

1 実数

高校で既に「高度な」微積分の問題を解いてきた大学新入生諸君は、大学の授業に更に進んだ微積分を期待しているだろう。その期待に反し我々は、実数の定義から再出発する。一見当たり前の事を回りくどく説明されているようで戸惑ってしまうのも無理はない。筆者も当時「何じゃ、こりゃ $w(\neg \Delta \neg;)w!$ 」と感じたのをよく覚えている³。しかし、こうした再出発が、より進んだ解析学を学ぶ基礎として必要であることが、ずっと後になって得心できた ($\wedge \vee \wedge$)。実際、より高度な解析学に必要な複雑な極限操作の多くが、基礎に立ち戻り極限そのものの定義を反省して初めて正当化可能である。

我々は経験的に「実数」を知っている(つもりだ)。しかし、例えば高校生にとっての実数とは、漠然とした「数直線」の描像に過ぎず、数学の対象として定義づけられてはいない。数学の作法は、定義に始まり定理へと進むものだから、実数が基礎となる微分積分学では、まず実数を「定義」しなければ始まらないことになる。では、実数の定義とはどのようなものか？

実数の定義を述べる前に、少しだけ歴史を繙いてみよう。

微分積分学は 19 世紀の始め頃までに、既に多くの発展を遂げていた。この講義で述べる事柄の多くは、厳密な形ではないにしても既にその段階で知られていたと言ってもいいだろう。但し、それまでは「関数」とは漠然と「式で表されたもの」、「実数」も「そこにあるもの」と認識され、改めて定義しようとは誰も思わなかった。ところが、フーリエ級数展開を数学的に正当化する試み等を通じ、より一般な関数を解析する必要が生じた。そうした中で、連続性、可微分性、可積分性、といった基本的な問題に目が向けられるようになり、遂には「そもそも実数とは何か？」が問われ始めた。実数を厳密に定義する試みは 19 世紀半ばすぎから、多くの数学者により行われるようになった。

1.1 実数の定義

以下で述べる公理の原型はヒルベルトによる(1900 年)⁴。

定義 1.1.1 集合 $\mathbb{R}$ に

- $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対し新たな元 $a + b \in \mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$ を対応させる写像(加法 と 乗法),
- $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を与える毎に定まる命題 $a \leq b$ (順序)

が定義され、以下に述べる 17 個の条件 (A0)–(A3), (M0)–(M5), (O1)–(O6), (AC) を全て満たす時、 $\mathbb{R}$ を実数体、その元を実数 (real number) と呼ぶ。

以後、定義 1.1.1 で挙げた 17 個の公理を説明する。それらは

- 「演算に関するもの」((A0)–(A3), (M0)–(M5))
- 「順序に関するもの」((O1)–(O6))
- 「連続の公理」((AC): 定義 1.3.6 参照) に大別出来る。

³注：当時は絵文字はなかった。

⁴David Hilbert (1862–1943)

1.1 節では、演算に関する公理 (A0)–(A3), (M0)–(M5) および順序に関する公理 (O1)–(O6) を述べ、実数の加減乗除・不等号・絶対値の通常の使い方を、公理からの論理的帰結として再確認する。結論は結局、

“定理”：実数の加減乗除・不等号・絶対値は高校までと同じように使ってよい

ことが確認出来るに過ぎない。従って、1.1 節はざっと読み流しつつ、記号や用語の定義を確認する程度で十分だろう。

加法に関する公理：

(A0) 任意の元 a, b に対し $a + b = b + a$ (加法の可換律).

(A1) 任意の元 a, b, c に対し $(a + b) + c = a + (b + c)$ (加法の結合律).

(A2) 元 0 が存在し、任意の元 a に対し $a + 0 = a$ (加法単位元 0 の存在).

(A3) 任意の元 a に対し元 $-a$ が存在し、 $a + (-a) = 0$ (加法逆元の存在).

なお、元 a, b に対し $a + (-b)$ は $a - b$ とも記し、 a, b の差 (difference) と呼ぶ。

(A0)–(A3) から、以下が導かれる：

$$a + b = a \implies b = 0. \quad (1.1)$$

$$a + b = 0 \implies a = -b, b = -a. \quad (1.2)$$

$$\text{任意の元 } a \text{ に対し } -(-a) = a. \quad (1.3)$$

(1.1) を示すには $a + b = a$ の両辺に $-a$ を加えればよい。そうすれば、(A1),(A2) より $b = 0$ を得る。(1.2) の証明も同様である。(1.2) で特に $b = -a$ とすれば、(1.3) も判る。

□

(1.1) より加法単位元 0 は唯一つである。また、(1.2) により $a \in \mathbb{R}$ に対し、その加法逆元 $-a$ は唯一つである。

乗法、及び加法・乗法に関する公理は次の通り：

(M0) 任意の元 a, b に対し $ab = ba$ (乗法の可換律).

(M1) 任意の元 a, b, c に対し $(ab)c = a(bc)$ (乗法の結合律).

(M2) 元 1 が存在し、任意の元 a に対し $1a = a1 = a$ (乗法単位元 1 の存在).

(M3) 任意の元 a, b, c に対し $(a + b)c = ac + bc$, $c(a + b) = ca + cb$ (分配律).

(M4) $a \neq 0$ なら元 a^{-1} が存在し、 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (乗法逆元の存在).

(M5) $0 \neq 1$. (0 以外の元の存在).

