2006年度数学I演習第11回

理II・III 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7組

12月7日 清野和彦

• 定義域に $[a, +\infty)$ を含む関数 $f(x)$ が、任意の $[a, R]$ で積分可能なとき、

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)dx$$

と定義します。($(-\infty, a]$ のときも同様に定義します。)

　また、$[a, b)$ を定義域に含む関数 $f(x)$ が、$[a, b)$ に含まれる任意の c について $[a, c]$ で積分可能だが、$\lim_{x\to b-0} |f(x)| = +\infty$ のように $[a, b)$ では有界でないとき、

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx$$

と定義します。($(a, b]$ のときも同様に定義します。)

　これらは今までの積分と同じ記号で書いてしまってはいますが、「積分したあと積分範囲の極限を取る」という意味で本来の積分そのものとは定義が違っています。上のような「積分の極限」のことを**広義積分**と呼びます。

　広義積分は極限値ですので、値がいくつかという前に収束するかどうかが問題になります。しかし、積分される関数 $f(x)$ の不定積分が具体的に計算できてしまう場合にはこのことはあまり問題にはなりません。

問題 1. 広義積分

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx$$

を求めよ。

• 問題は、積分される関数の不定積分が計算できない場合です。その場合は値をキチンと出すのはほぼ無理ですが、収束するかどうかは割と簡単に判定できる場合があります。問題2で練習して、問題3と問題4を解いてみて下さい。

問題 2. この問題は答案用紙に解答しないで下さい。

(1) 任意の x に対して

$$e^{x^2} \geq x^2$$

が成り立つことを示せ。

(2) 任意の $R > 1$ に対して

$$\int_1^R e^{-x^2} dx \le \int_1^R \frac{1}{x^2} dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) 広義積分

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

は収束することを示せ。

問題 3. 広義積分

$$\int_2^\infty \frac{1}{\log x} dx$$

は発散することを証明せよ。

問題 4. $a > 0$ とし、

$$I_a = \int_1^2 \frac{1}{(x^2-1)^a} dx$$

とする。I_a は積分範囲の下側 $x = 1$ において広義積分である。

(1) $a < 1$ では I_a は収束することを示せ。

(2) I_1 は発散することを示せ。

(3) $a > 1$ でも I_a は発散することを示せ。

問題 5. この問題は時間が余った人用です。答案用紙に解答しないでください。
無限級数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{1+n^3}}$$

は収束することを証明せよ。

ヒント

問題 1. 部分積分によって不定積分を計算できます。

問題 2. **(1)** $e^y \geq y$ であることを示し、y に x^2 を代入しましょう。

(2) e^{-x^2} とは $1/e^{x^2}$ のことです。(1) の不等式で両辺の逆数を取ってから積分しましょう。

(3) 積分される関数は値が常に正なので R が増えるに従って積分値は単調に増加します。一方、(2) の不等式の右辺は極限値が実際に計算できてしまいます。あとは例によって「実数の連続性」です。

問題 3. 問題 2 とは逆向きの不等式を目指します。つまり、

$$\frac{1}{\log x} \geq f(x)$$

を満たす関数で $\int_2^\infty f(x)dx$ が発散するものを見つけるわけです。

問題 4. **(1)** 積分される関数は $x = 1$ で発散しているので、問題 2 のようにして収束を示すためには、

$$\frac{1}{(x^2-1)^a} \leq \frac{1}{(x-1)^b}$$

となるような b で広義積分 $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^b}dx$ は収束するようなものを a に応じて見つけることになります。

(2) 単なる計算です。

(3) I_1 が発散すること（(2) で示しました）を利用して問題 2 と同様にします。

問題 5. 関数 $f(x)$ で、

- 任意の自然数 n と、$n-1 \leq x \leq n$ を満たす任意の x に対して

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^3}} \leq f(x)$$

  が成り立つ。

- 広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ は収束する。

を満たすものを探してみましょう。

2006年度数学I演習第11回解説

理II・III 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7組

12月7日 清野和彦

第10回の補足

今回の解答・解説に入る前に、第10回解説に書き忘れたことを書いておきます。

三角関数の有理関数の置換について

$t = \tan(\theta/2)$ と置いたとき、$\cos\theta,\ \sin\theta,\ d\theta/dt$ を導く過程を書いておかなかったので、ここに書いておきます。

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} - 1 = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\sin\theta &= \sin\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{2t}{1+t^2} \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\tan'\frac{\theta}{2}} = \frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

不定積分における変数の範囲について

問題2の解答に

$$\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$$

や

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$$

という式が出てきていますが、これは θ の範囲を $(-\pi/2, \pi/2)$ に選んであるから成り立つ式です。もし θ の範囲を $(\pi/2, 3\pi/2)$ に選んだなら、上の二つに当たる式は

$$\sqrt{\cos^2\theta} = -\cos\theta, \quad \sin\theta = -\frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$$

