

とくに，$z = 0$ は 2 位の極である．

具体例 2. 関数 $\dfrac{1}{z^2(z-2)}$ は $D=\{0<|z|<2\}$ で正則であるから，ローラン展開ができる．上と同様にして，

$$\frac{1}{z^2(z-2)}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{-2(1-z/2)}=-\frac{1}{2z^2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)=\underline{\underline{-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{4z}}}\underline{-\frac{1}{8}-\frac{z}{16}-\cdots}$$

とくに，$z=0$ は 2 位の極である．

12.2 留数

> **定理 12-2（積分と留数）** $D\subset\mathbb{C}$ を単連結領域，$\alpha\in D$ とする．いま $f:D-\{\alpha\}\to\mathbb{C}$ が正則であるとし，ローラン展開 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-\alpha)^n$ をもつとする．このとき，α をその内部に含む D 内の単純閉曲線 C について，次が成り立つ：
>
> $$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\cdot a_{-1}.$$

この α は極かもしれないし，そうでないかもしれない．いずれにしろ定理は成立する．

証明. 積分定理より, $C=C(\alpha,r)$ （ただし r は十分小さく，$C\subset D$）としてよい．基本公式 2 により，$n\neq-1$ のとき $\displaystyle\int_C(z-\alpha)^n=0$，$n=-1$ のとき $\displaystyle\int_C(z-\alpha)^n=2\pi i$ である．よってローラン展開を用いて

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-\alpha)^n\right)dz=^*\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(a_n\int_C(z-\alpha)^n\,dz\right)=2\pi i\cdot a_{-1}.$$

ただし，$=^*$ の部分は項別積分に関する正当化が必要である． ■

証明から分かるように，$f(z)$ を極の回りでローラン展開してから積分すると，a_{-1} の項のみが「留まり」，それ以外の項が消え去ってしまう．この a_{-1} を，すなわち $(z-\alpha)^{-1}$ の係数を f の α における**留数** (residue) とよび，$\mathrm{Res}(f(z),\alpha)$ と表す．よって定理 12-2 の式は $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),\alpha)$ と表される．

具体例 1． $\dfrac{e^z}{z^2}$ の $z=0$ における留数を求めてみよう．さきほど計算したローラン展開 $\dfrac{e^z}{z^2}=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\cdots$ より $\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{z^2},0\right)=1$．たとえば $C=C(0,1)$ とすれば，$\displaystyle\int_C\frac{e^z}{z^2}\,dz=2\pi i\cdot 1=2\pi i.$

具体例２． 同じく $C = C(0,1)$ にたいし，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2(z-2)}\,dz$ を計算しよう．$D = \{|z| < 2\}$ とすると被積分関数は $D-\{0\}$ で正則であるから，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2(z-2)}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-2)}, 0\right)$. さきほど計算したローラン展開 $\displaystyle\frac{1}{z^2(z-2)} = \cdots - \frac{1}{4z} + \cdots$ より $\displaystyle\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-2)}, 0\right) = -\frac{1}{4}$. よって求める積分は $\displaystyle 2\pi i \cdot \frac{-1}{4} = -\frac{\pi i}{2}$

具体例２の別解． じつは留数など知らなくてもこの積分は計算できる．$\displaystyle g(z) = \frac{1}{z-2}$ とすると，これは C とその内部で正則となるから，1 階微分の積分公式より

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-2)}\,dz = \int_C \frac{g(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i \cdot g'(0) = 2\pi i \cdot \frac{-1}{4} = -\frac{\pi i}{2}.$$

留数の計算公式． 上の別解から，一般に次のことがわかる：$\displaystyle f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^k}$ かつ $g(z)$ は $z = \alpha$ のまわりで正則なとき，$C = C(\alpha, r)$（r は十分小）とすれば

$$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-\alpha)^k}\,dz = \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(\alpha).$$

最後の等式は $(k-1)$ 階微分の積分公式である．公式の形でまとめておこう：

> **公式 12-3（留数の計算公式）．** $\displaystyle f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^k}$，$g(z)$ は $z = \alpha$ のまわりで正則なとき，
>
> $$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) \;=\; \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(\alpha).$$
>
> とくに $k = 1$ のとき，$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) \;=\; g(\alpha)$.

留数という言葉を用いると，これまで積分公式や積分路の取替えを駆使して行ってきた積分計算をすっきりと公式の形でまとめることが出来る：

> **留数定理．** C を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線，D をその内部とし，関数 f は C および $D - \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ において正則であるとする．ただし，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ は互いに異なる D 内の点である．このとき
>
> $$\int_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), \alpha_k).$$

証明． $r>0$ を十分に小さく取り，$C_k=C(\alpha_k,r)$ とすれば，$C_1,\ldots,C_n$ はすべて D に含まれ，かつそれぞれ（内部までふくめて）互いに交わらないとしてよい．コーシーの積分定理より，

$$\int_C=\int_{C_1}+\cdots+\int_{C_n}$$

であるから，定理 12-1 より留数定理が成り立つ． ■

留数定理による積分計算の例． たとえば $C=C(0,2)$ とし，$I=\displaystyle\int_C\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$ を計算してみよう．$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ は $\mathbb{C}-\{\pm i\}$ で正則であり，その極は $z=\pm i$ は C の内部に含まれる．よって留数定理より $\displaystyle\int_C f(z)\,dz\ =\ 2\pi i\{\mathrm{Res}(f(z),i)+\mathrm{Res}(f(z),-i)\}$.

$g(z)=\dfrac{e^{iz}}{z+i}$ とおくと，g は $z=i$ の周りで正則であるから公式 12-3 より $\mathrm{Res}(f(z),i)=g(i)=\dfrac{e^{-1}}{2i}$．同様に，$h(z)=\dfrac{e^{iz}}{z-i}$ とおくと公式 12-3 より $\mathrm{Res}(f(z),-i)=h(-i)=-\dfrac{e}{2i}$.

よって $I=2\pi i\left(\dfrac{e^{-1}}{2i}-\dfrac{e}{2i}\right)=\pi(e^{-1}-e)$.

注意． この例の場合は，留数定理を用いなくても $\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}=\dfrac{1}{2i}\left\{\dfrac{e^{iz}}{z-i}-\dfrac{e^{iz}}{z+i}\right\}$ と変形することで積分公式の計算に帰着される．一般に $\dfrac{\text{正則関数}}{\text{多項式}}$ のような形の関数にたいしては，無理に留数定理に持ち込む必要はない．留数定理が本質的に有効なのは，$f(z)=e^{1/z}$ や $z^2\sin\dfrac{1}{z}$ のように，極の位数が有限でないような場合である．

第13講　実積分への応用

13.1　留数定理（前回の復習）

定理 12-2（積分と留数） $D \subset \mathbb{C}$ を領域，$\alpha \in D$ とする．いま $f : D - \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ が正則であるとし，ローラン展開 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - \alpha)^n$ をもつとする．このとき，α をその内部に含む D 内の単純閉曲線 C について，次が成り立つ：

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot a_{-1}.$$

$f(z)$ を $z = \alpha$ を中心にローラン展開したときの $(z - \alpha)^{-1}$ の係数を f の α における**留数** (residue) とよび，$\mathrm{Res}(f(z), \alpha)$ と表すのであった．

留数定理． C を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線，D をその内部とし，関数 f は C および $D - \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ において正則であるとする．ただし，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ は互いに異なる D 内の点である．このとき

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), \alpha_k).$$

以上から，複素積分計算の最終形は次のようにまとめることができる：

積分計算の手順 $I = \displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を計算するには，

(i) $f(z)$ の極で C の内部にあるもの $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を探す．

(ii) そこでの留数 $\mathrm{Res}(f(z), \alpha_k)$ をそれぞれ計算する．

(iii) $I = 2\pi i \times$ (留数の和) を計算する．

13.2　実積分への応用 1（三角関数の積分）

$$I \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta}d\theta \;=\; \frac{\pi}{2}$$

この積分を計算しよう．[1]

一般に $z = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ とおくと，z は単位円上を動き，

$$\sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta \iff d\theta = \frac{dz}{i\,z},$$

となるので，もとの積分に代入すれば

$$I \;=\; \int_{C=C(0,1)} \frac{1}{5+3\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{dz}{i\,z} \;=\; \frac{2}{i}\int_C \frac{1}{3z^2+10z+3}dz$$

のように，有理関数の積分に書き直すことができる．右辺の被積分関数を $f(z)$ とおくと，$f(z) = \dfrac{1}{3(z+1/3)(z+3)}$ より，単位円の中の極は $z=-1/3$ のみである．よって留数定理より

$$I \;=\; \frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{1}{3}\right).$$

ここで前回の公式

公式 12-3（留数の計算公式）． $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^k}$，$g(z)$ は $z=\alpha$ のまわりで正則なとき，

$$\mathrm{Res}(f(z),\alpha) \;=\; \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(\alpha).$$

とくに $k=1$ のとき，$\mathrm{Res}(f(z),\alpha) \;=\; g(\alpha)$.

を用いると，f の極 $z=-1/3$ の位数は $k=1$ なので

$$\mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{1}{3}\right) \;=\; \left.\frac{1}{3(z+3)}\right|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8}.$$

よって $I = \dfrac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{2}$. ■

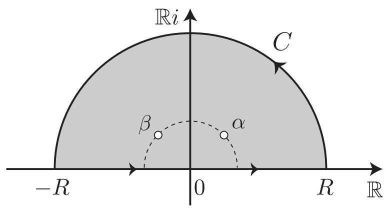
[1] $t = \tan\theta/2$ とおくと有理関数の実積分に帰着されるので初等的に計算することもできる．

13.3 実積分への応用 2（有理関数の積分）

次の広義積分を計算しよう [2]：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

右図のような経路 C および $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ にたいし，線積分 $\displaystyle\int_C = \int_C \frac{1}{1+z^4}\,dz$ 考える．C 内の極は $\alpha = e^{\pi i/4}$, $\beta = e^{3\pi i/4}$ なので,



$$\int_C = 2\pi i \cdot \left\{ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \alpha\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \beta\right) \right\}.$$

ここで次の公式を用いる．

公式 13-1（留数の計算公式その 2）． $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ かつ $z = \alpha$ が 1 位の極であるとき，

$$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) = \frac{1}{g'(z)}.$$

この公式の証明は後回しにして，積分の計算を進めていこう．これより

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \alpha\right) = \frac{1}{4\alpha^3} = \frac{e^{-3\pi i/4}}{4} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

および

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \beta\right) = \frac{1}{4\beta^3} = \frac{e^{-9\pi i/4}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

であるから，$\displaystyle\int_C = 2\pi i\left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

さてこの積分から実積分 I の値を引き出そう．経路 C を次のように分割する：

$$\begin{aligned} J_R &:= \{z = x \mid -R \leq x \leq R\} \\ C_R &:= \left\{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\right\} \\ C &= J_R + C_R. \end{aligned}$$

[2] これも有理関数なので部分分数展開をもちいれば原理的には不定積分を計算できる．*Mathematica* によれば，$\left\{-\log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)-2\tan^{-1}\left(1-\sqrt{2}x\right)+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right\}/(4\sqrt{2})$

このとき，$\displaystyle\int_C = \int_{J_R} + \int_{C_R} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ より，$\underline{R \to \infty \text{ のとき } \displaystyle\int_{C_R} \to 0 \text{ であれば}}$，$I = \displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{J_R} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を得る．

下線部を証明しよう．$|z| = R > 1$ のとき，

$$|z^4+1| \geq |z|^4 - 1 = R^4 - 1 > 0$$

であるから，C_R 上 $|f(z)| \leq \dfrac{1}{R^4-1}$ が成り立つ．したがって，

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\ell(C_R)}{R^4-1} = \frac{\pi R}{R^4-1} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

以上で $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ が示された． ■

公式 13-1 の証明． 条件より，α の周りで正則な関数 $h(z)$ で，$h(\alpha) \neq 0$ かつ $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{(z-\alpha)h(z)}$ を満たすものが存在する．よって公式 12-3 より，$\mathrm{Res}(f(z),\alpha) = \dfrac{1}{h(\alpha)}$. 一方，$g'(z) = h(z) + (z-\alpha)h'(z)$ より $g'(\alpha) = h(\alpha)$ が成り立つ． ■

13.4 実積分への応用 3

これまでの例は複素積分を用いなくても計算可能であるが，次の例は初等的な関数では表現できないと思われる [3]：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$$

応用 2 と同じ経路 C および $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ にたいし，線積分 $\displaystyle\int_C = \int_C f(z)\,dz$ 考える．C 内の極は $z = i$ のみなので，

$$\int_C = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f(z), i).$$

いま $f(z) = \dfrac{1}{z-i}\cdot\dfrac{e^{iz}}{z+i}$ であり，$\dfrac{e^{iz}}{z+i}$ は $z = i$ において正則であるから， 公式 12-3 より

$$\mathrm{Res}(f(z), i) = \frac{e^{i\cdot i}}{i+i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

[3] その分技巧的なので，解法を覚える必要は全くない．

よって $\displaystyle\int_C = 2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$.

次に応用 2 と同様に,「$R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{C_R}\to 0$」を示す. まず $|z| = R > 1$ のとき, $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0$ が成り立つ. さらに $z = x + yi \in C_R$ とおくと, $y \geq 0$ より

$$|e^{iz}| \;=\; |e^{i(x+yi)}| \;=\; e^{-y} \;\leq\; 1.$$

よって C_R 上 $|f(z)| = \left|\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \dfrac{1}{R^2-1}$ が成り立つ. したがって,

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \;\leq\; \frac{\ell(C_R)}{R^2-1} \;=\; \frac{\pi R}{R^2-1} \;\to\; 0 \quad (R\to 0).$$

いま $\displaystyle\int_{I_R} = \int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx + i\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$ だが, $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ は奇関数なのでこの積分の虚部は 0. ゆえに $\displaystyle I = \lim_{R\to\infty}\int_{I_R} = \int_C = \frac{\pi}{e}$

■

13.5 自宅模擬試験

試験前に解いてみましょう. 練習問題や授業でやった内容を題材としていますので, 解答例はなしです. あしからず.

問題 1. $\alpha\in\mathbb{C}$ を定数とする.

(1) $m\in\mathbb{Z}$, $r>0$, $C = C(\alpha, r)$ とするとき, $\displaystyle\int_C (z-\alpha)^m\,dz$ を計算せよ.

(2) C' を α を内部に含む滑らかな単純閉曲線とするとき, $\displaystyle\int_C (z-\alpha)^m\,dz = \int_{C'}(z-\alpha)^m\,dz$ となる理由を説明せよ.