元 a, b について b^{-1} がもし存在すれば、 ab^{-1} を $\frac{a}{b}$, a/b とも記し、 a, b の商 (quotient) と呼ぶ。

加法の場合の (1.1), (1.2) と同様にして (M0)–(M2), (M3) から次が判る :

$$a \neq 0, ab = a \implies b = 1 \quad (1.4)$$

$$a \neq 0, ab = 1 \implies b = a^{-1} \quad (1.5)$$

分配律を用いて以下が導かれる :

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対し } 0a = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対し } (-1)a = -a \quad (1.7)$$

$$(-1)^2 = 1 \quad (1.8)$$

証明は次の通り :

(1.6): (M3) を用れば、

$$a + 0a = (1 + 0)a = a.$$

故に (1.1) により $0a = 0$.

(1.7): (M3), (1.6) より、

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = \{1 + (-1)\}a = 0a = 0.$$

故に (1.2) により $(-1)a = -a$.

(1.8): (1.3) と (1.7) による。

(M5) を仮定する理由は次の通り。もし $1 = 0$ なら、任意の実数 a に対し $a = 1a = 0a = 0$ ((1.6) を用いた) 従って $\mathbb{R} = \{0\}$ となってしまう !

定義 1.1.2 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ を以下のように定める :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 1+1(=2), 1+1+1(=3), \dots\}, \quad (\text{自然数の集合})$$

$$\mathbb{Z} = \{a - b; a, b \in \mathbb{N}\}, \quad (\text{整数の集合})$$

$$\mathbb{Q} = \{a/b; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b \neq 0\}. \quad (\text{有理数体})$$

注 : 上に述べた $\mathbb{N}$ の定義は一般的であり、実用には十分である。しかし、厳密に言うと「...」の部分を読み手の常識的理解に委ねている点で、論理的に不完全である。正確な定義は次の通り。まず、 $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対し次の条件を考える :

$$(*) \quad 0 \in A \text{ かつ } \{a+1; a \in A\} \subset A.$$

その上で、集合 $\mathbb{N}$ を次のように定める :

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\substack{A \subset \mathbb{R} \\ A \text{ は } (*) \text{ を満たす}}} A. \quad (1.9)$$

順序に関する条件は以下の通り :

(O1) 任意の元 a に対し $a \leq a$ (反射律).

(O2) $a \leq b, b \leq a$ ならば $a = b$ (反対称律).

(O3) $a \leq b, b \leq c$ ならば $a \leq c$ (推移律).

(O4) 元 a, b に対し、 $a \leq b$ 或いは $b \leq a$ が成立する (全順序性).

(O5) $a \leq b$ なら $a + c \leq b + c$. (加法は順序を保つ)

(O6) $a \leq b, c > 0$ なら $ac \leq bc$. (正数による積は順序を保つ)

元 a, b に対し、「 $a \leq b$ かつ $a \neq b$ 」を $a < b$ と記す。また、 $a \leq b, a < b$ はそれぞれ $b \geq a, b > a$ とも記す。条件 (O4) の直観的意味は、実数が「直線上に並んでいる」ことである：(O2),(O4) により、

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ なら } a = b, a > b, a < b \text{ のうちひとつだけが成立する。} \quad (1.10)$$

定義 1.1.3 実数 a を $a > 0, a < 0$ に応じてそれぞれ正数, 負数と呼ぶ。

(O1)–(O6) から以下の諸性質が導かれる：

$$a < b \text{ なら任意の } c \text{ に対し } a + c < b + c. \quad (1.11)$$

$$a < b, c > 0 \text{ ならば } ac < bc. \quad (1.12)$$

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } a \leq b + \varepsilon \text{ なら } a \leq b. \quad (1.13)$$

$$a < b \iff -a > -b. \quad (1.14)$$

$$a \neq 0 \text{ なら } a > 0 \text{ または } -a > 0 \quad (1.15)$$

$$a \neq 0 \text{ なら } a^2 > 0. \quad (1.16)$$

$$1 > 0, \quad (1.17)$$

(1.11) – (1.17) は次のようにして導かれる。

(1.11): (O5) より、 $a + c \leq b + c$ なので $a + c \neq b + c$ を言えばよい。所が、もし $a + c = b + c$ なら、両辺に $-c$ を加え $a = b$ 。これは (1.10) に反する。

(1.12): (O6) を用いれば (1.11) と同様に示せる。

(1.13): $b < a$ と仮定する。すると、(1.11),(1.12) より $\varepsilon = (a - b)/2 > 0$ 。故にこの ε に対し $a \leq b + \varepsilon = (a + b)/2$ 。これと、(O5),(O6) により $a \leq b$ となるが、(1.10) に反する。

(1.14): (1.11) で $c = -a - b$ とすれば「 $\implies$ 」が判る。これと、(1.3) を用いて逆も出る。

(1.15): (O4) により $a > 0$ または $a < 0$ 。後者の場合は (1.14) で $b = 0$ とすることにより、 $-a > 0$ 。

(1.16): (1.7), (1.8) より、 $a^2 = (-a)^2$ 。従って (1.15) より a^2 は正数の積である。一方、(O6) で $a = 0$ とすれば、正数の積は正数。

(1.17): (M5) より $1 \neq 0$ 。従って (M2) と (1.16) より、 $1 = 1^2 > 0$ 。

問 1.1.1 (★) 定義 1.1.2 後の注に述べた $\mathbb{N}$ の定義に従って、以下を示せ：(i) $a, b \in \mathbb{N}$ なら $a + b \in \mathbb{N}$ 。(ii) $a, b \in \mathbb{N}, a \geq b$ なら $a - b \in \mathbb{N}$ 。従って、非負整数は自然数である。(iii) $n \in \mathbb{N}, n < a < n + 1$ なら $a \notin \mathbb{N}$ 。