となります。もちろん、両方のマイナスが打ち消しあって答は一致します。

不定積分

$$\int f(x)dx \tag{1}$$

というのは、定積分において積分範囲の上側を変数とみなしたもの

$$\int_a^x f(t)dt$$

を省略して書いたものですので、式(1) の x には範囲があります。（普通は $f(x)$ の定義域と同じです。）だから、不定積分においても**置換積分によって置換したあとの変数に対しては、置換前の変数の範囲に応じた範囲を選んでおかなければなりません**。もちろん、選ばなくても自然に決まってしまうような場合もよくあります。例えば x が任意の実数で $t = x^2$ と置換したなら、t は 0 以上の実数が範囲です。しかし三角関数で置換するような場合には、置換後の変数の取り方がいくつかあります。例えば、x が任意の実数の場合、$x = \tan\theta$ と置換するなら、$-\pi/2 < \theta < \pi/2$ とか $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ とかいろいろあり得ます。そして、**不定積分といえども、自分はどの範囲で計算をしているのかをはっきりさせなければならない**というわけなのです。高校ではこのことには一切触れずに来ている可能性があります。しかし、本来は不定積分は定積分から作られた概念なので、**定積分のときに気にしなければならないことはすべて不定積分でも気にしなければなりません**。ご注意ください。

無理関数の置換方法について

教科書などには、

> x と y の有理関数 $f(x, y)$ に $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ $(a > 0)$ を代入した関数の不定積分では、
>
> $$t = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$
>
> と置換せよ。

と書いてあることがよくあります。これは、かなり妙な置換に見えます。この置換の背景には前回説明した双曲線関数が隠れています。一般的な 2 次式で書くとごちゃごちゃしてわかりにくいので、具体例で見てみましょう。

前回説明した双曲線関数への置換は、

$$3x^2 + 6x + 7 = 3(x+1)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{2}\right)^2 + 1\right)$$

と変形できることから、

$$\frac{\sqrt{3}(x+1)}{2} = \sinh s$$

と置換せよ、ということでした。こうすると、

$$\sqrt{3x^2+6x+7} = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{2}\right)^2+1} = 2\sqrt{\sinh^2 s+1} = 2\cosh s$$

となって、x と $\sqrt{3x^2+6x+7}$ の有理式が $\sinh s$ と $\cosh s$ の有理関数に変換されるからです。そして、$\sinh s$ と $\cosh s$ の有理式の不定積分が計算できる理由は、

$$\sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}, \qquad \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$$

というふうにどちらも e^s と e^{-s} の有理式であることでした。つまり、最終的には $e^s = t$ と置換することで普通の有理式の不定積分に帰着されるわけです。さて、ここで t を x の式で書いてみると、

$$t = e^s = \sinh s + \cosh s = \frac{\sqrt{3}(x+1)}{2} + \frac{\sqrt{3x^2+6x+7}}{2}$$

となっています。t の有理関数はもちろん $u = 2t - \sqrt{3}$ の有理式でもありますので、

$$u = 2t - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + \sqrt{3x^2+6x+7}$$

と置換すれば、u の有理式の不定積分に変換されるというというわけなのです。

この置換方法で計算すると式が汚くなってしまう理由は、本来 $e^{\pm s}$ の有理式であることが不定積分が計算できる理由なので、e^s かせいぜいその定数倍を u と置くべきなのに、さらに定数（上の場合なら $-\sqrt{3}$）ずれたものを u と置換しているからです。やはり、少々面倒に見えても「背景」に即した置換方法をとった方がよいのではないかと考えたので、教科書で普通に扱われている置換方法を前回はあえて紹介しませんでした。

解答

問題 1

部分積分により、

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= \int x(-e^{-x})'dx = x(-e^{-x}) - \int (x)'(-e^{-x})dx \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} \\ &= -(x+1)e^{-x}\end{aligned}$$

と不定積分が計算できます。よって、

$$\int_0^R xe^{-x}dx = \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^R = -(R+1)e^{-R} + 1$$

となります。$R \geq 0$ のとき、e^R のテイラー展開から

$$e^R = 1 + R + \frac{R^2}{2} + \cdots \geq \frac{R^2}{2}$$

がわかりますので、

$$0 \leq \lim_{R\to\infty} Re^{-R} = \lim_{R\to\infty} \frac{R}{e^R} \leq \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2/2} = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{R} = 0$$

が得られます。よって、

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R xe^{-x}dx = \lim_{R\to\infty} (-(R+1)e^{-R} + 1) = 1$$

となります。 □

問題 2

(1)

$y \geq 0$ のとき、e^y のテイラー展開から

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots \geq y$$

が得られます。この不等式の右辺と左辺に $y = x^2$ を代入すれば

$$e^{x^2} \geq x^2$$

となります。 □

テイラー展開を使わず、$e^y - y$ を微分して単調増加であることを示し、$e^0 - 0 = 1$ であることと合わせて $e^y - y \leq 1 > 0$ を導く、などという方法でももちろん結構です。

(2)

(1) より、$x \neq 0$ ならば

$$e^{x^2} \geq x^2 > 0$$

なので、逆数をとることができて

$$0 < e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

となります。よって、$R \geq 1$ ならば、

$$\int_1^R e^{-x^2} dx \leq \int_1^R \frac{1}{x^2} dx$$

となります。 □

(3)