問題 2. $z=-1$ から $z=1$ を結ぶ経路を以下のように複数定める：

$$C_1 \;:\; z = z(t) = e^{(\pi-t)i} \qquad (t\in[0,\pi])$$

$$C_2 \;:\; z = z(t) = t \qquad (t\in[-1,1])$$

$$C_3 \;:\; z = z(t) = t + (|t|-1)i \qquad (t\in[-1,1])$$

ただし曲線の向きは t の増加方向に対応させる．すべての C_i $(i = 1, 2, 3)$ にたいし，$\displaystyle\int_C \overline{z}^3\, dz$ を求めよ．

問題 3. 次の積分を求めよ．ただし，$C = C(0, 2)$ とする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^4}\, dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}\, dz$　　(3) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-iz}}{(3z-\pi)^2}\, dz$

問題 4. 以下の関数のすべての極を中心とするローラン展開と留数を求めよ．

(1) $\displaystyle\frac{1}{z^3}$　　(2) $\displaystyle\frac{1}{z^2(z-2)}$　　(3) $\displaystyle z^2 \exp\left(-\frac{1}{z}\right)$

問題 5. 複素積分を用いて

$$I \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta} d\theta \;=\; \frac{\pi}{2}$$

を証明せよ．

第14講　補講その1

注意. この補講では証明の過程でいわゆるイプシロン・デルタ論法を用います．やや発展的内容なので，不慣れな人は証明を無視して読み進めてかまいません．[1]

14.1　原始関数とモレラの定理

$f : D \to \mathbb{C}$ を領域 D 上の連続関数としよう.「コーシーの積分定理」によれば,

> f が正則ならば，任意の（C 内部）$\subset D$ を満たす単純閉曲線 C にたいし，
> $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0.$

がなりたつ．じつは，その逆が言えるのである：

> **モレラ (Morera) の定理，** $f : D \to \mathbb{C}$ を領域 D 上の連続関数とする．
>
> $(*)$: D 内の任意の単純閉曲線 C に対し $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ
>
> ならば，f は D 上で正則である．

証明（モレラ）． 次を示せば十分である：

$(**)$: ある関数 $F : D \to \mathbb{C}$ が存在して，$F'(z) = f(z)$ $(z \in D)$.

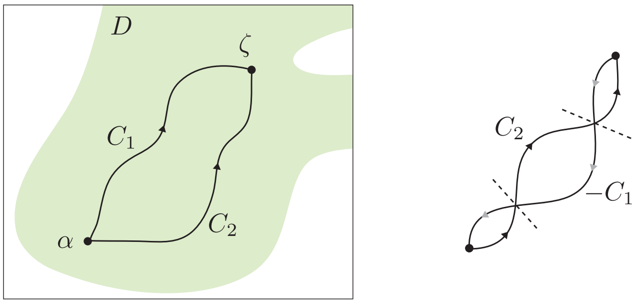
なぜなら，そのような F は D 上で連続な導関数 f をもつことになり，正則関数である．したがって定理（微分可能性）より，f も正則関数，というわけである．

では関数 F を具体的に構成して $(**)$ を示そう．$\alpha \in D$ を任意に選び固定する．また，$\zeta \in D$ も自由に選び，さらに α から ζ にいたる D 内の経路（曲線）C_1, C_2 を自由に選ぶ．仮定 $(*)$ から,（必要なら図のように経路 $C_2 + (-C_1)$ を適当に単純閉曲線分割することで）

$$\int_{C_2+(-C_1)} f(z)\,dz = 0 \iff \int_{C_2} = -\int_{-C_1} = \int_{C_1}$$

[1] もしあなたが数学を専門とする学生であれば，いつかはここで行われるような厳密な議論を学ぶ必要があるでしょう．そうでなければ，その分の時間は計算練習や，自由な発想で応用を考えることにあてていただきたい．厳密化は数値計算と同じで，各自が必要な精度で行っていけばよいと思う．

がわかる．



これは，D 内で積分を考える限り，α から ζ にいたる経路によらず積分値がひと通りに定まることを示している．よって

$$F(\zeta) := \int_{C_1} f(z)\,dz \quad \left(= \int_{C_2} f(z)\,dz\right)$$

とおく．経路に依存しないことから，$F(\zeta) = \displaystyle\int_\alpha^\zeta f(z)\,dz$ のようにも表す．

こうして定まる関数 $F : D \to \mathbb{C}$ が f を導関数に持つことを示そう．すなわち，任意の $\zeta \in D$ に対し

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} = f(\zeta)$$

が成り立つことを示す．より正確には，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|h| \leq \delta$ のとき

$$\left| \frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} - f(\zeta) \right| \leq \epsilon$$

を示せばよい．

いま f は連続であったから，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - \zeta| \leq \delta$ のとき

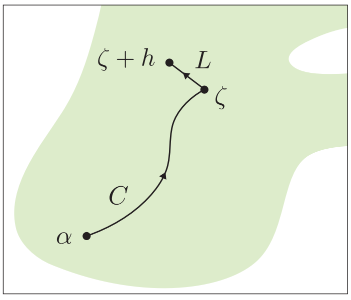
$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \epsilon$$

とできる．これを念頭に，$|h| \leq \delta$ として

$$\frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} = \frac{1}{h}\left\{ \int_\alpha^{\zeta + h} - \int_\alpha^\zeta \right\}$$

を考えよう．積分は（D 内の）経路に依存しないから，

- α から ζ まで：曲線 C （何でもよい）
- ζ から $\zeta + h$ まで：線分 L： $z(t) = \zeta + ht$ $(0 \leq t \leq 1)$



をとると，上の式は

$$\frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} = \frac{1}{h}\left\{ \int_{C+L} - \int_C \right\} = \frac{1}{h}\int_L f(z)\,dz$$

となる．さらに $\displaystyle\int_L 1\cdot dz=\int_0^1 h\cdot dt=h$，$\ell(L)=|h|$ （線分 L の長さ）を用いれば

$$\left|\frac{F(\zeta+h)-F(\zeta)}{h}-f(\zeta)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_L f(z)\,dz-\frac{f(\zeta)}{h}\int_L 1\cdot dz\right|$$
$$=\frac{1}{|h|}\left|\int_L (f(z)-f(\zeta))\,dz\right|\le\frac{1}{|h|}\cdot e\cdot\ell(L)=\epsilon$$

を得る．$\zeta\in D$ は任意であったから，以上で $(**)$ は示された． ■

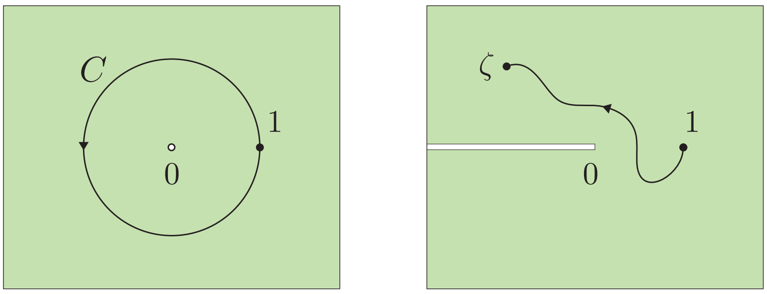
原始関数． $f:D\to\mathbb{C}$ に対し，$F:D\to\mathbb{C}$ が $F'=f$ を満たすとき，F を f の**原始関数** (primitive function) とよぶ．

- もし F_1 と F_2 がともに f の原始関数であれば，$F_1(z)-F_2(z)$ は定数関数である.（理由は練習問題.）
- D が単連結かつ $f:D\to\mathbb{C}$ が正則であれば，コーシーの積分定理よりモレラの定理の仮定 $(*)$ を満たす．よって原始関数 $F:D\to\mathbb{C}$ が積分によって構成できる．

例． $f(z)=z^2$ のとき，原始関数は $F(z)=z^3/3+C$ （C は定数）の形となる．($(z^3/3)'=z^2$ だから.)

微妙な例（対数関数）． $f(z)=\dfrac{1}{z}$ のとき，原始関数は $F(z)=\log z+C$ の形だろうか？これはおかしい．$\log z$ は多価関数だからである．

たとえば $C=C(0,1)$ とすれば，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz=2\pi i\neq 0$ である．そもそもモレラの定理の仮定 $(*)$ を満たしてなかったのである．



$D=\mathbb{C}-\{0\}$ $D'=\mathbb{C}-(-\infty,0]$

$f(z)$ の定義域は $D=\mathbb{C}-\{0\}$ であり，そこでは正則になっている．しかし D は単連結でないので,「積分定理」との相性が悪いのである．そこで切り込みをいれて，f を単連結領域 $D':=\mathbb{C}-(-\infty,0]$ に制限してみよう．このとき積分定理よりモレラの定理

の仮定 (∗) が満たされるので，原始関数 $F(\zeta) = \int_1^\zeta f(z)\,dz$ が定まるのである．(ただし，積分経路は D' 内に限定．) この F は $\log z$ の $|\mathrm{Im}\,\log z| < \pi$ を満たすものになっている．[2]

14.2 関数の一様収束と微分・積分

記号． 以下，D を複素平面内の領域とする．また，$D(\alpha, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}$ とする．すなわち，α 中心半径 r の開円板であり，$D(\alpha, r)$ は $C(\alpha, r)$ の内部と一致する．

一様収束と微分積分． 複素関数論では，べき級数をはじめ，関数の無限和の収束性について扱うことが多い．ここでは「収束」の意味を厳格に,「一様収束」という概念で定式化し，極限についてさまざまな結果が得られることをみておく．

標語的に言えば，g_n が g に <u>一様収束</u> するとき，

（ア）g_n が連続なら極限 g も連続．

（イ）線積分 $\int_C g_n(z)\,dz$ は $\int_C g(z)\,dz$ に収束．

（ウ）g_n が正則なら極限 g も正則．さらに g'_n も g' に（広義）一様収束．(ワイエルシュトラス)

> **定義（一様収束）．** 関数列 $g_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ と D の部分集合 E にたいし,「g_n が E 上で関数 $g : E \to \mathbb{C}$ に**一様収束** (uniform convergence) する」とは，
>
> $$(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, N \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq N)(\forall\, z \in E) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon$$
>
> が成り立つことをいう．

すなわち，E 上での関数 g_n と g の絶対誤差が「z によらず一様に」0 に収束することをいう．一様収束は $g_n \to g$ $(n \to \infty)$ もしくは $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ と表すことも多いが，

[2] 対数の主値 $\mathrm{Log}\, z$ を $-\pi \leq \mathrm{Im}\,\log z < \pi$ で定める流儀（本書とは異なる）では，ちょうど $F(\zeta) = \mathrm{Log}\,\zeta$ となる．

普通は前後の文章で（各点収束ではなく）一様収束であることを明記するのが作法である．

例（最重要）． この先もっとも重要な具体例は次のものである：

> **補題（幾何級数）．** $0 < r < 1$ を固定し，
>
> $$g_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n, \qquad g(z) = \frac{1}{1-z}$$
>
> とおくと，g_n は g に $E(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ 上一様収束する．とくに，$|z| < 1$ であれば
>
> $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots$$
>
> が成り立つ.（すなわち，右辺の級数は収束して左辺と一致.）

証明． $g_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1-z)$ であるから，

$$|g_n(z) - g(z)| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たす．とくに，$r^{n+1}/(1-r)$ は $z \in E(r)$ に依存しないから，g_n は g に $E(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ 上一様収束する．後半の主張は r を 1 に近づけることで任意の z について成立する． ■

以下,（ア）（イ）（ウ）をもう少し厳密な形で述べていこう.

（ア）：一様収束と連続性． 実の微積分でも学ぶ大事な命題である：

> **命題 14-1（一様収束極限の連続性）．** <u>連続</u> な関数列 $g_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \geq 0)$ が関数 $g : D \to \mathbb{C}$ に D 上 <u>一様収束</u> するとき，g も D 上で連続.

証明． 任意に小さい $\epsilon > 0$ と任意の $\alpha \in D$ を選ぶ．このとき，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$|z - \alpha| < \delta \implies |g(z) - g(\alpha)| < \epsilon$$

となることを示せばよい.

一様収束性により，ある自然数 N が存在して

$$(\forall\, n \geq N)(\forall\, z \in D) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon/3$$

が成り立つ．とくに，$|g_n(\alpha) - g(\alpha)| < \epsilon/3$ も成立する．

ここで $m \geq N$ をひとつ固定すると，g_m は D 上（とくに $z = \alpha$ で）連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|z - \alpha| < \delta \implies |g_m(z) - g_m(\alpha)| < \epsilon/3$$

を満たす．よって $|z - \alpha| < \delta$ という条件のもと，

$$|g(z) - g(\alpha)| \leq |g(z) - g_m(z)| + |g_m(z) - g_m(\alpha)| + |g_m(\alpha) - g(\alpha)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

が成り立つ． ■

（イ）: 一様収束と線積分． 次に線積分の収束性を確かめよう：

> **命題 14-2（一様収束極限の線積分）．** 連続 な関数列 $g_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \geq 0)$ が関数 $g : D \to \mathbb{C}$ に D 上 一様収束 するとき，D 内の任意の曲線 C に対し，
>
> $$\int_C g_n(z)\,dz \to \int_C g(z)\,dz \ (n \to \infty).$$

証明． 一様収束性より

$$(\forall\,\epsilon > 0)(\exists\,N \in \mathbb{N})(\forall\,n \geq N)(\forall\,z \in C) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon.$$

よって $n \geq N$ のとき

$$\left| \int_C g_n(z)\,dz - \int_C g(z)\,dz \right| = \left| \int_C (g_n(z) - g(z))\,dz \right| \leq \epsilon \cdot \ell(C)$$

ここでC の長さ $\ell(C)$ は（区分的に滑らかという仮定から）有限であるから，$\lim_{n\to\infty} \int_C g_n(z)\,dz = \int_C g(z)\,dz$ が示された． ■

（ウ）: 一様収束と正則性（ワイエルシュトラスの定理）． 一様収束は正則性も保存する：

> **命題 14-3（一様収束極限の正則性）．** 正則 な関数列 $g_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \geq 0)$ が関数 $g : D \to \mathbb{C}$ に D 上 一様収束 するとき，
>
> (1) g も $\mathbb{D}$ 上正則であり，
>
> (2) D 内のコンパクト集合上で g_n' も g' に 一様収束する．

証明：(1) 必要なら D を分割することで，D は単連結であると仮定してよい．C を D 内の任意の単純閉曲線とすれば，g_n は D 上正則なので「積分定理」より $\int_C g_n(z)\,dz = 0$．よって

命題 14-2 より，$\displaystyle\int_C g(z)\,dz = 0$．$C$ は任意であり，また 命題 14-1 より g は連続であるから，[3] モレラの定理により g は D 上で正則となる．

(2) E を D 内のコンパクト集合（有界閉集合）としよう．このとき，E は D の境界から一定距離離れている．[4] とくに，ある（十分小さな）$r > 0$ が存在して，任意の $\alpha \in E$ にたいし $D(\alpha, r) \cup C(\alpha, r) \subset D$ となるようにできる．