定義 1.1.4 実数 a に対し、 $|a|, a^+, a^-$ を次のように定義する：

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a \leq 0. \end{cases} \quad a^+ = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0, \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

$|a|, a^+, a^-$ をそれぞれ 絶対値 (absolute value), 正部 (positive part), 負部 (negative part) と呼ぶ。

問 1.1.2 絶対値、正 (負) 部について以下を示せ : (i) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ なら $|x| > 0$. (ii) $c, x \in \mathbb{R}$ なら $|cx| = |c||x|$ (iii) $x, y \in \mathbb{R}$ なら $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$. (iv) $x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^-$. (v) $x^+ = (|x| + x)/2, x^- = (|x| - x)/2$.

問 1.1.3 $x, y \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ とする。以下を示せ : (i) $x^m - y^m = (x - y) \sum_{k=0}^{m-1} x^k y^{m-1-k}$. (ii) $|x| \leq r, |y| \leq r$ なら $|x^m - y^m| \leq mr^{m-1}|x - y|, |x^m - y^m - mx^{m-1}(x - y)| \leq \frac{1}{2}m(m-1)r^{m-2}|x - y|^2$.

定義 1.1.5 $\mathbb{R}$ に 2 点 $+\infty, -\infty$ を付け加えた集合 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ を考える。 $+\infty$ は単に ∞ と書くこともある。

• $\pm\infty$ に関する順序関係を次のように定義する :

$$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ なら } a < +\infty,$$

$$a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ なら } -\infty < a.$$

$+\infty$ を 正の無限大 (positive infinity), $-\infty$ を 負の無限大 (negative infinity) と呼ぶ。また、集合 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ を 補完数直線 と呼ぶ。

• $\pm\infty$ に関する演算規則を次のように定義する :

$$a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ なら } a + \infty = \infty + a = \infty,$$

$$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ なら } a - \infty = a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty,$$

$$0 < a \leq +\infty \text{ なら } a\infty = \infty a = \infty, (-a)\infty = \infty(-a) = a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty.$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ なら } a/\infty = a/(-\infty) = 0.$$

なお、上記の「 $0 < a \leq +\infty$ 」は、「 a が正実数、或は $a = +\infty$ 」を意味する。このような表記を以後しばしば用いる。

注 1 : $\infty - \infty, 0\infty, \infty/\infty$ 等は定義していない。

注 2 : 定義 1.1.5 で与えた順序・演算に関する規則により、順序に関する規則 (O1)–(O6) は $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して成立する。

定義 1.1.6 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し $(a, b) \subset \mathbb{R}, [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ を次のように定義する :

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, [a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x \leq b\},$$

(a, b) を 开区間 (open interval), $[a, b]$ を 閉区間 (closed interval) と呼ぶ。更に $[a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}, (a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ を次のように定義する :

$$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; a < x \leq b\}.$$

上記 $(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$ を総称して 区間 (interval) と呼び、それらが空でない場合、 a を 下端, b を 上端 と呼ぶ。

定義 1.1.7 A を集合とする。 $n \in \mathbb{N}$ 及び全単射 $\varphi: \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq n\} \rightarrow A$ が存在するとき、 A を有限集合 (finite set) と呼び、 n を $\sharp A$ と記す。有限集合でない集合を無限集合 (infinite set) と呼ぶ。

問 1.1.4 次を示せ： $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, $A = \{z \in \mathbb{Z}; a < z \leq b\}$ なら $\sharp A = b - a$.

問 1.1.5 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ のとき、 $A = \{z \in \mathbb{Z}; a < z \leq b\}$ が有限集合である。これを、既に述べた公理だけを用いて示せる、示せない、賭けるならどちらか？

問 1.1.6 (★) 集合 A に対し、全単射 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$ が存在するとき、 A を可算集合 (countable set) と呼ぶ。 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ は可算集合であることを示せ。なお、 $a < b$ なら、集合 $\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ は非可算集合であることが知られている。

最後に、これまで述べた実数の公理が現代数学の色々な抽象概念に通じていることを述べておく。

定義 1.1.8 (★)

- 一般に集合 S に加法が定義され、(A0)–(A3) が満たされるなら S を加群 (additive group) と呼ぶ。
- 一般に加群 S に乗法が定義され、(M1)–(M3) が満たされるなら S を環 (ring) と呼ぶ。また、(M4) を満たす環を体 (field) と呼ぶ。更に (M0) を満たす環を可換環 (commutative ring)、(M0) を満たす体を可換体 (commutative field)、と呼ぶ。
- 一般に集合 S に乗法が定義され、(M1), (M2), (M4) が満たされるなら S を群 (group) と呼ぶ。特に、(M0) を満たす群を可換群 (commutative group) と呼ぶ。

問 1.1.7 (★) 次を示せ：(i) $\mathbb{Z}$ は可換環である。(ii) $\mathbb{Q}$ は可換体である。

定義 1.1.9 (★)

- 一般に集合 S の任意の2元 a, b に対し命題 $a \leq b$ が定義され、(O1)–(O3) が満たされるなら $\leq$ を順序 (order)、また集合 S を順序集合 (ordered set) と呼ぶ。
- 順序集合 S で定義された順序 $\leq$ が (O4) を満たすとき、この順序を全順序 (total order)、また集合 S を全順序集合 (totally ordered set) と呼ぶ。