(2) の不等式の右辺は具体的に

$$\int_1^R \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^R = -\frac{1}{R} + 1$$

と計算でき、$R \to \infty$ のときの極限は 1 です。しかも、積分される関数 $1/x^2$ は常に正の値を取りますので、積分値は R に関して単調に増加します。合わせて、

$$\int_1^R \frac{1}{x^2} dx \text{ は } R \to \infty \text{ のとき単調に増加して } 1 \text{ に収束}$$

していることがわかりました。このことを (2) の不等式に適用すると、任意の R について

$$\int_1^R e^{-x^2} dx \leq 1$$

が得られます。$e^{-x^2} > 0$ なので、この積分値も R に関して単調増加ですから、単調増加で上に有界なので「実数の連続性」により収束します。 □

$\int e^{-x^2} dx$ は式で書けないことが知られていますので、直接原始関数で $x \to \infty$ の極限を取って収束を確認するという方法でこの問題を解くことはできません。

問題 3

問題 2(1) で示したように、

$$x \leq e^x$$

が成り立っています。$x > 0$ として両辺の対数を取ると、$\log$ は単調増加関数なので不等号の向きは変わらず、

$$\log x \leq x$$

が得られます。さらに $x > 1$ とすると両辺とも正になるので、逆数を取って

$$\frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{x}$$

という不等式が得られます。よって、任意の $R > 2$ に対して

$$\int_2^R \frac{1}{\log x} dx \geq \int_2^R \frac{1}{x} dx$$

となります。右辺は具体的に計算できて、

$$\int_2^R \frac{1}{x} dx = \Big[\log|x|\Big]_2^R = \log R - \log 2$$

です。これは $R \to \infty$ のとき $+\infty$ に発散します。よって、左辺も同様に発散します。つまり

$$\int_2^\infty \frac{1}{\log x} dx = \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{\log x} dx = +\infty$$

です。 $\square$

$\log x \leq x$ を $x - \log x$ を微分するなどの方法で示してももちろん結構です。

また、$\int \frac{1}{\log x} dx$ も式で書けないことが知られていますので、直接原始関数で $x \to \infty$ の極限を取って発散を確かめる、という方法でこの問題を解くことはできません。

問題 4

(1)

$1 < x$ において

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) > x - 1 > 0$$

が成り立っていますので、逆数を取っても不等号の向きは変わらず、

$$0 < \frac{1}{x^2-1} < \frac{1}{x-1}$$

です。$a > 0$ ですから全体を a 乗してもやはり不等号の向きは変わらず、

$$0 < \frac{1}{(x^2-1)^a} < \frac{1}{(x-1)^a} \tag{2}$$

となります。

$0 < \varepsilon < 1$ を満たす任意の実数を取って、不等式(2) の右側を $[1+\varepsilon, 2]$ で積分すると、

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x^2-1)^a} dx < \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x-1)^a} dx$$

が得られます。$a < 1$ として右辺で $\varepsilon \to 0$ の極限を取ると、

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x-1)^a} dx = \left[\frac{(x-1)^{1-a}}{1-a}\right]_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{1-\varepsilon^{1-a}}{1-a} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-a}$$

と収束します。しかも、不等式(2) からわかるように被積分関数 $1/(x-1)^a$ は積分範囲で常に正ですので、$\varepsilon \to 0$ のとき積分値は単調に増加します。よって、$1 < \varepsilon < 2$ を満たす任意の ε に対して、

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x^2-1)^a} dx < \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x-1)^a} dx < \frac{1}{1-a}$$

が成り立ちます。不等式(2) より、$1/(x^2-1)^a$ も積分範囲で常に正ですので $\varepsilon \to 0$ のとき単調に増加します。単調に増加して上に有界なのですから、実数の連続性により何らかの値に収束します。つまり、

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{(x^2-1)^a} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x^2-1)^a} dx$$

が存在します。これで $a < 1$ では広義積分 I_a は収束することが示せました。 □

注意. 問題では $a > 0$ という条件を付けておきましたが、$a \leq 0$ のときは被積分関数は $x = 1$ まで連続な関数ですので、積分 I_a は広義積分ではなく普通の積分です。しかも連続関数はすべて積分可能ですので、この場合も積分可能です。★

(2)

$a = 1$ のときは不定積分を計算することができるので、そのようにして発散を確かめましょう。

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

と部分分数分解されるので、$0 < \varepsilon < 1$ を満たす任意の実数 ε に対して、

$$\begin{aligned}\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{x^2-1}dx = \int_{1+\varepsilon}^{2} \left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right) dx \\ = \left[\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1|\right]_{1+\varepsilon}^{2} \\ = \frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log\varepsilon + \frac{1}{2}\log(2+\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} +\infty\end{aligned}$$

となって、広義積分 I_1 は発散します。 □

(3)