以上の条件のもと，g_n の一様収束性

$$(\forall\,\epsilon > 0)(\exists\,N \in \mathbb{N})(\forall\,n \geq N)(\forall\,z \in D) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon.$$

と積分公式 2 より $C = C(\alpha, r)$ にたいし

$$g_n'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_n(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz \quad g'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz$$

が成立する．よって

$$|g_n'(\alpha) - g'(\alpha)| \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_n(z) - g(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon}{r^2}\ell(C) = \frac{\epsilon}{r}.$$

ϵ/r は $\alpha \in E$ に依存しないので，g_n' は g' に E 上一様収束する． ■

注意（広義一様収束とワイエルシュトラスの定理）． $g_n : D \to \mathbb{C}$ が $g : D \to \mathbb{C}$ に**広義一様収束**（もしくは**コンパクト一様収束**）するとは，任意のコンパクト集合 $E \subset D$ 上で制限 $g_n|_E$ が $g|_E$ に一様収束することをいう．

上の命題 14-3 の証明を修正すると，「正則な g_n が g に D 上広義一様収束すれば，g も正則，かつ g_n' も g' に D 上広義一様収束する」という**ワイエルシュトラスの定理** (Weiserstrass's Theorem) が得られる．

広義一様収束の例（これも重要）． $g_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ は $g(z) = 1/(1-z)$ に単位円板 $D(0,1)$ 上で広義一様収束する．ワイエルシュトラスの定理から，単位円板上で

$$g'(z) = \lim_{n\to\infty} g_n'(z) \iff \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + \cdots + nz^{n-1} + \cdots$$

が結論できる．

注意（実関数でワイエルシュトラスは成立しない！）． たとえば $g_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$ と定義する．g_n は $g(x) = 0$（定数関数）に $\mathbb{R}$ 上一様収束するが，$g_n'(x) = \cos nx$ は

[3] 正則なら連続である．よって g_n は連続である．念のため．

[4] そうでないと，点列 $\{e_n\} \subset E$ をうまく選んで e_n が ∂D から $1/n$ 以下の距離になるようにできる．コンパクト性から収束部分列 $\{e_{n(k)}\}$ が存在するが，その極限は境界点 $z \in \partial D$ でなくてはならない．一方 E は閉集合なので $z \in E$ でもある．これは $E \subset D$ と D が開集合（$D \cap \partial D = \emptyset$）であることに矛盾する．

$g'(x) = 0$ に（広義）一様収束しない．実は複素数で見ると，$z \in \mathbb{C}$ のとき，$g_n(z)$ は $g(z)$ に一様収束していないのである．

第15講　補講その2

ここでの目的は，

- 「正当化が必要」とだけ述べて証明をしなかった部分を本当に正当化することと
- 平面ベクトル解析の基本事項について簡単にまとめておくことである．

15.1　項別微分と項別積分

まずは応用上重要な関数の級数の項別微分と項別積分についてまとめておく．

関数の列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ にたいし，

$$g_n(z) := f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z)$$

とおく．適当な $z \in D$ を固定するとき，数列 $g_n(z)$ が極限 $g(z)$ をもつとき，

$$g(z) = f_0(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} f_n(z)$$

などと表す．これは関数 $g : D \to \mathbb{C}$ を定める．(いわゆる「各点収束」であり，一般には「一様収束」とは限らない．)

補題 15-1（微積分と無限和の順序交換）．

(1) C を D 内の任意の曲線とする．連続な関数列の有限和 $g_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z)$ が C 上である関数 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ に一様収束するとき，

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)\, dz.$$

(2) 正則 な関数列の有限和 $g_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z)$ が D 上である関数 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ に 広義一様収束 するとき，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z).$$

証明． (1) を示す．$g = \lim_{n\to\infty} g_n$ とすると，

$$左辺 = \int_C g(z)\,dz =_* \lim_{n\to\infty}\int_C g_n(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_C \sum_{k=0}^{n} f_n(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_C f_n(z)\,dz = 右辺.$$

ただし $=_*$ のところで一様収束性と命題 14-2 を用いた．

(2) も同様である．ワイエルシュトラスの定理（もしくは命題 14-3）をもちいればよい． ■

15.2 テイラー展開・ローラン展開の一様収束性

定理 11-3（テイラー展開）をより強めた，次の定理を示そう：

定理 15-2（テイラー展開，再）． $D \subset \mathbb{C}$ は単連結領域，$f : D \to \mathbb{C}$ は正則関数とする．さらに $\alpha \in D$ と $R > 0$ が $C = C(\alpha, R) \subset D$ を満たすとする．このとき，C の内部の任意の点 z にたいして，次の等式が成り立つ：

$$f(z) \;=\; f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots$$

とくに，右辺のべき級数は D 上広義一様収束し，左辺の関数に一致．

証明（テイラー展開）． z_0 を C の内部から任意にとり，$r := |z_0 - \alpha| < R$ とおく．さらに $z \in C$ をひとつとり，固定する．このとき $\left|\dfrac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right| = \dfrac{r}{R} < 1$ であるから，

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{f(z)}{(z-\alpha)-(z_0-\alpha)} = \frac{f(z)}{z-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z_0-\alpha}{z-\alpha}} = \frac{f(z)}{z-\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n.$$

いま $f_n(z) := \dfrac{f(z)}{z-\alpha}\cdot\left(\dfrac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n$，$g_n(z) := f_0(z) + \cdots + f_n(z)$，$g(z) := \dfrac{f(z)}{z-z_0}$ とおくと，上の式変形から $z \in C$ を固定するごとに（数列の極限の意味で）$g(z) = \lim g_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ である．これが C 上の関数の意味で一様収束になっていることを示そう．

C 上での $|f(z)|$ の最大値を $M = M(C)$ とし，$z \in C$ のとき $\beta = \dfrac{z_0 - \alpha}{z - \alpha}$ とおく．このとき，

$$|g_n(z) - g(z)| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots| = \left| \frac{f(z)}{z-\alpha}(\beta^{n+1} + \beta^{n+2} + \cdots) \right|$$
$$\leq \frac{M}{R} \cdot \left| \frac{\beta^{n+1}}{1-\beta} \right| \leq \frac{M|\beta|^{n+1}}{R(1-|\beta|)}$$

$|\beta| = r/R < 1$ は $z \in C$ の取り方に依存しないから，g_n は g に C 上一様収束する．

よって積分公式より，

$$\begin{aligned}
f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)\,dz \quad (\leftarrow \text{補題 15-1(1)}) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\cdot\left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz\right)(z_0-\alpha)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z_0-\alpha)^n.
\end{aligned}$$

以上で C の内部での収束性が示された．

つぎに広義一様収束性を示そう．任意の $0 < r < R$ について，コンパクト集合 $E_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\alpha| \leq r\}$ 上で一様収束することを示せば十分である．

いま，適当な $r < r' < R$ について $|z_0 - \alpha| = r'$ を満たす z_0 をとれば，上の議論により $f(z_0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-\alpha)^n$ （ただし $a_n = f^{(n)}(\alpha)/n!$）は収束する．よって次の補題 15-3（べき級数の中心は α にずらして適用）から，$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ も $E(r)$ 上一様収束する． ■

補題 15-3（絶対収束の条件）． べき級数 $F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ がある $z_0 \in \mathbb{C}$ で収束するとき，$|z| < |z_0|$ を満たす任意の z について $F(z)$ は収束する．とくに $0 < r < |z_0|$ を任意に固定するとき，部分和の列 $F_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ は $E(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ 上で一様収束する．

証明． $r < |z_0|$ を満たす任意の r を固定しよう．いま $F(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n + \cdots$ は収束するから，$a_n z_0^n \to 0\ (n \to \infty)$ でなくてはならない．(←理由を考えよ.) よってある $M > 0$ が存在し，すべての $n \geq 0$ で $|a_n z_0^n| \leq M$ が成り立つ．

さて $|z| \leq r < |z_0|$ をみたす z をとるとき，$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n \leq M \cdot \left(\dfrac{r}{|z_0|}\right)^n$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(|a_0| + |a_1 z_0| + \cdots + |a_n z_0^n|) \leq \lim_{n\to\infty} M\left\{1 + \frac{r}{|z_0|} + \cdots + \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n\right\} \leq M\frac{1}{1 - r/|z_0|}.$$

よって $F(z)$ は絶対収束する．したがって $|z| \leq r$ を満たす z について $F(z)$ は収束する．$r\,(<|z_0|)$ は任意であったから，$|z|<|z_0|$ のとき $F(z)$ は収束することが示された．

つぎに $E(r)$ 上での一様収束性を確認する．$z \in E(r)$ にたいし，

$$
\begin{aligned}
|F(z)-F_n(z)| &= |a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots| = \lim_{N\to\infty}|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+N}z^{n+N}| \\
&\leq \lim_{N\to\infty} M\left\{\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^{n+1}+\cdots+\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^{n+N}\right\} \leq M\frac{(r/|z_0|)^{n+1}}{1-r/|z_0|}.
\end{aligned}
$$

下段の最右辺は z に依存せず，かつ $n\to\infty$ のとき任意に小さくできるから，$E(r)$ 上で F は一様収束する． ■

同様のアイディアで，定理 12-1（ローラン展開）も次のように広義一様収束性も込みで示される．

定理 15-4（ローラン展開，再）． $\alpha \in \mathbb{C}$ とし，円環領域 $D=\{z\in\mathbb{C} \mid R_1<|z-\alpha|<R_2\}$ 上で関数 $f: D\to\mathbb{C}$ は正則であるとする．さらに $n\in\mathbb{Z}$ および $C=C(\alpha,R),\ (R_1<R<R_2)$ にたいし

$$
a_n \ := \ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz
$$

と定める．このとき，任意の $z\in D$ にたいして，次の等式が成り立つ：

$$
f(z) \ = \ \underline{\underline{\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2}+\frac{a_{-1}}{z-\alpha}}}+\underline{a_0+a_1(z-\alpha)+a_2(z-\alpha)^2+\cdots}.
$$

とくに下線部および 2 重下線部の級数は D 上で広義一様収束し，左辺と一致する．

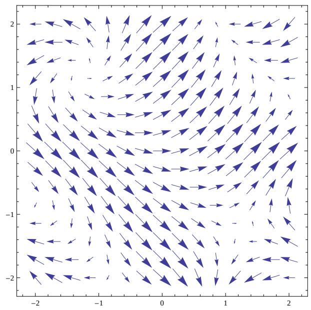
証明においては定理 12-1 で「正当化が必要」とした部分に定理 15-2 と同様の議論を適用すればよい．広義一様収束性については，ローラン展開を下線部と 2 重下線部にわけ，それぞれが任意の $|z|\leq r_2<R_2$ と $|z|\geq r_1>R_1$ で一様収束することを示せばよい．前者は補題 15-3 がそのまま適用できるのでテイラー展開の場合と同様である．とくに後者については補題 15-3 を修正して $F(z)=a_0+a_1/z+\cdots+a_n/z^n+\cdots$ の形の級数を考えればよい．

定理 12-2 の正当化． 最後に定理 12-2（積分と留数）の証明中にある積分と無限和の交換を正当化しておこう．ここで現れるローラン展開は，上の定理 15-4 から C 上で一様収束していると仮定してよい．よって補題 15-1(1) から，項別積分が可能なのである．

15.3 ベクトル解析に関する補遺

ベクトル場と線積分． 線積分で登場する $\displaystyle\int_C u(x,y)\,dx$ といった形の積分は，2 変数なのに積分は一方向のみで，不自然な感じがする．しかしその由来を知れば，これもアリかな，という気持ちになるものである．

いま，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場を考える．ベクトル場の数学的表現は連続写像 $\boldsymbol{V}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ なのだが，直感的には風速（風の向きと強さ）を表現する矢印の**場**（field）である．ちょうど，麦畑 (field) の麦が風になびくように，ベクトル場では矢印が何らかの力によってなびいている．曲線 $C = \left\{ \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mid t \in [a,b] \right\}$ があるとき，複素線積分のときと同様にして分割 $\Delta = \{\boldsymbol{p}_k\}_k$ が考えられる．さらに $\Delta\boldsymbol{p}_k := \boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1}$ とおくことで，リーマン和



$\boldsymbol{V}(x,y) = (\cos xy, \sin(x+y))$ で与えられるベクトル場．

$$\Sigma(\boldsymbol{V},\Delta) \;=\; \sum_k \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}_{k-1}) \cdot \Delta\boldsymbol{p}_k \quad \text{（内積の和）}$$

が考えられる.（短冊の面積のかわりに，ベクトルの内積を使うのがミソ.）さらに $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}_{k-1}) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$，$\Delta\boldsymbol{p}_k = \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix}$ とおけば，

$$\Sigma(\boldsymbol{V},\Delta) \;=\; \sum_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix} \;=\; \sum_k (u_k\,\Delta x_k + v_k\,\Delta y_k)$$

を得る．ここで分割 Δ を無限に細かくした（すなわち $\delta(\Delta) := \max_k \|\Delta\boldsymbol{p}_k\| \to 0$ とした）極限が，ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の曲線 C に沿った積分

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{p} \;=\; \int_C u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$$

なのである．となると，単独で $\int_C u(x,y)\,dx$ という積分が現れるのは不自然ではないか？相棒の $\int_C v(x,y)\,dy$ はどこ？ということになるわけだが，いや，たまたま C 上 $v(x,y) \equiv 0$ で，$\int_C u(x,y)dx + 0 \cdot dy$ なんですよ，と答えればその場は収まるのである．

勾配ベクトル． $f = f(\boldsymbol{p}) = f(x,y)$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 関数を考える．$f \in \mathbb{R}$ は 1 次元ベクトルだ，と強引に考えればこれもある種のベクトル場であるが，一般に各点に実数が対応するものはスカラー場 (scalar field) とよばれる．気温や気圧の分布，地図に描かれた海抜高度などをイメージするのが分かりやすい．

さてスカラー場からベクトル場を生成する方法をひとつ紹介しよう．いま C^1 を仮定したから f は任意の $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で全微分可能であり，

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \;=\; f(x,y) + a\,\Delta x + b\,\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

(ただし $a = f_x(x,y)$, $b = f_y(x,y)$．これらは定数) と書けるのであった．ここで $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ おけば，この式はベクトルの内積を用いて

$$f(\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}) \;=\; f(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{V} \cdot \Delta\boldsymbol{p} + o(\|\Delta\boldsymbol{p}\|)$$

のように書ける．いま $\boldsymbol{V}$ は偏微分係数によって決まる固定されたベクトルだが，$\Delta\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}$ か