問 1.1.8 (★) (成分毎の順序) $\mathbb{R}^2$ の元 $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ に対し $z \leq z'$ を「 $x \leq x'$ かつ $y \leq y'$ 」と定義する。 $z \leq z'$ は順序ではあるが、全順序でないことを示せ。

問 1.1.9 (★) (辞書的順序) $\mathbb{R}^2$ の元 $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ に対し「 $x < x'$ 」または「 $x = x'$ かつ $y \leq y'$ 」のとき、 $z \leq z'$ と定める。このとき、 $z \leq z'$ は全順序であることを示せ。

問 1.1.10 (★) 集合 X の部分集合 A, B に対する包含関係 $A \subset B$ は順序であること、また、 X が2つ以上の要素を含めば全順序ではないことを示せ。

1.2 最大・最小

この小節では最大・最小値について述べる。

定義 1.2.1 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $m \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し次の条件を考える：

(U) $A \subset [-\infty, m]$. このとき、 m は A の上界 (upper bound) であるという。

(L) $A \subset [m, \infty]$. このとき、 m は A の下界 (lower bound) であるという。

- $m \in A$ かつ (U) なら m を A の最大値 (maximum) と呼び、 $\max A$ と記す。
- $m \in A$ かつ (L) なら m を A の最小値 (minimum) と呼び、 $\min A$ と記す。
- A が実数値の上界 (下界) をもつとき、 A は 上に (下に) 有界 という。 A が上にも下にも有界なら、 A は 有界 (bounded) であると言う。

注：(最大・最小値が $\pm\infty$ になる場合) 最大・最小の定義から、

$$\max A = \begin{cases} \infty & \Longleftrightarrow \infty \in A, \\ -\infty & \Longleftrightarrow A = \{-\infty\} \end{cases}, \quad \min A = \begin{cases} -\infty & \Longleftrightarrow -\infty \in A, \\ \infty & \Longleftrightarrow A = \{\infty\} \end{cases}.$$

上記以外の場合、特に $A \subset \mathbb{R}$ に対し $\max A$, $\min A$ がもし存在すれば、実数値である。

問 1.2.1 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し $\max A$, $\min A$ はそれぞれ 2 つ以上存在しないことを示せ。

問 1.2.2 (最大・最小値の双対性) $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $m \in \overline{\mathbb{R}}$, $-A = \{-a \mid a \in A\}$ とするとき、次を示せ： $m = \max A \Leftrightarrow -m = \min(-A)$, $m = \min A \Leftrightarrow -m = \max(-A)$ 。

例 1.2.2 (有限集合の最大・最小値) $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ が有限集合なら $\max A$, $\min A$ の存在は $\sharp A$ (定義 1.1.7) に関する帰納法で容易に判る (問 1.2.3)。 $A = \{a, b\}$ の場合は $\max A = a \vee b$, $\min A = a \wedge b$ と記すこともある。

問 1.2.3 例 1.2.2 中に示唆された「帰納法」を実行せよ。

次の例 1.2.3 は、後述する例 1.3.10 への準備である。また、例 1.2.3 を用い剰余定理 (問 1.2.5) を示すことができる。

例 1.2.3 $u \in \mathbb{Z}$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z} \cap [-\infty, u]$ なら $\max A$ が存在する。また、 $\ell \in \mathbb{Z}$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z} \cap [\ell, \infty]$ なら $\min A$ が存在する。(すぐ後の注参照。)

証明：双対性 (問 1.2.2) より $\max A$ の場合を言えばよい。一般に $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し以下が成立する：

(1) $\ell \in A \subset [-\infty, u]$, $m = \max(A \cap [\ell, u])$ なら、 $m = \max A$ 。

証明は容易なので、問いとする (問 1.2.4)。

任意の $\ell \in A$ に対し $A' = A \cap [\ell, u]$ は有限集合 (問 1.1.4)。従って $\max A'$ が存在 (例 1.2.2)。従って $\max A$ も存在 (上記 (1))。 $\square$

注：例 1.2.3 は仮定「 $u \in \mathbb{Z}$ 」、「 $\ell \in \mathbb{Z}$ 」をそれぞれ「 $u \in \mathbb{R}$ 」、「 $\ell \in \mathbb{R}$ 」におきかえても成立するが、その場合の証明にはアルキメデスの原理 (例 1.3.10) が必要である。

問 1.2.4 例 1.2.3 証明中の (1) を示せ。

問 1.2.5 (★) $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{Z}$ に対し $x = qd + r$ を満たす $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, \dots, d-1\}$ が唯一と存在する (剰余定理)。これを、例 1.2.3 を応用して示せ。

問 1.2.5 で r を x を d で割った余りと言う。 $r = 0$ ならば d 及び $-d$ は x の約数 (divisor)、 x は d 及び $-d$ の倍数 (multiple) と言う。 $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ の正約数が 1 と p のみなら、 p を素数 (prime number) と呼ぶ。 $x, y \in \mathbb{Z}$ に共通した正約数が 1 のみなら、 x, y を互いに素 (relatively prime) と呼ぶ。また、問 1.2.5 で、 $d_{-1} = x \neq 0$, $d_0 = d$ とし、帰納的に d_{n-1} を d_n で割った余りを d_{n+1} とする ($n = 0, 1, 2, \dots$)。 $d_n \geq 1$ なら、 $0 \leq d_{n+1} \leq d_n - 1$ 。よって、 $d_N \geq 1$ かつ $d_{N+1} = 0$ をみたす $N \in \mathbb{N}$ が存在する。このようにして x と d の最大公約数 d_N を求める方法は、ユークリッドの相除法⁵として古くから知られていた。