$a > 1$ とします。$1 < x \leq \sqrt{2}$ では $0 < x^2 - 1 \leq 1$ なので、

$$(x^2-1)^a < x^2 - 1$$

ですから、逆数を取ると

$$\frac{1}{(x^2-1)^a} \geq \frac{1}{x^2-1}$$

となります。よって、

$$\int_{1+\varepsilon}^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2-1)^a}dx \geq \int_{1+\varepsilon}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2-1}dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} +\infty$$

となって $(1, \sqrt{2}]$ での広義積分は発散します。$[\sqrt{2}, 2]$ での積分は普通の積分で確定した実数値です。よって、$(1, 2]$ での広義積分 I_a も発散します。 □

(3) 別解

(1) で使った因数分解

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

から、$1 < x \leq 2$ では

$$2(x-1) < x^2 - 1 \leq 3(x-1)$$

という不等式が得られます。これの右側の不等式で逆数を取ると、

$$\frac{1}{x^2-1} \geq \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}$$

が $1 < x \leq 2$ で成り立つことがわかります。よって、

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x^2-1)^a} dx \geq \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{3^a} \frac{1}{(x-1)^a} dx$$

という不等式が得られます。この右辺は (1) で計算したように直接計算することができて、

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{3^a} \frac{1}{(x-1)^a} = \left[\frac{1}{3^a(1-a)} \frac{1}{(x-1)^{a-1}}\right]_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{1}{3^a(a-1)} \left(\frac{1}{\varepsilon^{a-1}} - 1\right)$$

となります。今 $a > 1$ と仮定しているので、$a-1 > 0$ です。よって、これは $\varepsilon \to 0$ のとき $+\infty$ に発散します。よって、不等式の右辺も $\varepsilon \to 0$ のとき発散します。これで $a > 1$ のとき I_a が発散することが示せました。 □

問題 5

問題の無限級数は各項がすべて正ですので単調増加です。よってこれが収束することは上に有界であること、つまり、任意の自然数 N に対し、N に依らない実数 M で

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{1+n^3}} \leq M$$

となるものが存在することと同値です。この M を広義積分を利用して見つけてみましょう。

n を一つ選んだとき、$n-1 \leq x \leq n$ を満たす任意の x に対して

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$

が成り立ちます。よって、

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^3}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

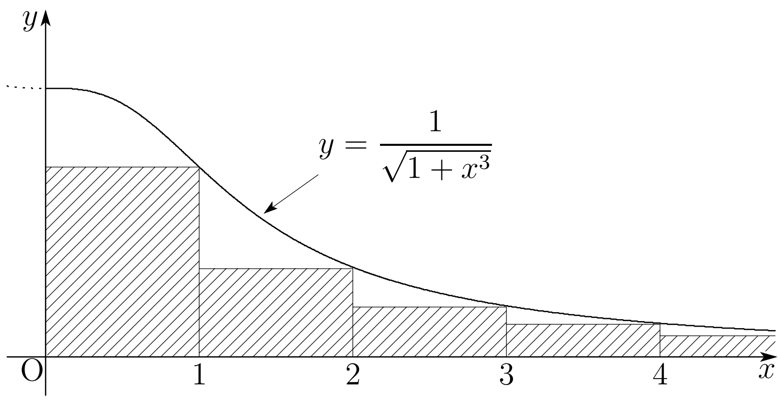
が成り立ち、これを足し合わせることにより、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3}} \leq \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

が得られます。よって、この不等式の右辺の広義積分が収束すれば、左辺の無限級数も収束することになります。

右辺の広義積分は、例えば

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$$



とわけることができ、第 1 項は普通の定積分なので、第 2 項が収束することを示せばよいということになります。

今、被積分関数は常に正なので、

$$\int_1^R \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$$

は R に関して単調に増加します。だから、これが収束するためには

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq f(x)$$

となる関数で、広義積分

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

の収束するものがあればよいわけです。

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

なので、$x^{-3/2}$ を積分してみましょう。すると、

$$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx = \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^\infty = \lim_{R\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{R}} + 2 = 2$$

となって収束します。

以上より、問題の無限級数の収束することが示せました。 □

もちろん、いきなり、

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} \qquad 1 \leq n-1 \leq \forall x \leq n$$

という不等式を使って

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_1^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}dx$$

としても結構です。

広義積分：積分範囲の極限

なぜこんな当たり前っぽいものにわざわざ「広義積分」なんていう名前が付いているのか

　もしかすると高校のとき、例えば

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2\theta}\tan'\theta d\theta\\&=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}=0-(-1)=1\end{aligned}$$

なんていう計算を当たり前にやってきたかも知れません。この計算のうち置換する前の θ についての積分の部分は普通の定積分なのですが、置換したあとの x についての積分は**定積分ではない**のです。

　何が問題なのかというと、冬学期のはじめに定義した「リーマン和の極限としての定積分」は、**有限区間上の有界な関数**に対してしか定義されていないということが問題なのです。実際、積分区間は有限区間だが関数が有界でない場合、第 8 回解説の 19 ページの定理 3 で