らの変化分として，好きな方向を選ぶことができる．では f が最も増加するのはどの方向かというと，それは $\Delta\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{V}$ が同じ方向を向いているときである．(内積の幾何学的な意味を考えよ．) 逆に最も減少するのは $\Delta\boldsymbol{p}$ が $-\boldsymbol{V}$ の向きを向いているときである．ベクトル $\boldsymbol{V}$ は点 $\boldsymbol{p}$ において f が最も変化する方向を表現するのである．これを関数 f の $\boldsymbol{p}$ における**勾配ベクトル** (gradient vector) とよび，$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{p})$ と表す．すなわち，

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{p}) \;:=\; (f_x(x,y), f_y(x,y)).$$

f が気圧を表すスカラー場であれば，風は $-\operatorname{grad} f$ の向きに流れる．麦畑は，$-\operatorname{grad} f$ 側にそよぐであろう．h が海抜高度を表すスカラー場であれば，$\boldsymbol{p}$ においたボールは $-\operatorname{grad} h$ の向きに転げ落ちる．麦畑に降り注いだ雨もまた，$-\operatorname{grad} h$ の方向に流れるであろう．

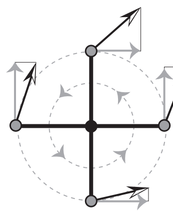
回転． つぎに，ベクトル場からスカラー場を構成する方法をふたつ紹介する．各成分が C^1 級なベクトル場 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ にたいし，

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \;:=\; -u_y(x,y) + v_x(x,y) \;\in\; \mathbb{R}$$

で定まる関数（スカラー場）を $\boldsymbol{V}$ の**回転** (rotation) とよぶ．[1]

この量の直感的な意味は，次のように説明される：$\boldsymbol{V}$ が風速をあらわすとしよう．点 $\boldsymbol{p}$ においた図のような十字型の風車（直径 2ϵ）を置くとき，その端点における風で風車の回転に寄与する分の合計は（左回りを正の向きと考えると）

$$v(x+\epsilon,y) - u(x,y+\epsilon) - v(x-\epsilon,y) + u(x,y-\epsilon)$$



と計算される．この値が $2\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\,\epsilon + o(\epsilon)$ と表されるのである．

実際，u, v は C^1 関数であり全微分可能なので，上の式に $u(x,y+\epsilon) = u(x,y) + u_y(x,y)\epsilon + o(\epsilon)$ などを代入して整理すると，$2\{-u_y(x,y) + v_x(x,y)\}\epsilon + o(\epsilon) = 2\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\,\epsilon + o(\epsilon)$ となる．

グリーンの定理再訪． C を単純閉曲線，Ω をその内部とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ にたいして，

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{p} \;=\; \iint_D \operatorname{rot}\boldsymbol{V}\, dx\, dy$$

が成り立つ．$\boldsymbol{V}$ の成分として $(P(x,y), Q(x,y))$ を代入すれば，これが「（イ）グリーンの定理」そのものだということがわかる．

発散． ベクトル場からスカラー場を構成する方法を紹介する．上と同じベクトル場 $\boldsymbol{V}$ にたいし，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \;:=\; u_x(x,y) + v_y(x,y) \;\in\; \mathbb{R}$$

で定まる関数（スカラー場）を $\boldsymbol{V}$ の**発散** (divergence) とよぶ．$\boldsymbol{p}$ の周りに一辺が $\epsilon > 0$ の正方形をおき，そこでの風の「流出量 − 流入量」を計算すると，$\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\,\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$ になる．

---
[1] 3 次元ベクトル場の回転はベクトル場となる．3 次元の場合，回転軸の方向を表現する必要があるからである．

ガウスの発散定理． $C = \{\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$ を滑らかな単純閉曲線とし，Ω をその内部とする．与えられた C^1 級ベクトル場 $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ にたいし，$\boldsymbol{V}^* = \begin{pmatrix} -v(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix}$ とするとき，$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \operatorname{rot} \boldsymbol{V}^*$ が成り立つ．よってグリーンの定理より，

$$\int_C \boldsymbol{V}^* \cdot d\boldsymbol{p} \ = \ \iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dx\, dy.$$

一般にガウスの発散定理は次のように解釈（表現）される：$\boldsymbol{p}(t)$ における C の外向き法線ベクトル $\boldsymbol{p}^*(t) = (y'(t), -x'(t))$ を考えると，

$$\int_C \boldsymbol{V}^* \cdot d\boldsymbol{p} \ = \ \int_a^b \boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{p}(t)) \cdot \boldsymbol{p}'(t)\, dt \ = \ \int_a^b \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}(t)) \cdot \boldsymbol{p}^*(t)\, dt$$

が成立する．これは左辺がベクトル場の曲線 C にそった流出量であることを意味しており，右辺の積分（流出入量の合計）の意味と合致する．

練習問題集

第1講の練習問題

練習 1-1. $z = 2 - i$, $w = -3 + 2i$ のとき，以下を計算し複素平面上に図示せよ．

(1) $z + w$ (2) $z - w$ (3) zw (4) z/w

練習 1-2. 公式 1-2(1) を応用して，次の複素数の絶対値を求めよ：

(1) $(1+i)^5$ (2) $-2i(2+i)(2+4i)(1+i)$ (3) $\dfrac{(3+4i)(1-i)}{2-i}$

練習 1-3. 公式 1-2(1) を用いて，次が成り立つことを説明せよ：複素数 z, w にたいし，

$$zw = 0 \iff z = 0 \ \text{もしくは} \ w = 0$$

練習 1-4. 公式 1-1 をすべて証明せよ．

練習 1-5. a, b, c, d をすべて実数とする．もし方程式 $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ が $z = \alpha$ を解に持てば，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解となることを示せ．

練習 1-6. $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ とするとき，z, z^2, z^3, z^4 をそれぞれ極座標表示せよ．

練習 1-7. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ とするとき，以下を示せ：

(1) $\overline{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$ (2) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$

さらに (2) を用いて，公式 1-2(2) を示せ．

発展問題 1-1. 数学的帰納法を用いて，次の de Moivre の公式（公式 1-3）を証明せよ．ただし，公式 1-2 は直接用いてはならない．(Hint: $n \geq 0$ のときと，$n < 0$ のときで場合分けせよ.)

> **公式 1-3 (de Moivre の公式).** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，任意の整数 n にたいし $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ が成り立つ．

発展問題 1-2. 複素数 z が $|z| > 1$ を満たすとき，その逆数 $1/z$ は以下の方法で作図できる：z から単位円へ 2 本接線を引く．それらの接点を結んだ線分と z と原点を結ぶ線分が交わる点を w とすると，$\overline{w} = 1/z$ となる．これを証明せよ．また，$0 < |z| < 1$ の場合，$|z| = 1$ の場合はどうか？

練習問題の略解

練習 1-1. (1) $-1+i$ (2) $5-3i$ (3) $-4+7i$ (4) $\dfrac{-8-i}{13}$

練習 1-2. (1) $|(1+i)^5| = |1+i|^5 = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$.

(2) $|-2i(2+i)(2+4i)(1+i)| = 2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$.

(3) $\left|\dfrac{(3+4i)(1-i)}{2-i}\right| = \dfrac{|3+4i||1-i|}{|2-i|} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{10}$.

練習 1-3. $zw=0 \iff |zw|=0 \iff |z|=0$ もしくは $|w|=0 \iff z=0$ もしくは $w=0$. ■

練習 1-4. $z=a+bi,\ w=c+di$ と置くと,

(1) $\overline{(\overline{z})} = \overline{a-bi} = a+bi = z$.

(2) 略.

(3) $\overline{z\cdot w} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \overline{z}\cdot\overline{w}$.

(4) 略.

(5) (右辺) $= \dfrac{(a+bi)+(a-bi)}{2} = a = \operatorname{Re} z$.

(6)(7) 略.

練習 1-5. $z=\alpha$ を解に持つので，$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$. 両辺の共役を取ると, $a,\ b,\ c,\ d$ が実数なので,

$$\overline{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d} = \overline{0} \quad\iff\quad a\overline{\alpha}^3+b\overline{\alpha}^2+c\overline{\alpha}+d=0.$$

よって $\overline{\alpha}$ も方程式の解となる.

練習 1-6.

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right),\quad z^2 = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right),$

$z^3 = 8(\cos\pi+i\sin\pi),\quad z^4 = 16\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right).$

練習 1-7.

(1) $\cos(-\theta)=\cos\theta,\ \sin(-\theta)=-\sin\theta$ より $\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$.

(2) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$ の分子と分母に $\cos\theta - i\sin\theta$ を掛ければ,

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}.$$

第2講の練習問題

練習 2-1（正三角形）． 互いに異なる複素数 $0, \alpha, \beta$ が複素平面上である正三角形の3頂点となるための必要十分条件は，$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$ であることを証明せよ．(Hint. Make use of the conditions $|\alpha| = |\beta|$ and $\arg\alpha - \arg\beta = \pm\pi/3$: then you'll find the polar representation of α/β.)

練習 2-2（アポロニウスの円）． 複素平面上で $|z+1| : |z-2| = 3 : 1$ となる z の軌跡は円となることを証明せよ．(Hint. $|z-a|^2 = (z-a)\overline{(z-a)} = (z-a)(\overline{z} - \overline{a})$ を用いて展開・整理する．)

練習 2-3（極形式）． 次の値を求めよ．

(1) $e^{2+\frac{\pi}{4}i}$　　(2) $e^{-3+\pi i}$　　(3) $e^{\log 3 - \frac{3\pi}{2}i}$

練習 2-4（指数関数と複素共役）． 指数関数の定義と指数法則（定理 2-1）を用いて，以下の公式を示せ：

(1) 任意の複素数 z にたいし，$\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.

(2) 任意の複素数 z と w にたいし，$e^{\overline{z+w}} = \overline{(e^z)} \cdot \overline{(e^w)}$.

練習 2-5（冪根）． 1の N 乗根の求め方を参考にして，次の方程式の解を極座標表示し，図示せよ：

(1) $z^4 = 16i$　　(2) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

発展問題 2-1（N 乗根）． 定理 2-3 を証明せよ．また，一般の複素数 $w \neq 0$ にたいし，方程式 $z^N = w$ の解（w の N 乗根）を決定せよ．

練習問題の略解

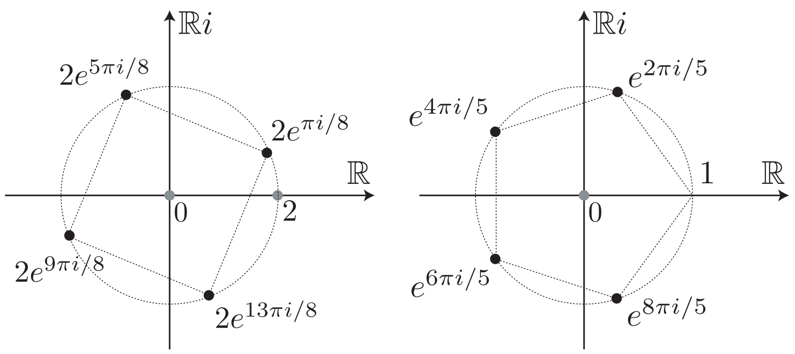
練習 2-1（正三角形）． $\alpha, \beta \neq 0$ を仮定した上で同値変形を用いる: 0, α, β が正三角形の頂点 $\iff 0 \neq |\alpha| = |\beta|$ かつ $\arg\alpha - \arg\beta = \pm\frac{\pi}{3} \iff |\frac{\alpha}{\beta}| = 1$ かつ $\arg\frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{\pi}{3} \iff \frac{\alpha}{\beta} = \cos(\pm\frac{\pi}{3}) + i\sin(\pm\frac{\pi}{3}) = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.
一方，$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0 \iff (\frac{\alpha}{\beta})^2 - (\frac{\alpha}{\beta}) + 1 = 0 \iff \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$. ■

練習 2-4（アポロニウスの円）．
$|z+1| : |z-2| = 3 : 1$ より $3|z-2| = |z+1|$. 両辺を 2 乗して $9(z-2)\overline{(z-2)} = (z+1)\overline{(z+1)}$ すなわち $8z\overline{z} - 19z - 19\overline{z} + 35 = 0$. よって $\left(z - \frac{19}{8}\right)\left(\overline{z} - \frac{19}{8}\right) = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \iff |z - \frac{19}{8}| = \frac{9}{8}$. したがって z の軌跡は中心 $\frac{19}{8}$, 半径 $\frac{9}{8}$ の円となる. ■

練習 2-3（極形式）．
(1) $e^{2+\frac{\pi}{4}i} = e^2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = e^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$.
(2) $e^{-3+\pi i} = e^{-3}(\cos\pi + i\sin\pi) = -1/e^3$.
(3) $e^{\log 3 - \frac{3\pi}{2}i} = 3\left\{\cos\left(\dfrac{-3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{-3\pi}{2}\right)\right\} = 3i$.

練習 2-4（指数関数と複素共役）．
(1) $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと,
$\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y) = e^x\{\cos(-y) + i\sin(-y)\} = e^{x-yi} = e^{\overline{z}}$. ■
(2) 共役複素数の性質（公式 1-1(2)）と指数法則より，$e^{\overline{z+w}} = e^{\overline{z}+\overline{w}} = e^{\overline{z}} \cdot e^{\overline{w}} = \overline{e^z} \cdot \overline{e^w}$. ■

練習 2-5（冪根）．
(1) $z = re^{\theta i}$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと, $z^4 = r^4 e^{4\theta i}$. 一方，$16i = 16e^{\pi/2 + 2n\pi i}$ $(n \in \mathbb{Z})$ を満たすから，絶対値と偏角を比較して $r = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}n$ $(n = 0, 1, 2, 3)$. したがって $z = 2e^{\frac{\pi}{8}i}, 2e^{\frac{5\pi}{8}i}, 2e^{\frac{9\pi}{8}i}, 2e^{\frac{13\pi}{8}i}$.
(2) $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$. であるから，求める解は方程式 $z^5 = 1$ の $z = 1$ 以外の解である．2.6 節と同様にして計算すると，$z = e^{\frac{2m\pi i}{5}}$ $(m = 1, 2, 3, 4)$．すなわち $e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $e^{\frac{4\pi i}{5}}$, $e^{\frac{6\pi i}{5}}$, $e^{\frac{8\pi i}{5}}$.