問 1.2.6 (★) 問 1.2.5 の x, d, q について q は $x/d \in [q, q+1)$ を満たす唯一つの整数であることを示せ。

問 1.2.7 (★) $S \subset \{1, 2, \dots, 2n\}$ が $n+1$ 個の元を含めば S の中に約数、倍数の関係にある 2 数が存在することを示せ。

1.3 連続の公理

今まで、実数について演算と順序に関する公理と、それらから導かれる性質を述べた。一方、演算と順序に関する公理は有理数体 $\mathbb{Q}$ も満たす。従って、実数体 $\mathbb{R}$ を公理によって特徴づける為には更なる公理を付け加える必要がある。

また、連続の公理 (定義 1.3.6) の必要性を示唆するために、次のような問題を提起しよう：これまで述べたことを用いて以下の命題が証明できるか？

(a) 与えられた実数 x に対し $x < n$ となる自然数 n が存在する。

(b) 方程式 $x^2 = 2$ は実数解を持つ。

実はこのような、一見明らかな(?) 命題を示すにも今まで述べた事柄だけでは不十分で、連続の公理が必要である。因に上記 (a), (b) はそれぞれ 例 1.3.9, 例 2.3.6 で示される。

定義 1.3.1 $A \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ とする。

• 次の 2 条件が満たされるとき、 m を A の上限 (supremum) と呼び、 $\sup A$ と記す：

(U) $A \subset [-\infty, m]$, つまり、 m は A の上界である (定義 1.2.1 参照)。

(S) $x < m$ なら $(x, m] \cap A \neq \emptyset$ 。

• 次の 2 条件が満たされるとき、 m を A の下限 (infimum) と呼び、 $\inf A$ と記す：

(L) $A \subset [m, \infty]$, つまり、 m は A の下界である (定義 1.2.1 参照)。

(I) $m < x$ なら $[m, x) \cap A \neq \emptyset$ 。

⁵Euclid(*Εὐκλείδης*), 365 B.C.?–275 B.C.? ユークリッドの相除法は「原論」の中にも記されている。

注： $m \neq -\infty$ の場合の (S) は「 m より小さく、かつ、いくらでも m に近い A の元が存在する」ことを意味する。 $m = -\infty$ なら $x < m$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しないから、(S) は自明に成立する。同様に、 $m \neq \infty$ の場合の (I) は「 m より大きく、かつ、いくらでも m に近い A の元が存在する」ことを意味する。 $m = \infty$ なら $m < x$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しないから、(I) は自明に成立する。

問 1.3.1 $A \subset \mathbb{R}$ に対し、 $\sup A, \inf A$ はそれぞれ二つ以上存在しないことを示せ。

補題 1.3.2 (上限・下限の双対性) $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}, -A = \{-a \mid a \in A\}$ とするとき、

$$\begin{aligned} m = \sup A &\iff -m = \inf(-A), \\ m = \inf A &\iff -m = \sup(-A). \end{aligned}$$

証明： $-A$ の定義から、

$$A \subset [-\infty, m] \iff -A \subset [-m, \infty],$$

$$\forall x \in [-\infty, m) \text{ に対し } (x, m] \cap A \neq \emptyset \iff \forall x \in (-m, \infty] \text{ に対し } [-m, x) \cap A \neq \emptyset.$$

従って、 m が A について (U),(S) (定義 1.3.1) を満たすこと、 $-m$ が $-A$ について (L),(I) を満たすことは同値である。従って、「 $m = \sup A \iff -m = \inf(-A)$ 」を示せた。他方も同様に示せる。 $\square$

次の命題からわかるように、上限・下限はそれぞれ最大・最小値の一般化である。

命題 1.3.3 (最大値と上限、最小値と下限の関係) $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$ に対し

$$(a) \quad m = \max A \iff m = \sup A \in A$$

$$(b) \quad m = \min A \iff m = \inf A \in A$$

証明：(a) $\implies$: $m = \max A$ は 定義 1.3.1 (U) を満たすので、(S) を満たすことを言えばよい。所が $x < m$ なら $m \in (x, m] \cap A$ より確かに (S) を満たす。

(a) $\impliedby$: $m = \sup A \in A$ なら $m \in A$ かつ 定義 1.3.1(U) が満たされるから $m = \max A$ 。

(b): 双対性 (問 1.2.2, 補題 1.3.2) より (a) に帰着する。 $\square$

例 1.3.5 の為に、次の自明だが有用な補題を準備する：

補題 1.3.4 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ なら $(a, b) \neq \emptyset$ 。

証明： x を次のようにとれば $x \in (a, b)$ ：

$$x = \begin{cases} \text{任意の実数,} & (a = -\infty, b = \infty \text{ なら}), \\ a + 1, & (-\infty < a, b = \infty \text{ なら}), \\ b - 1, & (a = -\infty, b < \infty \text{ なら}), \\ (a + b)/2, & (-\infty < a, b < \infty \text{ なら}). \end{cases}$$

$\square$

例 1.3.5 (区間の最大・最小値、上限・下限) $-\infty \leq a < b \leq \infty, \overset{\circ}{I} = (a, b) \subset I \subset \bar{I} = [a, b]$ とする。このとき、

$$\sup I = b, \inf I = a.$$

従って、命題 1.3.3 より

$$\max I \text{ が存在} \iff b \in I \iff \max I = b,$$

$$\min I \text{ が存在} \iff a \in I \iff \min I = a.$$

証明: 双対性 (補題 1.3.2) より、 $\sup I = b$ を示せば十分。そのために 定義 1.3.1 の (U),(S) を検証する。

(U): $I \subset [-\infty, b]$ は明らか。

(S): $x < b$ なら $a \vee x < b$. 従って、補題 1.3.4 より $\emptyset \neq (a \vee x, b)$. ところが、 $(a \vee x, b) \subset (x, b] \cap I$ だから $(x, b] \cap I \neq \emptyset$. $\square$