> $[a,b]$ で定義された関数 f が有界でないなら、つまり、どんなに大きな M をとっても $|f(x)|>M$ を満たす x が $[a,b]$ に存在するなら、f は積分可能でない。

ということを証明していますし、また、積分区間が無限区間の場合、例えば $[0,\infty)$ におけるリーマン和を考えようとしても、リーマン和というものが積分区間の**有限個の小区間への分割**によって定義されている以上、どう分割しても $[b,\infty)$ という無限の幅を持つ「小区間」が残ってしまって、それを底辺とする長方形の面積が考えられず、リーマン和そのものを定義することができなくなってしまうわけです。

　「そんな細かいこと気にすることないじゃん。上の計算に問題があるとはとても思えないし。」というのが自然な感想だと思いますが、定義していないものを使うわけにはいきません。そこをおろそかにしないことが数学の良心であり倫理なのですから。

それでは、リーマン和による定義を作り替えて、上のような関数にも適用できるようにがんばってみようか、という元気な人もいるかも知れません。しかし、普通はそうは考えないのではないでしょうか。そんな難しげなことをしなくても、もっと安直にいけるのではないだろうか、だって、上の計算っていかにも自然で指摘されなければまずいことがあることに気づきさえしなかったかも知れないし、という感じではないでしょうか。なぜそこまで上の計算が自然だと感じるのでしょうか？その理由を明らかにできれば、それを使って無限区間上の積分や有界でない関数の積分を上手く定義できるかも知れません。それが我々の広義積分です。

それでは節をかえて「自然な感じ」の源と、それを使った広義積分の定義を説明しましょう。

広義積分の定義

前節の最初にあげた計算において、θ を x に置換したあとの操作を詳しく書くと、

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\frac{-1}{R}+1=1$$

というように**積分区間について極限をとる操作**をしていることがわかります。置換する前の定積分ではそんなことをしていないのに、置換したあとの積分でそんな極限操作をしたら場合によっては値が違ってしまうのではないだろうかと（心配性の人なら）心配するかも知れません。つまり、

$$1=\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{Arctan} R}\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$$

という計算において、最後の等号が必ず成り立つのかどうかが心配になる人もいるかも知れないということです。

ところがそういうことは絶対になく、被積分関数がどのようなものであってもこの等号は成り立ちます。前節で何度も言った「自然な感じ」の根拠がまさにこれなのです。そして、このことは**不定積分の連続性**によって保証されています。つまり、

定理 1 (第 8 回解説定理 24（46 ページ）参照). $[a,b]$ で定義された関数 f が積分可能なら、f は $[a,b]$ に含まれる任意の閉区間上で積分可能であって、

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

とすると、$F(x)$ は連続、特に

$$\lim_{x\to b}F(x)=F(b) \tag{3}$$

が成り立つ。 ■

というやつです。式(3) があるので、直接 $\int_a^b f(x)dx$ が定義できなくても、左辺の極限 $\lim_{x\to b} F(x)$ が存在するときにはそれを「積分」として採用してしまえば置換積分ともうまく合うし自然でもある、というわけです。

そこで、次のように定義します。

定義. b を実数または $+\infty$ とする。$[a,b)$ に含まれる任意の有界閉区間上で積分可能な関数 f に対し、もし

$$\lim_{r\to b-0}\int_a^r f(x)dx$$

が存在するならば、f は $[a,b)$ で**広義積分可能**であるといい、誤解のおそれのないときには極限の記号を使わずに

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書いてしまう。 ◇

$(a,b]$ で定義された関数についても同様に

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to a+0}\int_r^b f(x)dx$$

と定義し、(a,b) で定義された関数については、任意の $c\in(a,b)$ をとって

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to a+0}\int_r^c f(x)dx + \lim_{s\to b-0}\int_c^s f(x)dx$$

と定義します。この場合注意しなければならないことは

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a-\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

のように、両端の極限の取り方を関連づけたときの極限が存在しても広義積分可能とは限らないことです。例えば、

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} xdx = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\bigl(R^2-(-R)^2\bigr) = 0$$

ですが、もちろん

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{0} xdx + \lim_{S\to+\infty}\int_0^S xdx$$

は確定しません。

面倒なので、以下では具体例を除いて $[a,b)$,（$b\in\mathbb{R}$ または $b=+\infty$）の場合しか書きませんが、$(a,b]$,（$a\in\mathbb{R}$ または $a=-\infty$）の場合にも対応することが

成り立ちます。また、(a,b) の場合には a と b の間に任意に c をとって $(a,c]$ と $[c,b)$ に積分区間を分けて考えてください。

例をやっておきましょう。当たり前みたいな例ですが、**広義積分可能かどうかの一般的な判定方法はこの関数との比較しかありません**。

例 1. α を実数とする。

(1) $\dfrac{1}{x^\alpha}$ が $[1,+\infty)$ で広義積分可能なための必要十分条件は $\alpha > 1$、

(2) $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ が $[a,b)\,(b \in \mathbb{R})$ で広義積分可能なための必要十分条件は $\alpha < 1$