第 3 講の練習問題

練習 3-1(指数関数による像). 以下の複素平面上の集合にたいし，その指数関数 $w = f(z) = e^z$ による像もしくは逆像を図示せよ．[2]

(1) $f(S_1)$, $S_1 = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid 0 \le x \le 1, \ -\pi/2 \le y \le \pi/2\}$

(2) $f(S_2)$, $S_2 = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid -\log 2 \le x \le \log 2, \ -5\pi \le y \le 5\pi\}$

(3) $f^{-1}(T)$, $T = \{u + vi \in \mathbb{C} - \{0\} \mid 0 < u \le 1, \ v = 0\}$,

練習 3-2(複素対数). 次の複素対数としての値を求めよ．

(1) $\log(1 + \sqrt{3}i)$　(2) $\log(-2)$　(3) $\log i$　(4) $\log e$

練習 3-3（複素べき）． 次の値の複素数乗（複素べき）としての値を求めよ．

(1) $(1 + \sqrt{3}i)^i$　(2) $(-2)^{1+i}$　(3) $i^{1/3}$

発展問題 3-1（複素数の整数乗）． 複素数 $z \neq 0$ と整数 m にたいし,「複素数の複素数乗」の意味での z^m と普通の意味での z^m は一致することを証明せよ．

発展問題 3-2（複素数の対数について）． 0 でない複素数 z, w について，

$$\log zw = \log z + \log w$$

が成り立つかどうかについて論ぜよ，また，これらの主値について，

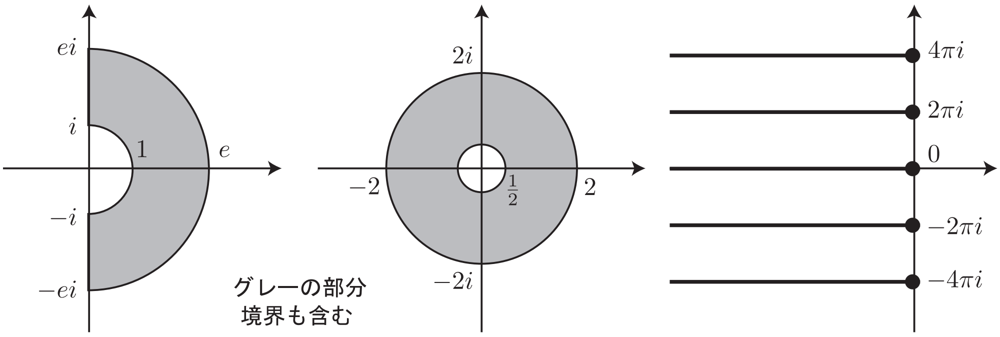
$$\mathrm{Log}\, zw = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$$

が成り立つかどうか，実例を挙げながら考察せよ．

[2] 関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ と部分集合 $S, T \subset \mathbb{C}$ にたいし，$f(S) := \{f(z) \in \mathbb{C} : z \in S\}$ を f による S の像とよび，$f^{-1}(T) := \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in T\}$. を f による T の逆像という．

練習問題の略解

練習 3-1 .



練習 3-2 .

(1) $z = \log(1 + \sqrt{3}\,i)$

$$\iff e^z = 1 + \sqrt{3}\,i = 2e^{\pi i/3} = e^{\log 2} \cdot e^{(1/3+2m)\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\iff z = \log 2 + (1/3 + 2m)\pi i \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

(2) $z = \log(-2) \iff e^z = -2 = 2e^{\pi i} = e^{\log 2} \cdot e^{(1+2m)\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z})$

$$\iff z = \log 2 + (1 + 2m)\pi i \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

(3) $z = \log i \iff e^z = i = e^{\pi i/2} = e^{(1/2+2m)\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z})$

$$\iff z = (1/2 + 2m)\pi i \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

(4) $z = \log e \iff e^z = e = e^1 \cdot e^{2m\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z})$

$$\iff z = 1 + 2m\pi i \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

練習 3-3 .

(1)
$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3}\,i)^i &= e^{i\log(1+\sqrt{3}\,i)} = e^{i\{\log 2 + (1/3+2m)\pi i\}} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= e^{-(1/3+2m)\pi + i\log 2} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= e^{-(1/3+2m)\pi}\{\cos(\log 2) + i\sin(\log 2)\} \quad (m \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

(2) $(-2)^{1+i} = e^{(1+i)\log(-2)} = e^{(1+i)\{\log 2 + (1+2m)\pi i\}} \quad (m \in \mathbb{Z})$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\{\log 2-(1+2m)\pi\}+\{\log 2+(1+2m)\pi\}i} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\
&= 2 \cdot e^{-(1+2m)\pi} \cdot e^{i\log 2} \cdot e^{\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z}). \\
&= -2 \cdot e^{(2k+1)\pi}\{\cos(\log 2) + i\sin(\log 2)\} \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

(3) $$
\begin{aligned}
i^{1/3} = e^{(1/3)\log i} &= e^{(1/3)\cdot(1/2+2m)\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\
&= e^{(1/6+2m/3)\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\
&= e^{\pi i/6},\ e^{5\pi i/6},\ e^{3\pi i/2} \\
&= \frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2},\ -i.
\end{aligned}
$$

第 4 講の練習問題

練習 4-1（三角不等式）． $z = x + yi$，$w = u + vi$ として三角不等式 $|z + w| \leq |z| + |w|$ を証明せよ.（等号が成り立つ条件ももとめること.）さらに，$|z| - |w| \leq |z + w|$ も証明せよ. (Hint. Apply the triangle inequality for $z = -z'$ and $w = z' + w'$.)

練習 4-2（三角関数）． 三角関数の定義に基づき，公式 4-0 をすべて証明せよ.

練習 4-3（三角関数の値）．

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$ の値を求めよ.

(2) 一般に $\sin(x + yi)$ （ただし $x, y \in \mathbb{R}$ ）の実部と虚部を x, y で表せ.

練習 4-4（正接関数）．

(1) 方程式 $\cos z = 0$ の解は $z = \left(\frac{1}{2} + m\right)\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ であることを示せ.

(2) $\cos z \neq 0$ となる z にたいし $\tan z := \dfrac{\sin z}{\cos z}$ と定義する．このとき，次の式を証明せよ.

(a) $\tan(z + \pi) = \tan z$　　(b) $i \tan i = \dfrac{1 - e^2}{1 + e^2}$

発展問題 4-1（三角関数のその他の性質）． 三角関数の定義に基づき，以下の公式を示せ：

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$　　(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$

(3) $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$　　(4) $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$

(5) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

発展問題 4-2 （三角関数の非有界性）． 任意に大きな $M > 0$ にたいし，ある複素数 z が存在して，$|\sin z| \geq M$ かつ $|\cos z| \geq M$ とできることを示せ．したがって，三角関数は有界ではない．(Hint: 三角不等式より $2|\cos z| = |e^{iz} + e^{-iz}| \geq |e^{iz}| - |e^{-iz}|$．）

発展問題 4-3（連続関数）． 任意の自然数 N にたいし，$f(z) = z^N$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 上で連続であることを示せ．また，$g(z) = \dfrac{1}{z^N}$ は $\mathbb{C}$ 上の $z = 0$ 以外の点で連続となることを示せ.

練習問題の略解

練習 4-1：解答例 1. 同値変形を用いる．

$$
\begin{aligned}
|z+w| \leq |z|+|w| &\iff |z+w|^2 \leq |z|^2+2|z||w|+|w|^2 \qquad \leftarrow\text{両辺を 2 乗}\\
&\iff (x+u)^2+(y+v)^2 \leq x^2+y^2+2|z||w|+u^2+v^2 \qquad \leftarrow\text{実部・虚部を代入}\\
&\iff xu+yv \leq |z||w|.
\end{aligned}
$$

よって最後の式を証明しよう．$xu+yv<0$ のとき，上の不等号は明らかであり，等号は成立しない．$xu+yv \geq 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
xu+yv \leq |z||w| &\iff (xu+yv)^2 \leq (x^2+y^2)(u^2+v^2)\\
&\iff 0 \leq (xv-yu)^2
\end{aligned}
$$

より不等式は明らかに成立する．とくに，等号成立は $xu+yv \geq 0$ かつ $xv=yu$ のとき．これは「$z=0$ または $w=0$」もしくは 「$zw \neq 0$ かつある $k>0$ が存在して，$z=kw$」のいずれかが成り立つことと同値である．

次に $z=-z'$, $w=z'+w'$ を上の三角不等式に代入すると，$|-z'+(z'+w')| \leq |z'|+|z'+w'|$. すなわち $|w'|-|z'| \leq |w'+z'|$. z', w' は任意なので，一般に $|z|-|w| \leq |z+w|$. ■

解答例 2. 一般に $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$ （等号成立は z が負でない実数のとき）であるから，

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} &= z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w} = z\overline{z}+2\mathrm{Re}\,(z\overline{w})+w\overline{w}\\
&\leq z\overline{z}+2|z\overline{w}|+w\overline{w}\\
&= |z|^2+2|z||w|+|w|^2 = (|z|+|w|)^2.
\end{aligned}
$$

等号成立は $\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) = |z\overline{w}|$ のとき，すなわち $z\overline{w}$ が負でない実数のとき.（解答例 1 の等号成立条件と同値であることを確かめてみるとよい.） ■

練習 4-2 .

(1) $\cos(z+2\pi) = \dfrac{e^{(z+2\pi)i}+e^{-(z+2\pi)i}}{2} = \dfrac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} = \cos z$. ($\sin z$ は略)

(2) $\cos^2 z+\sin^2 z = \left(\dfrac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right)^2 = \dfrac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}}{4}-\dfrac{e^{2zi}-2+e^{-2zi}}{4} = 1.$

(3)
$$
\begin{aligned}
\cos z\cos w-\sin z\sin w &= \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\cdot\frac{e^{wi}+e^{-wi}}{2}-\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\cdot\frac{e^{wi}-e^{-wi}}{2i}\\
&= \frac{e^{(z+w)i}+e^{(z-w)i}+e^{-(z-w)i}+e^{-(z+w)i}}{4}+\frac{e^{(z+w)i}-e^{(z-w)i}-e^{-(z-w)i}+e^{-(z+w)i}}{4}\\
&= \frac{e^{(z+w)i}+e^{-(z+w)i}}{2} = \cos(z+w).
\end{aligned}
$$

$\sin(z+w)$ は略.

練習 4-3.

(1) $\sin(\frac{\pi}{4}+i)=\dfrac{e^{(\frac{\pi}{4}+i)i}-e^{-(\frac{\pi}{4}+i)i}}{2i}=\dfrac{1}{2i}\Big\{e^{-1}\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)-e\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)\Big\}$

$$=\frac{1}{2i}\left\{e^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)-e\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\}=\frac{(1+e^2)-(1-e^2)i}{2e\sqrt{2}}.$$

(2) 加法定理より $\sin(x+yi)=\sin x\cos(yi)+\cos x\sin(yi)=\dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x+i\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.$

よって $\mathrm{Re}\,\sin(x+yi)=\dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x$, $\mathrm{Im}\,\sin(x+yi)=\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.$

練習 4-4.

(1) $\dfrac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}=0 \iff e^{zi}=-e^{-zi} \iff e^{2zi}=-1=e^{\pi i+2m\pi i}\quad (m\in\mathbb{Z}).$

よって $2zi=\pi i+2m\pi i \iff z=(\dfrac{1}{2}+m)\pi\quad (m\in\mathbb{Z}).$

(2)(a) $\tan(z+\pi)=\dfrac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)}=\dfrac{\sin z\cos\pi+\cos z\sin\pi}{\cos z\cos\pi-\sin z\sin\pi}=\dfrac{\sin z}{\cos z}=\tan z.$

(b) $i\tan i=i\dfrac{\frac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i}}{\frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2}}=\dfrac{1-e^2}{1+e^2}.$

第 5 講の練習問題

練習 5-1（微分係数の定義）． 以下の関数 $f(z)$ にたいし，定義にもとづいて微分係数 $f'(1)$ を（存在すれば）求めよ．

(1) $f(z) = iz + z^2$　(2) $f(z) = 1/z^3$　(3) $f(z) = z - 2\overline{z}$

練習 5-2（微分の公式）． 次の関数を微分せよ．

(1) $f(z) = iz + z^{10}$　(2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - i}$　(3) $f(z) = (z^2 - i)^5$

練習 5-3（微分不可能性）． $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ とする．この関数はすべての複素数 z において微分可能でないことを示せ．

練習 5-4（ところにより微分可能）． $f(z) = \overline{z}^2$ とするとき，$f(z)$ は $z = 0$ で微分可能だが，$z \neq 0$ では微分可能でないことを示せ．

練習 5-5（三角関数の微分）． 指数関数 e^z が $(e^z)' = e^z$ を満たすことを既知として，以下の公式を示せ：

(1) $(\sin z)' = \cos z$　(2) $(\cos z)' = -\sin z$

発展問題 5-1（微分可能 ⇒ 連続）． 関数 $w = f(z)$ が $z = \alpha$ で微分可能であれば，同時に連続となることを示せ．

逆に，$z = \alpha$ で連続だが微分可能でない例を挙げよ．

練習問題の略解

練習 5-1（微分係数の定義）． (1) $\displaystyle\lim_{z\to1}\frac{f(z)-f(1)}{z-1}=\lim_{z\to1}\frac{zi+z^2-(i+1)}{z-1}$
$\displaystyle=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)i+(z+1)(z-1)}{z-1}=\lim_{z\to1}\{i+(z+1)\}=2+i.$
(2) $\displaystyle\lim_{z\to1}\frac{f(z)-f(1)}{z-1}=\lim_{z\to1}\frac{\frac{1}{z^3}-1}{z-1}=\lim_{z\to1}\frac{1-z^3}{z^3(z-1)}=\lim_{z\to1}\frac{-(z-1)(z^2+z+1)}{z^3(z-1)}$
$$=\lim_{z\to1}\frac{-(z^2+z+1)}{z^3}=-3.$$
(3) $z-1=re^{\theta i}\quad(r\to0,\ \theta:\text{任意})$ とおくと, $z=re^{\theta i}+1$, $\overline{z}=re^{-\theta i}+1$ より，
$\displaystyle\frac{f(z)-f(1)}{z-1}=\frac{(z-2\overline{z})-(-1)}{z-1}=\frac{re^{\theta i}+1-2(re^{-\theta i}+1)+1}{re^{\theta i}}=\frac{re^{\theta i}-2re^{-\theta i}}{re^{\theta i}}=1-2e^{-2\theta i}.$
この値は θ に依存しており，$z\to1$ すなわち $r\to0$ としても，極限が一意に定まらない．したがって微分不可能である．

練習 5-2（微分の公式）． (1) $i+10z^9$, (2) $\displaystyle-\frac{z^2+i}{(z^2-i)^2}$ (3) $10z(z^2-i)^4$

練習 5-3（微分不可能性）． $z-\alpha=re^{\theta i}$ $(r\to0,\ \theta:\text{任意})$ とおくと, $z=re^{\theta i}+\alpha$, $\overline{z}=re^{-\theta i}+\overline{\alpha}$ より，
$\displaystyle\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}=\frac{\frac{z+\overline{z}}{2}-\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}}{z-\alpha}=\frac{(z-\alpha)-(\overline{z}-\overline{\alpha})}{2(z-\alpha)}=\frac{re^{\theta i}+re^{-\theta i}}{2re^{\theta i}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\theta i}.$
この値は θ に依存しており，$z\to1$ すなわち $r\to0$ としても，極限が一意に定まらない．したがって微分不可能である．