定義 1.3.6 次の公理 (AC) を連続の公理 (the axiom of continuity) と呼ぶ:

(AC) $A \subset \mathbb{R}$ が空でなく、かつ上に有界なら $\sup A$ が存在して、実数値である。

これで、実数の定義 (定義 1.1.1) の説明が完了した。

補題 1.3.7 連続の公理 (AC) は次の (AC') と同値である:

(AC') $A \subset \mathbb{R}$ が空でなく、かつ下に有界なら $\inf A$ が存在して、実数値である。

証明: (AC) $\Rightarrow$ (AC'): 補題 1.3.2 を用いる。 A が空でなく、下に有界なら、 $-A$ は空でなく、上に有界。従って、(AC) より $\sup(-A)$ が存在し、実数値。このとき 補題 1.3.2 より $\inf A$ も存在し、 $-\sup(-A)$ に等しい。

(AC') $\Rightarrow$ (AC): 上と同様に示せる。 $\square$

命題 1.3.8 ($\sup$ $\inf$ の基本性質)

(a) 全ての $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}, \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ が存在する。

(b) $b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し $\begin{cases} \sup A \leq b \iff A \subset [-\infty, b], \\ b \leq \inf A \iff A \subset [b, \infty]. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \sup A < +\infty \iff A \text{ は上に有界}, \\ \inf A > -\infty \iff A \text{ は下に有界}. \end{cases}$

(d) $\emptyset \neq A \subset [\ell, u]$ なら $\ell \leq u$. 特に $\inf A \leq \sup A$.

証明: (a): 双対性 (補題 1.3.2) より $\sup A$ の存在を言えば十分。 $\sup A$ の定義から、

$$\sup A = \begin{cases} +\infty, & \iff A \text{ が上に非有界} \\ -\infty, & \iff A = \emptyset, \{-\infty\}, \end{cases}$$

実際、「 $\sup A = \infty$ 」、「 A が上に非有界」は共に「(U),(S) が $m = \infty$ に対して成立する」と言い換えることができる。また、明らかに、「 $\sup A = -\infty \iff A \subset \{-\infty\} \iff A = \emptyset, \{-\infty\}$ 」。

以上より、 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ が上に有界かつ $A \neq \emptyset, \{-\infty\}$ の場合を言えばよい。このとき、 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ は上に有界かつ $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ だから (AC) より $m = \sup(A \cap \mathbb{R})$ が存在。そこで $m = \sup A$ を言うため、定義 1.3.1 (U), (S) を検証する。

(U): $a \in A$ を任意とする。 A は上に有界だから、 $a = -\infty$ または $a \in A \cap \mathbb{R}$. $a = -\infty$ なら $a \leq m$ は自明。一方、 $a \in A \cap \mathbb{R}$ なら、 $m = \sup(A \cap \mathbb{R})$ より $a \leq m$.

(S): $x < m$ なら $\exists a \in A \cap \mathbb{R}, x < a$. 従って特に $\exists a \in A, x < a$.

以上で $m = \sup A$ となり、 $\sup A$ の存在が分かった。

以下、 $m^* = \sup A, m_* = \inf A$ とおく。

(b): 双対性 (補題 1.3.2) より $\sup A$ の場合を示せば十分。

$\Rightarrow$: (U) による。

$\Leftarrow$: 対偶を示すため、 $b < m^*$ と仮定すると、(S) より $(b, m^*] \cap A \neq \emptyset$. よって $A \not\subset [-\infty, b]$.

(c): (b) から分かる。

(d): 明らか。 □

問 1.3.2 $A \subset \overline{\mathbb{R}}, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}$ に対し、 $\gamma A + \beta = \{\gamma a + \beta; a \in A\}$ とする。 $\gamma \in (0, \infty)$ に対し以下を示せ: $\sup(\gamma A + \beta) = \gamma \sup A + \beta, \inf(\gamma A + \beta) = \gamma \inf A + \beta, \sup(-\gamma A + \beta) = -\gamma \inf A + \beta, \inf(-\gamma A + \beta) = -\gamma \sup A + \beta$.

問 1.3.3 $\emptyset \neq A \subset (0, \infty]$ に対し、以下を示せ: $\sup\{1/a; a \in A\} = 1/\inf A, \inf\{1/a; a \in A\} = 1/\sup A$. 但し $1/0 = \infty$ とする。

問 1.3.4 ($\sup \inf$ の単調性) $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し、以下を示せ: (i) $A \subset [-\infty, b]$ となる $b \in B$ が存在。 $\Rightarrow \sup A \leq \sup B$. (ii) $A \subset [b, \infty]$ となる $b \in B$ が存在。 $\Rightarrow \inf B \leq \inf A$. (iii) $\emptyset \neq A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. (iv): (i)–(iii) で逆の不成立を次の例で確認せよ; $A = [0, 1], B = (0, 1)$.