である。

証明. **(1)**

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{R^{\alpha-1}} - 1\right) & \alpha \neq 1 \\ \log R & \alpha = 1 \end{cases}$$

ですので、広義積分可能、つまり $R \to \infty$ で収束するための必要十分条件は $\alpha > 1$ です。

(2)

$$\int_a^r \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-r)^{\alpha-1}}\right) & \alpha \neq 1 \\ \log(b-a) - \log(b-r) & \alpha = 1 \end{cases}$$

ですので、広義積分可能、つまり $r \to b$ で収束するための必要十分条件は $\alpha < 1$ です。 □

広義積分可能性の判定法

不定積分が具体的に計算できてしまう関数については、広義積分が可能かどうかは単に関数の値の極限の問題ですが、不定積分の計算できる関数は限られてしまいますので、積分される関数だけを見て広義積分可能かどうかを判定できないと不便です。

さて、「広義積分可能」とは「ある種の極限が存在する」ことですが、その極限値が先に分かっているということはあまりありません。それは数列が収束するかどうかを調べるときにも経験していることです。そういうとき、つまり

「収束先は分からなくてもいいから収束するかどうかだけ知りたい」

という場合には、例によって、実数の連続性に基づいた**コーシーの条件**が顔を出します。

定理 2. $[a,b)$ を定義域とし任意の $c\in[a,b)$ に対して $[a,c]$ 上積分可能な関数 f に対し、f が $[a,b)$ で広義積分可能なことと、

任意の正実数 ε に対して $c\in[a,b)$ を

$$c<r<s<b \Longrightarrow \left|\int_r^s f(x)dx\right|<\varepsilon$$

が成り立つように取れる

こととは同値である。

証明. まず広義積分可能だとしましょう。つまり

$$\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$$

が存在するとします。この値を S とすると、lim の定義から、任意の正実数 ε に対してある正実数 δ があって

$$0<b-t<\delta \implies \left|S-\int_a^t f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立ちます。よって、r と s が $0<b-r<\delta$, $0<b-s<\delta$ を満たすならば

$$\begin{aligned}\left|\int_r^s f(x)dx\right| &= \left|\int_a^s f(x)dx-\int_a^r f(x)dx\right|\\ &\leq \left|\int_a^s f(x)dx-S\right|+\left|S-\int_a^r f(x)dx\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

となってコーシーの条件が満たされています。

逆に

$$c<r<s<b \Longrightarrow \left|\int_r^s f(x)dx\right|<\varepsilon$$

が成り立っているとしましょう。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=b-\frac{1}{n}$$

とし、$a_n\geq a$ となる n に対し S_n を

$$S_n=\int_a^{a_n} f(x)dx$$

とすることによって数列 $\{S_n\}$ を作ります。(a_n は単調増加数列なので、ある n_0 で $a_{n_0}\geq a$ を満たせば、n_0 より大きなすべての n で $a_n\geq a$ を満た

します。数列 $\{S_n\}$ は $n \geq n_0$ でのみ定義された数列だとしても結構ですし、$n < n_0$ では例えばすべて $S_n = 0$ であるなどとしても結構です。）

$$|S_n - S_m| = \left|\int_{a_m}^{a_n} f(x)dx\right|$$

ですので、$1/N < b - c$ となる N を一つ取ると、N より大きい任意の二つの自然数 n, m に対して

$$|S_n - S_m| < \varepsilon$$

を満たすことになります。よって、S_n はコーシー列です。コーシー列は収束するのですから極限値があります。

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

とおきましょう。任意の正実数 ε を取ると、n が十分大きければ

$$\left|\int_a^{a_n} f(x)dx - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となり、仮定から、r も十分 b に近ければ

$$\left|\int_{a_n}^{r} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ですので、

$$\begin{aligned}\left|\int_a^r f(x)dx - S\right| &\leq \left|\int_{a_n}^r f(x)dx\right| + \left|\int_a^{a_n} f(x)dx - S\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立ち、f は広義積分可能です。 □

いつもこのコーシーの条件を直接適用して広義積分できるかどうかを判定するは結構骨です。そこで、このコーシーの条件を満たすための**確かめやすい十分条件**が欲しくなります。しかし、積分される関数が 0 を中心にはげしく振動し最終的には打ち消しあって広義積分が確定するという状況はいかにも複雑で、一般的に利用可能な条件を作ることは難しそうです。そこで、そういう場合を排除して考えるために、広義積分に**絶対収束**という概念を導入して、コーシーの条件から広義積分が絶対収束するための十分条件を引き出すことで満足することにしましょう。

定理 3. $[a, b)$ を定義域とし任意の $r \in [a, b)$ に対して $[a, c]$ 上積分可能な関数 f は、$|f|$ が $[a, b)$ 上広義積分可能ならば f 自身も $[a, b)$ 上広義積分可能である。

証明.

$$\left|\int_s^r f(x)dx\right| \leq \left|\int_s^r |f(x)|dx\right|$$

ですので、$|f|$ がコーシーの条件を満たせば f もコーシーの条件を満たすことになります。よって、$|f|$ が広義積分可能なら f も広義積分可能です。 □