練習 5-4（ところにより微分可能）． $z-\alpha=re^{\theta i}$ $(r\to0,\ \theta:\text{任意})$ とおくと, $\overline{z}=re^{-\theta i}+\overline{\alpha}$ より，
$\displaystyle\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}=\frac{\overline{z}^2-\overline{\alpha}^2}{z-\alpha}=\frac{(\overline{z}-\overline{\alpha})(\overline{z}+\overline{\alpha})}{z-\alpha}=\frac{re^{-\theta i}(re^{-\theta i}+2\overline{\alpha})}{re^{\theta i}}=e^{-2\theta i}(re^{-\theta i}+2\overline{\alpha}).$
$\alpha=0$ のとき, $e^{-2\theta i}(re^{-\theta i}+0)=re^{-3\theta i}\to0$ $(r\to0)$ となるので, $z=0$ において微分可能である．一方, $\alpha\neq0$ のとき, θ を固定すると $e^{-2\theta i}(re^{-\theta i}+2\overline{\alpha})\to2e^{-2\theta i}\overline{\alpha}$ $(r\to0)$ となるが，この極限は θ に依存するので一意な極限とはいえない．よって $z\neq0$ において微分不可能である．

練習 5-5（三角関数の微分）． (1) $\displaystyle(\sin z)'=\left(\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right)'=\frac{ie^{zi}+ie^{-zi}}{2i}=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}=\cos z.$
(2) $\displaystyle(\cos z)'=\left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)'=\frac{ie^{zi}-ie^{-zi}}{2}=-\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}=-\sin z.$

第 6 講の練習問題

練習 6-1（微分の計算）． 次の関数の微分を計算せよ．

(1) $e^z \sin z$ (2) ze^{z^2} (3) $\tan z$ (4) $\cos(z+z^2)$

練習 6-2（コーシー・リーマン）． 以下の正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ について $f(x+yi) = u(x,y)+v(x,y)i$ とするとき，定義域上でコーシー・リーマンの方程式が成立することを確認せよ．

(1) $D = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ (2) $D = \mathbb{C} - \{0\}$, $f(z) = 1/z$

練習 6-3（正則性の判定）． 以下で定義される複素関数 $f(x+yi) = u(x,y)+v(x,y)i$ は正則関数であることを示し，導関数を求めよ．

(1) $f(x+yi) = (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$ (2) $f(x+yi) = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$

練習 6-4（正則関数の生成）． 複素関数 $f(x+yi) = (x^3-3xy^2)+v(x,y)i$ が正則関数であるとき，$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + C$ (C は実数の定数) となることを示せ．

練習 6-5（非正則性の判定）． 以下の実 2 次元関数 $F : (x,y) \mapsto (u,v) = (u(x,y), v(x,y))$ を用いて定義される複素関数 $f(x+yi) = u(x,y)+v(x,y)i$ は正則関数で<u>ない</u>ことを示せ．

(1) $F : (x,y) \mapsto (u,v) = (x,-y)$ (2) $F : (x,y) \mapsto (u,v) = (x,2y)$
(3) $F : (x,y) \mapsto (u,v) = (x^2+y^2, 2xy)$ (4) $F : (x,y) \mapsto (u,v) = (x,0)$

練習 6-6（非正則性の判定，その２）． 次の関数が正則で<u>ない</u>ことを示せ．

(1) $f(z) = \overline{e^z}$ (2) $f(z) = |z|^2$ (3) $f(z) = z^2 + \overline{z}^2$

発展問題 6-1（定数関数となる条件）． ある領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された正則関数 $f(z)$ にたいし，以下のいずれかを満たせば $f(z)$ は定数関数となることを示せ．

(1) $\mathrm{Re}\, f(z)$ が定数関数． (2) $\mathrm{Im}\, f(z)$ が定数関数．
(3) $|f(z)|$ が定数関数． (4) 任意の $z \in D$ で $f'(z) = 0$．

発展問題 6-2（コーシー・リーマンの複素形）． $f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．$z = x+yi \in D$, $f(x+yi) = u(x,y)+v(x,y)i$ とするとき，f の「x および y 偏微分」を

$$f_x(z) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f((x+\Delta x)+yi) - f(z)}{\Delta x}, \quad f_y(z) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+(y+\Delta y)i) - f(z)}{\Delta y}$$

と定義する．このとき，コーシー・リーマンの方程式は

$$f_y = if_x$$

と同値であることを示せ．(その幾何学的な意味も考察してみよ．)

練習問題の略解

練習 6-1（微分の計算）. (1) $(e^z\sin z)'=e^z\cos z+e^z\sin z=e^z(\sin z+\cos z)$
(2) $(ze^{z^2})'=e^{z^2}+ze^{z^2}\cdot 2z=e^{z^2}(1+2z^2)$
(3) $(\tan z)'=(\frac{\sin z}{\cos z})'=\frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z}=\frac{1}{\cos^2 z}$
(4) $(\cos(z+z^2))'=-\sin(z+z^2)\cdot(z+z^2)'=-(1+2z)\sin(z+z^2)$

練習 6-2（コーシー・リーマン）. (1) $z=x+yi$ とすると, $f(z)=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$. $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$ とすると $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\2xy\end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&-2y\\2y&2x\end{pmatrix}$. よって $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ なのでコーシー・リーマンの方程式が成立.
(2) $z=x+yi$ とすると, $f(z)=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$. $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ とすると $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{x^2+y^2}\\\frac{-y}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}&\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}&\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}$. よって $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ なのでコーシー・リーマンの方程式が成立.

練習 6-3（正則性の判定）. (1) $f(x+yi)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$ より $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^3-3xy^2\\3x^2y-y^3\end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^2-3y^2&-6xy\\6xy&3x^2-3y^2\end{pmatrix}$. となり, 各成分は連続. したがって u,v は C^1 級. またコーシー・リーマンの方程式を満たすので, 定理 8-2 より $f(x+yi)$ は正則であり，$f'(z)=u_x+v_xi=3(x^2-y^2)+6xyi$.（実は $f(z)=z^3$, $f'(z)=2z^2$.）
(2) $f(x+yi)=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$ より $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-y}\cos x\\e^{-y}\sin x\end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^{-y}\sin x&-e^{-y}\cos x\\e^{-y}\cos x&-e^{-y}\sin x\end{pmatrix}$. となり, 各成分は連続. したがって u,v は C^1 級. またコーシー・リーマンの方程式を満たすので, 定理 8-2 より $f(x+yi)$ は正則であり，$f'(z)=u_x+v_xi=-e^{-y}(\sin x-i\cos x)$.（実は $f(z)=e^{iz}$, $f'(z)=ie^{iz}$.）

練習 6-4. $f(x+yi)=u(x,y)+v(x,y)i$ とおく. $f(x+yi)$ が正則なので f はコーシー・リーマンの方程式を満たす. よって $\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^2-3y^2&-6xy\\v_x&v_y\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6xy\\3x^2-3y^2\end{pmatrix}$. v_y を y で積分すると $v=3x^2y-y^3+g(x)$ と書ける. これを x で微分すると $v_x=6xy+\frac{d}{dx}g(x)=6xy$ となるので $g(x)$ は定数関数 $C\in\mathbb{R}$ である. よって $f(x+yi)=u+vi=(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3+C)i$ となり, $v(x,y)=3x^2y-y^3+Ci$ (C は実定数) である.

練習 6-5（非正則性の判定）． (1) $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. よって $u_x \neq v_y$ なのでコーシー・リーマンの方程式を満たさない．したがって正則でない．
(2) $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. よって $u_x \neq v_y$ なのでコーシー・リーマンの方程式を満たさない．したがって正則でない．
(3) $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$. よって $u_y \neq -v_x$ なのでコーシー・リーマンの方程式を満たさない．したがって正則でない．
(4) $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. よって $u_x \neq v_y$ なのでコーシー・リーマンの方程式を満たさない．したがって正則でない．

練習 6-6（非正則性の判定，その２）．
(1) $z = x+yi$ とすると, $f(z) = e^{x-yi} = e^x(\cos y - i\sin y)$. $u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = -e^x \sin y$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x\cos y \\ -e^x \sin y \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ -e^x\sin y & -e^x\cos y \end{pmatrix}$. よってコーシー・リーマンの方程式を満たさないので, $f(z)$ は正則でない．
(2) $z = x+yi$ とすると, $f(z) = |x+yi|^2 = x^2+y^2$. $u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. コーシー・リーマンの方程式は $(x,y) = (0,0)$ 以外で成立しない．よって $f(z)$ は（少なくとも）$z = 0$ 以外で微分不可能．したがって，$f(z)$ は複素平面内の任意の領域で正則でない．
(3) $z = x+yi$ とすると, $f(z) = (x+yi)^2 + (x-yi)^2 = 2(x^2-y^2)$. $u(x,y) = 2(x^2-y^2)$, $v(x,y) = 0$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x^2-y^2) \\ 0 \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & -4y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. コーシー・リーマンの方程式は $(x,y) = (0,0)$ 以外で成立しない. よって $f(z)$ は（少なくとも）$z = 0$ 以外で微分不可能．したがって，$f(z)$ は複素平面内の任意の領域上で正則でない．

第 7 講の練習問題

練習問題・発展問題はおやすみです.

第 8 講の練習問題

数値目標：期末までに最低 20 個は線積分を計算すること！

練習 8-1（復習：実数の線積分）． 以下の積分の C に曲線 $C_1 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = (t, 0)\ (t \in [-1, 1])$，$C_2 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = (t^2, t)\ (t \in [0, 1])$，$C_3 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = (\cos t, \sin t)\ (t \in [0, 2\pi])$ を代入して，積分値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_C dx + dy$ (2) $\displaystyle\int_C x\,dx - y\,dy$ (3) $\displaystyle\int_C (x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy$

練習 8-2（線積分）． 以下の積分の C に曲線 $C_1 : z = z(t) = (1 + i)t\ (t \in [0, 1])$ および $C_2 : z = z(t) = t + it^2\ (t \in [0, 1])$ を代入して，積分値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_C z^2\,dz$ (2) $\displaystyle\int_C (z - 1)\,dz$ (3) $\displaystyle\int_C (\bar{z} - 1)\,dz$ (4) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}\,z\,dz$ (5) $\displaystyle\int_C \overline{z}^2 dz$

練習 8-3（周回積分）． $C(\alpha, r) = \left\{z(t) = \alpha + re^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\right\}$ とおき，向きは t の増加方向（左回り）とする．次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_C z^m\,dz$ ただし $C = C(0, r), r > 0$ は任意，m は整数．

(2) $\displaystyle\int_C \overline{z}^m\,dz$ ただし $C = C(0, r), r > 0$ は任意，m は整数．

(3) $\displaystyle\int_C \left\{(z - 8)^4 + 8(z - 8)^4 + \frac{4}{z - 8} + \frac{8}{(z - 8)^4}\right\} dz$ ただし $C = C(8, 4), r > 0$ は任意．

発展問題 8-1（いろんな経路の積分）． $z = -1$ から $z = 1$ を結ぶ経路を以下のように複数定める：

$$
\begin{aligned}
C_1 &: z = z(t) = e^{(\pi - t)i} && (t \in [0, \pi]) \\
C_2 &: z = z(t) = t && (t \in [-1, 1]) \\
C_3 &: z = z(t) = e^{ti} && (t \in [-\pi, 0]) \\
C_4 &: z = z(t) = t + (|t| - 1)i && (t \in [-1, 1]) \\
C_5 &: z = z(t) = t + (1 - |t|)i && (t \in [-1, 1])
\end{aligned}
$$

ただし曲線の向きは t の増加方向に対応させる．すべての $C_i\ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ およびすべての負でない整数 m にたいし，$\displaystyle\int z^m\,dz$ および $\displaystyle\int_C \overline{z}^m\,dz$ を求めよ．(コーシーの積分定理およびその系は用いてはならない．Hint: $\displaystyle\int_C \overline{z}^m\,dz$ は m の値に応じて最大 4 つの場合分けが発生する．)

発展問題 8-2. 区分的に滑らかな曲線 $C = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$ が $\alpha = z(a),\ \beta = z(b) \in \mathbb{C}$ を満たすとき，

$$\int_C dz \ = \ \int_C 1 \cdot dz = \beta - \alpha$$

となることを 複素線積分の定義に基づいて 証明せよ．

練習問題の略解

練習 8-1（復習：実数の線積分）． $C_1 : (x(t), y(t)) = (t, 0)$ より $(x'(t), y'(t)) = (1, 0)$. よって $dx = 1 \cdot dt$, $dy = 0 \cdot dt$.

$C_2 : (x(t), y(t)) = (t^2, t)$ より, $(x'(t), y'(t)) = (2t, 1)$. よって $dx = 2t \cdot dt$, $dy = 1 \cdot dt$.

$C_3 : (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ より, $(x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$. よって $dx = -\sin t \cdot dt$, $dy = \cos t \cdot dt$.

(1) $\displaystyle\int_{C_1} dx + dy = \int_{-1}^{1} (1 \cdot dt + 0 \cdot t) = \int_{-1}^{1} dt = 2.$

$\displaystyle\int_{C_2} dx + dy = \int_{0}^{1} (2t \cdot dt + 1 \cdot dt) = \int_{0}^{1} (2t + 1)\, dt = 2.$

$\displaystyle\int_{C_3} dx + dy = \int_{0}^{2\pi} (-\sin t \cdot dt + \cos t \cdot dt) = \int_{0}^{2\pi} (-\sin t + \cos t)\, dt = 0.$

(2) $\displaystyle\int_{C_1} x\, dx - y\, dy = \int_{-1}^{1} (t \cdot dt + 0 \cdot dt) = \int_{-1}^{1} t\, dt = 0.$

$\displaystyle\int_{C_2} x\, dx - y\, dy = \int_{0}^{1} (t^2 \cdot 2t\, dt - t \cdot dt) = \int_{0}^{1} (2t^3 - t) dt = 0.$

$\displaystyle\int_{C_3} x\, dx - y\, dy = \int_{0}^{2\pi} (\cos t \cdot (-\sin t)\, dt - \sin t \cdot \cos t \cdot dt) = -\int_{0}^{2\pi} \sin 2t\, dt = 0.$

(3) $\displaystyle\int_{C_1} (x^2 - y^2) dx - 2xy\, dy = \int_{-1}^{1} (t^2 \cdot dt - 0 \cdot dt) = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}.$

$\displaystyle\int_{C_2} (x^2 - y^2) dx - 2xy\, dy = \int_{0}^{1} ((t^4 - t^2) \cdot 2t dt - 2t^3 \cdot dt) = \int_{0}^{1} (2t^5 - 4t^3)\, dt = -\frac{2}{3}.$

$\displaystyle\int_{C_3} (x^2 - y^2) dx - 2xy\, dy = \int_{0}^{2\pi} \{(\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot (-\sin t) dt - 2 \cos t \sin t \cdot \cos t\, dt\}$

$\displaystyle= -\int_{0}^{2\pi} (\cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t) dt = -\int_{0}^{2\pi} \sin 3t\, dt = 0.$

練習 8-2（線積分）． $C_1 : z = z(t) = (1 + i)t$ より, $dz = (1 + i)\, dt$.