問 1.3.5 (*) $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し、 A の上界全体の集合を $U(A)$, 下界全体の集合を $L(A)$ と書くとき、 $\sup A = \min U(A), \inf A = \min L(A)$ を示せ。

次の事実は自明に見えるが、厳密な証明には連続の公理を要する:

例 1.3.9 (アルキメデスの原理⁶) $\mathbb{Z}$ は上にも下にも非有界である。

証明: 上に非有界であることを、背理法で示す。 $\mathbb{Z}$ は空でないから、もし有界なら (AC) より $m \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathbb{Z} \in \mathbb{R}$. このとき、 $m - 1 < m$ なので $\exists z \in \mathbb{Z}, m - 1 < z$ (定義 1.3.1 (S) より). この z について $m < z + 1 \in \mathbb{Z}$. これは 定義 1.3.1 (U) に反する。下に非有界であることも (AC') を用いた背理法で同様に示せる。 □

注: アルキメデスの原理を、「 $\mathbb{Z}$ のみに関する命題」と早合点すると、連続の公理が使われることが奇怪に思われる。所が、「 $\mathbb{Z}$ が上に非有界」とは、「全ての 実数 x に対し、 $x < z$ を満たす $z \in \mathbb{Z}$ が存在する」ことである。こう見れば、実数の性質を使って証明することの自然さが判る。

例 1.3.10 (a) 空でない $A \subset \mathbb{Z}$ が上に有界なら $\max A$ が存在する。また、空でない $A \subset \mathbb{Z}$ が下に有界なら $\min A$ が存在する。

⁶Archimedes (287–212 B.C.)

(b) (実数の整数部) $a \in \mathbb{R}$ なら $q \in (a-1, a]$, 即ち $a \in [q, q+1)$ を満たす $q \in \mathbb{Z}$ が唯一つ存在する。この q を $[a]$ と記し⁷、 a の整数部と呼ぶ。(なお、 $a \in \mathbb{Q}$ の場合は問 1.2.6 参照)

証明: (a): 双対性 (問 1.2.2) より、 $\max A$ について言えば十分。アルキメデスの原理より、任意の実数に対し、それより大きな整数が存在する。従って

$$A \text{ が上に有界} \implies \exists m \in \mathbb{Z}, A \subset [-\infty, m] \xrightarrow{\text{例 1.2.3}} \max A \text{ が存在.}$$

(b): $(a-1, a]$ は 2 つ以上の整数を含まない。実際、 $b, c \in (a-1, a] \cap \mathbb{Z}$, $b < c$ なら

$$1 = a - (a-1) > c - b \geq 1$$

となり矛盾。そこで、 $(a-1, a] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ を次の 2 段階に分て示す。

(1) $A \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{Z} \cap (-\infty, a]$ に $\max A$ が存在する。

(2) $m = \max A$ とおくと、 $a-1 < m$ 。

これらが言えれば、 $m \in (a-1, a] \cap \mathbb{Z}$ となり結論を得る。

(1) を示すために (a) の条件を検証する。

A は上に有界: $A \subset (-\infty, a]$ による。

$A \neq \emptyset$: アルキメデスの原理より $\exists z \in \mathbb{Z}, z \leq a$ 。このとき、 $z \in A$ 。

(2) を示すため、結論を否定し、 $m \leq a-1$, 即ち $m+1 \leq a$ を仮定すると $m < m+1 \in A$ 。これは m が A の上界であることに反する。 $\square$

定義 1.3.11 $D \subset \mathbb{R}$ とする。任意の実数 $a < b$ に対し $(a, b) \cap D \neq \emptyset$ なら、 D は $\mathbb{R}$ で稠密 (dense) と言う。

「稠密」を感覚的に言うと、「隙間なく詰まっている」ことを表す。例えば $\mathbb{R}$ 自身は $\mathbb{R}$ で稠密である (補題 1.3.4)。

例 1.3.12 (有理数の稠密性) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密。

証明: 実数 $a < b$ に対しアルキメデスの原理より、 $(b-a)^{-1} < n$, すなわち $na+1 < nb$ を満たす $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する。更に 例 1.3.10 より $m \in (na, na+1]$ を満たす $m \in \mathbb{Z}$ が存在し、 $m \in (na, nb)$, よって $m/n \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$. $\square$

問 1.3.6 (★) 任意の $x \in \mathbb{R}$ と $N = 1, 2, \dots$ に対し、 $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq}$ を満たすような $p \in \mathbb{Z}$ 及び $q \in \{1, \dots, N\}$ が存在すること (ディリクレの定理⁸) を示せ。ヒント: $N+1$ 個の点 $x_j = jx - [jx] \in [0, 1)$ ($j = 0, 1, \dots, N$) を考える。

ディリクレの定理は、有理数の稠密性 (例 1.3.12) を別証明するに留まらず、実数 x とその近似有理数 p/q の「近さ」をより定量的に評価している (このような近似を Diophantus 近似 という)。

⁷ガウスの記号: $[a]$ を使うこともある。

⁸Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859)

1.4 関数

1.4 節では関数に関する定義と性質を述べる。

定義 1.4.1 D を集合とする。

- 写像 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ を 関数 (function) と呼ぶ。
- $c \in \mathbb{R}$ とする。関数 $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ に対し関数 $cf, f+g, fg, f/g$ を次のように定める：

$$(cf)(x) = cf(x), \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \\ (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