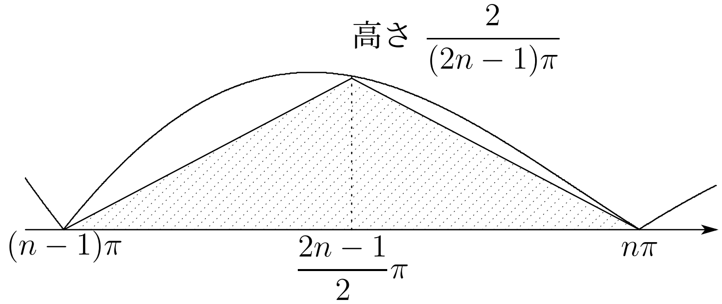


図 1: $|\sin x|/x$ のグラフより面積の小さい三角形

定義. $|f|$ が $[a, b)$ で広義積分可能なとき、f は**絶対広義積分可能**[1]と言う。 ■

絶対広義積分可能ならば広義積分可能であることの証明は上のもので何の疑問もないとは思いますが、「絶対広義積分可能」な関数は扱いやすいのにそうでない関数は扱いにくい理由をもう少し詳しく見ておきましょう。

そのために、まず

絶対広義積分可能でないが広義積分可能な関数

の例を見ておきましょう。

例 2. 関数 $(\sin x)/x$ は $[0, +\infty)$ で広義積分可能だが絶対広義積分は発散する。

証明. まず、絶対広義積分が発散することを示しましょう。

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x + (n-1)\pi} dx \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty
\end{aligned}$$

です。(あるいは図 1 の三角形の面積 $1/(2n-1)$ をすべての n について足しあげたものより大きいので発散します。)

[1]これはここだけの用語です、たぶん。

一方、部分積分により任意の二つの正実数 $s < t$ に対して

$$
\begin{aligned}
\left|\int_s^t \frac{\sin x}{x}\right| &= \left|\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_s^t - \int_s^t \frac{\cos x}{x^2}dx\right| \\
&\leq \frac{1}{t} + \frac{1}{s} + \int_s^t \frac{1}{x^2}dx \\
&= \frac{1}{t} + \frac{1}{s} - \frac{1}{t} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s}
\end{aligned}
$$

となってコーシーの条件を満たすことが直接確かめられたので、ただの広義積分は可能です。 □

なおこの広義積分の値の計算は「積分と微分の入れ替え」を利用して行いますので、それを学んでから紹介します。

この例を念頭に置きながら、広義積分が収束する場合と発散する場合について考えてみましょう。
まず、関数 f から二つの関数 f_+ と f_- を

$$
f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \qquad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}
$$

として作ります。つまり、f_+ の方は $f(x)$ の値が正のところでは $f(x)$ のまま、負のところでは 0 としたもの、f_- の方は $f(x)$ の値が正のところでは 0 とし、負のところでは $-f(x)$ としたものです。だから、f_+, f_- とも値は常に 0 以上であり、

$$
f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|, \qquad f_+(x) - f_-(x) = f(x)
$$

が成り立ちます。よって、積分や広義積分についてもこの分解が成り立ち、例えば $[0,\infty)$ での広義積分について

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |f(x)|dx &= \int_0^\infty f_+(x)dx + \int_0^\infty f_-(x)dx \\
\int_0^\infty f(x)dx &= \int_0^\infty f_+(x)dx - \int_0^\infty f_-(x)dx
\end{aligned}
$$

となります。ここで、f_+ や f_- の定義から、$\int_0^\infty f_+(x)dx$ は f のグラフの x 軸より上側の部分の面積、$\int_0^\infty f_-(x)dx$ は x 軸より下側の部分の面積（「負」で考えない普通の正の面積）です。
だから、絶対広義積分可能ということは

x 軸より上側の面積も下側の面積も有限

ということを意味します。この場合、f の広義積分は有限な値（x 軸より上側の面積）から有限な値（x 軸より下側の面積）を引いたものとして確定するというわけで、「有限−有限」ですから大変扱いやすいと言うわけです。

もし、f_+ の広義積分と f_- の広義積分の片方が収束し片方が発散しているなら、二つの和も差も発散してしまうので広義積分も絶対広義積分も発散です。つまり、例えば x 軸より下側の面積は有限なのに上側の面積が無限大に発散してしまっているなら、両方の面積を合わせたものも差し引きしたものも無限大だと言うわけです。

最後に残るのが f_+ も f_- も無限大に発散している場合です。この場合は和は当然発散してしまいますので絶対広義積分は不可能です。しかし、差の方は「無限大ー無限大」が上手いこと釣り合って有限の値になってしまうことがあります。その一つの例が上に挙げた例 $(\sin x)/x$ です。もちろん「無限大ー無限大」は正の無限大になる場合も負の無限大になる場合もあるのですから、これが有限の値になるというのはとても微妙な危ういバランスの成り立っている場合に限ります。そして、その場合こそが「絶対広義積分不可能なのに広義積分は可能」という場合なのですから、扱いが難しいのも当然だというわけです。