$C_2 : z = z(t) = t + t^2 i$ より, $dz = (1 + 2ti)\, dt$.

(1) $\displaystyle\int_{C_1} z^2\, dz = \int_{0}^{1} \{(1 + i)t\}^2 \cdot (1 + i)\, dt = (1 + i)^3 \int_{0}^{1} t^2\, dt = \frac{(1 + i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i.$

$\displaystyle\int_{C_2} z^2\, dz = \int_{0}^{1} (t + t^2 i)^2 \cdot (1 + 2ti)\, dt = \int_{0}^{1} (t^2 + 4t^3 i - 5t^4 - 2t^5 i)\, dt = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i.$

(2) $\displaystyle\int_{C_1} (z - 1)\, dz = \int_{0}^{1} \{(1 + i)t - 1\} \cdot (1 + i)\, dt = \int_{0}^{1} (2it - i - 1)\, dt = -1.$

$\displaystyle\int_{C_2} (z - 1)\, dz = \int_{0}^{1} (t + t^2 i - 1) \cdot (1 + 2ti)\, dt = \int_{0}^{1} (-2t^3 + 3t^2 i - 2ti + t - 1)\, dt = -1.$

注意． z^2, $z - 1$ は複素平面全体で正則なので，積分値は積分路の始点と終点だけで定まる．また，不定積分 $z^3/3, z^2/2 - z$ を用いた計算 $\displaystyle\int_{C_1} = \int_{C_2} = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+i} = \frac{(1 + i)^3}{3}$, $\displaystyle\int_{C_1} = \int_{C_2} = \left[\frac{z^2}{2} - z\right]_0^{1+i} = -1$ も意味をもつ．

(3) $\displaystyle\int_{C_1}(\overline{z}-1)\,dz=\int_0^1\{(1-i)t-1\}\cdot(1+i)\,dt=\int_0^1(2t-1-i)\,dt=-i.$

$\displaystyle\int_{C_2}(\overline{z}-1)\,dz=\int_0^1(t-t^2i-1)\cdot(1+2ti)\,dt=\int_0^1(2t^3+t^2i-2ti+t-1)\,dt=-\frac{2}{3}i.$

(4) $\displaystyle\int_{C_1}\mathrm{Re}\,z\,dz=\int_0^1 t\cdot(1+i)\,dt=\frac{1+i}{2}.$

$\displaystyle\int_{C_2}\mathrm{Re}\,z\,dz=\int_0^1 t\cdot(1+2ti)\,dt=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i.$

(5) $\displaystyle\int_{C_1}\overline{z}^2\,dz=\int_0^1\{(1-i)t\}^2\cdot(1+i)\,dt=(1-i)^2(1+i)\int_0^1 t^2\,dt=\frac{2-2i}{3}.$

$\displaystyle\int_{C_2}\overline{z}^2\,dz=\int_0^1(t-t^2i)^2\cdot(1+2ti)\,dt=\int_0^1(t^2+3t^4-2t^5i)\,dt=\frac{14}{15}-\frac{1}{3}i.$

練習 8-3（周回積分）． $C=C(0,r)=\{z(t)=re^{ti}\mid t\in[0,2\pi]\}$ より，$dz=rie^{ti}\,dt.$

(1) $\displaystyle\int_C z^m\,dz=\int_0^{2\pi}(re^{ti})^m\cdot rie^{ti}\,dt=ir^{m+1}\int_0^{2\pi}e^{t(m+1)i}\,dt$

$$=\begin{cases} ir^{m+1}\left[\dfrac{e^{t(m+1)i}}{(m+1)i}\right]_0^{2\pi}=0 & (m\neq -1)\\ i\displaystyle\int_0^{2\pi}1\cdot dt=2\pi i. & (m=-1)\end{cases}$$

(2) $\displaystyle\int_C \overline{z}^m\,dz=\int_0^{2\pi}(re^{-ti})^m\cdot rie^{ti}\,dt=ir^{m+1}\int_0^{2\pi}e^{t(1-m)i}\,dt$

$$=\begin{cases} ir^{m+1}\left[\dfrac{e^{t(1-m)i}}{(1-m)i}\right]_0^{2\pi}=0 & (m\neq 1)\\ ir^2\displaystyle\int_0^{2\pi}1\cdot dt=2\pi r^2 i. & (m=1)\end{cases}.$$

(3) $C=C(8,4)=\{z(t)=8+4e^{ti};t\in[0,2\pi]\}$. $z-8=\zeta$ とすると，

(与式) $\displaystyle=\int_{C(0,4)}(\zeta^4+8\zeta^4+\frac{4}{\zeta}+\frac{8}{\zeta^4})\,d\zeta=4\int_{C(0,4)}\frac{1}{\zeta}\,d\zeta=8\pi i.$ ただし，(1) の結果を用いた．(公式 1 を直接用いてもよい．)

第 9 講の練習問題

数値目標：期末までに最低 20 個は線積分を計算すること！

練習 9-1（コーシーの積分定理）． 曲線 C は単位円を左側向きにまわる曲線とする．このとき，以下の積分値は 0 である．なぜか？

(1) $\displaystyle\int_C e^z\,dz$ (2) $\displaystyle\int_C (\sin z + 3\cos z)\,dz$ (3) $\displaystyle\int_C p(z)\,dz$ ($p(z)$ は z の多項式)

(4) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-5}dz$ (5) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2-8}dz$ (6) $\displaystyle\int_C \frac{1}{\sin(z+3i)}dz$

練習 9-2（コーシーの定理の応用）． 曲線 C は単位円を左側向きにまわる曲線とする．このとき，以下の積分値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z(z-2i)}dz$ (2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{4z^2+1}dz$ (3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{2z^2+3z-2}dz$

練習 9-3（コーシーの定理の応用 2）． 以下の曲線 C について，積分

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

を計算せよ．ただし $C(\alpha, r) = \left\{z(t) = \alpha + re^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\right\}$ とする．

(1) $C = C(i, 1)$ (2) $C = C(-i, 1)$ (3) $C = C(0, 2)$ (4) $C = C(1, 1)$

発展問題 9-1（コーシーの定理の応用 3）． 正の数 a, b にたいし，楕円

$$E = \{z(t) = a\cos t + ib\sin t \mid t \in [0, 2\pi]\}$$

を考える．ただし，向きは左回りとする．

(1) $\displaystyle\int_E \frac{1}{z}\,dz$ を求めよ． (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx = \frac{2\pi}{ab}$ を証明せよ．

発展問題 9-2（やや難）． $H(r) = \left\{z(t) = re^{it} \mid t \in [0, \pi]\right\}$ とし，向きは t の増加方向とする．

(1) $0 < r < R$ とするとき，次が成り立つことを示せ:

$$\int_{H(r)} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{H(R)} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \;=\; 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx.$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$ を証明せよ．(難しいが，有名な問題なので大概の教科書・参考書に載っている．)

練習問題の略解

練習 9-1（コーシーの積分定理）．
(1) e^z は複素平面全体で正則．とくに C は単純閉曲線なので，コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C e^z\,dz = 0.$
(2) $\sin z + 3\cos z$ は複素平面全体で正則．(1) と同じ理由で $\displaystyle\int_C (\sin z + 3\cos z)\,dz = 0.$
(3) $p(z)$ は z の多項式なので複素平面全体で正則．(1) と同じ理由で $\displaystyle\int_C p(z)\,dz = 0.$
(4) $\dfrac{1}{z-5}$ は $z=5$ 以外で正則．とくに C 上および C の囲む単位円板内で正則なので，コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-5}\,dz = 0.$
(5) $\frac{e^z}{z^2-8}$ は $z=\pm 2\sqrt{2}$ 以外で正則．とくに $z=\pm 2\sqrt{2}$ は C 及び C の内部に含まれない．よってコーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2-8}\,dz = 0.$
(6) $\dfrac{1}{\sin(z+3i)}$ は $\sin(z+3i)=0$ をみたす z 以外で正則．$\sin w = 0 \iff w = n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ より $z = n\pi - 3i$．$z = n\pi - 3i$ は C 及び C の内部に含まれないので，コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2-8}\,dz = 0.$

練習 9-2（コーシーの定理の応用）．
(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z(z-2i)}\,dz = \int_C \frac{1}{-2i}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2i}\right)dz = \frac{i}{2}\left\{\int_C \frac{1}{z}\,dz - \int_C \frac{1}{z-2i}\,dz\right\}$．$z=0$ は C の内部, $z=2i$ は C の外部にあるので,（求める積分）$= \dfrac{i}{2}(2\pi i - 0) = -\pi.$
(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{4z^2+1}\,dz = \int_C \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-\frac{i}{2}} - \frac{1}{z+\frac{i}{2}}\right)dz$．$z=\pm i/2$ は共に C の内部にあるので,（求める積分）$= \dfrac{1}{4i}(2\pi i - 2\pi i) = 0.$
(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{2z^2+3z-2}\,dz = \int_C \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z+2}\right)dz$．$z=\frac{1}{2}$ は C の内部にあり，$z=-2$ は C の外部にあるので,（求める積分）$= \dfrac{1}{5}(2\pi i - 0) = \dfrac{2}{5}\pi i.$

練習 9-3（コーシーの定理の応用２）．
$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = \int_C \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz.$
(1) $C = C(i,1)$ のとき，$z=i$ は C の内部, $z=-i$ は C の外部にあるので,
$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}(2\pi i - 0) = \pi.$$
(2) $C = C(-i,1)$ のとき，$z=-i$ は C の内部, $z=i$ は C の外部にあるので,
$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}(0 - 2\pi i) = -\pi.$$
(3) $C = C(0,2)$ のとき，$z=\pm i$ はともに C の内部にあるので,
$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}(2\pi i - 2\pi i) = 0.$$
(4) $C = C(1,1)$ のとき，$z=\pm i$ は ともに C の外部にあるので,
$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}(0 - 0) = 0.$$

第 10 講の練習問題

数値目標：期末までに最低 20 個は線積分を計算すること！

練習 10-1（コーシーの積分公式）． 次の積分を求めよ．ただし，$C = C(0,2)$ とする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z-1}\,dz$ (2) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$ (3) $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z-\pi/2)(z+\pi)}\,dz$

練習 10-2（ n 回微分の積分公式）． 次の積分を求めよ．ただし，$C = C(0,2)$ とする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^4}\,dz$ (2) $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}\,dz$ (3) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-iz}}{(3z-\pi)^2}\,dz$

練習 10-3（コーシーの定理の応用 2）． 積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}\,dz$ の以下の曲線 C に沿った積分値を求めよ．

(1) $C = C(0,1/2)$ (2) $C = C(0,3/2)$ (3) $C = C(2,3/2)$ (4) $C = C(0,3)$

発展問題 10-1（コーシーの定理の応用 3）． 関数 $f(z)$ が円 $C = C(\alpha,R)$ とその内部を含む領域で正則であるとする．このとき，

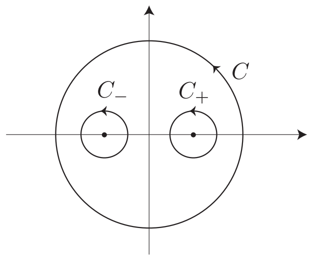
$$f(\alpha) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha + Re^{it})\,dt$$

を示せ．

練習問題の略解

練習 10-1（コーシーの積分公式）． (1) $z=1$ は $C=C(0,2)$ の内部にあるから，積分公式より $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i e^1 = 2\pi e i.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = \int_C \frac{e^z}{(z-1)(z+1)}\,dz$ である．また $C_\pm = C(\pm 1, 1/2)$ とおけば，右図と積分定理より $\displaystyle\int_C = \int_{C_+} + \int_{C_-}$ が成り立つ（基本公式 2 の証明参照．実軸に沿って切り込みを入れて考えよ.）．C_+ の内部では $\dfrac{e^z}{z+1}$ は正則なので，積分公式より $\displaystyle\int_{C_+} = 2\pi i \cdot \frac{e^1}{1+1} = e\pi i.$ 同様に C_- の内部では $\dfrac{e^z}{z-1}$ は正則なので，積分公式より $\displaystyle\int_{C_-} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{-1-1} = -\frac{\pi i}{e}.$



以上より，求める積分は $\displaystyle\int_C = \left(e - \frac{1}{e}\right)\pi i.$

(3) C の内部で $\dfrac{\sin z}{z+\pi}$ は正則であるから，積分公式より $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z-\pi/2)(z+\pi)}\,dz = 2\pi i \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2+\pi} = \frac{4i}{3}.$

練習 10-2（ n 回微分の積分公式）． (1) $z=0$ は C の内部にあるので，$f(z)=e^z$ として 3 回微分の積分公式を適用すると，$f^{(3)}(0) = \dfrac{3!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^4}\,dz.$ よって $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}e^0 = \frac{\pi i}{3}.$

(2) $z=-3$ は C の外部にあり，$z=1$ は C の内部にある．よって $f(z) = \dfrac{z+1}{z+3}$ として 1 回微分の積分公式を適用すると，$f'(1) = \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz.$ よって $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(1) = 2\pi i \cdot \left.\frac{2}{(z+3)^2}\right|_{z=1} = \frac{\pi i}{4}.$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-iz}}{(3z-\pi)^2}\,dz = \frac{1}{9}\int_C \frac{e^{-iz}}{(z-\pi/3)^2}\,dz.$ $z=\pi/3$ は C の内部にあるので，$f(z)=e^{-iz}$ に 1 階微分のコーシーの積分定理を適用して $f'\!\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{e^{-iz}}{(z-\pi/3)^2}\,dz.$ よって（求める積分）$= \dfrac{2\pi i}{9}\cdot(-ie^{i(-\pi/3)}) = \dfrac{\pi(1-\sqrt{3}i)}{9}.$

練習 10-3（コーシーの定理の応用 2）． 被積分関数 $\dfrac{1}{z^2(z-1)(z+2)}$ の極（$z=0,\ 1,\ -2$）が C の内部か外部かに応じてコーシーの積分公式を使い分ければよい．以下，$I := \displaystyle\int_C \frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}\,dz$ とおく．

