数学講究 1 第 10 回講義ノート

2010 年 5 月 24 日 (月)

1　カラテオドリの定理

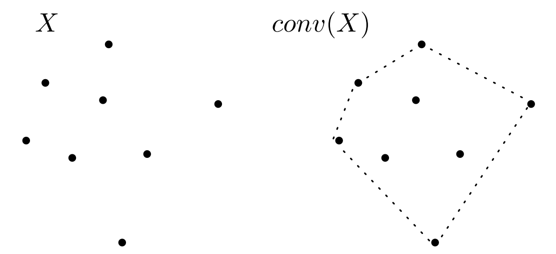
1.1　カラテオドリの定理

X を平面上の有限個の集合とする.
このとき、点 P が X の凸包に含まれるなら、点 P は X の 3 個以下の点の凸包に含まれる.

1.2　凸包 (とつほう) の定義

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ の凸包 (convex hull) を $\mathbb{R}^d$ の凸集合で X を包むようなもの全体の交わりとして定義し、
$conv(X)$ と表す.

～平面上の有限な X に対する凸包の例～

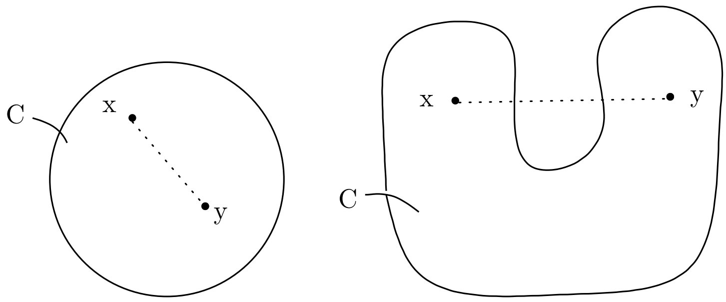


1.3　凸集合の定義

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ が凸集合であるとは、どの 2 点 $x, y \in C$ についても、線分 xy の全体が C に
含まれることである.

〜凸集合の例〜

凸集合である　　　　　　　凸集合でない

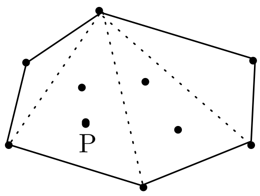


集合が凸であるとは、表面に「窪み」がないことである.

1.4 定理の説明

〜X に属する点が 3 個以下の場合〜
X の凸包は線分か三角形となり、その頂点は X の点なので P は X の凸包に含まれる.

〜X に属する点が 4 個以上の場合〜



X の凸包は凸多角形になる.1 つの頂点から出る対角線で三角形に分割する.
すると点 P は X の 3 個以下の凸包に含まれる.
よって点 P は X の 3 個以下の凸包に含まれる.

$X \subseteq \mathbb{R}^d$ とする. このとき、$conv(X)$ の各点は X の高々 $d+1$ 個の点の凸結合という.

2 ヘリーの定理

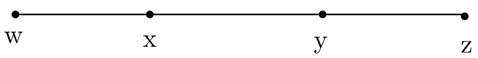
2.1 ヘリーの定理

平面上の n 個 $(n \geq 4)$ の凸集合に対して、この中のどの 3 個の共通部分も
空でないならば、n 個全部の共通部分も空でない.

2.2　ヘリーの定理の証明

平面上の 4 個の凸集合を W, X, Y, Z とする.
$w \in X \cap Y \cap Z$, $x \in W \cap Y \cap Z$, $y \in W \cap X \cap Z$, $z \in W \cap X \cap Y$ とする.
w, x, y, z の凸包は
　線分、　三角形、　凸四辺形
のどれかになる.
　、　、　についてそれぞれ証明する.

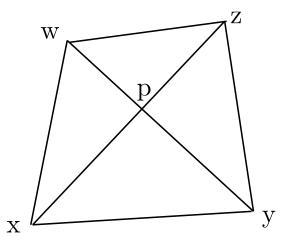
　の証明
〜w, x, y, z の凸包が線分 wz のとき〜



wz はいずれも X に含まれる.
線分 wz は X に含まれるので、$x \in X$ である.
よって、$x \in X \cap (W \cap Y \cap Z)$ より、
4 個の集合の共通部分は空でない.

　の証明
〜w, x, y, z の凸包が三角形 wxy のとき〜
　と同様の流れのため、ここでは省略する.

　の証明
〜w, x, y, z の凸包が凸四辺形のとき〜



2 つの対角線 wy と xz の交点を p とする.
線分 wy は $X \cap Z$ に含まれ、線分 xz は $W \cap Y$ に含まれる.
交点は p は $X \cap Z$, $W \cap Y$ に含まれる.
よって、$p \in X \cap Z \cap W \cap Y$.
4 個の集合の共通部分は空でない.
証明終