さて、絶対広義積分可能性の判定法の話に移りましょう。まずは、多少なりとも一般的な次の**優関数の方法**から。

定理 4. $[a,b)$ を定義域とし任意の $c \in [a,b)$ に対して $[a,c]$ 上積分可能な二つの関数 f, g が

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b)$$

を満たすとき、g が $[a,b)$ 上広義積分可能なら f は $[a,b)$ 上絶対広義積分可能である。

証明. コーシーの条件と

$$\left| \int_s^r |f(x)| dx \right| \leq \left| \int_s^r g(x) dx \right|$$

から O.K. です。 □

注意. もしも $|f(x)| \geq g(x) \geq 0$ を満たす関数 g で広義積分の発散するものがあるなら、f は絶対広義積分不可能です。なぜなら、もし f が絶対広義積分可能、つまり $|f|$ が広義積分可能なら、上の定理で $|f|$ と g の役割を入れ替えることで g が広義積分可能なことが結論されてしまい仮定に反するからです。だから、上の定理は**絶対広義積分が発散するための条件**も教えてくれていることになります。ただし、$(\sin x)/x$ の例で見たように、絶対広義積分が発散しても広義積分は発散するとは限りませんので、この「発散条件」にはあまりあらわには触れないことが多いようです。とは言っても、問題 3 や問題 4 の (3) の解答のように、この方法で広義積分の発散を示すことはよくあります（と言うか普通こうやります)。★

このような関数 g のことを f に対する**優関数**と言います。この方法を使うためには、優関数 g の「見つけ方」が欲しいところです。ところで、広義積分可能な具体的な関数といえば例 1 の関数ですので、これを利用しましょう。

定理 5. f を、$[a,b)$ を定義域とし任意の $c \in [a,+\infty)$ に対して $[a,c]$ 上積分可能な関数とするとき、

(1) b が $+\infty$ のとき、$\lambda > 1$ なるある λ に対して $f(x)x^\lambda$ が $[a,+\infty)$ 上有界なら $[a,+\infty)$ 上絶対広義積分可能である。

(2) b が実数のとき、$\mu < 1$ なるある μ に対して $f(x)(b-x)^\mu$ が $[a,b)$ 上有界なら $[a,b)$ 上絶対広義積分可能である。

証明. (1). $f(x)x^\lambda$ が有界、つまり

$$|f(x)x^\lambda| < M$$

を満たす M があるので、

$$|f(x)| < M|x|^{-\lambda}$$

が成り立ちます。この式と例 1(1) と定理 4 より、f は $[a,+\infty)$ で広義積分可能です。
(2). $f(x)(b-x)^\mu$ が有界、つまり

$$|f(x)(b-x)^\mu| < M$$

を満たす M があるので、

$$|f(x)| < M|b-x|^{-\mu}$$

が成り立ちます。この式と例 1(2) と定理 4 より、f は $[a,b)$ で広義積分可能です。 □

定理 5 は有名なので一応紹介しましたが、その本質は、証明の中にある

$$|f(x)| < \frac{M}{|x|^\lambda}$$

や

$$|f(x)| < \frac{M}{|b-x|^\mu}$$

という式の方です。つまり、

$$\frac{M}{|x|^\lambda} \text{ や } \frac{M}{|b-x|^\mu} \text{ という形の優関数を考える}$$

という部分があくまでも本質なのであって、定理 5 は分母を払うことによってそれを整理した分、本質が見えにくくなっていると思います。だから、定理 5 を覚えるのではなく、是非分母を払う前の形の意味するところ（つまり広義積分が実際に計算できてしまう関数の中に優関数を見つけること）を理解して下さい。

さて、これでかなり使いやすくなりました。とは言ってもこのような λ や μ をどうやって見つければよいのか、という疑問は残るでしょう。残念ながらそれは case by case です。ただし、問題 2 のように、テイラー展開を考えると上手く見つけられる場合がよくあります。問題 2 でやったことをテイラー展開を表に出して書き直すと、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

から

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots$$

なので、

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots} < \frac{1}{x^2}$$

となって、$1/x^2$ が e^{-x^2} の優関数であるとわかる、となります。（定理 5 の形にしたいなら、両辺に x^2 を掛けて

$$e^{-x^2}x^2 < 1$$

とすればよいわけです。）

問題 4 もテイラー展開を考えているのと同じです。この問題では積分範囲の端が 1 のところでの収束を示したいので、$(x-1)^\mu$ と比較したいわけですから、問題の関数 $1/(x^2-1)^a$ とこのような形の関数を結びつけたいわけです。だから $x = 1$ を中心としたテイラー展開を考えてみるべきです。実際、

$$x^2 - 1 = 0 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

という展開から

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0 + 2(x-1) + (x-1)^2} \leq \frac{1}{2(x-1)} \leq \frac{1}{x-1}$$

が得られます。解答では、これと同じことをあらわにはテイラー展開を見せずにやったのです。