(1) $C=C(0,1/2)$ のとき，$z=0$ は C の内部にあり，$z=1,\ -2$ は C の外部にある．よって $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ とおいてコーシーの積分公式を適用すれば，$f'(0) = \dfrac{1!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}I.$ よって求める積分は $I = 2\pi i \cdot f'(0) = 2\pi i \cdot \left(\left.\dfrac{-2z-1}{(z^2+z-2)^2}\right|_{z=0}\right) = 2\pi i \cdot \dfrac{-1}{4} = -\dfrac{\pi i}{2}.$

(2) $C=C(0,3/2)$ のとき，$z=0,\ 1$ は C の内部にあり，$z=-2$ は C の外部にある．いま

$C_0 = C(0,1/3)$, $C_1 = C(1,1/3)$ とおけば，積分定理より $\displaystyle\int_C = \int_{C_0} + \int_{C_1}$ がなりたつ．C_0 での積分は (1) より $-\dfrac{\pi i}{2}$．また C_0 での積分は，$g(z) = \dfrac{1}{z^2(z+2)}$ とおいて積分公式を適用することで $\displaystyle\int_{C_1} = 2\pi i \cdot g(1) = \frac{2\pi i}{3}$. よって求める積分は $I = -\dfrac{\pi i}{2} + \dfrac{2\pi i}{3} = \dfrac{\pi i}{6}$.
(3) $C = C(2,3/2)$ のとき，$z=1$ は C の内部にあり，$z = 0, -2$ は C の外部にある．よって (2) と同様に $g(z) = \dfrac{1}{z^2(z+2)}$ とおいて積分公式を適用することで $I = \displaystyle\int_C = 2\pi i \cdot g(1) = \frac{2\pi i}{3}$.
(4) $C = C(0,3)$ のとき，$z = 0,\ 1,\ -2$ はすべて C の内部にある．よって $C_{-2} = C(-2,1/3)$ とおけば，$\displaystyle\int_C = \int_{C_0} + \int_{C_1} + \int_{C_{-2}}$ がなりたつ．

よって $h(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$ とおいてコーシーの積分公式を適用すれば，$\displaystyle\int_{C_2} = 2\pi i \cdot h(-2) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{\pi i}{6}$. よって (2) の結果とあわせて $I = \dfrac{\pi i}{6} - \dfrac{\pi i}{6} = 0$.

第 11 講の練習問題

練習 11-1（絶対収束）． 絶対収束する級数は収束するという性質を用いて，以下の級数が収束することを証明せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$ （$|z|<1$）　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ （$z \in \mathbb{C}$）

練習 11-2（テイラー展開）． 次の関数の $z=0$ におけるテイラー展開を，z^4 の項までもとめよ．

(1) $\dfrac{1}{z+3}$　(2) e^{-z^2}　(3) $\dfrac{\cos z}{z-1}$

練習 11-3（テイラー展開その２）． 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ を次の α でテイラー展開せよ．

(1) $\alpha = 0$　(2) $\alpha = 2i$　(3) $\alpha = 1$

発展問題 11-1（テイラー展開の応用）． 関数 $f(z)$ が $\mathbb{C}$ 上で正則であるとき，ある自然数 n について $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$ が成り立つとする．（すなわち，どんなに小さな $\epsilon > 0$ にたいしても，ある $M > 0$ が存在して，$|z| > M$ ならば $|f(z)/z^n| < \epsilon$ とできる.） このとき，$f(z)$ は多項式であることを示せ．

練習問題の略解

練習 11-1（絶対収束）． (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e < \infty$ より，絶対収束する．よってもとの級数も収束．

(2) $|z|<1$ より $\displaystyle\left|\frac{z^n}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ がすべての $n\in\mathbb{N}$ で成り立つ．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ より，もとの級数は絶対収束，よって収束．

(3) $\displaystyle\sum_{n\le N}\left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = \sum_{n\le N}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \le \sum_{m\le 2N+1}\frac{|z|^m}{m!} < e^{|z|} < \infty$．よってもとの級数は絶対収束．よって収束．

練習 11-2（テイラー展開）． (1) $\displaystyle\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+z/3} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\frac{z^3}{3^3}+\frac{z^4}{3^4}-\cdots\right) = \frac{1}{3}-\frac{z}{9}+\frac{z^2}{27}-\frac{z^3}{81}+\frac{z^4}{243}-\cdots$．（ただし，$|z|<3$.）

(2) $e^w = 1+w+\frac{w^2}{2!}+\cdots$ より $w=-z^2$ を代入して $\displaystyle e^{-z^2} = 1+(-z^2)+\frac{(-z^2)^2}{2!}+\cdots = 1-z^2+\frac{z^4}{2}+\cdots$．

(3) $\displaystyle\frac{\cos z}{z-1} = -(\cos z)\cdot\frac{1}{1-z} = -\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)\left(1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots\right) = -1-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{2}-\frac{13z^4}{24}+\cdots$．（ただし，$|z|<1$.）

練習 11-3（テイラー展開その２）． (1) $\displaystyle f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$.

(2) $\displaystyle f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$．$w=z-2i$ とおくと，$\displaystyle\frac{1}{z-i} = \frac{1}{w+i} = \frac{1}{i}\frac{1}{1+w/i} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{i}\right)^n = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(iw)^n = \sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}w^n$（ただし $|w|<1$）．同様にして $\displaystyle\frac{1}{z+i} = \frac{1}{w+3i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n-1}w^n}{3^{n+1}}$（ただし $|w|<3$）．以上まとめると，$|w|<1$ のとき，すなわち $|z-2i|<1$ のとき，$\displaystyle f(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)i^{n-1}w^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}-1\right)\frac{i^n}{2}(z-2i)^n$.

(3) (2) と同様の方法を用いる．$w=z-1$ とおくと，$\displaystyle\frac{1}{z-i} = \frac{1}{w+(1-i)} = \frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+w/(1-i)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^n}{(1-i)^{n+1}}$（ただし $|w|<|1-i|=\sqrt{2}$）．同様にして $\displaystyle\frac{1}{z+i} = \frac{1}{w+(1+i)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^n}{(1+i)^{n+1}}$（ただし $|w|<|1+i|=\sqrt{2}$）．以上まとめると，$|w|<\sqrt{2}$ のとき，すなわち $|z-1|<\sqrt{2}$ のとき，$\displaystyle f(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\right)w^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)\frac{(-1)^n w^n}{2i}$．ここで $w=z-1$ を代入して終えてもいいが，さらに計算することもできる．$1\pm i = \sqrt{2}\,e^{\pm\pi i/4}$ より，

$\left(\dfrac{1}{(1-i)^{n+1}} - \dfrac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)\dfrac{1}{2i} = \dfrac{1}{2^{(n+1)/2}}\dfrac{e^{(n+1)\pi i/4} - e^{-(n+1)\pi i/4}}{2i} = \dfrac{1}{2^{(n+1)/2}}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}$. よって

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{(n+1)/2}} \sin\frac{(n+1)\pi}{4}(z-1)^n.$$

第 12 講の練習問題

練習 12-1（ローラン展開）． 関数 $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + z - 2}$ を次の円環領域でローラン展開せよ．

(1) $D = \{z \in C \mid |z| < 1\}$ (2) $D = \{z \in C \mid 1 < |z| < 2\}$ (3) $D = \{z \in C \mid |z| > 2\}$

練習 12-2（留数）． 以下の関数の極における留数を求めよ．

(1) $\dfrac{e^z}{z - \pi i}$ (2) $\dfrac{2z^2 + 1}{(z-1)^2}$ (3) $z^2 \exp\left(-\dfrac{1}{z}\right)$ (4) $z^2 \sin \dfrac{1}{z}$ (5) $\dfrac{1}{e^z - 1}$

練習 12-3（留数定理）． 留数定理によって以下の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{1}{\sin z}\, dz$ (2) $\displaystyle\int_{C(0,3)} \frac{z}{(z-1)(z+2)}\, dz$ (3) $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)}\, dz$

(4) $\displaystyle\int_{C(1,2)} \frac{1}{z^2(z^2-4)}\, dz$ (5) $\displaystyle\int_{C(1,2)} \frac{e^z}{z^2(z^2-4)}\, dz$ (6) $\displaystyle\int_{C(i,1)} \frac{1}{z^4 - 1}\, dz$

発展問題 12-1． $g(z), h(z)$ は $z = \alpha$ のまわりで正則であり，$f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ が $z = \alpha$ において 1 位の極を持つとする．このとき，$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$ であることを示せ．

練習問題の略解

練習 12-1（ローラン展開）． (1) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+z-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{2}{z+2}\right)$
$=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1+z/2}\right)$. $|z|<1$ のとき $|z/2|<1$ も満たすので，
$f(z)=\dfrac{1}{3}\left\{-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{z}{2}\right)^n\right\}=-\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}z^n$.
(2) $f(z)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-1/z}+\dfrac{1}{1+z/2}\right)$. $|z|>1$ より $|1/z|<1$，$|z|<2$ より $|z/2|<1$ を満たすので，$f(z)=\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{z}{2}\right)^n\right\}=\dfrac{1}{3}\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n z^n\right\}$.
(3) $f(z)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-1/z}+\dfrac{2}{z}\dfrac{1}{1+2/z}\right)$. $|z|>2$ より $|1/z|<1$ かつ $|2/z|<1$ を満たすので，
$f(z)=\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n+\dfrac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{z}\right)^n\right\}=\dfrac{1}{3}\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{1-(-2)^n\}\dfrac{1}{z^n}\right\}$.

練習 12-2（留数）． (1) $\dfrac{e^z}{z-\pi i}$ は $z=\pi i$ のみで 1 位の極をもつ．よって $\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{z-\pi i},\pi\right)=e^{\pi i}=-1$.
(1) の別解：$t=z-\pi i$ とおくと，$e^z/(z-\pi i)=e^{t+\pi i}/t=-e^t/t=-1/t-1-\cdots$ （テイラー展開）．この t^{-1} の係数が求める留数.
(2) $\dfrac{2z^2+1}{(z-1)^2}$ は $z=1$ のみで 2 位の極をもつ．よって $\mathrm{Res}\left(\dfrac{2z^2+1}{(z-1)^2},1\right)=\dfrac{1}{1!}(2z^2+1)'\Big|_{z=1}=4$.
(2) の別解：$t=z-1$ とおくと，$(2z^2+1)/(z-1)^2=\{2(t+1)^2+1\}/t^2=3/t^2+4/t+2$. この t^{-1} の係数が求める留数.
(3) $f(z)=z^2\exp\left(-\dfrac{1}{z}\right)$ の極は $z=0$ のみである.（無限位数をもつ.）ローラン展開すると，$f(z)=z^2\left(1-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}-\dfrac{1}{3!z^3}+\dfrac{1}{4!z^4}-\cdots\right)$ より，z^{-1} の係数を求めると $\mathrm{Res}(f(z),0)=-\dfrac{1}{6}$.
(4) 上と同様にして，$f(z)=z^2\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!z^3}+\dfrac{1}{5!z^5}-\cdots\right)$ より，z^{-1} の係数を求めると $\mathrm{Res}(f(z),0)=-\dfrac{1}{6}$.
(5) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ の極は $z=2n\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$ で与えられるが，$f(z)=f(z+2\pi i)$ よりこれらの点での留数はすべて等しい.（極の周りの小さな円で積分すると留数の $2\pi i$ 倍が現れるが，積分自体は周期性より極によらず一定の値となるので.）よって $z=0$ での留数を計算すれば十分である.

$e^z-1=z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots=z\left(1+\dfrac{z}{2!}+\cdots\right)$ より，$z=0$ は 1 位の極である．よって $\mathrm{Res}(f(z),0)=\dfrac{1}{(e^z-1)'}\Big|_{z=0}=1=\mathrm{Res}(f(z),2n\pi i)\ \ (n\in\mathbb{Z})$.

練習 12-3（留数定理）． (1) $C(0,1)$ 内の $1/\sin z$ の極は $z=0$ のみなので，$\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{1}{\sin z}\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, 0\right)$．$\sin z = z(1-z^2/3!+\cdots)$ よりこの極の位数は 1 である．留数定理より $\displaystyle\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin z},0\right) = \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=0} = 1$．よって $\displaystyle\int_{C(0,1)}\frac{1}{\sin z}\,dz = 2\pi i.$

(2) $C(0,3)$ 内の $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$ の極は $z=1,\ -2$ であり，それぞれ 1 位の極である．留数定理より $\displaystyle\int_{C(0,1)} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\{\mathrm{Res}(f(z),1)+\mathrm{Res}(f(z),-2)\}$．留数を計算すると，$\displaystyle\mathrm{Res}(f(z),1) = \left.\frac{z}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$，$\displaystyle\mathrm{Res}(f(z),-2) = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{2}{3}$．よって $\displaystyle\int_{C(0,3)} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) = 2\pi i.$

(3) $C(0,2)$ 内の $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)(z-3)}$ の極は $z=1$ のみであり，1 位の極である．留数定理より $\displaystyle\int_{C(0,2)} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f(z),1)$．留数を計算すると，$\displaystyle\mathrm{Res}(f(z),1) = \left.\frac{e^z}{z-3}\right|_{z=1} = \frac{e}{-2}$．よって $\displaystyle\int_{C(0,2)} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\frac{e}{-2} = -e\pi i.$

(4) $C(1,2)$ 内の $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2-4)} = \dfrac{1}{z^2(z-2)(z+2)}$ の極は $z=0,\ 2$ であり，それぞれ 2 位および 1 位の極である．留数定理より $\displaystyle\int_{C(1,2)} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\{\mathrm{Res}(f(z),0)+\mathrm{Res}(f(z),2)\} = 2\pi i\cdot\left\{\left.\left(\frac{1}{z^2-4}\right)'\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{z^2(z+2)}\right|_{z=2}\right\} = 2\pi i\cdot\left(0+\frac{1}{16}\right) = \frac{\pi i}{8}.$

(5) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2-4)}$ とおくと，(4) と同様にして留数定理より $\displaystyle\int_{C(1,2)} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\{\mathrm{Res}(f(z),0)+\mathrm{Res}(f(z),2)\}$ $\displaystyle 2\pi i\cdot\left\{\left.\left(\frac{e^z}{z^2-4}\right)'\right|_{z=0} + \left.\frac{e^z}{z^2(z+2)}\right|_{z=2}\right\} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{e^2}{16}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{e^2}{4}-1\right).$

(6) $C(i,1)$ 内の $f(z) = \dfrac{1}{z^4-1}$ の極は $z=i$ のみであり，1 位の極である．留数定理より $\displaystyle\int_{C(i,1)} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f(z),i) = 2\pi i\cdot\left.\frac{1}{(z^4-1)'}\right|_{z=i} = -\frac{\pi}{2}.$