但し、 f/g の定義域は $D(f/g) = \{x \in D ; g(x) \neq 0\}$ とする。

問 1.4.1 (★) 集合 D で定義された実数値関数全体の集合は 定義 1.4.1 で定義される加法・乗法に関して可換環であることを示せ。

定義 1.4.2 $D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

- f が 非減少 (non-decreasing), 或いは 単調増加 (increasing) とは

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) \leq f(y)$$

が成立することであり、これを「 f は $\nearrow$ 」と略記する。更に

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y).$$

なら f を 狭義単調増加 (strictly increasing) と言う。

- $-f$ が非減少なら、 f は 非増加 (non-increasing), 或いは 単調減少 (decreasing) とい
い、「 f は $\searrow$ 」と略記する。また、 $-f$ が狭義単調増加なら f を狭義単調減少 (strictly
decreasing) と言う。

- 単調増加関数と単調減少関数を総称して単調関数 (monotone functions) と呼ぶ。

問 1.4.2 以下を示せ：(i) 狭義単調関数は単射。(ii) 狭義単調増加 (減少) 関数の逆関数は狭義単調増加 (減少)。

定義 1.4.3 D を集合とする。

- $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, E \subset D$ とする。このとき、 $\sup_E f, \inf_E f$ を次のように定義する：

$$\sup_E f = \sup f(E), \quad \inf_E f = \inf f(E).$$

$\max f(E), \min f(E)$ がもし、存在すれば $\max_E f, \min_E f$ と記す。 $\sup_E f$ は $\sup_{x \in E} f(x)$ と記すこともある。 $\inf_E f, \max_E f, \min_E f$ についても同様。

- $E \subset D$ に対し 集合 $\{f(x) ; x \in E\}$ が有界なとき、関数 f は E で 有界 (bounded) と言う。また E で上に (下に) 有界の定義も同様とする。言い替えると、

$$\begin{aligned} f \text{ が } E \text{ で有界} &\iff \sup_E |f| < \infty, \\ f \text{ が } E \text{ で上に有界} &\iff \sup_E f < \infty, \\ f \text{ が } E \text{ で下に有界} &\iff \inf_E f > -\infty. \end{aligned}$$

関数 f は D で有界なら、単に f は有界と言う。 D で上に (下に) 有界な場合も同様とする。

命題 1.3.8 を関数に対する $\sup, \inf$ の性質として書き換えておく：

命題 1.4.4 ($\sup \inf$ の基本性質：関数版) A を集合、 $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ とするとき、

$$(a) \inf_A f \leq \sup_A f.$$

$$(b) \sup_A f \leq \beta \iff \text{全ての } a \in A \text{ に対し } f(a) \leq \beta.$$

$$(c) \inf_A f \geq \beta \iff \text{全ての } a \in A \text{ に対し } f(a) \geq \beta.$$

証明: 命題 1.3.8 に帰着。 □

上で見たように、関数に対する上限、下限の性質は、集合に対するそれらの性質から容易に導くことができる。

問 1.4.3 A を集合、 $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}$ とする。以下を示せ：

$$\sup_A(\gamma f + \beta) = \gamma \sup_A f + \beta, \inf_A(\gamma f + \beta) = \gamma \inf_A f + \beta, \sup_A(-\gamma f + \beta) = -\gamma \inf_A f + \beta, \\ \inf_A(-\gamma f + \beta) = -\gamma \sup_A f + \beta.$$

問 1.4.4 A, B を集合、 $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ とする。以下を示せ：(i) 全ての $a \in A$ に対し $f(a) \leq g(b)$ なる $b \in B$ が存在すれば、 $\sup_A f \leq \sup_B g$. (ii) 全ての $a \in A$ に対し $f(a) \geq g(b)$ なる $b \in B$ が存在すれば、 $\inf_B g \leq \inf_A f$. (iii) $A \subset B$ なら $\inf_B g \leq \inf_A g \leq \sup_A g \leq \sup_B g$. (iv) $A = B$ かつ全ての a で $f(a) \leq g(a)$ なら $\inf_A f \leq \inf_A g, \sup_A f \leq \sup_A g$.

問 1.4.5 A を集合、 $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ とするとき、次を示せ：

$$\inf_A f + \inf_A g \leq \inf_A (f + g) \leq \sup_A (f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g.$$

問 1.4.6 (★) (予選決勝法) B を集合、各 $b \in B$ に対し $A_b \subset \overline{\mathbb{R}}$ とする。このとき、次を示せ： $\sup(\cup_{b \in B} A_b) = \sup_{b \in B} \sup A_b, \inf(\cup_{b \in B} A_b) = \inf_{b \in B} \inf A_b$.

問 1.4.7 (★) A, B を集合、 $f : A \times B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ とする。このとき、以下を示せ：

$$(i) (\sup \text{ と } \sup \text{ は可換}) \quad \sup_{(a,b) \in A \times B} f(a,b) = \sup_{b \in B} \sup_{a \in A} f(a,b) = \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} f(a,b).$$

$$(ii) (\inf \text{ と } \inf \text{ は可換}) \quad \inf_{(a,b) \in A \times B} f(a,b) = \inf_{b \in B} \inf_{a \in A} f(a,b) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a,b).$$

$$(iii) (\sup \inf \leq \inf \sup) \quad \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a,b) \leq \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} f(a,b).$$

問 1.4.8 (★) $\{0, 1\} \subset A \cap B \subset A \cup B \subset [0, 1], f(a, b) = |a - b|$ とするとき、次を示せ：

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a, b) = 0 < 1/2 \leq \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} f(a, b).$$

問 1.4.9 (★) 問 1.4.7 で (a_0, b_0) が f の鞍点、即ち条件 $f(a, b_0) \leq f(a_0, b_0) \leq f(a_0, b)$,

$$\forall (a, b) \in A \times B \text{ を満たすとき、次を示せ：} \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a, b) = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} f(a, b) = f(a_0, b_0).$$